Přechod od skalárního k vektorovému popisu optického pole při zachování jeho kvadratických charakteristik

Miroslav Ježek

1998

Abstrakt

Konstrukce vektorového elektromagnetického popisu optického pole z popisu skalárního je známý a často používaný postup. Je snadné nahlédnout, že používané metody obecně *ne*zachovávají některé důležité charakteristiky popisovaného pole. Například intenzita ve skalární aproximaci a hustota elektromagnetické energie v příslušném zkonstruovaném vektorovém poli jsou obecně rozdílné. Stejně tak tok ve skalární aproximaci a Poyntingův vektor.
V předložené práci je užito reprezentačního teorému pro Helmholtzovu rovnici k přechodu od skalárního popisu k vektorovému, avšak metoda je modifikována zavedením podmínek zaručujících, že zmíněné kvadratické charakteristiky jsou v původním skalárním poli a vygenerovaném vektorovém poli shodné.
Jsou zmíněny též alternativní metody a obecné aspekty vztahu skalární versus vektorový popis. Pro ilustraci vybudované metodiky je přiloženo také několik řešených příkladů.

Poděkování

Velmi rád bych poděkoval doc. Jiřímu Bajerovi, doc. Zdeňkovi Bouchalovi a mgr. Monice Slintákové za obrovskou službu, kterou mi poskytli zapůjčením potřebné literatury. Zvláštní poděkování pak náleží prvním dvěma jmenovaným za všestrannou pomoc a cenné diskuze (nejen ve vztahu k této práci).

Obsah

1 Úvod

Světlo je elektromagnetické vlnění a k jeho klasickému exaktnímu popisu jsme nuceni použít vektorové elektromagnetické teorie založené na Maxwellových rovnicích.
Pro většinu problémů diskutovaných v optice je ale dostačujícím aparátem skalární teorie založená na jediné skalární (obecně komplexní) funkci, přičemž kvadrát jejího modulu je považován za optickou intenzitu (resp. hustotu energie či vzruchu) v daném bodě. Lze také definovat tok této veličiny a odvodit vztah mezi nimi (rovnici kontinuity).
S optickým polem pracujeme (skalárně nebo vektorově) jako s obecně časově proměnným polem, nebo jej můžeme rozložit na soubor časově harmonicky proměnných vln a ty studovat samostatně (Fourierova transformace).
Všechny tyto základní metody popisu a příslušné veličiny jsou zavedeny a zkoumány v několika následujících odstavcích.

1.1 Elektromagnetická teorie

Tato sekce nemá přímý vztah k tématu práce a měla by být chápána pouze jako jakési vybudování symboliky a přehled známých vztahů, na které se budeme v dalším textu odkazovat.

Elektromagnetické (dále jen EM) pole v homogenním izotropním bezztrátovém prostředí bez zdrojů (pokud nebude řečeno jinak, budeme se zabývat pouze tímto prostředím) může být kompletně popsáno vektorem elektrické intenzity $\vec{\tilde{E}}(\vec{r},t)$[1] a vektorem magnetické intenzity $\vec{\tilde{H}}(\vec{r},t)$ vyhovujícími sadě Maxwellových rovnic

$$\begin{aligned} &\nabla \times \vec{\tilde{H}}(\vec{r},t) - \epsilon \tfrac{\partial}{\partial t}\vec{\tilde{E}}(\vec{r},t) = 0, \qquad &\nabla \cdot \vec{\tilde{E}}(\vec{r},t) = 0, \\ &\nabla \times \vec{\tilde{E}}(\vec{r},t) + \mu \tfrac{\partial}{\partial t}\vec{\tilde{H}}(\vec{r},t) = 0, \qquad &\nabla \cdot \vec{\tilde{H}}(\vec{r},t) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Konstanty ϵ a μ označují po řadě elektrickou permitivitu a magnetickou permeabilitu prostředí. Známým postupem nalezneme, že oba vektory splňují homogenní vlnovou rovnici, tj. platí

$$\Delta\vec{\tilde{E}}(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\tilde{E}}(\vec{r},t) = \Box\vec{\tilde{E}}(\vec{r},t) = 0 \tag{2}$$

a podobně pro vektor $\vec{\tilde{H}}(\vec{r},t)$. Konstanta $c = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ představuje rychlost světla v prostředí.

