7.2.2 Foton a fotonová statistika

FOTON {*photon*}
představuje nejmenší **kvantum energie** {*energy quantum*}, které si může elektromagnetické pole na dané frekvenci vyměnit s okolím (např. s detektorem). Velikost tohoto kvanta, neboli energie fotonu, je $\hbar\omega$, kde ω značí (kruhovou) frekvenci, $\hbar$ je (modifikovaná) Planckova konstanta. Jinými slovy, energie každého ↗módu elektromagnetického pole je kvantována. Čím vyšší je energie módu, tím více fotonů mód obsahuje. ↗Kvantový stav pole s ostrou hodnotou energie, kdy je vybuzen jediný mód „k“ o frekvenci ω_k, (↗Fockův stav) je pak popsán stavovým vektorem $|n\rangle_k$, kde n je počet fotonů v módu. Je-li uvažovaným módem rovinná vlna, má foton impuls $\hbar\omega/c$; c je rychlost světla. Na foton lze pohlížet jako na elementární částici zprostředkovávající elektromagnetickou interakci: je to boson s nulovou klidovou hmotností a spinem 1. Poloha výše definovaného objektu je ovšem v libovolném časovém okamžiku zcela neurčitá. Někdy se proto pod fotonem rozumí obecnější stav elektromagnetického pole vyjádřený stavovým vektorem $|\psi(t)\rangle = \sum_k c_k \exp(-i\omega_k t)\,|1\rangle_k$, $\sum_k |c_k|^2 = 1$, tedy „jednofotonový“ vlnový balík. Ten ovšem nemá určitou hodnotu energie – jeho energie je „rozmazaná“. Historicky je vznik představy fotonu svázán především s ↗Planckovým zákonem vyzařování černého tělesa a s Einsteinovou teorií ↗fotoelektrického jevu.

FOTONOVÁ STATISTIKA {*photon statistics*}
nebo lépe **statistika počtu fotonů** {*photon number statistics*} popisuje vlastnosti souboru fotonů – udává tedy pravděpodobnosti $p(n)$, že při měření v daném stavu pole zaregistrujeme právě n fotonů – proto se někdy také používá termínu **fotopulsní statistika** {*photocount statistics*}. ↗Rozdělení pravděpodobnosti počtu fotonů je dáno ↗kvantovým stavem elektromagnetického pole, a ten je určen povahou světelného zdroje. Např. koherentní záření se řídí ↗Poissonovým rozdělením, ↗tepelné záření ↗Gaussovým rozdělením. Registrace fotonů v čase je obecně náhodný proces (a to i v případě, že klasická intenzita světla je konstantní). Často se používají následující střední veličiny, které souvisejí s klasickou intenzitou I, výkonem P a energií $\mathcal{E}$ kvazimonochromatického světla o střední (kruhové) frekvenci $\bar{\omega}$ níže uvedenými vztahy:
střední počet fotonů {*mean number of photons*}

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n\, p(n) = \frac{\mathcal{E}}{\hbar\bar{\omega}},$$

střední fotonový tok {*mean photon flux*} – tj. střední počet fotonů detekovaný za jednotku času

$$\Phi = \frac{P}{\hbar\bar{\omega}}$$

a **střední hustota fotonového toku** {*mean photon-flux density*} – střední fotonový tok na jednotku plochy

$$\phi = \frac{I}{\hbar\bar{\omega}}.$$

Řádová velikost střední hodnoty fotonového toku slunečního světla je 10^{18} fotonů za sekundu na čtvereční metr. Náhodnost počtu fotonů je základním zdrojem šumu, se kterým se setkáváme při přenosu signálu prostřednictvím světla. Užitečným ukazatelem je **poměr signálu k šumu** {*signal-to-noise ratio*}

$$\mathrm{SNR} = \frac{\bar{n}}{\sigma_n^2},$$

kde signál je reprezentován středním počtem fotonů $\bar{n}$ a šum je zachycen prostřednictvím variance rozdělení pravděpodobnosti počtu fotonů σ_n^2.

