Aberace oka z vlnového hlediska

- 1. Optické aberace
- 2. Zernikovy polynomy
- 3. Rozklad do Zernikových polynomů
- 4. Shack-Hartmannův senzor
- 5. Aberace vlnoplochy
- 6. i.Profiler firmy Zeiss
- 7. Prémiová korekce
- 8. Vliv LOA a HOA na vízus

Oko = optický přístroj

Oko je složitý a citlivý optický přístroj, má chyby a nedokonalosti jako každý přístroj, také se časem opotřebovává.

Evolučně se oko vyvíjí k dokonalosti (většinou).



okohybný sval bělima cévnatka rohovka -sítnice duhovka -žlutá skvrna zornice zrakový čočka nerv céva slepá skvrna řasnaté tělísko sklivec stavba oka

Komorové oko savců







Oko plaza





Pixmac.cz 75811743



Oko hlavonožce

se evolučně vyvíjelo zcela jinak, oční nerv neprochází sítnící, nemá slepou skrnu



Obr. Komorové oko stavovcov (A) a chobotnice (B) 1 - očné viečko, 2 - rohovka, 3 - dúhovka, 4 - zrenica, 5 - šošovka, 6 - sietnica, 7 - chrupka, 8 - zrakové ganglium, 9 - zrakový nerv, 10 - ciliárne svaly



Optické aberace

Aberace = odchylka, odklon Optické aberace = odchylka, vada, chyba od ideálního zobrazení

Klasické dělení aberací:

1. aberace paprskové:

chromatické (barevné) aberace:

disperze optického prostředí $n(\lambda)$, modrá se láme více než červená monochromatické aberace:

zobrazení je stigmatické (bodové) jen při užití paraxiálních paprsků aberace širokého svazku paprsků (sférická vada, koma) aberace šikmého svazku paprsků (astigmatismus, zklenutí pole, zkreslení)

2. aberace vlnové:

difrakce (ohyb) světla:

omezené průměry optických svazků, apertury, clony interference, koherence

3. aberace technologické + materiálové

Justáž, chyby ve výrobě, tolerance, šlíry a nehomogenity, ...

Všechny aberace se projeví poruchou vlnoplochy, všechny lze proto měřit a popisovat z vlnového hlediska! \rightarrow analýza vlnoplochy, aberometrie

Paprskové aberace chromatické aberace





Stigmatické zobrazení pouze pro paraxiální paprsky !!!

Monochromatické aberace



sférická vada nebo otvorová vada

symetrická aberace širokých svazků

=





koma

= asymetrická aberace šikmých a širokých svazků

J. вајег, катеога ортіку, UP Olomouc 2013





astigmatismus v celém zorném poli



astigmatismus





Vlnové aberace (jsou neodstranitelné!)

difrakce



Light Diffraction by a Razor Blade











 $\psi \approx 1.22 \frac{\lambda}{D} \approx \frac{120''}{D[\text{mm}]}$

Hubble space telescope HST

D \approx 2.4 m, f \approx 57.6 m vynesen na oběžnou dráhu roku 1990 600 km nad Zemí Celkové náklady 10 mld \$ = 200 mld Kč očekávané rozlišení 0.1" (pozemské dalekohledy jen 1")





Leštění primárního zrcadla RMS $\approx \lambda/65 \approx 0.008 \ \mu m$

PSF



1990 Až na oběžné dráze zjištěna sférická aberace hlavního zrcadla, rozlišení jen 1" Zrcadlo bylo vybroušeno vinou testovacího zařízení (posunutého o 1.3 mm) chybně 1993 HST dostal "brýle" (tj. 2 korekční zrcadla k odstranění sférické vady)



obraz před a po korekci roku 1993

Zernikovy polynomy

Ortogonální funkce:

Vektor **A** rozkládáme do souřadných vektorů $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ a přiřazujeme mu složky A_1, A_2, A_3 a pak platí $\mathbf{A} = A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3$ souřadné vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ jsou obvykle vzájemně kolmé a normované



Podobně v matematické analýze vybíráme vhodnou soustavu funkcí f_n a libovolnou funkci f(x)můžeme do nich rozložit jako řadu $f = c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 + ...$ Například funkci sinus rozložíme do mocnin x^n jako Taylorovu řadu: Nebo obdélníkovou funkci rect(x) do harmonických funkcí sin nx $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$ jako Fourierovu řadu:

$$\operatorname{rect}(x) \approx \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \dots \right)$$

Nejvhodnější jsou vzájemně kolmé funkce f_n , například Besselovy funkce, Hermiteovy či Legendrovy polynomy anebo **Zernikovy polynomy** $Z_n^m(x,y)$, které jsou **ortogonální na jednotkovém disku** a po vhodném normování i ortonormální. Díky ortogonalitě na jednotkovém disku se Zernikovy polynomy používají hodně v optice (kruhové pupily, apertury, čočky atd.)

Matematická definice:

Funkce f(x,y) a g(x,y) jsou vzájemně kolmé (ortogonální) v oblasti S, pokud platí: J. Bajer, Katedra optiky, UP Olomouc 2013

$$\int_{S} f(x, y)g(x, y)dxdy = 0$$

Symbolika není jednoznačná!

