

# Kapitola 1

## Vybrané kapitoly z matematické fyziky

### 1.1 Obsah MF

Původně se MF rozumí teorie lineárních PDR a speciální funkce a polynomy.

Moderní MF zahrnuje např. integrální transformace (Fourierova, Laplaceova, Carsonova), teorie distribucí (delta funkce), komplexní analýza, konformní zobrazování, tenzorový a maticový počet, teorii grup, diferenciální geometrii, simplex metody (optimalizace) ...

Díky PC a efektivním numerickým metodám sem patří dnes i nelineární problémy, modelování, simulace (počítačová fyzika).

Fortran, C, Pascal, Basic, Delphi

MATLAB, OCTAVE, Maple, MATHEMATICA, Derive

### 1.2 Obecné kroky při řešení fyzikálního problému

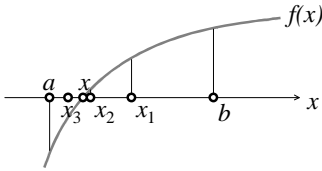
Formulace problému, jeho redukce, co je možno zanedbat, model problému, volba fyzikální teorie, sestavení diferenciálních rovnic s počátečními a okrajovými podmínkami, analytické řešení nebo spíše numerické řešení (bezrozměrné proměnné, snížení počtu parametrů, volba numerické metody a požadované přesnosti), interpretace matematického řešení, test správnosti, test na triviální analyticky řešitelné případy, pozor na numerické a počítačové artefakty!

### 1.3 Řešení transcendentních rovnic

Lineární a kvadratické rovnice umíme řešit, ale jak je to s transcendentními rovnicemi typu  $x^2 = 2 \sin x$  nebo  $x^x = 2$ ? (Kořeny první rovnice jsou  $x_1 = 0, x_2 \approx 1.4044$  a druhé  $x \approx 1.5596$ .)

### 1.3.1 Metoda půlení intervalu

Máme rovnici  $f(x) = 0$  a víme, že má kořen  $x$  v intervalu  $(a, b)$ , neboť  $f(a)$  má jiné znaménko než  $f(b)$ . Kořen  $x$  najdeme postupným zužováním intervalu  $(a, b)$  metodou půlení. Spočteme hodnotu funkce  $f(x_1)$  ve středu intervalu  $x_1 = \frac{1}{2}(a + b)$ , má-li stejné znaménko jako  $f(a)$ , nahradíme levou hranici intervalu  $a = x_1$ , v opačném případě nahradíme pravou hranici intervalu  $b = x_1$ . Tím zaručíme, že kořen  $x$  bude ležet v novém intervalu  $(x_1, b)$  resp.  $(a, x_1)$  poloviční šířky. Opět spočteme střed intervalu  $x_2$ , například  $x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + b)$  a postup opakujeme, dokud nedosáhneme předepsané přesnosti. Metoda funguje vždy spolehlivě.




---

Metoda půlení intervalu

---

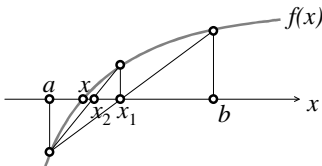
**Příklad:** Řešme rovnici  $x^2 - 2 = 0$ , jejíž kořen leží v intervalu  $(1, 2)$ , protože  $f(1) = -1 < 0$  a  $f(2) = 2 > 0$ . Odtud první odhad  $x_1 = \frac{3}{2}$ . Spočteme hodnotu funkce ve středu intervalu  $f(\frac{3}{2}) = \frac{1}{4} > 0$ , která má stejné znaménko jako  $b$ , tím získáme nový interval  $(1, \frac{3}{2})$  se středem  $x_2 = \frac{5}{4} = 1.25$ . Protože nyní je  $f(\frac{5}{4}) = -\frac{7}{16} < 0$ , máme jako další interval  $(\frac{5}{4}, \frac{3}{2})$  se středem  $x_3 = \frac{11}{8} = 1.375$ . Postup opakujeme a dostaneme  $x_4 = \frac{23}{16} = 1.4375$ ,  $x_5 = \frac{45}{32} = 1.40625$ ,  $x_6 = \frac{91}{64} = 1.421875$  a  $x_7 = \frac{181}{128} \approx 1.414063$ , což již souhlasí s přesným řešením  $x = \sqrt{2} \approx 1.41421356237$  na 3 desetinná místa.

### 1.3.2 Metoda tětív (regula falsi)

Opět máme rovnici  $f(x) = 0$  a interval  $(a, b)$ , v němž leží kořen  $x$ . Ten hledáme postupně jako průsečík sečny bodů  $[a, f(a)]$  a  $[b, f(b)]$  s osou  $x$ . Pro jeho polohu platí

$$x_1 = a - f(a) \frac{b - a}{f(b) - f(a)}.$$

Pokud bude mít  $f(x_1)$  stejné znaménko jako  $f(a)$ , nahradíme  $a = x_1$ , v opačném případě nahradíme  $b = x_1$ . Postup opakujeme s novým intervalem  $(x_1, b)$  resp.  $(a, x_1)$  až dosáhneme požadované přesnosti  $x$ . Tato metoda však nevede vždy k cíli, musíme vhodně zvolit počáteční interval dostatečně úzký, aby metoda konvergovala ke kořenu rovnice.




---

Metoda sečen.

---

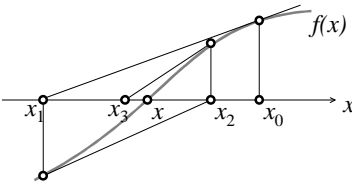
**Příklad:** Řešme opět rovnici  $x^2 - 2 = 0$ , její kořen, jak víme, leží v intervalu  $(1, 2)$ . Najdeme  $x_1 = \left[ a - f(a) \frac{b-a}{f(b)-f(a)} \right]_{a=1, b=2} = \frac{4}{3} \approx 1.333333$ , a protože  $f\left(\frac{4}{3}\right) < 0$ , nahradíme  $a = x_1 = \frac{4}{3}$ . Opakovaně pak najdeme  $x_2 = \frac{7}{5} = 1.4$ ,  $x_3 = \frac{24}{17} \approx 1.411765$ ,  $x_4 = \frac{41}{29} \approx 1.413793$  a  $x_5 = \frac{140}{99} \approx 1.414141$ , které je již přesné na 3 desetinná místa.

### 1.3.3 Metoda tečen (Newtonova metoda)

Ještě rychlejší je metoda nahrazující sečny tečnami, ovšem opět na úkor stability. Tady stačí pracovat s jediným bodem  $x_0$  blízkým kořenu  $x$ . Známe-li  $f(x_0)$  a derivaci  $f'(x_0)$ , můžeme sestavit tečnu  $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  a její průsečík s osou  $x$  pak je

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Postup opakujeme až dosáhneme požadované přesnosti, vždy vezmeme za počáteční hodnotu novou aproximaci  $x_0 = x_1$ .




---

Metoda tečen

---

**Příklad:** Řešme rovnici  $x^2 - 2 = 0$  s prvním odhadem  $x_0 = 1$ . Protože  $f'(x_0) = 2x_0$ , platí

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^2 - 2}{2x_0} = \frac{x_0^2 + 2}{2x_0} = \frac{3}{2} = 1.5,$$

dále  $x_2 = \frac{17}{12} \approx 1.41666666667$ ,  $x_3 = \frac{577}{408} \approx 1.41421568627$  a  $x_4 = \frac{665857}{470832} \approx 1.41421356237$ , což je již rovno kořenu  $x = \sqrt{2} \approx 1.41421356237$  na 11 desetinných míst. Iterační proces

$$x_{k+1} = \frac{x_k^2 + a}{2x_k} = \frac{1}{2} \left( x_k + \frac{a}{x_k} \right)$$

vycházející z Newtonovy metody sečen rychle konverguje k řešení  $x = \sqrt{a}$  a hojně se používá k výpočtu odmocniny z  $a$ .

### 1.3.4 Metoda sečen

Pokud neznáme derivaci  $f(x)$  nebo je analyticky příliš komplikovaná, můžeme  $f'(x)$  nahradit její numerickou aproximací v bodě  $x_k$

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}},$$

tak dostaneme metodu sečen. Pro  $k + 1$  aproximaci platí odhad

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})},$$

musíme tedy pro začátek znát alespoň dva body  $x_0$  a  $x_1$  blízké kořenu  $x$ , z nich spočteme  $x_2$  a cyklus opakujeme, až dosáhneme požadované přesnosti řešení. Geometricky lze ukázat, že metoda sečen funguje tak, že dvěma známými body  $x_k$  a  $x_{k-1}$  proloží přímkou (sečnu), jejíž průsečík s osou  $x$  dává novou aproximaci  $x_{k+1}$ .

Ukážeme si postup na naší úloze  $x^2 - 2 = 0$  s počátečními odhady  $x_0 = 1$  a  $x_1 = 1.5$ . Tak dostaneme aproximace  $x_2 = \frac{7}{5} = 1.4$ ,  $x_3 = \frac{41}{29} \approx 1.41379310345$ ,  $x_4 = \frac{577}{408} \approx 1.41421568627$  a  $x_5 = \frac{47321}{33461} \approx 1.41421356206$ , kde poslední odhad je přesný na 9 desetinných míst.

### 1.3.5 Metoda prostých iterací

Pokud rovnici  $f(x) = 0$  upravíme na tvar  $x = \varphi(x)$  a derivace  $\varphi'(x)$  bude malá, přesněji když bude  $|\varphi'(x)| < 1$ , pak prostým opakováním výpočtu  $x_{k+1} = \varphi(x_k)$  dostaneme rovněž s libovolnou přesností kořen  $x_k \rightarrow x$ .

**Příklad:** Řešme rovnici  $x^2 - 2 = 0$ , upravíme ji na tvar  $x = x + a(x^2 - 2)$ . Protože požadujeme  $\varphi'(x) = 1 + 2ax \approx 0$ , volíme  $a \approx -1/2x$ , např.  $a = -1/3$  s ohledem na  $x_0 = 3/2$ . Iterujeme tedy předpis

$$x_{k+1} = x_k - \frac{1}{3}(x_k^2 - 2)$$

s počátečním  $x_0 = 1.5$ . Dostaneme postupně  $x_1 = \frac{17}{12} \approx 1.416667$ ,  $x_2 = \frac{611}{432} \approx 1.414352$ ,  $x_3 = \frac{791783}{559872} \approx 1.414221$ ,  $x_4 = \frac{1329884389007}{940369969152} \approx 1.414214$  a  $x_5 = \frac{375174889524062034488351}{2652887036648800294797312} \approx 1.41421358822$ . Poslední aproximace je přesná na 7 desetinných míst.