Popis EM pole pomocí dvou vektorů intenzit není jediný možný a ani nejúspornější. Definujeme-li vektorový potenciál $\vec{\tilde{A}}(\vec{r},t)$ a skalární potenciál $\tilde{\varphi}(\vec{r},t)$ vztahy

$$\vec{\tilde{H}}(\vec{r},t) = \frac{1}{\mu}\nabla \times \vec{\tilde{A}}(\vec{r},t) \quad \text{a} \quad \vec{\tilde{E}}(\vec{r},t) = -\nabla\tilde{\varphi}(\vec{r},t) - \frac{\partial}{\partial t}\vec{\tilde{A}}(\vec{r},t), \tag{3}$$

[1] Vlnka nad vektorem zdůrazňuje časovou závislost; naproti tomu $\vec{E}(\vec{r})$.

pak (jak se snadno přesvědčíme prostým dosazením do (1)) takovéto vektory $\vec{\tilde{E}}(\vec{r},t)$ a $\vec{\tilde{H}}(\vec{r},t)$ vyhovují Maxwellovým rovnicím (1) právě tehdy, splňují-li potenciály $\vec{\tilde{A}}(\vec{r},t)$ a $\tilde{\varphi}(\vec{r},t)$ homogenní vlnové rovnice stejného tvaru jako (2) a současně Lorentzovu kalibrační podmínku

$$\nabla \cdot \vec{\tilde{A}}(\vec{r},t) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\varphi = 0. \tag{4}$$

Je důležité, že vektorový a skalární potenciál není určen vztahy (3) jednoznačně. Přesněji, kalibrační transformace (gauge transformation, viz [1] str. 73)

$$\begin{aligned} \vec{\tilde{A}}_{\text{nové}}(\vec{r},t) &= \vec{\tilde{A}}_{\text{původní}}(\vec{r},t) + \nabla\tilde{\chi}(\vec{r},t), \\ \tilde{\varphi}_{\text{nové}}(\vec{r},t) &= \tilde{\varphi}_{\text{původní}}(\vec{r},t) - \tfrac{\partial}{\partial t}\tilde{\chi}(\vec{r},t) \end{aligned} \tag{5}$$

nemění tvar EM pole, tj. původní a nové vektory intenzit jsou shodné. Výhodnost zavedení potenciálů je daná právě skutečností, že kalibrační funkci $\chi(\vec{r},t)$ můžeme zvolit tak, aby skalární potenciál vymizel (viz předchozí citaci). Elektromagnetické pole je pak popsáno pouze vektorovým potenciálem $\vec{\tilde{A}}(\vec{r},t)$ vyhovujícím homogenní vlnové rovnici

$$\Delta\vec{\tilde{A}}(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\tilde{A}}(\vec{r},t) = \Box\vec{\tilde{A}}(\vec{r},t) = 0 \tag{6}$$

a Lorentzově kalibrační podmínce, která se redukuje na tvar

$$\nabla \cdot \vec{\tilde{A}}(\vec{r},t) = 0. \tag{7}$$

Stojí za zmínku, že obecné EM pole můžeme vyjádřit také pomocí dvou polarizačních potenciálů (Hertzových vektorů; viz například [1] nebo [2]) vybraných tak, aby automaticky splňovaly Lorentzovu kalibrační podmínku (4). Například

$$\begin{aligned} \vec{\tilde{A}}(\vec{r},t) &= \epsilon\mu\tfrac{\partial}{\partial t}\vec{\tilde{\Pi}}_{\mathrm{e}}(\vec{r},t) &+& \mu\nabla\times\vec{\tilde{\Pi}}_{\mathrm{m}}(\vec{r},t) \quad \text{a} \\ \tilde{\varphi}(\vec{r},t) &= -\nabla\cdot\vec{\tilde{\Pi}}_{\mathrm{e}}(\vec{r},t) &+& 0, \end{aligned} \tag{8}$$

kde první členy na pravé straně představují pole elektrického typu a členy druhé pak pole magnetického typu. Vektory intenzit jsou pomocí elektrického a magnetického polarizačního potenciálu vyjádřeny následovně

$$\begin{aligned} \vec{\tilde{E}}(\vec{r},t) &= \nabla\times\nabla\times\vec{\tilde{\Pi}}_{\mathrm{e}}(\vec{r},t) &-& \mu\nabla\times\tfrac{\partial}{\partial t}\vec{\tilde{\Pi}}_{\mathrm{m}}(\vec{r},t) \\ \vec{\tilde{H}}(\vec{r},t) &= \epsilon\nabla\times\tfrac{\partial}{\partial t}\vec{\tilde{\Pi}}_{\mathrm{e}}(\vec{r},t) &+& \nabla\times\nabla\times\vec{\tilde{\Pi}}_{\mathrm{m}}(\vec{r},t). \end{aligned} \tag{9}$$