ROZDĚLENÍ PRAVDĚPODOBNOSTI {*probability distribution*}
udává pravděpodobnosti výskytu hodnot náhodné proměnné. Je-li n diskrétní náhodná proměnná, lze každé její hodnotě přiřadit pravděpodobnost výskytu – číslo $p(n) \in \langle 0, 1\rangle$, přičemž $\sum_n p(n) = 1$. Tato pravděpodobnost představuje limitní hodnotu relativní četnosti výskytu dané hodnoty n při opakovaných pokusech. Závislost $p(n)$ na n vyjadřuje rozdělení pravděpodobnosti. **Střední hodnota** {*mean value*} rozdělení se definuje vztahem

$$\bar{n} = \sum_n n\, p(n)$$

a **variance** {*variance*} vztahem

$$\sigma_n^2 = \sum_n (n - \bar{n})^2 p(n).$$

Veličina σ_n je mírou šířky rozdělení. V případě spojité náhodné proměnné x se zavádí hustota pravděpodobnosti $p(x)$. Pak $p(x)\, dx$ udává pravděpodobnost, že hodnota náhodné proměnné bude ležet v intervalu mezi x a $x + dx$. Přitom $\int p(x) = 1$. Funkce $p(x)$ určuje rozdělení pravděpodobnosti. Střední hodnota a variance mají tvar: $\bar{x} = \int x p(x)\, dx$, $\sigma_x^2 = \int (x - \bar{x})^2 p(x)\, dx$.

POISSONOVO ROZDĚLENÍ {*Poisson distribution*};
↗rozdělení pravděpodobnosti diskrétní náhodné veličiny n, která může nabývat nezáporných celočíselných hodnot, s reálným parametrem z:

$$p(n) = \frac{\exp(-z) z^n}{n!}.$$

↗Střední hodnota $\bar{n} = z$, ↗variance $\sigma_n^2 = z$. Poissonovým rozdělením se řídí ↗fotonová statistika v případě koherentního světla.

TEPELNÉ ZÁŘENÍ {*thermal radiation*}
je emitováno látkou na úkor její vnitřní energie a je s látkou v termodynamické rovnováze (viz též ↗zákony vyzařování). Vzniká v optickém rezonátoru, jehož stěny jsou udržovány na teplotě T, tak že do jednotlivých ↗módů rezonátoru jsou emitovány

fotony. Podle zákonů statistické mechaniky je za podmínky termodynamické rovnováhy ↗rozdělení pravděpodobnosti energie $\mathcal{E}_n$ v jednom rezonátorovém módu dáno **Boltzmannovým rozdělením** {*Boltzmann distribution*}

$$p(\mathcal{E}_n) = N \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_n}{k_B T}\right),$$

kde k_B je **Boltzmannova konstanta** ($k_B = 1{,}38 \times 10^{-23}$ J/K) a N je normovací konstanta. Energie spojená s každým módem je náhodná. Vyšší energie jsou relativně méně pravděpodobné než nižší. Vzhledem k tomu, že $\mathcal{E}_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$, je pravděpodobnost nalezení n fotonů v jednom rezonátorovém módu

$$p(n) = \frac{1}{\bar{n}+1}\left(\frac{\bar{n}}{\bar{n}+1}\right)^n,$$

kde $\bar{n} = [\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1]^{-1}$ je střední počet fotonů. V teorii pravděpodobnosti se toto rozdělení nazývá **geometrickým rozdělením** {*geometric distribution*}. Ve fyzice je označováno jako **Boseovo-Einsteinovo rozdělení** {*Bose-Einstein distribution*}. Pro ↗varianci Boseova-Einsteinova rozdělení platí:

$$\sigma_n^2 = \bar{n} + \bar{n}^2.$$

Rozdělení počtu fotonů v případě tepelného záření je mnohem širší než u koherentního světla s ↗Poissonovým rozdělením počtu fotonů. Boseovo-Einsteinovo rozdělení obecně popisuje statistiku libovolných bosonů v termodynamické rovnováze za předpokladu, že jejich vzájemné působení je zanedbatelné.