Používají se různé způsoby indexování Zernikových polynomů (např. modální

index *j*), my se držíme nejobvyklejšího značení \mathbb{Z}_n^m se dvěma indexy:

dolní hlavní index (radiální) *n* určuje řád polynomu

a horní **vedlejší index** (azimutální) *m* určuje úhlovou frekvenci (četnost) maxim a minim,

přitom platí m = -n, -n + 2, -n + 4, ..., n - 2, n(pro dané *n* tedy existuje n+1 povolených hodnot *m*)

Tedy *n* a *m* jsou vždy obě současně sudá nebo lichá, např. Z_3^{-3} nebo Z_4^2 , ale nikdy ne Z_1^0 nebo Z_4^3

V kartézských souřadnicích se skutečně jedná o polynomy!



Frits Zernike 1888 - 1966Nobelova cena 1953 za objev fázově kontrastní mikroskopie

Normované Zernikovy polynomy:

$$Z_{0}^{0} = 1 \qquad Z_{1}^{-1} = 2y \qquad Z_{2}^{-2} = \sqrt{6}2xy \qquad Z_{3}^{-3} = \sqrt{8}(3x^{2}y - y^{3}) \\ Z_{1}^{-1} = 2x \qquad Z_{2}^{0} = \sqrt{3}(2x^{2} + 2y^{2} - 1) \\ Z_{2}^{2} = \sqrt{6}(x^{2} - y^{2}) \qquad Z_{3}^{-1} = \sqrt{8}(3x^{2}y + 3y^{3} - 2y) \\ Z_{3}^{1} = \sqrt{8}(3x^{3} + 3xy^{2} - 2x) \\ Z_{3}^{3} = \sqrt{8}(x^{3} - 3xy^{2}) \end{cases}$$

V kartézských souřadnicích se skutečně jedná o polynomy $Z_n^m(x,y)$.

V polárních souřadnicích $Z_n^m(\rho, \theta)$ jde ale o součin radiálního polynomu $R_n^m(\rho)$ a azimutální harmonické funkce cos $m\theta$ nebo sin $m\theta$, například:

$$Z_{2}^{2} = \sqrt{6}(x^{2} - y^{2}) = \sqrt{6}\rho^{2}(\cos^{2}\theta - \sin^{2}\theta) = \sqrt{6}\rho^{2}\cos 2\theta$$
nebo

$$Z_{3}^{1} = 3x^{3} + 3xy^{2} - 2x = (3x^{2} + 3y^{2} - 2)x = (3\rho^{3} - 2\rho)\cos\theta,$$
kde

$$x = \rho\cos\theta$$

$$y = \rho\sin\theta$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

POZOR:

Existují a v literatuře se používají i nenormované či jinak normované Zernikovy polynomy!

POZOR:

Pupila oka je různá, průměr typicky 2 až 6 mm, pro použití Zernikových polynomů nutno vždy přeškálovat pupilu na jednotkový kruh

Polární (x,y) a

souřadnice (ρ , θ)

y

X

kartézské

X

Normované Zernikeho polynomy Z_n^m

0. a 1. řádu $Z_0^0 = 1$ píst $Z_1^{-1} = 2\rho\sin\theta$ náklon vertikální $Z_1^1 = 2\rho\cos\theta$ náklon horizontální 2. řádu $Z_2^{-2} = \sqrt{6\rho^2} \sin 2\theta$ astigmatismus (šikmý) $Z_2^0 = \sqrt{3}(2\rho^2 - 1)$ defokus $Z_2^2 = \sqrt{6\rho^2}\cos 2\theta$ astigmatismus (vertikální) 3. řádu $Z_3^{-3} = \sqrt{8\rho^3} \sin 3\theta$ trefoil $Z_3^{-1} = \sqrt{8}(3\rho^3 - 2\rho)\sin\theta$ koma vertikální $Z_3^1 = \sqrt{8}(3\rho^3 - 2\rho)\cos\theta$ koma horizontální $Z_3^3 = \sqrt{8}\rho^3 \cos 3\theta$ trefoil 4. řádu $Z_4^{-4} = \sqrt{10}\rho^4 \sin 4\theta$ tetrafoil (šikmý) $Z_4^{-2} = \sqrt{10} (4\rho^4 - 3\rho^2) \sin 2\theta$ sekundární astigmatismus (šikmý) $Z_4^0 = \sqrt{5} (6\rho^4 - 6\rho^2 + 1)$ sférická aberace $Z_4^2 = \sqrt{10} (4\rho^4 - 3\rho^2) \cos 2\theta$ sekundární astigmatismus (vertikální)

tetrafoil (vertikální)



 $Z_4^4 = \sqrt{10}\rho^4 \cos 4\theta$

Zernikovy polynomy (faktorizace v $\rho a \theta$)

sudé (kladné) $Z_n^m(\rho,\theta) = R_n^m(\rho)\cos(m\theta)$ liché (záporné) $Z_n^{-m}(\rho,\theta) = R_n^m(\rho)\sin(m\theta)$ kde $0 \le \rho \le 1$ $0 \le \theta \le 2\pi$