Volbou  $a = -1/2x_k$  bychom znovu dostali Newtonovu metodu tečen.

### 1.3.6 Wienův zákon posunu

**Příklad:** Na jakou vlnovou délku připadne maximum vyzařování černého tělesa? Podle Plancka je spektrální intenzita vyzařování

$$M_0(\omega) = \frac{1}{4}c\omega(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2c^2} \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1},$$

kde spektrální hustota energie

$$w(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2c^3} \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1},$$

nebo

$$M_0(\lambda) = \left| \frac{d\omega}{d\lambda} \right| M_0(\omega) = \frac{2\pi\hbar c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\hbar c/kT\lambda} - 1}.$$

Zderivujeme  $M_0(\lambda)$  podle  $\lambda$  a derivaci položíme rovnu nule. Vyjde nám transcendentní rovnice

$$1 - \frac{1}{5}x = e^{-x},$$

kde  $x = hc/kT\lambda$  s netriviálním řešením  $x \approx 4.965\,114\,231\,74$ , odtud je vlnová délka maxima vyzařování rovna (**Wienův posunovací zákon**)

$$\lambda_{\max} = \frac{hc}{kTx} \approx \frac{2.897\,772\text{ mm/K}}{T}.$$

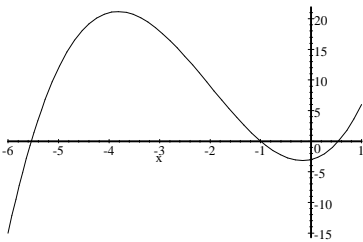
Orientačně někdy stačí přibližné řešení  $x \approx 5$  s chybou  $e^{-5} = 7 \times 10^{-3}$ .

### 1.3.7 Kubická rovnice

Máme vyřešit kubickou rovnici

$$x^3 + 6x^2 + 2x - 3 = 0.$$

Protože lze jedno z řešení  $x_1 = -1$  uhodnout, lze kubickou rovnici vydělit  $(x + 1)$  a dostaneme kvadratickou rovnici  $x^2 + 5x - 3 = 0$ , takže snadno nalezneme i zbývající dvě řešení  $x_2 = -\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{37} \approx 0.541\,381\,27$  a  $x_3 = -\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{37} \approx -5.541\,381\,3$ . Obecně však kubickou rovnici takto vyřešit neumíme. Podívejme se proto na jiný obecnější postup řešení:




---

Rovnice  $x^3 + 6x^2 + 2x - 3 = 0$  má tři reálné kořeny.

---

Trigonometrické řešení kubické rovnice využívá známé trigonometrické identity

$$\sin 3u = 3 \sin u - 4 \sin^3 u.$$

Nejprve upravíme kubickou rovnici tak, že v ní odstraníme kvadratický člen  $6x^2$ . To lze vždy provést vhodnou substitucí, zde  $x = y - 2$  dává rovnici

$$y^3 - 10y + 9 = 0.$$

Nyní musíme upravit rovnici tak, aby poměr kubického a lineárního členu byl 3 : 4, toho dosáhneme substitucí  $y = \sqrt{\frac{40}{3}} \sin u$ , rovnice pak získá tvar

$$\sin 3u = 3 \sin u - 4 \sin^3 u = \frac{27}{200} \sqrt{30}.$$

Tuto rovnici již dokážeme explicitně vyřešit, nezapomeňme však, že rovnice má pro  $3u$  nekonečně mnoho řešení lišících se o periodu  $2\pi$ , takže pro řešení  $u_k$  platí

$$u_k = \frac{1}{3} \left( 2\pi k + \arcsin \frac{27}{200} \sqrt{30} \right).$$

Původní rovnice má tedy již jen 3 řešení, jak jsme očekávali

$$x_k = y_k - 2 = \sqrt{\frac{40}{3}} \sin u_k - 2 = \sqrt{\frac{40}{3}} \sin \frac{1}{3} \left( 2\pi k + \arcsin \frac{27}{200} \sqrt{30} \right) - 2$$

pro  $k = 1, 2, 3$ , tedy

$$x_1 = \frac{2}{3} \sqrt{30} \sin \left( \frac{2}{3} \pi + \frac{1}{3} \arcsin \frac{27}{200} \sqrt{30} \right) - 2 \approx 0.54138127$$

$$x_2 = \frac{2}{3} \sqrt{30} \sin \left( \frac{4}{3} \pi + \frac{1}{3} \arcsin \frac{27}{200} \sqrt{30} \right) - 2 \approx -5.5413813$$

$$x_3 = \frac{2}{3} \sqrt{30} \sin \left( 2\pi + \frac{1}{3} \arcsin \frac{27}{200} \sqrt{30} \right) - 2 \approx -1.0.$$

Pokud by znaménko u lineárního členu bylo kladné, můžeme alternativně použít identitu

$$\sinh 3u = 3 \sinh u + 4 \cosh^3 u.$$

Například u rovnice

$$x^3 + x - 1 = 0$$

volíme substituci  $x = \sqrt{\frac{4}{3}} \sinh u$  a dostaneme rovnici

$$\sinh 3u = 3 \sinh u + 4 \sinh^3 u = \frac{3}{2} \sqrt{3}.$$

Tato rovnice má už jen jedno reálné řešení, takže hledané řešení je

$$x = \sqrt{\frac{4}{3}} \sinh \frac{1}{3} \left( \operatorname{arcsinh} \left( \frac{3}{2} \sqrt{3} \right) \right) \approx 0.6823278.$$

### 1.3.8 Cardanovy vzorce

Řešíme kubickou rovnici

$$x^3 + px + q = 0$$

Hledejme  $x$  ve tvaru součtu dvou členů  $x = u + v$ , po dosazení za  $x$  dostaneme rovnici

$$u^3 + (3uv + p)(u + v) + v^3 + q = 0,$$

kteřá se výrazně zjednoduší do tvaru  $u^3 + v^3 + q = 0$ , když na  $u$  a  $v$  naložíme dodatečnou podmínku  $3uv + p = 0$ . Odtud je  $v = -p/3u$  a po dosazení za  $v$  máme kvadratickou rovnici

$$u^6 + qu^3 - \frac{1}{27}p^3 = 0$$

pro  $u^3$ . Její řešení známe

$$u_{1,2}^3 = -\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}.$$

Všimněte si, že  $u_1^3 u_2^3 = -\frac{1}{27}p^3$ , tedy  $v_1^3 = u_2^3$  a  $v_2^3 = u_1^3$ , a proto

$$x_1 = u_1 + u_2.$$

Protože však rovnice  $x^3 = 1$  má v komplexním oboru čísel celkem 3 řešení  $\varepsilon_1 = 1$ ,  $\varepsilon_2 = \varepsilon$  a  $\varepsilon_3 = 1/\varepsilon = \varepsilon^2$ , kde

$$\varepsilon = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3} \quad \text{a} \quad \frac{1}{\varepsilon} = \exp\left(-\frac{2i\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3},$$

máme další dvě řešení původní rovnice

$$x_2 = u_1\varepsilon + u_2\varepsilon^2 \quad \text{a} \quad x_3 = u_1\varepsilon^2 + u_2\varepsilon.$$

Celkem tedy máme 3 řešení:

$$x_1 = \left(-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}\right)^{1/3} + \left(-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}\right)^{1/3},$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \left(-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}\right)^{1/3} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right) \\ &\quad + \left(-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}\right)^{1/3} \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= \left(-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}\right)^{1/3} \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right) \\ &\quad + \left(-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}\right)^{1/3} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right). \end{aligned}$$

Přestože zde pracujeme s komplexními čísly, mohou vyjít všechna tři řešení reálná. Například pro rovnici  $x^3 - 7x + 6 = 0$  odtud dostaneme číselně  $x_1 \approx 2$ ,  $x_2 \approx -3$  a  $x_3 \approx 1$ . To souhlasí se skutečností, že  $x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x-2)(x+3)$ .

Řešení kubické rovnice objevili nezávisle NICCOLO FONTANA TARTAGLIA a SCIPIONE DEL FERRO, jejich řešení publikoval však až GEROLAMO CARDANO v *Ars Magna* roku 1545.

### 1.3.9 Kvartická rovnice

Kvartická rovnice se dá převést na řešení kubické rovnice. Obecně můžeme každou kvartickou rovnici upravit do základního tvaru

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0.$$

Tuto rovnici se snažíme dále upravit do tvaru rozdílu dvou čtverců

$$(x^2 + a)^2 - (bx + c)^2 = 0.$$

Pokud by se nám to povedlo, dostali bychom dvě kvadratické rovnice

$$(x^2 + a) + (bx + c) = 0 \quad \text{a} \quad (x^2 + a) - (bx + c) = 0$$

pro  $x$  a problém by byl vyřešen. Protože

$$(x^2 + a)^2 - (bx + c)^2 = x^4 + (2a - b^2)x^2 - 2bcx + a^2 - c^2,$$

máme pro koeficienty  $a, b, c$  tři rovnice  $2a - b^2 = p$ ,  $-2bc = q$  a  $a^2 - c^2 = r$ . Ze druhé vyjádříme  $b$  a z první  $a$  jako funkce  $c$ , dosadíme do třetí rovnice a dostaneme obecně kubickou rovnici

$$(q^2 + 4pc^2)^2 = 64c^4 (c^2 + r)$$

pro  $c^2$ . Tím jsme převedli problém řešení kvartické rovnice na problém řešení kubické rovnice. Po nalezení  $c$  najdeme  $a$  a  $b$  a sestavíme příslušné kvadratické rovnice.

Uvedený postup řešení objevil LODOVICO FERRARI a publikoval jej GEROLAMO CARDANO v *Ars Magna* roku 1545.

## 1.4 Numerická kvadratura

Také integrály často nelze spočítat analyticky a nezbývá, než se obrátit na numerické metody. Například máme spočítat integrál

$$I = \int_a^b f(x) dx,$$

kteřý představuje geometricky plochu pod křivkou  $f(x)$ . Postup plyne z definice integrálu. Celý interval  $(a, b)$  se rozdělí na  $n$  úzkých podintervalů  $(x_k, x_{k+1})$ , kde  $x_k = a + kh$  jsou uzlové body,  $h = (b - a) / n$  je krok integrace a  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ . Na každém elementárním intervalu se integrál  $I_k$  aproximuje obdélníkem, lichoběžníkem nebo parabolou. Jednotlivé elementární integrály se pak znova sečtou a vytvoří aproximaci hledaného integrálu

$$I \approx \sum_{k=0}^{n-1} I_k.$$



### 1.4.1 Obdélníková metoda

Nejhrubší odhad dostaneme, když elementární integrál nahradíme obdélníkem, jehož plocha je  $I_k = hf_k$ . Výsledný integrál je pak přibližně roven

$$I_L \approx h(f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1})$$

nebo

$$I_P \approx h(f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_n),$$

to podle toho, zda za jeho výšku vezmeme levou nebo pravou pořadnici intervalu.