Náhodné dělení {*random partitioning*}.
K dělení proudu ↗fotonů dochází, jestliže některé fotony jsou z něho vyčleňovány. Jednoduchý příklad náhodného dělení představuje bezztrátový dělič svazku. Fotony jsou náhodně vybírány a začleňovány do jednoho ze dvou výstupních směrů. Za předpokladu, že akty vyčleňování jednotlivých fotonů jsou vzájemně nezávislé (nesmí tedy docházet např. k interferenci), má ↗fotonová statistika světla prošlého děličem (pravděpodobnost nalezení m fotonů za děličem) tvar

$$p(m) = \sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} \mathcal{T}^m (1-\mathcal{T})^{n-m} p_0(n),$$

kde $\mathcal{T}$ je výkonová propustnost děliče a $p_0(n)$ je pravděpodobnostní rozdělení počtu fotonů na vstupu. ↗Poissonovo rozdělení (pro koherentní světlo) a ↗Boseovo-Einsteinovo rozdělení (pro tepelné záření) se při náhodném dělení zachovávají (i když střední počet fotonů samozřejmě klesá). Světlo s přesným (ostrým) počtem fotonů fotonovou statistiku při náhodném dělení naopak nezachovává.

Kvantový stav světla {*quantum state of light*};
úplný popis elektromagnetického pole v rámci kvantové teorie. Uvažujme ↗mód elektromagnetického pole v objemu V odpovídající monochromatické rovinné vlně s vlnovým vektorem $\mathbf{k}$, (kruhovou) frekvencí ω a polarizací reprezentovanou obecně komplexním jednotkovým vektorem $\mathbf{e}$. Tento stav lze popsat vektorem elektrické intenzity

$\mathrm{Re}\{\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\}$, kde

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \sqrt{\frac{2\hbar\omega}{\varepsilon V}}\, a \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) \exp(i\omega t)\, \mathbf{e}$$

(ε je permitivita, $\mathbf{r}$ je polohový vektor a t je čas). Veličina a určuje komplexní amplitudu vlny. Reálná a imaginární část, $x = \mathrm{Re}\{a\}$ a $p = \mathrm{Im}\{a\}$, se nazývají **kvadraturními složkami** {*quadrature components*}. Popis dynamiky každého monochromatického elektromagnetického módu je formálně ekvivalentní popisu pohybu harmonického oscilátoru, přičemž x je úměrné poloze a p hybnosti. Toho se využívá při kvantování elektromagnetického pole: každý mód se popíše jako kvantový harmonický oscilátor. Kvantový harmonický oscilátor se vyznačuje především tím, že jeho energie je kvantována, tj. může nabývat pouze diskrétních hodnot

$$\mathcal{E}_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right),$$

$\hbar$ je (modifikovaná) Planckova konstanta, n je přirozené číslo. V případě elektromagnetického pole mluvíme o n jako o počtu ↗fotonů. Při kvantování se nahradí klasické veličiny operátory působícími na Hilbertově prostoru, jehož prvky reprezentují stavy pole. Komplexní amplituda a je nahrazena tzv. **anihilačním operátorem** {*annihilation operator*} $\hat{a}$. Komplexně sdružené veličině a^*, odpovídá tzv. **kreační operátor** {*creation operator*} $\hat{a}^+$. Operátory $\hat{a}_k$ a $\hat{a}_k^+$ (index k zde odlišuje různé módy) splňují následující komutační relace: $[\hat{a}_k^+, \hat{a}_{k'}^+] = [\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}] = 0$, $[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^+] = \delta_{kk'}$ (výraz $[\hat{A},\hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ se nazývá komutátor a Kroneckerův symbol $\delta_{kk'}$ je roven 1 pro $k = k'$ a 0 jinak). Veličina $|a|^2$, která byla v klasické teorii úměrná energii módu, je nahrazena operátorem počtu fotonů $\hat{n} = \hat{a}^+\hat{a}$. ↗Vlastní stav operátoru počtu fotonů se nazývá **Fockův stav** {*Fock state*}; odpovídající ↗vlastní hodnotou je počet fotonů v módu: $\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle$. Platí: $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$, $\hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$. Fockovy stavy tvoří úplný ortonormální systém. Lze je tedy použít jako bázi v Hilbertově prostoru stavů (pro daný mód). Fockův stav s vlastním číslem 0 se označuje jako **vakuový stav** {*vacuum state*}. Jiným kvantovým stavem je např. ↗koherentní stav. Ne všechny veličiny lze podle kvantové teorie měřit zároveň s libovolnou přesností. V některých stavech mohou mít jisté veličiny přesně definované hodnoty, jiné veličiny budou ale zcela neurčité. Míry neurčitosti některých veličin jsou totiž vázány tzv. ↗relacemi neurčitosti. Např. pro neurčitosti kvadraturních složek, σ_x, σ_p, platí:

$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{1}{4}.$$

Dynamika každého stavu pole se řídí ↗Schrödingerovou rovnicí s ↗Hamiltoniánem tvořeným součtem Hamiltoniánů harmonických oscilátorů odpovídajících jednotlivým módům:

$$\hat{H} = \sum_k \hbar\omega_k \left(\hat{n}_k + \frac{1}{2}\right),$$

kde k čísluje módy. Vlastní stav Hamiltoniánu je určen množinou vlastních čísel operátorů počtu fotonů příslušejících Fockovým stavům jednotlivých módů: $|\{n_k\}\rangle =$

$|n_1\rangle\,|n_2\rangle\ldots$. Odpovídající hodnota energie je dána součtem energií příslušejících jednotlivým módům.

Koherentní stav světla {*coherent-state of light*};
↗kvantový stav definovaný jako ↗vlastní stav ↗anihilačního operátoru $\hat{a}$ určitého ↗módu elektromagnetického pole. Tj. $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$, kde α je obecně komplexní ↗vlastní hodnota. V bázi ↗Fockových stavů má koherentní stav tvar:

$$|\alpha\rangle = \mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle.$$

Počet fotonů ani energie tedy nejsou určeny přesně. ↗Fotonová statistika se řídí ↗Poissonovým rozdělením se střední hodnotou počtu fotonů $|\alpha|^2$ ($p(n) = |\langle n|\alpha\rangle|^2$). Koherentní stavy nejsou vzájemně ortogonální, ale tvoří úplný systém. V koherentním stavu se minimalizuje součin neurčitostí ↗kvadraturních složek; konkrétně je $\sigma_x = \sigma_p = \frac{1}{2}$. Pole v koherentním stavu je ↗úplně koherentní.

Stlačený stav světla {*squeezed-state of light*};
neklasický stav světla se stlačenými fluktuacemi některé dynamické proměnné. I když součin neurčitostí ↗kvadraturních složek $\sigma_x \sigma_p$ nelze zmenšit pod jeho minimální hodnotu rovnou $\frac{1}{4}$, neurčitost jedné kvadraturní složky může být zmenšena (stlačena) pod $\frac{1}{2}$ – samozřejmě za cenu zvětšení neurčitosti druhé složky. Odpovídající ↗kvantový stav světla se nazývá **kvadraturně stlačený** {*quadrature squeezed*}. Kruh, jenž vymezoval neurčitost kvadraturních složek v případě ↗koherentního stavu, je stlačen např. do tvaru elipsy. Asymetrie v neurčitostech dvou kvadraturních komponent se projevuje v časovém průběhu elektrické intenzity. Její neurčitost se periodicky zvětšuje a zmenšuje – v určitých okamžicích tedy dochází k redukci šumu. Díky této vlastnosti, je stlačené světlo vhodné pro přesná měření a pro přenos informace. Jiným druhem neklasického světla je **subpoissonovské světlo** {*sub-Poisson light, photon number squeezed*}, tj. světlo se „stlačenými“ fluktuacemi počtu fotonů. ↗Variance rozdělení počtu fotonů je v tomto případě menší než hodnota odpovídající ↗koherentnímu stavu (tedy než variance ↗Poissonova rozdělení): $\sigma_n^2 < \bar{n}$. Takovéto záření není možné popsat aparátem klasické fyziky. Příkladem subpoissonovského světla je ↗Fockův stav, jenž obsahuje určitý (přesný) počet fotonů.

Literatura k části 7.2.2 Foton a fotonová statistika:

Haken, H.: Light, vol. 1, North Holland, Amsterdam, 1981.

Mandel, L., Wolf, E.: Optical coherence and quantum optics, Cabmridge Univ. Press, New York, 1995.

Peřina, J., Hradil, Z., Jurčo, B.: Quantum optics and fundamentals of physics, Kluwer, Dordrecht, 1994.

Saleh, B.E.A., Teich, M.C.: Základy fotoniky, sv. 3, Matfyzpress, Praha, 1995.