Počet (n + 1) Zernikeho polynomů daného řádu n je zřejmý : Například polynom druhého řádu n = 2 obecně $Z_2^m = ax^2 + bxy + cy^2 + dZ_1^{+1} + eZ_1^{-1} + fZ_0^0$ má právě n + 1 = 3 další nezávislé koeficienty a,b,c(3 další nezávislé funkce x^2, xy a y^2 na jednotkovém kruhu), a proto existují právě 3 možné hodnoty vedlejšího indexu m = -2,0,2pro Zernikeho polynomy druhého řádu Z_2^m



Přepočet indexů $j \rightarrow n,m$



J. Bajer, Katedra optiky, UP Olomouc 2013

Rozklad funkce do Zernikeho polynomů, Zernikeho koeficienty

Aberační funkci W rozkládáme do Zernikeho polynomů Z_n^m $W = \sum_{m,n} c_n^m Z_n^m = c_0^0 Z_0^0 + c_1^{-1} Z_1^{-1} + c_1^1 Z_1^1 + c_2^{-2} Z_2^{-2} + c_2^0 Z_2^0 + c_2^2 Z_2^2 + ...,$

tak dostaneme Zernikovy koeficienty c_n^m .

Díky ortonormalitě Z_n^m se snadno najdou **Zernikeho koeficienty** c_n^m k funkci $W = \sum_{m,n} c_n^m Z_n^m$.

Pokud W vynásobíme $Z_{n'}^{m'}$ a vystředujeme přes jednotkový disk, dostaneme

$$\overline{WZ_{n'}^{m'}} = \sum_{m,n} c_n^m \overline{Z_n^m Z_{n'}^{m'}} = \sum_{m,n} c_n^m \delta_{nn'} \delta_{mm'} = c_{n'}^{m'}$$

tedy pro hledané Zernikovy koeficienty c_n^m platí :

$$c_n^m = \overline{WZ_n^m}$$

Ve skutečnosti aberometr počítá podle vzorce :

$$c_n^m \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N W(x_k, y_k) Z_n^m(x_k, y_k),$$

kde se sčítá přes celou mřížku N bodů (x_k, y_k) POZOR!

Zernikeho koeficienty c_n^m závisí na velikosti *R* pupily! $c_n^m \propto R^n$

J. Bajer, Katedra optiky, UP Olomouc 2013

Matematická definice:

ortogonalita : $\overline{Z_n^m Z_{n'}^{m'}} = \delta_{nn'} \delta_{mm'}$ norma : $\overline{Z_n^m Z_n^m} = 1,$ kde \overline{W} značí střední hodnotu funkce W přes jednotkový disk S : $\overline{W} = \frac{1}{S} \int_S W dS$



Výpočet střední hodnoty:

Například:

 $\bar{1} = \frac{1}{S} \int 1dS = \frac{1}{S} S = 1,$ $\bar{x} = \frac{1}{S} \int xdS = 0, \text{ (plyne ze symetrie, } Z_0^0 = 1 \text{ a } Z_1^1 = 2x \text{ kolmé}\text{)}$ $\bar{y} = \frac{1}{S} \int ydS = 0, \text{ (tedy } Z_0^0 = 1 \text{ a } Z_1^{-1} = 2y \text{ kolmé}\text{)}$ $\bar{xy} = \frac{1}{S} \int xydS = 0, \text{ (tedy } Z_1^1 = 2x \text{ a } Z_1^{-1} = 2y \text{ kolmé}\text{)}$ ale

$$\overline{x^{2}} = \frac{1}{S} \int x^{2} dS = \frac{1}{S} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \rho^{2} \cos^{2}\theta \,\rho d\rho d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{1} \rho^{3} d\rho \int_{0}^{2\pi} \cos^{2}\theta \,d\theta = \frac{1}{\pi} \frac{1}{4} \pi = \frac{1}{4}$$

a podobně $\overline{y^{2}} = \frac{1}{4}$ (tedy normované $Z_{1}^{-1} = 2y$) a $Z_{1}^{1} = 2x$), a proto také
 $\overline{2\rho^{2} - 1} = \overline{2x^{2} + 2y^{2} - 1} = 2\overline{x^{2}} + 2\overline{y^{2}} - 1 = 2\frac{1}{4} + 2\frac{1}{4} - 1 = 0$, (tedy $Z_{0}^{0} = 1$ a $Z_{2}^{0} = \sqrt{3}(2\rho^{2} - 1)$ kolmé)

Podobně:

$$\overline{x^{4}} = \overline{y^{4}} = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{1} \rho^{5} d\rho \int_{0}^{2\pi} \cos^{4}\theta \, d\theta = \frac{1}{\pi} \frac{1}{6} \frac{3\pi}{4} = \frac{1}{8},$$

$$\overline{x^{2}y^{2}} = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{1} \rho^{5} d\rho \int_{0}^{2\pi} \cos^{2}\theta \sin^{2}\theta \, d\theta = \frac{1}{\pi} \frac{1}{6} \frac{\pi}{4} = \frac{1}{24},$$

$$\overline{\rho^{4}} = \overline{(x^{2} + y^{2})^{2}} = \overline{x^{4} + 2x^{2}y^{2} + y^{4}} = \frac{1}{8} + 2 * \frac{1}{24} + \frac{1}{8} = \frac{1}{3}.$$