**Příklad:** Spočtěme numericky integrál

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x}.$$

Interval rozdělíme na 10 dílů s krokem  $h = 0.1$ . Pro integrál dostaneme ne příliš přesné odhady  $I_L \approx 0.719$  a  $I_P \approx 0.669$ .

### 1.4.2 Lichoběžníková metoda

Podstatně lepší odhad dá **lichoběžníková metoda**. Ta aproximuje elementární integrál lichoběžníkem, jehož plocha je rovna

$$I_k = \frac{1}{2}h(f_k + k_{k+1}).$$

Výsledný integrál je proto přibližně roven

$$I \approx \frac{1}{2}h(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{n-1} + f_n).$$

Srovnáním s obdélníkovou metodou je možno ukázat, že platí také

$$I = \frac{1}{2}(I_L + I_P).$$

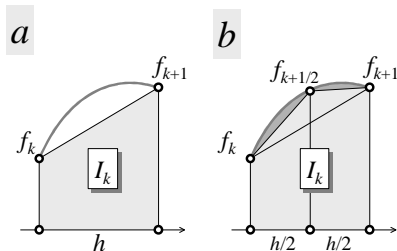
**Příklad:** Spočtěme opět integrál

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x},$$

který rozdělíme zase na 10 dílů s krokem  $h = 0.1$ . Pro jeho odhad dostaneme

$$I \approx \frac{0.1}{2} \left( \frac{1}{1} + \frac{2}{1.1} + \frac{2}{1.2} + \frac{2}{1.3} + \frac{2}{1.4} + \frac{2}{1.5} + \frac{2}{1.6} + \frac{2}{1.7} + \frac{2}{1.8} + \frac{2}{1.9} + \frac{1}{2} \right)$$

odtud  $I \approx 0.693771$ . To je už výsledek přesný na 3 desetinná místa, neboť přesná hodnota integrálu je  $I = \ln 2 \approx 0.693147$ .




---

Aproximace elementárního integrálu  $I_k$  (a) lichoběžníkem a (b) parabolou.

---

### 1.4.3 Simpsonova kvadratura

K numerickému výpočtu integrálu se výjimečně hodí **Simpsonova kvadratura**, kterou objevil roku 1737 THOMAS SIMPSON. Interval  $(a, b)$  si opět rozdělíme do  $n$  podintervalů šířky  $h = (b - a)/n$ , ale každý elementární interval ještě rozpůlíme. Spočteme tedy hodnoty funkce  $f_k$  v uzlových bodech  $x_k = a + kh$ , kde  $k = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, \dots, n$ . Elementární integrál  $I_k$  mezi třemi sousedními uzly  $f_k, f_{k+1/2}$  a  $f_{k+1}$  se však nyní aproximuje mnohem přesnější parabolou, takže jeho plocha je podle obrázku rovna součtu plochy lichoběžníka

$$\frac{1}{2}h(f_k + f_{k+1})$$

a plochy úseku paraboly, která je podle Archiméda rovna  $\frac{4}{3}$  plochy vepsaného trojúhelníka, jenž má plochu

$$\frac{1}{2}h \left( f_{k+1/2} - \frac{1}{2}f_k - \frac{1}{2}f_{k+1} \right).$$

Pokud bychom vynechali faktor  $\frac{4}{3}$ , dostali bychom zase jen lichoběžníkovou aproximaci s dvojnásobným počtem podintervalů. Pokud Archimédův faktor  $\frac{4}{3}$  započteme, dostaneme mnohem přesnější výsledek

$$I_k = \frac{1}{2}h(f_k + f_{k+1}) + \frac{4}{3} \frac{1}{2}h \left( f_{k+1/2} - \frac{1}{2}f_k - \frac{1}{2}f_{k+1} \right),$$

takže plocha elementárního integrálu je rovna

$$I_k = \frac{1}{6}h(f_k + 4f_{k+1/2} + f_{k+1}).$$

Poznamenejme, že prakticky stejný vzorec používal k výpočtu objemu sudů již roku 1615 JOHANNES KEPLER. Výsledný integrál je přibližně součtem elementárních integrálů, a proto je podle Simpsona roven

$$I \approx \frac{1}{6}h(f_0 + 4f_{1/2} + 2f_1 + \dots + 2f_{n-1} + 4f_{n-1/2} + f_n).$$

Jako příklad vezměme opět integrál

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x},$$

který si rozdělíme s ohledem na další půlení jen na 5 dílů, tedy krok je  $h = 0.2$ . Odhad integrálu podle Simpsonova vzorce dává

$$I \approx \frac{0.2}{6} \left( \frac{1}{1} + \frac{4}{1.1} + \frac{2}{1.2} + \frac{4}{1.3} + \frac{2}{1.4} + \frac{4}{1.5} + \frac{2}{1.6} + \frac{4}{1.7} + \frac{2}{1.8} + \frac{4}{1.9} + \frac{1}{2} \right)$$

odtud  $I \approx 0.693\,150$ , což je výsledek přesný na 5 desetinných míst.

### 1.4.4 Metoda Monte Carlo

Metoda Monte Carlo se používá především pro integraci vícerozměrných integrálů. Integrál  $I = \int_{\Omega} f d\omega$  je aproximován součinem střední hodnoty funkce  $f$  na oblasti  $\Omega$  a velikosti oblasti  $\Omega$ , platí tedy

$$I \approx \langle f \rangle \Omega = \Omega \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_k,$$

kde hodnoty  $f_k$  počítáme v náhodně volných bodech oblasti  $\Omega$ . Relativní chyba je typicky  $1/\sqrt{n}$ , pro  $n = 10^6$  je tedy chyba  $10^{-3}$ . S řádem dimenze integrálu roste rychle efektivnost metody.

## 1.5 Stefan-Boltzmannův zákon

**Příklad:** Odvoďte **Stefan-Boltzmannův zákon** integrací Planckova vzorce

$$M_0 = \int_0^{\infty} M_0(\omega) d\omega = \frac{k^4 T^4}{4\pi^2 c^2 \hbar^3} \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \sigma T^4,$$

kde

$$\sigma = \frac{k^4}{4\pi^2 c^2 \hbar^3} \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^2 k^4}{60 c^2 \hbar^3},$$

protože

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15} \approx 6.493\,939\,402\,27.$$

**Čistě numerické řešení:** Abychom odstranili singularitu horní meze, transformujeme nevlastní integrál vhodnou substitucí, např.  $y = 1/1+x$ , tak dostaneme nový integrál

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \int_0^1 \frac{(1-y)^3}{y^5 \left( e^{-\frac{1+y}{y}} - 1 \right)} dy,$$

ktejž již dokážeme numericky vypočítat. Simpsonova kvadratura dává pro 100 intervalů výsledek 6.493 939 402 17 a pro 200 intervalů 6.493 939 402 26, což je přesné na 9 resp. 11 desetinných míst!

**Kombinované řešení:** Rozdělíme integraci do dvou oblastí  $(0, 30)$  a  $(30, \infty)$ , první integrál spočteme numericky (Simpson 10000 intervalů)

$$I_1 = \int_0^{30} \frac{x^3}{e^x - 1} dx \approx 6.493\,939\,399\,47$$

a druhý analyticky v aproximaci

$$I_2 = \int_{30}^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx \approx \int_{30}^{\infty} \frac{x^3}{e^x} dx = 29\,886e^{-30} \approx 2.796\,619\,200\,47 \times 10^{-9},$$

jejíž relativní chyba bude menší než  $e^{-30} \approx 9 \times 10^{-13}$ . Dohromady tak máme opět  $I = I_1 + I_2 \approx 6.493\,939\,402\,27$ .

**Rozvoj v řadu:** Integrál rozvineme v řadu elementárních integrálů  $I_k$

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \int_0^{\infty} x^3 (e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \dots) dx = I_1 + I_2 + I_3 + \dots,$$

kde

$$I_n = \int_0^{\infty} x^3 e^{-nx} dx.$$

Protože platí

$$P(n) = \int_0^{\infty} e^{-nx} dx = \frac{1}{n},$$

dostaneme odtud třetí derivací podle  $n$  hledaný mezivýsledek

$$I_n = \int_0^{\infty} x^3 e^{-nx} dx = -\frac{d^3}{dn^3} P(n) = \frac{6}{n^4}.$$

Tedy máme sečíst řadu

$$I = 6 \left( 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots \right) = 6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Řada  $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$  konverguje docela rychle, pro 100 členů dává součet  $S_{100} \approx 1.082\,322\,905$ , pro 1000 členů je  $S_{1000} \approx 1.082\,323\,233$  a pro 10000 členů je  $S_{10000} \approx 1.082\,323\,234$ . Analytický výsledek je  $S = \frac{\pi^4}{90} = 1.082\,323\,233\,71 \approx 1.082\,323\,234$  a tedy opět  $I = 6S \approx 6.493\,939\,402\,26$ .

