1. (Kittel, str.69, řešený)
   - najděte reciprokou mřížku k mřížce sc
   - najděte reciprokou mřížku k mřížce bcc
   - najděte reciprokou mřížku k mřížce fcc

2. (Kittel, str.81, př.1)
   Inverze Fourierovy řady.
   - Ukažte, že Fourierův koeficient n_p v rovnici
   $$n(x) = \sum_p n_p e^{i2\pi px/a}$$
   je roven
   $$n_p = \frac{1}{a}\int_0^a dx\, n(x) \exp\left(-\frac{i2\pi xp}{a}\right).$$
   - Ukažte, že inverze $n(\mathbf{r}) = \sum n_{\mathbf{G}} \exp(i\mathbf{G}.\mathbf{r})$ dává
   $$n_{\mathbf{G}} = V_c^{-1} \int_{buňka} dV n(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{G}.\mathbf{r}),$$
   kde V_c je objem buňky krystalu.

3. Železo krystalizuje při teplotách nižších než $910^0 C$ v prostorově centrované kubické mřížce (BCC). Při vyšších teplotách krystalizuje v plošně centrované kubické mřížce (FCC). Vypočtěte poměr hustoty železa v obou uvedených mřížkách za předpokladu, že poloměr atomů r v obou mřížkách je stejný.

4. Prvky souměrnosti rombické soustavy tvoří tzv. bodovou grupu mmm. Jsou to tři reflexní roviny kolmé na souřadné osy, tři dvojčetné osy podél souřadnicových os, otočení o 360^0 (jednočetná osa) a inverzní bod v počátku souřadného systému. Zapište tyto operace souměrnosti pomocí matic.

5. Spočítejte maximální objem vyplněný tuhými koulemi pro tyto mřížky: sc, bcc, fcc, hcp a diamant.

6. Najděte všechny operace symetrie krychle.

7. Pomocí práškové metody zkoumáme rtg zářením o vlnové délce $\lambda = 2\AA$ vzorek india (tetragonální prostorově centrovaná mřížka): $a = b = 3.244\AA$, $c = 4.938\AA$. Spočítejte úhly, pod kterými se odklání kužele difraktovaného záření od směru dopadu.

8. (Kittel, str.186, př.3)
Ukažte, že chemický potenciál dvojrozměrného Fermiho plynu je

$$\mu(T) = k_B T \ln\left[\exp\left(\frac{\pi n \hbar^2}{m k_B T}\right) - 1\right]$$

pro n elektronů na jednotkovou plochu.

9. (Kittel, str.186, př.6)
Frekvenční závislost elektrické vodivosti.
Využijte rovnice $m(dv/dt + v/\tau) = -eE$ pro driftovou rychlost elektronů a ukažte, že vodivost při frekvenci ω je

$$\sigma(\omega) = \sigma(0)\left(\frac{1 + i\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2}\right),$$

kde $\sigma(0) = ne^2\tau/m$.

10. Najděte energetické spektrum elektronu pohybujícího se v periodickém potenciálu $V(x)$ nenulovém pouze v okolí bodů $x = n.a$ (n je celé číslo), kde $V(x) = V$. Proveďte pro případ, kdy šířka oblasti d, kde $V(x) = V$ se blíží k nule a výška V k ∞; přičemž $V.d = konst$.

11. V metodě těsné vazby sestrojujeme vlnovou funkci elektronu pomocí Blochovské kombinace lokálních funkcí. Najděte pro případ prosté krychlové soustavy vyjádření pro energii elektronu a spočtěte jeho efektivní hmotnost.

    Základní stav elektronu v potenciálu $U(\mathbf{r})$ izolovaného atomu je popsán vlnovou funkcí $\phi(\mathbf{r})$ a přísluší mu energie E_0. Vliv jednoho atomu na ostatní je malý, takže přibližná vlnová funkce elektronu v celém krystalu je daná kombinací

$$\psi_k(\mathbf{r}) = \sum_j C_{jk}\phi(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j).$$

    V případě Blochovské kombinace lokálních funkcí platí

$$\psi_k(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_j e^{ik\mathbf{r}_j}\phi(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j),$$

    kde N je počet atomů.

    Energii elektronu spočítejte v prvním řádu poruchové teorie a vezměte v úvahu pouze případ, kdy se ovlivňují jen nejbližší sousední atomy.

12. (Kittel, str.209, př.6)
Čtvercová mřížka.
Uvažujte dvourozměrnou čtvercovou mřížku s krystalovým potenciálem tvaru

$$V(x,y) = -4V\cos\frac{2\pi x}{a}\cos\frac{2\pi y}{a}.$$

Použijte ústřední rovnici a nalezněte přibližně velikost zakázaného pásu v bodě $(\pi/a, \pi/a)$ v rohu Brillouinovy zóny. K tomu postačí řešit determinant řádu 2x2.