Protože $\overline{(2\rho^{2} - 1)^{2}} = \overline{4\rho^{4} - 4\rho^{2} + 1} = 4 * \frac{1}{2} - 4 * \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2},$

Protože
$$(2\rho^{-1})^{2} = 4\rho^{-4} - 4\rho^{-4} + 1 = 4 + \frac{\pi}{3} - 4 + \frac{\pi}{2} + 1 = \frac{\pi}{3}$$
,
bude normovaný polynom $Z_{2}^{0} = \sqrt{3}(2\rho^{2} - 1)$, a protože
 $(x^{2} - y^{2})^{2} = \overline{x^{4} - 2x^{2}y^{2} + y^{4}} = \frac{1}{8} - 2\frac{1}{24} + \frac{1}{8} = \frac{1}{6}$
nebo $(\overline{xy})^{2} = \overline{x^{2}y^{2}} = \frac{1}{24}$,
bude normovaný polynom $Z_{2}^{2} = \sqrt{6}(x^{2} - y^{2})$ a $Z_{2}^{-2} = \sqrt{24}xy = \sqrt{6}2xy$.
Protože $(\overline{x^{2} - y^{2}})(\overline{xy}) = \overline{x^{3}y - \overline{xy^{3}}} = 0$ budou Z_{2}^{2} a Z_{2}^{-2} kolmé
a podobně protože $(2\rho^{2} - 1)(\overline{xy}) = \overline{2x^{3}y + 2xy^{3} - xy} = 0$ budou Z_{2}^{0} a Z_{2}^{-2} kolmé.

Aberační funkce

Aberace je možno zkoumat paprskově (Seidel) nebo vlnově (Airy, Fraunhoffer, Abbe, Zernike) Analýza vlnoplochy (wavefront analysis, aberometry) Aberační funkce (vlnové aberace) *W*

VInoplocha

Množina bodů o stejné fázi, obvykle sféra nebo rovina



Ideálně z bodu A vycházející sférická vlnoplocha R se transformuje na čočce ve sbíhavou sférickou vlnoplochu S_0 , která vytvoří bodový obraz B. Reálně se místo sférické vlnoplochy S_0 pozoruje porušená vlnoplocha S a jejich rozdíl $W = S - S_0$ představuje **aberační funkci** (vlnovou aberaci) Místo bodu B dostaneme v obrazové rovině rozmazanou plošku Vlnové aberace se měří v obrazovém prostoru za optickým přístrojem (u oka to nejde!) Aberační funkce z hlediska paprskové optiky :

W(x, y) = W(P) = l(P) - l(O)kde l(P) = l(APB) a l(O) = l(AOB) jsou optické dráhy $l = \int n ds$ a P = (x, y) a O = (0,0) jsou body ve vstupní pupile optické soustavy Ideální soustava má podle Fermatova principu W(x, y) = 0, reálná soustava má $W(x, y) \neq 0$.

A

Obecně z definice je W(0,0) = W(O) = 0.

Zdroje aberací oka:

Nepravidelnosti a nerovnoměrnosti oka, především rohovky a čočky, tj. asféričnost lámavých ploch a nehomogenity optických médií, dále třeba disperze, odchlípení sítnice ...



B

Monochromatické aberace (Seidelova aproximace)

















soudkovité

poduškovité

Aberometrie oka metodou wavefront analysis

Zkoumáním vlnoplochy (wavefront analysis) se měří i aberace oka, jen se musí vytvořit umělý zdroj světla na sítnici a využije se obrácený chod paprsků

Automaticky a objektivně měří aberace oka aberometr (wavefront aberometer), který využívá Shack-Hartmannův senzor a rychlou numerickou analýzu vlnoplochy



Shack-Hartmannův senzor

Apertura s mřížkou malých čoček (typicky rozměr mikročočky 0.1 mm) Dopadá-li neporušená rovinná vlna, dostaneme za SHS pravidelnou mřížku bodů Dopadá-li porušená vlna, bude mřížka nepravidelná a body rozmazané



Laserem se osvětlí sítnice oka, stopa se zobrazí SH senzorem na CCD snímač o rozměru apertury oka U dokonalého oka se dostane rovinná vlna a tedy pravidelná mřížka





Obraz porušené mřížky na CCD snímači

aberační funkce $W = l - l_0$ se najde ze sklonů

$$\alpha(x, y) = \frac{\partial W}{\partial x} \approx \frac{\Delta x}{f}, \quad \beta(x, y) = \frac{\partial W}{\partial y} \approx \frac{\Delta y}{f}$$

numericky pomocí křivkového integrálu

$$W(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} (\alpha dx + \beta dy)$$

Práce s aberační funkcí *W* je nepohodlná (příliš rozsáhlá matice dat, málo názorná), proto se provádí rozklad aberační funkce do Zernikeho polynomů a pracuje se dále jen s Zernikeho koeficienty.