### 1.5.1 Součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

Využijeme skutečnosti, že funkce  $f(x)$ , která má kořeny  $x_k$ , se dá zapsat jako součin

$$f(x) = f(0) \prod_k \left(1 - \frac{x}{x_k}\right).$$

Jako příklad vezměme funkci definovanou kořeny 1 a 2, bude mít tudíž tvar

$$f(x) = f(0) (1-x) \left(1 - \frac{x}{2}\right) = A(2 - 3x + x^2).$$

Vezměme nyní záměrně funkci sinc

$$f(x) = \frac{\sin x}{x},$$

která má kořeny  $x = \pm m\pi$ . Můžeme ji tedy zapsat jako nekonečný součin

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} = \left[1 - \left(\frac{x}{\pi}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{x}{3\pi}\right)^2\right] \dots$$

Rozvineme-li do  $x^2$ , máme

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{6}x^2 + \dots$$

a současně

$$\left(1 - \left(\frac{x}{\pi}\right)^2\right) \left(1 - \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2\right) \left(1 - \left(\frac{x}{3\pi}\right)^2\right) \dots = 1 - \left(\frac{x}{\pi}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots\right).$$

Srovnáním koeficientů u  $x^2$  odtud máme známou identitu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Protože směřujeme k řadě převrácených čtvrtých mocnin, vezmeme dále komplexní funkci

$$f(x) = \frac{\sin x \sin ix}{x \cdot ix}.$$

Funkce má kořeny  $x = \pm m\pi$  a dále také  $x = \pm im\pi$ , můžeme ji tudíž podobně zapsat jako součin

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[1 - \left(\frac{x}{\pi}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{x}{3\pi}\right)^2\right] \times \dots \\ &\times \left[1 - \left(\frac{x}{i\pi}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{x}{2i\pi}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{x}{3i\pi}\right)^2\right] \times \dots \\ &= \left[1 - \left(\frac{x}{\pi}\right)^4\right] \left[1 - \left(\frac{x}{2\pi}\right)^4\right] \left[1 - \left(\frac{x}{3\pi}\right)^4\right] \times \dots \end{aligned}$$

Rozvineme-li nyní do  $x^4$ , máme

$$\frac{\sin x}{x} \frac{\sin ix}{ix} = \left(1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 - \dots\right) \left(1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 + \dots\right) = 1 - \frac{1}{90}x^4 + \dots$$

a současně z nekonečného součinu

$$f(x) = 1 - \left(\frac{x}{\pi}\right)^4 \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots\right) + \dots,$$

takže porovnáním koeficientů u  $x^4$  máme hledanou identitu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^4}{90}.$$

### 1.5.2 Součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ pomocí Fourierových řad

Sudá funkce  $f(x)$  definovaná na intervalu  $-\pi \leq x \leq \pi$  má Fourierův rozvoj

$$f(x) = \sum_m A_m \cos mx,$$

kde

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad \text{a} \quad A_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx.$$

Takže například funkce  $f(x) = x^2$  má Fourierův rozvoj

$$f(x) = \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{m^2} (-1)^m \cos mx.$$

Odtud

$$f(0) = 0 = \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{m^2} (-1)^m,$$

takže

$$S_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} (-1)^{1+m} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Pokud hledáme součet monotónní řady

$$S_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots,$$

pak zřejmě platí

$$S_2 - S_1 = 2 \left( \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots \right) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \right) = \frac{1}{2} S_2,$$

a tedy

$$S_2 = 2S_1 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Podobně najdeme druhý součet, můžeme buď  $2 \times$  integrovat Fourierovu řadu podle  $x$  nebo hledat přímo Fourierův rozvoj funkce  $f(x) = x^4$

$$f(x) = \frac{1}{5}\pi^4 + 8 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{m^2\pi^2 - 6}{m^4} \cos mx.$$

Protože

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 = \frac{1}{5}\pi^4 + 8 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{m^2\pi^2 - 6}{m^4} \\ &= \frac{1}{5}\pi^4 + 8\pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m^2} - 48 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m^4} \\ &= \frac{1}{5}\pi^4 - 8\pi^2 \frac{\pi^2}{12} - 48 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m^4} \\ &= -\frac{7}{15}\pi^4 - 48 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m^4}, \end{aligned}$$

máme výsledek

$$S_3 = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{1+m} \frac{1}{m^4} = \frac{7}{720}\pi^4.$$

Opět lze najít vztah s monotónní řadou  $S_4 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4}$ , spočteme-li

$$S_4 - S_3 = 2 \left( \frac{1}{2^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{6^4} + \dots \right) = \frac{1}{8} \left( \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots \right) = \frac{1}{8} S_4,$$

odtud pak opět známý výsledek

$$S_4 = \frac{8}{7} S_3 = \frac{\pi^4}{90}.$$

## 1.6 Diferenciální rovnice

### 1.6.1 Klasifikace rovnic

Běžné rovnice, ve kterých jsou neznámými čísla, se nazývají (obyčejné) **rovnice**. Čísla, která splňují rovnici se nazývají **kořeny**. Příkladem je rovnice

$$\sin x + \cos x = 1.$$

Jejími kořeny jsou  $x_1 = 2k\pi$  a  $x_2 = \frac{1}{2}\pi + 2k\pi$ , kde  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Pokud mají rovnice tvar

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0,$$

jde o **algebraické rovnice**. Příkladem je rovnice kvadratická

$$x^2 - 3x + 2 = 0,$$

kteřá má dva kořeny, čísla  $x_1 = 1$  a  $x_2 = 2$ .

Rovnice existují v nejrůznějších variantách, známe lineární, kvadratické a kubické rovnice, rovnice o jedné, dvou a více proměnných, soustavy rovnic, rovnice algebraické a transcendentní, atd.

Kromě této skupiny rovnic, existují celé třídy rovnic dalších. Rovnice, ve kterých je neznámou funkce se nazývají **funkcionální rovnice**. Příkladem je rovnice

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

Její řešení je funkce  $f(x) = C \ln x$ , kde  $C$  je libovolná konstanta. Jiným příkladem je rovnice  $f(x+T) = f(x)$ , její řešení jsou všechny periodické funkce s periodou  $T$ , nebo rovnice  $f(-x) = f(x)$ , jejíž řešení jsou všechny funkce sudé.

**Příklad:** Spočtete  $f(2014)$ , když pro funkci  $f(x)$  platí rovnice

$$f(x+y) = f(x)f(y) - f(xy) + 1$$

a  $f(1) = 2$ . Řešení: Podle zadání platí pro  $y = 1$

$$f(x+1) = f(x)f(1) - f(x) + 1 = f(x) + 1,$$

a tedy  $f(x) = 1 + x$ .

Existuje i velká třída **rovníc diferenčních**. Jde prakticky o rovnice pro posloupnosti  $y_n$ . Příkladem je rovnice

$$y_n = \frac{1}{2}(y_{n-1} + y_{n+1}),$$

tj. hledá se posloupnost, jejíž každý člen  $y_n$  je roven aritmetickému průměru sousedních členů. Dá se ukázat, že řešením rovnice je pouze lineární funkce  $y_n = An + B$ , kde  $A$  a  $B$  jsou libovolné konstanty. Pokud zavedeme pojem **diference** vztahem  $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$ , pak je možno předchozí rovnici přepsat do tvaru  $\Delta y_n = \Delta y_{n-1}$ , z něhož je už možno řešení uhodnout - řešení musí mít charakter aritmetické posloupnosti.

**Příklad:** Najděte řešení diferenční rovnice

$$y_{n+1} = y_n + y_{n-1}$$

s počátečními podmínkami  $y_0 = y_1 = 1$ . (**Fibonacciho posloupnost** 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...)



Rovnice, ve kterých je neznámou funkce, která zde vystupuje i se svými derivacemi (navíc funkce i její derivace mají stejný argument), se nazývají **diferenciální rovnice**.<sup>1</sup> Příkladem je rovnice

$$y' + y = x.$$

Její řešení je  $y(x) = x - 1 + Ce^{-x}$ , kde  $C$  je libovolná konstanta. Obecně má diferenciální rovnice prvního řádu tvar

$$y' = f(x, y)$$

a rovnice druhého řádu tvar

$$y'' = f(x, y, y').$$

Rovněž diferenciální rovnice můžeme dělit podle různých kritérií na rovnice lineární a nelineární, homogenní a nehomogenní, s konstantními koeficienty a proměnnými koeficienty, na obyčejné diferenciální rovnice a parciální diferenciální rovnice, můžeme mít k řešení soustavu diferenciálních rovnic, apod.

Rovnice, ve kterých je neznámou funkce, která zde vystupuje i se svým integrálem, se nazývá **integrální rovnice**. Často obsahují takové rovnice i derivace, pak jde o **integrodiferenciální rovnice**. Příkladem je integrální rovnice

$$y(x) = 5 + \int_0^x 2xy(x) dx$$

s řešením  $y(x) = 5e^{x^2}$ . Tyto rovnice lze převést na rovnice diferenciální. Skutečně, zderivováním integrální rovnice dostaneme obyčejnou diferenciální rovnici  $y' = 2xy$  a tu umíme vyřešit pomocí metod pro diferenciální rovnice.

## 1.6.2 Diferenciální rovnice

Ve fyzice hrají diferenciální rovnice velmi významnou roli. Je to proto, že většina fyzikálních zákonů má diferenciální charakter. To znamená, že se dají zapsat matematicky jako diferenciální rovnice. Typickým příkladem je pohybový zákon. Rychlost změny hybnosti tělesa je rovna působící síle, tj. platí  $\dot{p} = F(t, x, v)$ . A protože  $p = mv$  a  $v = \dot{x}$ , má pohybový zákon charakter diferenciální rovnice druhého řádu

$$\ddot{x} = \frac{1}{m} F(t, x, \dot{x}).$$

Ačkoliv diferenciální rovnice obsahují derivace, nenazývají se z historických důvodů derivační rovnice, ale rovnice diferenciální. Je to proto, že tyto rovnice na základě analýzy fyzikálního problému skutečně konstruuje neprve z diferenciálů, tj. malých přírůstků. Nejlépe si to osvětlíme na jednoduchém příkladu: Do nádrže tvaru válce přitéká stálou rychlostí voda. Současně ze dna nádrže odtéká otvorem

<sup>1</sup>Přesněji **obyčejné diferenciální rovnice** ODR na rozdíl od parciálních diferenciálních rovnic PDR.

voda rychlostí, která je přímo úměrná výšce hladiny v nádrži. Máme určit závislost výšky hladiny  $h$  v nádrži na čase  $t$ . Ze zadání dokážeme sestavit bilanční rovnici pro krátký časový úsek  $\Delta t$ , po který se výška hladiny v nádrži příliš nemění. Platí

$$\Delta h = \alpha \Delta t - \beta h \Delta t,$$

kde  $\alpha \Delta t$  představuje nárůst hladiny díky stálému přítoku vody a  $\beta h \Delta t$  představuje úbytek hladiny díky odtoku, který roste s výškou hladiny  $h$ . A to je skutečně rovnice diferenciálů, protože platí jen pro malé přírůstky  $\Delta t$  a  $\Delta h$ . Přesněji bychom měli psát rovnou

$$dh = \alpha dt - \beta h dt.$$

Obvykle se však taková rovnice přepisuje do tvaru, kde diferenciály nejsou. Stačí vydělit diferenciálem času  $dt$  a dostaneme výsledek ve formě diferenciální rovnice

$$h' = \alpha - \beta h.$$

Oba zápisy diferenciální rovnice jsou samozřejmě zcela rovnocenné, první spíše odpovídá intuici fyzika, druhý spíše učebnicím matematiky.