13. (Kittel, str.122, odvozené, +str.135, př.5)

    - Odvoďte disperzní zákon

    $$\omega^2 = \frac{2}{M}\sum_{p>0} C_p[1 - \cos(pKa)]$$

    pro kmity lineárního řetízku stejných atomů pokud na sebe působí i vzdálenější atomy. (pouze jeden atom v primitivní buňce)

    - Kohnova anomálie
    Předpokládejte, že mezirovinná silová konstanta C_p má tvar

    $$C_p = A\frac{\sin(pk_0a)}{pa},$$

    kde A a k_0 jsou konstanty a index p nabývá všech celých čísel. Takovou závislost pro silovou konstantu lze očekávat v kovech. Užijte tento výraz v disperzním vztahu odvozeném v prvním bodě a nalezněte vztah pro ω_2. Závislost ω_2 na K nebo ω na K má v bodě k_0 svislou tečnu: v disperzním zákoně $\omega(K)$ je v bodě k_0 zlom.

14. Odvoďte disperzní relaci pro kmity lineárního řetízku stejných atomů v případě, kdy se ovlivňují jen nejbližší sousední atomy. Hledejte řešení ve tvaru reálné funkce

$$u_n = u\cos(\omega t - nKa).$$

15. (Kittel, str.134, př.1)
Kmity čtvercové mřížky.
Uvažujme příčné kmity rovinné čtvercové mřížky tvořené řadami a sloupci stejných atomů a označme $u_{l,m}$ výchylky atomu v l-tém sloupci a m-té řadě, kolmou k rovině mřížky. Hmotnost každého atomu je M, silová konstanta mezi nejbližšími atomy je C.

    - Ukažte, že pohybová rovnice je

    $$M\frac{d^2u_{l,m}}{dt^2} = C[(u_{l+1,m} + u_{l-1,m} - 2u_{l,m}) + (u_{l,m+1} + u_{l,m-1} - 2u_{l,m})].$$

- Předpokládejte řešení pohybové rovnice ve tvaru

  $$u_{l,m} = u(0)\exp[i(lK_x a + mK_y a - \omega t)],$$

  kde a označuje vzdálenost mezi nejbližšími atomy. Ukažte, že pohybová rovnice má řešení, když je splněna podmínka

  $$\omega^2 M = 2C[2 - \cos(K_x a) - \cos(K_y a)].$$

  Získali jsme disperzní zákon pro danou úlohu.
- Ukažte, že oblast **K** prostoru, pro kterou existují nezávislá řešení, lze vzít ve tvaru čtverce se stranou $2\pi/a$. To je první Brillouinova zóna čtvercové mřížky. Nakreslete závislost ω na K pro případ $K = K_x, K_y = 0$ a pro případ $K_x = K_y$.
- V případě $Ka \ll 1$ ukažte, že platí

  $$\omega = \left(\frac{Ca^2}{M}\right)^{\frac{1}{2}} (K_x^2 + K_y^2)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{Ca^2}{M}\right)^{\frac{1}{2}} K$$

  takže rychlost je v této limitě konstantní.

16. Spočítejte limity Einsteinova modelu měrného tepla

$$C_V = 3Nk\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)^2 \frac{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}}{(e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1)^2}$$

pro $T \to 0$ a $T \to \infty$.

17. (Kittel, str.152-153)

Tepelná roztažnost.
Ukažte, že anharmonický člen ve vztahu

$$U(x) = cx^2 - gx^3$$

pro popis potenciální energie klasického oscilátoru má za následek tepelnou roztažnost, kdy střední hodnota výchylky atomů z jejich rovnovážné polohy je závislá na teplotě.

18. (Feynmanovy přednášky z fyziky (slovenské vydání), kapitola 35, vztahy (35.10)-(35.25))
Paramagnetismus.
Pomocí kvantové mechaniky odvoďte vzorec pro indukovanou magnetizaci M ve slabých magnetických polích pro speciální případ atomů se spinem 1/2. Výsledek porovnejte s klasickým vzorcem

$$M = \frac{N\mu^2 B}{3k_B T},$$

kde N je počet atomů v jednotce objemu, μ^2 je druhá mocnina vektoru magnetického momentu, B je magnetická indukce vnějšího pole, k_B Boltzmanova konstanta a T teplota. Konečný výsledek zobecněte pro případ atomů s libovolným spinem j.