Shack-Hartmann sensor image

Z historie Shack-Hartmannova senzoru

Johannes Franz Hartmann, astrofyzik, kolem roku 1900 používá na testování kvality objektivů masku s několika malými otvory (Hartmannova maska, Scheinerova maska)

Během studené války snaha o zlepšení kvality satelitních špionážních snímků vede k vzniku adaptivní optiky, ta potřebuje znát velikost deformace vlnoplochy po průchodu atmosférou, proto koncem 60. let **Roland Shack** a **Ben Platt** vylepšují Hartmannovu masku řadou malých čoček.

Kolem roku 1985 (Josef Bille, Heidelberg) první aplikace SHS v oftalmologii: topografie rohovky,

později aberometrie oka

První komerční masky pro SHS

Roland Shack 1927 - *

Johannes Franz Hartmann 1865 - 1936

Josef Bille 1944 - *

Kvantifikace aberace – RMS aberační funkce (RMS wavefront error)

$$RMS = \sqrt{\overline{(\Delta W)^2}} = \sqrt{\overline{(W - \overline{W})^2}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} (W(x_k, y_k) - \overline{W})^2}$$

RMS je směrodatná odchylka (odmocnina z variance) vlnové aberace (aberační funkce *W*) na apertuře. Místo aberační funkce *W* pracujeme raději s Zernikeho koeficienty c_n^m , díky ortonormalitě Zernikeho polynomů platí:

$$RMS = \sqrt{\left(W - \overline{W}\right)^{2}} = \sqrt{\left(\sum_{n>0} \sum_{m} c_{n}^{m} Z_{n}^{m}\right)^{2}} = \sqrt{\sum_{n>0} \sum_{m} \sum_{n'>0} \sum_{m'} c_{n}^{m} c_{n'}^{m'} \overline{Z_{n}^{m} Z_{n'}^{m'}}}$$

ale $\overline{Z_{n}^{m} Z_{n'}^{m'}} = 0$ pro $n \neq n'$ a $m \neq m'$ a $\overline{Z_{n}^{m} Z_{n'}^{m'}} = 1$ pro $n = n'$ a $m = m'$, takže
$$RMS = \sqrt{\sum_{n>0} \sum_{m} (c_{n}^{m})^{2}} = \sqrt{(c_{1}^{-1})^{2} + (c_{1}^{-1})^{2} + (c_{2}^{-2})^{2} + (c_{2}^{0})^{2} + (c_{2}^{2})^{2} + \dots}$$

jen c_0^0 z rozvoje vypadne, neboť $W = c_0^0$

Je - li aberace dána pouze sférou (defokus),

platí $W = c_2^0 Z_2^0$, takže RMS = $|c_2^0|$.

Je - li aberace dána pouze zkříženým cylindrem (astigmatismus mixtus),

platí
$$W = c_2^{\pm 2} Z_2^{\pm 2}$$
, takže RMS = $|c_2^{\pm 2}|$

Je - li aberace dána pouze sférou i cylindry,

platí $W = c_2^0 Z_2^0 + c_2^{-2} Z_2^{-2} + c_2^2 Z_2^2$, takže RMS = $\sqrt{(c_2^{-2})^2 + (c_2^0)^2 + (c_2^2)^2}$.

J. Bajer, Katedra optiky, UP Olomouc 2013

platí také

$$RMS = \sqrt{\overline{(W - \overline{W})^2}} = \sqrt{\overline{W^2} - \overline{W}^2}$$

Ekvivalentní defokus

Pro sférickou vlnoplochu o poloměru f = 1/M platí

$$W(r) = f - \sqrt{f^2 - r^2} \approx \frac{r^2}{2f} \approx \frac{1}{2}Mr^2$$

a tedy $\overline{W} = \frac{MR^2}{4}$ a $\overline{W}^2 = \frac{M^2R^4}{12} \rightarrow \text{RMS} = \sqrt{\Delta W^2} = \frac{MR^2}{4\sqrt{3}}$

Ideální čočka o lámavosti M změní rovinnou vlnoplochu ve sférickou o poloměru f = 1/M, takže defokus vlnoplochy

v dioptriích je $M = \frac{4\sqrt{3}}{R^2}$ RMS

Pro obecnou aberaci definujeme ekvivalentní defokus stejným předpisem

 $M_e = \frac{4\sqrt{3}}{R^2}$ RMS

Ekvivalentní kroužek rozostření

Podobně definujeme ekvivalentní kroužek rozostření (blur circle diameter) v úhlové míře

$$B_e = 2RM_e = \frac{8\sqrt{3}}{R}$$
 RMS (v mrad)

vízus
$$V \approx \frac{2'}{\sqrt{2'^2 + B_e^2}} \approx \frac{2'}{B_e}$$
 (1' \approx 0.29mrad)

Příklad : Pro směrodatnou odchylku vlnoplochy RMS = 1µm a pupilu 5 mm (R = 2.5 mm) → $M_e \approx 1.1$ D a $B_e \approx 5.5$ mrad $\approx 19'$ a vízus 0.10