### 1.6.3 Metoda separace proměnných

To je nejjednodušší, nejnázornější a často i nejúčinnější metoda řešení diferenciálních rovnic. Dá se však použít jen u těch rovnic, u nichž lze separaci proměnných uskutečnit. Metodu můžeme ilustrovat na následujícím příkladu. Najděte řešení rovnice  $y' = 2xy$  s okrajovou podmínkou  $y(0) = 5$ . Rovnici přepíšeme pomocí diferenciálů

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

a nyní přeskupíme jednotlivé členy tak, že oddělíme (separujeme) od sebe obě nezávislé proměnné  $x$  a  $y$ . Tak dostaneme separovanou rovnici

$$\frac{dy}{y} = 2x dx.$$

Tuto rovnici můžeme snadno zintegrovat, na každé straně máme jeden elementární neurčitý integrál

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x dx \quad \implies \quad \ln y + C_1 = x^2 + C_2,$$

takže řešení je

$$y = e^{x^2 + C_2 - C_1} = A e^{x^2},$$

kde  $A = e^{C_2 - C_1}$  je nová integrační konstanta. Pokud chceme splnit okrajovou podmínku  $y(0) = 5$ , musíme volit  $A = 5$ .

Řešení s okrajovou podmínkou je možno psát i přímo tak, že okrajová podmínka se rovnou zapíše do integračních mezí

$$\int_5^y \frac{dy}{y} = \int_0^x 2x dx,$$

odtud po integraci

$$\ln y - \ln 5 = x^2, \quad \text{a tudíž} \quad y = 5e^{x^2}.$$

### 1.6.4 Lineární diferenciální rovnice

Velká množina diferenciálních rovnic, s nimiž se ve fyzice setkáváme, jsou rovnice lineární. **Lineární diferenciální rovnice prvního řádu** má tvar

$$y' + a(x)y = b(x),$$

podobně rovnice druhého řádu má tvar

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x).$$

Pokud jsou funkce  $a, b, c$  konstantami, hovoříme o **lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty**. Pokud je pravá strana rovnice rovna nule, například

$$y' + a(x)y = 0,$$

hovoříme o **homogenní diferenciální rovnici** (rovnice bez pravé strany). V opačném případě jde o **nehomogenní diferenciální rovnici** (s pravou stranou).

Homogenní diferenciální rovnice mají tu vlastnost, že pokud známe dvě jejich řešení  $y_1$  a  $y_2$ , pak také jejich **lineární kombinace**

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

bude řešením homogenní rovnice. V případě nehomogenní diferenciální rovnice zase platí, že její obecné řešení je možno zapsat jako součet řešení homogenní rovnice  $Y$  a jediného **partikulárního řešení**  $y_1$  nehomogenní rovnice, tj.

$$y = Y + y_1.$$

Podívejme se nyní blíže na homogenní diferenciální rovnice s konstantními koeficienty. Příkladem budiž rovnice

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Tyto rovnice mívají řešení ve tvaru exponenciálních funkcí, proto hledáme řešení ve tvaru  $y = e^{\lambda x}$ . Dosadíme toto zkušební řešení do diferenciální rovnice a dostaneme algebraickou rovnici

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

pro možné hodnoty parametru  $\lambda$ . Tato rovnice se nazývá **charakteristickou rovnicí**. Jejím řešením najdeme  $\lambda_1 = 1$  a  $\lambda_2 = 2$ . Tak jsme našli dvě partikulární řešení  $y_1 = e^x$  a  $y_2 = e^{2x}$ . Obecné řešení původní diferenciální rovnice má proto tvar

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^x + c_2 e^{2x}.$$

Problém může nastat v případě, že rovnice má vícenásobný kořen. Pak totiž budeme mít nedostatečný počet partikulárních řešení tvaru  $e^{\lambda x}$ , abychom mohli zkonstruovat úplné obecné řešení. V takovém případě se ukazuje, že dalším partikulárním řešením jsou funkce  $x e^{\lambda x}$ ,  $x^2 e^{\lambda x}$ , atd. Vezměme opět jednoduchý příklad

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Tato rovnice vede na charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

s jediným dvojnásobným kořenem  $\lambda = 1$ . Proto budou mít partikulární řešení tvar  $y_1 = e^x$  a  $y_2 = x e^x$ , takže obecné řešení diferenciální rovnice má tvar

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x = (c_1 + c_2 x) e^x.$$

Konečně, ukažme si ještě příklad řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice. Jako příklad vezměme rovnici

$$y'' - 3y' + 2y = \sin x.$$

Pokud si odmyslíme pravou stranu, dostaneme homogenní rovnici, kterou jsme před chvílí analyzovali. Zjistili jsme, že má obecné řešení  $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$ . Abychom našli obecné řešení nehomogenní rovnice, stačí najít jedno jediné řešení nehomogenní rovnice  $y_1$ . Při jejím hledání je nutno spoléhat na intuici a zkušenost. Vzhledem k tvaru pravé strany, je možno očekávat, že partikulární řešení bude rovněž obsahovat goniometrické funkce. Předpokládejme tedy, že má tvar

$$y_1 = a \cos x + b \sin x,$$

kde  $a$  a  $b$  jsou zatím neznámé parametry. Najdeme je dosazením partikulárního řešení  $y_1$  do nehomogenní diferenciální rovnice, tak dostaneme

$$(a - 3b) \cos x + (b + 3a) \sin x = \sin x.$$

Tato rovnice může platit pro všechna  $x$  jen tehdy, když bude  $a - 3b = 0$  a  $b + 3a = 1$ . Odtud máme  $a = 3/10$  a  $b = 1/10$ . Jediné partikulární řešení hledaného tvaru je tedy rovno

$$y_1 = \frac{3}{10} \cos x + \frac{1}{10} \sin x$$

a obecné řešení původní nehomogenní diferenciální rovnice je tudíž

$$y = \frac{3}{10} \cos x + \frac{1}{10} \sin x + c_1 e^x + c_2 e^{2x}.$$

### 1.6.5 Řešení diferenciální rovnice pomocí řad

Zatím jsme to nikde nezdůraznili, ale najít řešení diferenciální rovnice může být nejen velmi obtížné, ale ještě častěji zcela nemožné! Drtivá většina diferenciálních rovnic totiž nemá analytické řešení. Mnohé lineární rovnice mají řešení ve tvaru speciálních funkcí a mnohé nelineární rovnice vedou dokonce na deterministický chaos. V takových případech se musíme spokojit s přibližným řešením numerickým nebo s řešením ve tvaru nekonečného rozvoje. Tyto metody totiž fungují vždy.

Naznačíme, jak lze získat řešení diferenciální rovnice ve tvaru mocninného rozvoje. Vezměme diferenciální rovnici  $y' = f(x, y)$ , tu můžeme formálně přeintegrovat a tak dostaneme integrální rovnici

$$y = y(0) + \int_0^x f(x, y) dx.$$

Tu pak řešíme rekurzivně metodou postupných aproximací, tj.

$$y_{n+1} = y(0) + \int_0^x f(x, y_n) dx,$$

kde za první aproximaci volíme například  $y_0 = y(0)$ .

Ukažme si to na jednoduché diferenciální rovnici

$$y' = x - y$$

s danou počáteční podmínkou  $y(0) = 1$ . Máme najít hodnotu  $y(0.5)$  a  $y(1)$ . Nebudeme skrývat, že analytické řešení naší rovnice je známo a je rovno

$$y(x) = x - 1 + 2e^{-x},$$

proto budeme moci pohodlně porovnat numerické výsledky s přesnými hodnotami, které tudíž jsou  $y(0.5) \approx 0.713061$  a  $y(1) \approx 0.735759$ .

Rekurentní předpis pro náš problém má tvar

$$y_{n+1} = y(0) + \int_0^x (x - y_n) dx. \quad (1.1)$$

Začneme s aproximací  $y_0 = y(0) = 1$ , tu dosadíme na pravou stranu rovnice (1.1) a dostaneme novou lepší aproximaci

$$y_1 = 1 + \int_0^x (x - 1) dx = 1 - x + \frac{1}{2}x^2.$$

Nyní dosadíme  $y_1$  na pravou stranu integrální rovnice (1.1) a dostaneme

$$y_2 = 1 + \int_0^x \left( x - \left( 1 - x + \frac{1}{2}x^2 \right) \right) dx = 1 - x + x^2 - \frac{1}{6}x^3.$$

Nyní dosadíme  $y_2$  na pravou stranu integrální rovnice (1.1) a dostaneme

$$y_3 = 1 + \int_0^x \left( x - \left( 1 - x + x^2 - \frac{1}{6}x^3 \right) \right) dx = 1 - x + x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{24}x^4.$$

Nyní dosadíme  $y_3$  na pravou stranu integrální rovnice (1.1) a dostaneme

$$\begin{aligned} y_4 &= 1 + \int_0^x \left( x - \left( 1 - x + x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 \right) \right) dx \\ &= 1 - x + x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{120}x^5. \end{aligned}$$

Postup opakujeme tak dlouho, jak je třeba. Dostaneme tak rozvoj ve tvaru mocninné řady

$$y \approx 1 - x + x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{60}x^5 + \frac{1}{360}x^6 + \dots$$

Odtud dosazením za  $x$  najdeme, že  $y(0.5) \approx 0.713064$  a  $y(1) \approx 0.736111$ . Chyba je v prvním případě na šestém desetinném místě a ve druhém případě na čtvrtém desetinném místě. Chyba pochopitelně rychle roste s rostoucí hodnotou  $x$  a ke stejné přesnému výsledku potřebujeme stále více členů rozvoje.

Mocninný rozvoj je možno získat i přímo, tj. dosazením

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots$$

do diferenciální rovnice  $y' = f(x, y)$ . V našem případě máme rovnici

$$c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \dots = x - c_0 - c_1x - c_2x^2 - c_3x^3 - \dots,$$

kteřá musí být splněna pro všechna  $x$ . Odtud plyne, že se musí sobě rovnat všechny sobě odpovídající koeficienty a to na obou stranách rovnice. Tak dostaneme soustavu rovnic

$$c_1 = -c_0, \quad 2c_2 = 1 - c_1, \quad 3c_3 = -c_2, \quad \dots$$

Spolu s počáteční podmínkou  $y(0) = 1$ , která vede na další podmínku  $c_0 = 1$ , máme již dostatek rovnic k vyřešení celé soustavy lineárních rovnic s výsledkem

$$c_0 = 1, \quad c_1 = -1, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = -1/3, \quad \dots$$

## 1.6.6 Numerické řešení ODR: Eulerova metoda

V diferenciální rovnici

$$y' = f(x, y)$$

můžeme aproximovat derivaci podle definice výrazem

$$y' \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{h},$$

kde  $h$  je tzv. krok integrace. Čím bude krok menší, tím bude pochopitelně aproximace lepší. Diferenciální rovnici tedy můžeme přepsat do tvaru

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} = f(x, y),$$

a proto

$$y(x+h) = y(x) + hf(x, y).$$

To je základní vzorec pro numerické řešení diferenciální rovnice. Při numerickém řešení se postupuje tak, že interval  $x$  rozdělíme na malé úseky  $h$  a rekurentně počítáme hodnotu funkce  $y$  v novém bodě

$$x_{n+1} = x_n + h$$

pomocí starých hodnot  $x_n$  a  $y_n$ , tedy platí

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n).$$

Jako počáteční hodnoty se uplatní počáteční podmínky, tj.  $y_0 = y(x_0)$ .

Zvolme tedy integrační krok  $h = 0.1$ , pak tedy máme  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 1$  a  $f_0 = -1$ , dále  $x_1 = 0.1$ ,  $y_1 = 1 - 1 \cdot 0.1 = 0.9$  a  $f_1 = -0.8$ , dále  $x_2 = 0.2$ ,  $y_2 = 0.9 - 0.8 \cdot 0.1 = 0.82$  a  $f_2 = -1$ , atd. Postup celého výpočtu zachycuje tabulka, kterou dostaneme pro krok  $h = 0.1$ . Její přesnost je však malá, chyba je u  $y(0.5)$  a  $y(1)$  už na druhém desetinném místě. Protože přesnost roste s klesajícím krokem, uvádíme pro srovnání hned vedle ještě tabulku s krokem desetkrát menším, tj.  $h = 0.01$ . Chyba je v tomto případě až na třetím desetinném místě.

$x_n$	$y_n$	$f_n$	$x_n$	$y_n$	$f_n$
0	1	-1	0	1	-1
0.1	0.90	-0.80	0.10	0.990	-0.980
0.2	0.82	-0.62	0.20	0.980	-0.660
0.3	0.76	-0.46	0.30	0.971	-0.941
...		...	...		...
0.5	0.68	-0.18	0.50	0.710	-0.210
...		...	...		...
1.0	0.70	0.30	1.00	0.732	0.268
...		...	...		...

Metoda je to prostá, ale na výpočet pracná a zdlouhavá. Pro dostatečnou přesnost výsledku je nutno provést ohromné množství matematických operací. Je to práce jako stvořená pro počítač. Skutečně, výpočty tohoto druhu byly hlavním a zpočátku i jediným popudem pro vznik a rozvoj výpočetní techniky. Bez počítačů a podobných nudných výpočtů bychom totiž nikdy nespustili žádnou jadernou elektrárnu ani nevyslali člověka na Měsíc. Hry, multimédia a internet jsou jen vedlejšími a nečekaným produktem bouřlivého vývoje moderních počítačů.

Popsaná metoda pochází od LEONHARDA EULERA, který ji popsal roku 1768.

Pokud je explicitní Eulerova metoda nestabilní, doporučuje se **implicitní Eulerova metoda** definovaná předpisem

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}).$$

Příslušná rovnice pro  $y_{n+1}$  se obvykle řeší iterativně s požadovanou přesností.

### 1.6.7 Metoda Runge-Kutta

Existují samozřejmě mnohem efektivnější numerické metody řešení diferenciálních rovnic. Z nich uveďme alespoň tu nejdůležitější, **metodu Runge-Kutta**. Rovnice

$$y' = f(x, y)$$

má podle ní rekurentní řešení, které se nalezne ze vztahu

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

kde

$$k_1 = hf(x_n, y_n),$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}\Delta x, y_n + \frac{1}{2}k_1\right),$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}\Delta x, y_n + \frac{1}{2}k_2\right),$$

$$k_4 = hf(x_n + \Delta x, y_n + k_3).$$

Metodu objevil CARL DAVID TOLMÉ RUNGE roku 1895 a MARTIN WILHELM KUTTA roku 1901.

Numerické výsledky metody Runge-Kutta pro krok  $h = 0.1$  jsou zobrazeny v další tabulce. Jak je z ní zřetelně patrné, metoda je velmi efektivní. Při stejném kroku jako v předchozí elementární metodě dosahuje mnohem vyšší přesnosti, neboť její chyba je až na sedmém desetinném místě.

$x_n$	$y_n$	přesně
0	1	1
0.1	0.9096750	0.9096748
0.2	0.8374618	0.8374615
0.3	0.7816368	0.7816364
...	...	...
0.5	0.7130619	0.7130613
...	...	...
1.0	0.7357595	0.7357589
...	...	...



### 1.6.8 Soustava ODR

Popsané metody fungují nejen pro jednu ODR o jedné neznámé funkci  $y(x)$ , ale i pro soustavy ODR. Uvedené předpisy zůstávají v platnosti, jen místo  $y(x)$  musíme brát celý vektor  $\mathbf{y}(x) = (y_1, y_2, y_3, \dots)$ . Pak má soustava rovnic

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$$

formálně shodné řešení popsané výše jako metoda RK, pro které platí

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{1}{6} (\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4),$$

kde

$$\mathbf{k}_1 = h\mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n),$$

$$\mathbf{k}_2 = h\mathbf{f}\left(x_n + \frac{1}{2}\Delta x, \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}\mathbf{k}_1\right),$$

$$\mathbf{k}_3 = h\mathbf{f}\left(x_n + \frac{1}{2}\Delta x, \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}\mathbf{k}_2\right),$$

$$\mathbf{k}_4 = h\mathbf{f}(x_n + \Delta x, \mathbf{y}_n + \mathbf{k}_3).$$

K řešení musíme znát i vektor počátečních hodnot  $\mathbf{y}(0) = (y_1(0), y_2(0), y_3(0), \dots)$ .

### 1.6.9 Rovnice vyšších řádů

Popsané metody platí pro ODR 1. řádu, ale dají se s obměnami použít i rovnice vyšších řádů. Dělá se to tak, že se rovnice  $k$ . řádu upraví na  $k$  rovnic 1. řádu. Ukážeme si to na typickém příkladu z mechaniky. Máme řešit pohybovou rovnici  $\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t)$ . Zavedeme novou proměnou  $v = \dot{x}$ , která má význam rychlosti, pak zadanou rovnici přepíšeme jako soustavu 2 rovnic 1. řádu  $\dot{v} = f(x, v, t)$  a  $\dot{x} = v$ . Jako počáteční podmínky pak máme hodnoty  $x(0)$  a  $v(0) = \dot{x}(0)$ .

Pokud jsou však počáteční podmínky zadány jinak, máme problém. Například neznáme počáteční elevační úhel  $\alpha$ , jen polohu děla a cíle, který máme balistikou trefit. V tom případě přelaďujeme parametr  $\alpha$  tak dlouho, až se "trefíme". Výpočet se tím pochopitelně prodlužuje a komplikuje.

## 1.7 Obalová křivka

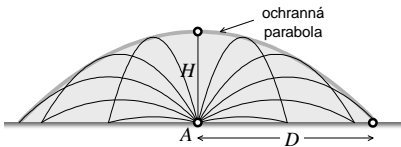
Soustava rovinných křivek  $f(x, y, p) = 0$  s parametrem  $p$  má obalovou křivku, kterou dostaneme vyloučením parametru  $p$  ze soustavy rovnic

$$f(x, y, p) = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial}{\partial p} f(x, y, p) = 0.$$

Soustava rovnic je ekvivalentní soustavě

$$f(x, y, p) = 0 \quad \text{a} \quad f(x, y, p + dp) = 0,$$

což představuje geometricky pro pevné  $p$  průsečík  $(x, y)$  dvou blízkých křivek.




---

Ochranná parabola.

---

**Příklad:** Ochranná parabola je obalová křivka soustavy parabol šikmých vrhů s danou rychlostí  $v_0$ . Jednotlivé trajektorie jsou dány parametricky

$$x = v_0 t \cos \alpha \quad \text{a} \quad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2,$$

kde  $\alpha$  značí elevační úhel. Vyloučením času dostaneme explicitní tvar paraboly šikmého vrhu

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{2} \frac{g x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = k x - \frac{g x^2}{2 v_0^2} (1 + k^2).$$

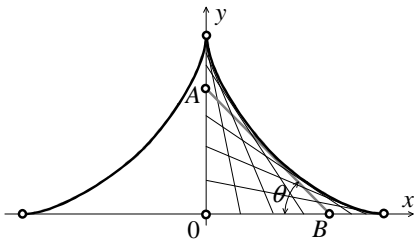
Nyní zderivujeme podle parametru  $k = \operatorname{tg} \alpha$ , dostaneme

$$0 = x - \frac{g x^2}{v_0^2} k,$$

odtud  $k = v_0^2/gx$  a tedy **ochranná parabola** má rovnici

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g x^2}{2 v_0^2} = \frac{v_0^2}{2g} \left[ 1 - \left( \frac{g x}{v_0^2} \right)^2 \right] = H \left[ 1 - \left( \frac{x}{D} \right)^2 \right],$$

kde  $H = v_0^2/2g$  značí výšku a  $D = v_0^2/g$  šířku paraboly (dolet).




---

Obálkou úseček  $AB$  klouzajících po osách  $x$  a  $y$  je asteroida  $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ .

---

**Příklad:** Podél stěny klouže k zemi tyč délky  $l$  opřená o zeď. Jakou obalovou křivku vytvoří jednotlivé polohy tyče? Pokud tyč svírá s podlahou úhel  $\theta$ , bude její rovnice (úsekový tvar)

$$\frac{x}{l \cos \theta} + \frac{y}{l \sin \theta} = 1.$$

Přepišme raději do tvaru

$$x \operatorname{tg} \theta + y = l \sin \theta.$$

Derivací podle parametru  $\theta$  máme druhou rovnici  $x = l \cos^3 \theta$ , po dosazení za  $x$  do první máme  $y = l \sin^3 \theta$ . Tím je obalová křivka parametricky zadaná. Vyloučením  $\theta$  dostaneme implicitní tvar obalové křivky

$$x^{2/3} + y^{2/3} = l^{2/3},$$

z něhož je patrné, že se jedná o **asteroidu**.