Vztah mezi sférou a cylindrem a Zernikovými polynomy

Obecně pro vlnoplochu ve tvaru kvadriky (astigmatismus compositus) platí:

$$W = \frac{1}{2}M(x^{2} + y^{2}) + \frac{1}{2}J_{0}(x^{2} - y^{2}) + \frac{1}{2}J_{45}2xy, \quad (*)$$
tj. lámavost ve směru 0° (osa x) je $W = \frac{1}{2}(M \pm J_{0})x^{2} \rightarrow M(0) = M + J_{0},$
ve směru 90° (osa y) je $W = \frac{1}{2}(M - J_{0})y^{2} \rightarrow M(90^{\circ}) = M - J_{0},$
a ve směru $\pm 45^{\circ}$ ($y = \pm x$) je $W = \frac{1}{2}(M \pm J_{45})r^{2} \rightarrow M(\pm 45^{\circ}) = M \pm J_{45},$
obecně ve směru θ je $x = r\cos\theta$ a $y = r\sin\theta$ a tedy $W = \frac{1}{2}M(\theta)r^{2}$, kde
obecná lámavost je $M(\theta) = M + J_{0}\cos 2\theta + J_{45}\sin 2\theta$
takže maximální a minimální lámavost je $M \pm \sqrt{J_{0}^{2} + J_{45}^{2}}$ a pozoruje se ve směru tan $2\theta = \frac{J_{45}}{J_{0}}$

Aberační funkci (*) lze přepsat pomocí Zernikových polynomů 2. řádu do tvaru

$$W = c_2^0 \left(Z_0^2 - Z_0^2(0,0) \right) + c_2^2 Z_2^2 + c_2^{-2} Z_2^{-2} = c_2^0 2\sqrt{3} \frac{x^2 + y^2}{R^2} + c_2^2 \sqrt{6} \frac{x^2 - y^2}{R^2} + c_2^{-2} 2\sqrt{6} \frac{xy}{R^2}$$

a tedy srovnáním obou zápisů
$$M = c_2^0 \frac{4\sqrt{3}}{R^2} \text{ a } J_0 = c_2^2 \frac{2\sqrt{6}}{R^2} \text{ a } J_{45} = c_2^{-2} \frac{2\sqrt{6}}{R^2}$$

J. Bajer, Katedra optiky, UP Olomouc 2013

 \mathcal{Y}_{\bullet}

 $M(\theta)$

Kvantifikace optické kvality oka

(1) číslem

- **RMS** wavefront error, dokonalé oko RMS = 0
- Ekvivalentní defokus M_e
- Absolutní rozdíl $\Delta W = W_{\text{max}} W_{\text{min}}$ (PV-value) podle Rayleigha je pro $\Delta W < \lambda/4$ prakticky dokonalé zobrazení
- Pupilový zlomek (pupile fraction) $PF = S/S_0$
- Strehlův poměr $S = I/I_0$ (podle Strehla pro S>0.8, prakticky dokonalé zobrazení)

(2) grafem

- Mapa aberačních křížů
- Bodová rozptylová funkce (PSF)
- Optická funkce přenosu (OTF=FT(PSF))
- Modulační přenosová funkce (MTF=|OTF|) aberační funkcí (3)

 $M_e = \frac{4\sqrt{3}}{R^2}$ RMS

- 2D topografie
- 3D zobrazení
- Zernikeho koeficienty

J. Bajer, Katedra optiky, UP Olomouc 2013

Pupilový zlomek

Bodová rozptylová funkce PSF

rozmazaný obraz bodu PSF slouží k výpočtu obrazu *O* obecného předmětu *P* pomocí konvoluce \otimes $O = P \otimes PSF$

Z Fresnelovy difrakční teorie :

 $PSF(\alpha, \beta) = \int exp[ikW(x, y)]exp[-ik(x\alpha + y\beta)]dxdy$

bodová rozptylová funkce

Strehlův poměr

Strehlův poměr $S = \frac{I}{I_0} = \frac{\text{maximum reálné intenzity PSP}}{\text{maximum ideální intenzity PSP}}$

Z Fresnelovy difrakční teorie pro malé RMS plyne :

$$S = \left| \frac{\exp(ikW)}{2} \right|^2 \approx 1 - k^2 RMS^2 \approx \exp(-k^2 RMS^2)$$

(Maréchalova a Mahajanova aproximace), neboť

$$\left| \frac{\exp(ikW)}{\exp(ikW)} \right|^2 = \left| 1 + ik\overline{W} - k^2\overline{W^2} + ... \right|^2 = 1 - k^2\left(\overline{W^2} - \overline{W}^2\right) + ...$$

Strehlovo kriterium pro kvalitní optiku S > 0.8dává $k^2 \text{RMS}^2 < 0.2$ neboli RMS $< \frac{\lambda}{2\pi\sqrt{5}} \approx \frac{\lambda}{14}$

v optometrii je ale obvykle S << 1

Optická funkce přenosu OTF OTF=FT(PSF)

Modulační přenosová funkce MTF

Jak se přenese původně 100% kontrast periodické mřížky? MTF=|OTF|

kontrast = MTF(ω) = $\frac{I_{\text{max}} - I_{\text{min}}}{I_{\text{max}} + I_{\text{min}}}$