**Příklad:** Určete obalovou křivku k soustavě přímek, spojujících body  $[a, 0]$  a  $[0, 1/a]$ , kde  $a$  je parametr. Rovnice přímek jsou

$$\frac{x}{a} + ay = 1,$$

derivací podle parametru  $a$  máme druhou rovnici

$$-\frac{x}{a^2} + y = 0.$$

Odtud  $a = \sqrt{x/y}$ , po dosazení do původní rovnice dostaneme rovnici hyperboly

$$4xy = 1.$$

### 1.7.1 Příklady na numerickou kvadraturu

**Příklad:** Spočtěte numericky integrál

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{4}\sqrt{2} \approx 1.110\,720\,734\,54.$$

Řešení: Přetransformujeme nevlastní integrál substitucí  $t = 1/(1+x)$ , dostaneme vlastní integrál

$$I_1 = \int_0^1 \frac{t^2}{2t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1} dt,$$

ktejž již pohodlně integrujeme. Pro  $n = 10$  máme  $I_1 \approx 1.111\,806\,685\,41$ , pro  $n = 100$  máme  $I_1 \approx 1.110\,720\,731\,87$  a pro  $n = 500$  již máme  $I_1 \approx 1.110\,720\,734\,54$ .

Nebo spočteme numericky jen  $\int_0^{10} \frac{dx}{1+x^4} \approx 1.110\,387\,415\,49$  a zbytek rozvineme

$$\begin{aligned} \int_{10}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} &= \int_{10}^{\infty} \left( \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^8} + \frac{1}{x^{12}} \dots \right) dx = \int_{10}^{\infty} \frac{dx}{x^4} - \int_{10}^{\infty} \frac{dx}{x^8} + \int_{10}^{\infty} \frac{dx}{x^{12}} - \dots \\ &= \frac{1}{3000} - \frac{1}{70\,000\,000} + \frac{1}{1\,100\,000\,000\,000} + \dots \\ &\approx 3.333\,190\,485\,28 \times 10^{-4}, \end{aligned}$$

protože

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^{4k}} = \frac{a^{-4k+1}}{4k-1}.$$

Dohromady tak máme opět  $I_1 \approx 1.11038741549 + 3.33319048528 \times 10^{-4} = 1.11072073454$ .

**Příklad:** Spočítejte numericky integrál

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2}\pi \approx 1.57079632679.$$

Řešení: Všimněte si nejprve, že platí

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} dx$$

pro libovolné  $a$ , proto můžeme počítat pro  $a = 2$

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{\sin 2x}{x} dx = \int_0^\infty \frac{2 \sin x \cos x}{x} dx = \int_0^\infty \frac{1}{x} d(\sin^2 x).$$

Integrací per partes dostaneme mnohem lépe konvergující integrál

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx.$$

Nebo rozdělíme integraci na interval  $(0, 2m\pi)$  a  $(2m\pi, \infty)$ , v prvním integrujeme numericky (nejméně 2000 podintervalů!)

$$\int_0^{20\pi} \frac{\sin x}{x} dx = 1.55488887104$$

a druhý upravíme analyticky. Předpokládejme, že  $m \gg 1$  je velké přirozené číslo a opakovaně integrujeme per partes, dostaneme tak asymptotickou řadu

$$\int_{2m\pi}^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2m\pi} - \frac{2}{(2m\pi)^3} + \frac{4!}{(2m\pi)^5} + \int_{2m\pi}^\infty \left( -\frac{720}{x^7} \sin x \right) dx,$$

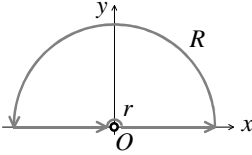
kteřá sice diverguje, ale pro vhodné  $m$  lze dosáhnout libovolné přesnosti. V našem případě  $m = 10$  stačí vzít prvních 5 členů řady a dostaneme

$$\int_{20\pi}^\infty \frac{\sin x}{x} dx \approx \sum_{k=0}^5 \frac{(-1)^k (2k)!}{(20\pi)^{2k+1}} \approx 1.59074557501 \times 10^{-2}.$$

Sečtením obou výsledků dohromady máme opět  $I_2 \approx 1.57079632679$ .

**Analyticky spočteme** tyto dva integrály takto. Nejprve k prvnému integrálu

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2}\pi.$$




---

Integrační křivka v komplexní Gaussově rovině obchází pól  $z = 0$ .

---

Místo něj ale začneme integrálem

$$\oint \frac{\exp(iz)}{z} dz = \int_{-R}^{-r} + \int_{-r}^r + \int_R^r + \int_r^{-R} = 0,$$

kde  $R \rightarrow \infty$  a  $r \rightarrow 0$ . Zřejmě

$$\int_{-R}^{-r} + \int_R^r = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x + i \sin x}{x} dx = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = 2iI,$$

dále

$$\int_{-r}^r \frac{\exp(iz)}{z} dz = \int_{\pi}^0 \exp(ire^{i\phi}) i d\phi = \int_{\pi}^0 i d\phi = -i\pi,$$

neboť  $z = re^{i\phi}$  a konečně

$$\left| \int_R^{-R} \frac{\exp(iz)}{z} dz \right| = \left| \int_0^{\pi} \exp(iR \cos \phi - R \sin \phi) i d\phi \right| \leq \int_0^{\pi} \exp(-R \sin \phi) d\phi,$$

neboť  $z = Re^{i\phi}$ . Dále ze symetrie funkce  $\sin x$  kolem  $x = \pi/2$  platí

$$\int_0^{\pi} \exp(-R \sin \phi) d\phi = 2 \int_0^{\pi/2} \exp(-R \sin \phi) d\phi.$$

Protože pro  $0 \leq \phi \leq \pi/2$  platí  $\sin \phi \geq 2\phi/\pi$ , platí také odhad

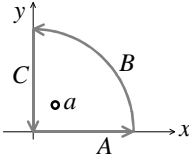
$$\left| \int_R^{-R} \frac{\exp(iz)}{z} dz \right| \leq 2 \int_0^{\pi/2} \exp(-2R\phi/\pi) d\phi = \frac{\pi}{R} (1 - e^{-R}) \rightarrow 0.$$

Máme tedy

$$\int_R^{-R} \frac{\exp(iz)}{z} dz \rightarrow 0,$$

takže  $2iI - i\pi = 0$ . Odtud již máme výsledek

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2}\pi.$$




---

Integrační křivka  $A + B + C$  v komplexní Gaussově rovině obchází pól  $a = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ .

---

Podobně naložíme s druhým integrálem

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{4}\pi\sqrt{2}.$$

Pomocí reziduové věty

$$\oint \frac{dz}{1+z^4} = 2\pi i \sum_k \text{res}_k$$

spočteme

$$\oint \frac{dz}{1+z^4} = A + B + C,$$

kde

$$A = \int_0^R \frac{dx}{1+x^4} \rightarrow I,$$

dále

$$B = \int_0^{\pi/2} \frac{iR e^{i\phi} d\phi}{1+R^4 e^{4i\phi}},$$

takže

$$|B| \leq \int_0^{\pi/2} \frac{R d\phi}{\sqrt{1+2R^2 \cos 4\phi + R^4}} \leq \int_0^{\pi/2} \frac{R d\phi}{R^2 - 1} \approx \frac{\pi}{2R} \rightarrow 0$$

a

$$C = \int_R^0 \frac{id y}{1+y^4} = -i \int_0^R \frac{dy}{1+y^4} = -iA,$$

takže

$$\oint \frac{dz}{1+z^4} = A(1-i).$$

Současně má funkce

$$f(z) = \frac{1}{1+z^4} = \frac{1}{(z^2+i)(z^2-i)} = \frac{1}{\left(z - \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) \left(z + \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) \left(z - \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) \left(z + \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)}$$

v oblasti omezené křivkou  $A + B + C$  jeden pól  $a = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ , takže

$$\operatorname{res}_a = \left[ \frac{1}{\left(z - \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) \left(z + \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) \left(z + \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)} \right]_{z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}} = -\frac{1}{8}\sqrt{2}(1+i).$$

Tudíž  $A(1-i) = 2\pi i \left(-\frac{1}{8}\sqrt{2}(1+i)\right) = \frac{1}{4}\pi\sqrt{2}(1-i)$  a proto

$$I = A = \frac{1}{4}\pi\sqrt{2}.$$

Také platí

$$\operatorname{res}_a = \lim_{z \rightarrow \frac{1+i}{\sqrt{2}}} \frac{\left(z - \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)}{1+z^4} = \lim_{z \rightarrow \frac{1+i}{\sqrt{2}}} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^3} = -\frac{1}{8}\sqrt{2}(1+i).$$

Pro zajímavost uvedeme ještě jednu metodu výpočtu integrálu

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4},$$

a to přímou integrací po rozkladu v kořenové zlomky. Zřejmě platí

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{1}{1+ix^2} \frac{1}{1-ix^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1+ix^2} + \frac{1}{1-ix^2} \right),$$

tak obdržíme dva komplexní ale zato tabulkové integrály

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+ix^2} + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{dx}{1-ix^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{\pi}{\sqrt{i}} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{\pi}{\sqrt{-i}} = \frac{1}{4}\pi\sqrt{2},$$

neboť užitím jednoduché substituce  $u = x\sqrt{a}$  platí

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+ax^2} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{\infty\sqrt{a}} \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg}(\infty\sqrt{a}).$$

Jediný problém dělá komplexní výraz  $\operatorname{arctg}(\infty\sqrt{a})$ , neboť ten může nabýt obou hodnot  $\pm\frac{\pi}{2}$ , platí totiž limita

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} z = \frac{\pi}{2} \operatorname{csgn} z.$$

Protože z obou hodnot  $\sqrt{a}$  se bere standardně to, které má kladnou reálnou část, bude

$$\operatorname{csgn} \infty \sqrt{a} = \operatorname{csgn} \sqrt{a} = 1,$$

a my můžeme nakonec psát elementární výsledek

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+ax^2} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\sqrt{a}}.$$

POZNÁMKA: Funkce  $\operatorname{tg}$  má periodu  $\pi$ , funkce  $\operatorname{arctg}$  je proto mnohoznačná a pro jednoznačnost volíme tu hodnotu, jejíž reálná část padne do intervalu  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . Pro komplexní  $\varepsilon$  platí

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \varepsilon \right) = \frac{1}{\operatorname{tg} \varepsilon},$$

pro malé  $\varepsilon$  platí zároveň aproximace  $\operatorname{tg} \varepsilon \approx \varepsilon$ , takže

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \varepsilon \right) \approx \frac{1}{\varepsilon}.$$

Pro velké  $z = 1/\varepsilon$  tudíž musí platit aproximace

$$\operatorname{arctg} z \approx \frac{\pi}{2} - \frac{1}{z},$$

neboli ve složkách

$$\operatorname{arctg} z \approx \frac{\pi}{2} - \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{y}{x^2 + y^2},$$

kde  $z = x + iy$ . Např.

$$\operatorname{arctg} (100 + i200) \approx \frac{\pi}{2} - \frac{1}{100 + i200} \approx 1.5688 + .004i$$

nebo

$$\operatorname{arctg} (-100 + i200) \approx \frac{\pi}{2} - \frac{1}{-100 + i200} \approx 1.5728 + .004i.$$

Ve druhém případě je však reálná část výsledku 1.5728 větší než  $\pi/2 \approx 1.5708$ , proto od něj odečteme  $\pi$ , abychom dostali obvyklý standardizovaný výsledek

$$\operatorname{arctg} (-100 + i200) \approx 1.5728 - \pi + .004i \approx -1.5688 + .004i.$$

V limitě tedy podle znaménka  $x$  skutečně dostaneme  $\pm\pi/2$ .



### 1.7.2 Eulerova sumační formule

Diferenční operátor

$$\Delta f = f(x+h) - f(x),$$

operátor derivace

$$Df = \frac{d}{dx}f.$$

Z Taylorovy věty je

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) h^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} h^k D^k f = e^{hD} f(x),$$

takže platí  $\Delta f = f(x+h) - f(x) = (e^{hD} - 1) f(x)$  neboli zcela formálně

$$\Delta = e^{hD} - 1. \quad (1.2)$$

Jako je integrál  $D^{-1} = \int$  inverzním operátorem k derivaci  $D = \frac{d}{dx}$ , tj. platí

$$D^{-1}f = \int_{x_0}^x f(x) dx + \text{konst}$$

a tedy také  $DD^{-1}f = f$ , tak také sumace  $\Delta^{-1} = \sum$  je inverzním operátorem k diferenci  $\Delta$ , proto platí

$$\sum f = \sum_{x=x_0}^{x-h} f(x) = f(x_0) + f(x_0+h) + f(x_0+2h) + \dots + f(x-h) + \text{konst},$$

a tudíž platí  $\Delta\Delta^{-1} = 1$  neboli

$$\Delta\Delta^{-1}f = \Delta \sum_{x=x_0}^{x-h} f = \sum_{x=x_0}^{x-h+h} f - \sum_{x=x_0}^{x-h} f = f(x) = f.$$

Z rovnice (1.2) platí pro sumační (inverzní) operátor formální relace

$$\sum = \Delta^{-1} = \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{e^{Dh} - 1},$$

zníž odvodíme pohodlně sumační formuli. Rozvineme nejprve pravou stranu v Taylorovu řadu

$$\sum = \frac{1}{e^{Dh} - 1} = \frac{1}{Dh} \frac{Dh}{e^{Dh} - 1} = \frac{1}{Dh} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B_k D^k h^k = \frac{1}{Dh} - \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} B_k D^{k-1} h^{k-1},$$

kde  $B_k$  jsou Bernoulliho čísla  $B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}, B_8 = -\frac{1}{30}, B_{10} = \frac{5}{66}, B_{12} = -\frac{691}{2730}, \dots$  plynoucí z rozvoje výrazu

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B_k x^k.$$

Poznamenejme ještě, že rozvoje mají explicitní tvar

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^x - 1} &= x^{-1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12}x - \frac{1}{720}x^3 + \frac{1}{30\,240}x^5 - \frac{1}{1209\,600}x^7 + \dots, \\ \frac{x}{e^x - 1} &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{720}x^4 + \frac{1}{30\,240}x^6 - \frac{1}{1209\,600}x^8 + \dots \end{aligned}$$

Operátorový vzorec

$$\sum = \frac{1}{Dh} - \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} B_k D^{k-1} h^{k-1},$$

lze interpretovat jako

$$\sum_{x=x_0}^{x-h} f(x) = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x-h} f(x) dx - \frac{1}{2} f(x) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} B_k f^{(k-1)}(x) h^{k-1} + \text{konst}$$

nebo

$$\sum_{x=x_0}^x f(x) = \frac{1}{h} \int_{x_0}^x f(x) dx + \frac{1}{2} f(x) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} B_k f^{(k-1)}(x) h^{k-1} + \text{konst},$$

přítom konstantu najdeme z podmínky  $x = x_0$ , kdy

$$\sum_{x=x_0}^{x_0} f(x) = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0} f(x) dx + \frac{1}{2} f(x_0) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} B_k f^{(k-1)}(x_0) h^{k-1} + \text{konst},$$

tedy

$$\text{konst} = \frac{1}{2} f(x_0) - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} B_k f^{(k-1)}(x_0) h^{k-1}.$$

Proto platí

$$\sum_{x=x_0}^x f(x) = \frac{1}{h} \int_{x_0}^x f(x) dx + \frac{f(x_0) + f(x)}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} B_k \left( f^{(k-1)}(x) - f^{(k-1)}(x_0) \right) h^{k-1},$$

což je **Eulerova sumační formule**. Obvykle se zapisuje ve tvaru

$$\sum_{x=a}^b f(x) = \frac{1}{h} \int_a^b f(x) dx + \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} B_k \left( f^{(k-1)}(b) - f^{(k-1)}(a) \right) h^{k-1}$$

a pro  $h = 1$  se zjednoduší do tvaru

$$\sum_{x=a}^b f(x) = \int_a^b f(x) dx + \frac{1}{2}(f(a) + f(b)) + \sum_{k=2} \frac{1}{k!} B_k \left( f^{(k-1)}(b) - f^{(k-1)}(a) \right).$$

Pro  $f(x) = x^2$  například máme součet

$$\sum_{x=0}^n x^2 = \int_0^n x^2 dx + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2!}B_2 2n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

### 1.7.3 Burgersova rovnice

Pro vlny na mělké vodě platí Burgersova rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

zanedbáme-li viskozitu máme rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

K tomu předpokládáme počáteční podmínku  $u(x, 0) = U(x)$ . Řešíme metodou charakteristik, tj. hledáme křivky  $x(t)$  v prostoru  $(x, t)$ , na nichž bude  $u(x(t), t) = u_0$  konstantní. Derivací této podmínky snadno spočteme

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \dot{x} = 0,$$

což spolu s původní rovnicí dává podmínku  $\dot{x} = u = u_0$ , odtud již máme hledané řešení charakteristik

$$x = u_0 t + x_0$$

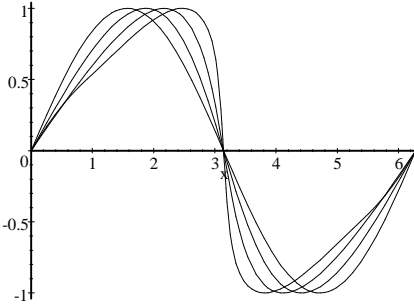
procházejících bodem  $(x_0, 0)$ . Na této charakteristické přímce tedy musí platit

$$u(u_0 t + x_0, t) = u_0 = u(x_0, 0) = U(x_0),$$

takže pro nalezení každého  $u(x, t)$  máme implicitní rovnici

$$x = u_0 t + x_0 = U(x_0) t + x_0$$

pro  $x_0$ .




---

Časový vývoj  $u(x, t)$  pro  $t = 0, 0.3, 0.6, 0.9$  z  $u(x, 0) = \sin x$ . Vidíme, že jak vzniká ostrá přívalová vlna kolem  $x = \pi$ .

---

Například pro  $U(x) = \sin x$  máme známou Keplerovu rovnici

$$x = t \sin x_0 + x_0,$$

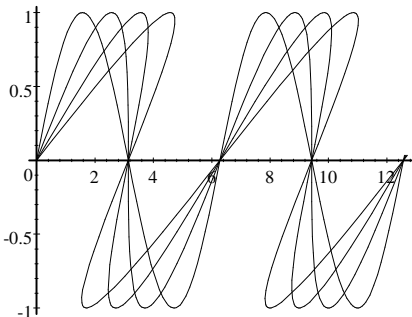
tu lze řešit pro malá  $t$  např. iteračně, tj.  $x_{00} \approx x$ ,  $x_{01} \approx x - t \sin x$ ,  $x_{02} \approx x - t \sin(x - t \sin x)$ , tak sestrojíme přibližné řešení

$$u(x, t) = \sin x_0 \approx \sin(x - t \sin(x - t \sin(x - t \sin(x - t \sin x))))$$

v daném čase  $t$ . To odpovídá Taylorovu rozvoji

$$u(x, t) \approx \sin x - t \cos x \sin x - \frac{1}{2}t^2 (1 - 3 \cos^2 x) \sin x + \frac{1}{3}t^3 (5 - 8 \cos^2 x) \cos x \sin x.$$

Vidíme, že s rostoucím časem  $t = 0, 0.3, 0.6, 0.9$  se na klesajícím úbočí formuje přílivová (rázová) vlna. Pro  $t > 1$  iterativní řešení diverguje, Keplerova rovnice má totiž více řešení, což odpovídá situaci, kdy vlna přepadá a má pro stejné  $x$  více hodnot  $x_0$  a tedy i  $u(x)$ .




---

Časový vývoj  $u(x, t)$  pro  $t = 0, 1, 2, 3$  z  $u(x, 0) = \sin x$ . Vidíme, že jak vzniká nestabilní přívalová vlna s přepadem kolem  $x = \pi$  a  $3\pi$ .

---

Místo řešení transcendentní rovnice je možné získat pohodlně řešení graficky, tj. zakreslit řešení v parametrickém tvaru, kde  $x_0$  bereme za parametr. Pak bude

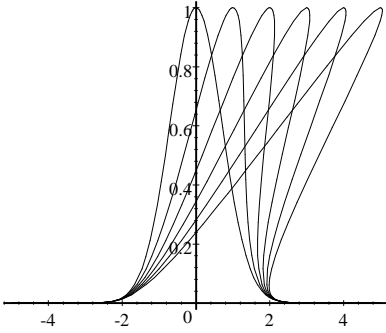
parametricky zadán průběh  $u(x)$  rovnicemi

$$x = t \sin x_0 + x_0, \quad u = U(x_0),$$

tím se řešení transcendentní rovnice zcela vyhneme a odpadnou problémy s víceznačností řešení.

Zkusme ještě například funkci  $U(x) = \exp(-x^2)$ , pak máme jako řešení parametrické rovnice

$$x = t \exp(-x_0^2) + x_0, \quad y = \exp(-x_0^2).$$




---

Časový vývoj  $u(x, t)$  pro  $t = -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9$   
z gaussovské funkce  $u(x, 0) = \exp(-x^2)$ .

---