Prostorová frekvence

Kontrast (modulace)

kontrast + frekvence

Teoretické hodnoty PSF a OTF

Difrakce na kruhové apertuře D=2RAiryho disk $\theta \approx 1.22 \lambda D \approx 0.61 \lambda R$

$$PSF = \left[\frac{2J_1(kR\sin\theta)}{kR\sin\theta}\right]^2$$
$$OTF = \frac{2}{\pi}\left[\arccos\omega - \omega\sqrt{1 - \omega^2}\right], \text{ kde } \omega = \frac{\lambda}{D}V_{\theta}$$

mezní prostorová frekvence:

 $v_{\theta} = D / \lambda \quad (\omega = 1)$

pro $D = 2 \text{ mm a } \lambda = 555 \text{ nm je mezní frekvence}$ $v_{\theta} \approx 3590 \text{ čar na radián} \approx 63 \text{ čar na stupeň}$ neboli

$$v_{\theta} \approx 1$$
 čára na minutu (V ≈ 1)

Wavefront refraction (prémiová korekce)

Standardně se najde sférocylindrická korekce z Zernikeho koeficientů 2. řádu (LOA method – odpovídá minimální RMS)

Lepší korekce (prémiová) se dosahuje pomocí oskulační kvadratické plochy

k aberační funkci W ve středu pupily

(HOA method – započtou se i aberace vyšších řádů)

Z Zernikeho koeficientů druhého řádu

$$M = \frac{-c_2^0 4\sqrt{3}}{R^2}$$
$$J_0 = \frac{-c_2^2 2\sqrt{6}}{R^2}$$
$$J_{45} = \frac{-c_2^{-2} 2\sqrt{6}}{R^2}$$

$$M = \frac{-c_2^0 4\sqrt{3} + c_4^0 12\sqrt{5} - c_6^0 24\sqrt{7} + \dots}{R^2}$$
$$J_0 = \frac{-c_2^2 2\sqrt{6} + c_4^2 6\sqrt{10} - c_6^2 12\sqrt{14} + \dots}{R^2}$$
$$J_{45} = \frac{-c_2^{-2} 2\sqrt{6} + c_4^{-2} 6\sqrt{10} - c_6^{-2} 12\sqrt{14} + \dots}{R^2}$$

Figure 19-15

Two ways to determine an equivalent quadratic surface (mesh) for a given wavefront aberration function (solid surface). A, Minimizing the sum of squared deviations between the fitted surface and the measured surface. B, Matching the curvature at the origin in every meridian.

J.

i.Profiler firmy Zeiss

Plně automatický multifunkční přístroj:

- Aberometrie (Shack-Hartmann)
 - Analýza LOA, HOA, autorefraktometr
 - 1 500 měřicích bodů
 - Doba měření: 0.2 s
- Topografie rohovky (Placido projektor)
 - Topografie, keratometrie
 - 6 144 analyzovaných bodů
- Grafické výstupy
 - LOA, HOA, topografie, 3D zobrazení
 - PSF, MTF, Zernikovy koeficienty atd.

WFAberrometer

	Pacient	Bajer	1	Jiri 72	20 Feb 201	2 1
Velikost Zornice: 5.7 m Apertura : 5.0 mm	im 🛛	k levému	oku 👖			
PD : 67.8 mm Vertex : 12.0 mm		r		Popís	Hodnota	Pravé oko - rozsah = 1,81
		Z	(10,0)	Piston	0.00 µm	
		Z	2(1,±1)	Tilt	2,32 µm @ 164*	
		z	2(2,±2)	Astigmatism	0,48 µm @ 5*	
		Z	2(2,0)	Defocus	3,15 µm	
		Z	(3,±3)	Trefoil	0,22 μm @ 35°	
		Z	2(3,±1)	Coma	0,04 µm @ 157*	0
		Z	2(4,±4)	Tetrafoil	0,05 μm @ 17°	0
		Z	2(4,±2)	Astigmatism II	0,03 μm @ 45°	1
		Z	(4,0)	Sph. Aberration	-0,02 μm	1
		Z	2(5,±5)	Pentafoil	0,05 μm @ 58°	0
		Z	2(5,±3)	Trefoil II	0,01 µm @ 74*	1
		Z	2(5,±1)	Coma II	0,03 µm @ 276*	1
		Z	(6,±6)	Hexafoil	0,03 μm @ 45°	1
		Z	2(6,±4)	Tetrafoil II	0,00 μm @ 13°	1
		Z	2(6,±2)	Astigmatism III	0,00 µm @ 162*	1
		Z	2(6,0)	Sph. Aberration II	0,00 µm	1
Ctaut		Z	2(7,±7)	Heptafoil	0,02 μm @ 4°	1
Stan		Z	2(7,±5)	Pentafoil II	0,00 μm @ 66°	1
WF + Topo		Z	2(7,±3)	Trefoil III	0,00 μm @ 86°	1
		Z	2(7,±1)	Coma IV	0,00 μm @ 332*	1
Data	Nov paci	vý ent	vlerení	Zobraze	ní Nástroje	Verze
WF Aberrometer vers. 2.2					20 Feb 2012 16:20	

WFAberrometer

[SPHERE] R 3=-3.398516 R 5=-3.334019 R 7=-3.293781 [CYLINDER] R 3=-0.615004 R 5=-0.500519 R 7=-0.461325 [AXIS] R 3=0.816539 R 5=0.867523 R 7=0.906448 [ZERNIKE 3] Z 0=-0.00000000000 Z 1=0.382240709997 Z 2=-1.466803283114 Z 3=-0.135210872787 Z 4=1.152318593138 Z 5=-0.001183182195 Z 6=0.055800977545 Z 7=0.018601591961 Z 8=0.010340324946 Z 9=0.011212580760 Z 10=-0.006120671199 Z 11=0.008322529530 Z 12=0.018026064913 Z 13=0.012687777710 Z 14=-0.000280715277 Z 15=-0.006862435148 Z 16=-0.009616274404 Z 17=-0.014188323501 Z 18=-0.001722684546 Z 19=0.000702381548 Z 20=-0.016277218963 Z 21=-0.008686568514 Z 22=-0.005582453122 Z 23=0.002697417645 Z 24=-0.008119492227 Z 25=0.001112257513 Z 26=0.006110919033 Z 27=-0.000647734736 Z 28=-0.002465287749 Z 29=0.003898117301 Z 30=0.000313300350

Z 34=0.000649565168 2 35=-0.004877455409 [ZERNIKE 5] 7 0--0 000000000000 Z 1=0.704842968629 Z 2=-2.397245794028 2 3=-0.30148/194//3 Z 4=3.100074058252 Z 5=0.052990803891 Z 6=0.176431654252 2 7=0.000676525441 Z 8=0.022961757719 Z 9=0.078686313014 Z 10=-0.035961851451 Z 11=0.018064670699 Z 12=-0.061282598258 Z 13=0.030873073492 Z 14=0.025676242332 Z 15=-0.003135323077 Z 16=-0.010374974236 Z 17=-0.021051223287 Z = 18 = -0.001058638942Z 19=0.000144038772 2 20=-0.045516809557 Z 21=-0.018981646437 Z 22=0.006336585501 Z 23=-0.004481888459 Z 24=0.001099577219 Z 25=-0.005231054419 Z 26=0.003125714857 Z 27=0.004809080808 Z 28=0.001502612553 Z 29=0.003098773178 Z 30=0.007390189335 Z 31=0.004919203638 Z 32=0.003173571927 Z 33=-0.002682929941 Z 34=0.016259386701 Z 35=-0.015219268995 [ZERNIKE 7] Z 0=-0.00000000000 Z 1=0.800825970854 Z 2=-2.825944431791

Pupila 5 mm

Sph. Aberration

Pentafoil

Hodnota

-0.06 µm

0,05 µm @ 37°

		Fupis	nouriola
	Z(0,0)	Piston	0,00 µm
$2.50 \mu m@164^{\circ}$	Z(1,±1)	Tilt	2,50 µm @ 164°
	Z(2,±2)	Astigmatism	0,31 μm @ 140°
$0.31 \mu m @ 1/0^{\circ}$	Z(2,0)	Defocus	3,10 µm
0.51µIII@140	Z(3,±3)	Trefoil	0,19 µm @ 22*
7	Z(3,±1)	Coma	0,02 µm @ 2*
$0.10 \mu m @ 22^{\circ}$	Z(4,±4)	Tetrafoil	0,04 µm @ 76*
0.19µ11@22	Z(4,±2)	Astigmatism II	0,04 µm @ 15*

Z[4,0]

Z(5,±5)

$$\begin{aligned} c_n^{+m}, c_n^{-m} \end{pmatrix} &\to \left(c_n^{|m|}, |m| \theta_n^{|m|} \right) \\ c_n^{+m} &= c_n^{|m|} \cos|m| \theta_n^{|m|} \\ c_n^{-m} &= c_n^{|m|} \sin|m| \theta_n^{|m|} \end{aligned}$$

Zernikeho koeficienty v polárním zápisu

 C_n^{-m} $\left(c_{n}^{+m},c_{n}^{-m}\right)$ $C^{[m]}$ $m \theta_r^m$ C_n^{+m}

Koherentní osvětlení Test na temném pozadí

OPTOMETRIE KATEDRA OPTIKY

ABC

Optický test pro vízus 1.0 resp. 0.6, tj. výška 5´ resp. 9´

Difrakce

PSF - Airyho disk

Oko bez aberací, pouze vliv difrakce světla

Sféra a cylindr (astigmatismus prostý)

Aberace 2. řádu

všude pupila 5 mm

Moje oko

$RMS = 0.39 \ \mu m$

HOA + prémiová korekce M = -0.27 D, J0 = 0.13, J45 = 0.09

Aberace vyšších řádů

OPTOMETRIE **KATEDRA OPTIKY** OPTOMETRIE **KATEDRA OPTIKY** ABC Z(4,4)OPTOMETRIE **KATEDRA OPTIKY**

> OPTOMETRIE **KATEDRA OPTIKY**

> > ABC

Z(4,-4)

Nekoherentní osvětlení Test na bílém pozadí

Sféra a cylindr (astigmatismus prostý)

Aberace 2. řádu

všude pupila 5 mm

J. Bajer, Katedra optiky, UP Olomouc 2013

Moje oko

 $RMS = 0.39 \ \mu m$

HOA + prémiová korekce M = -0.27 D, J0 = 0.13, J45 = 0.09

Aberace vyšších řádů