Polarizační potenciály $\vec{\tilde{\Pi}}_{\mathrm{x}}(\vec{r},t)$ $(\mathrm{x}=\mathrm{e},\mathrm{m})$ musí vyhovovat homogenním vlnovým rovnicím

$$\Delta\vec{\tilde{\Pi}}_{\mathrm{x}}(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\tilde{\Pi}}_{\mathrm{x}}(\vec{r},t) = \Box\vec{\tilde{\Pi}}_{\mathrm{x}}(\vec{r},t) = 0, \tag{10}$$

má-li zůstat v platnosti (6) a analogický vztah pro skalární potenciál (snadno se o tom přesvědčíme prostým dosazením definičních předpisů (8) do homogenních vlnových rovnic pro vektorový a skalární potenciál).

Vzhledem k již zmíněné možnosti Fourierova rozkladu stačí, omezíme-li se na studium monofrekvenčního EM pole $\vec{E}(\vec{r},\omega)e^{i\omega t}$ a $\vec{H}(\vec{r},\omega)e^{i\omega t}$. Obecně časově proměnné pole získáme superpozicí jednotlivých monofrekvenčních příspěvků ve tvaru

$$\vec{\tilde{E}}(\vec{r},t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\vec{r},\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

a podobně pro $\vec{\tilde{H}}(\vec{r},t)$. Pro jednoduchost *ne*budeme již dále explicitně vypisovat závislost na ω (u všech prostorových částí monofrekvenčních polí). Maxwellovy rovnice (1) pro prostorové složky $\vec{E}(\vec{r})$ a $\vec{H}(\vec{r})$ mají podobu

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H}(\vec{r}) - i\epsilon\omega\vec{E}(\vec{r}) = 0, \qquad & \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 0, \\ \nabla \times \vec{E}(\vec{r}) + i\mu\omega\vec{H}(\vec{r}) = 0, \qquad & \nabla \cdot \vec{H}(\vec{r}) = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

o čemž se můžeme lehce přesvědčit dosazením monofrekvenčních polí $\vec{E}(\vec{r})e^{i\omega t}$ a $\vec{H}(\vec{r})e^{i\omega t}$ do Maxwellových rovnic (1), provedením časových derivací a vynásobením rovnic členem $e^{-i\omega t}$. Stejně jako v případě obecně časově proměnného pole můžeme i v monofrekvenčním případě pracovat s potenciály (vektorovým a skalárním nebo Hertzovými), jejichž zavedení zůstává stejné (tj. předpisy (3) a (8)) pouze s tím rozdílem, že vymizí časová závislost veličin a příslušné vlnky nad nimi a parciální časové derivace $\partial/\partial t$ se změní na $i\omega$. Tedy, monofrekvenční EM pole je kompletně určené[2] vektorovým potenciálem $\vec{A}(\vec{r})$ vyhovujícím Helmholtzově rovnici

$$(\Delta + k^2)\vec{A}(\vec{r}) = 0, \tag{12}$$

(kde konstanta $k = \omega^2/c^2$ je vlnové číslo) a Lorentzově kalibrační podmínce

$$\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}) = 0. \tag{13}$$

Poslední dvě rovnice byly pomocí uvedených úprav získány z homogenní vlnové rovnice (6) a Lorentzovy kalibrační podmínky (7).

Helmholtzova rovnice je jedním ze základních vztahů, ze kterých budeme dále vycházet. Je to rovnice, kterou musí splňovat prostorová část monofrekvenční složky *každé* veličiny vyhovující homogenní vlnové rovnici. Helmholtzovu rovnici tedy splňují vektory intenzit $\vec{E}(\vec{r})$, $\vec{H}(\vec{r})$ a všechny potenciály. Je-li $\vec{C}(\vec{r})$ jeden z těchto vektorů, platí

$$(\Delta + k^2)\vec{C}(\vec{r}) = (\nabla\nabla\cdot \; - \nabla\times\nabla\times \; + k^2)\vec{C}(\vec{r}) = 0. \tag{14}$$

Obecně se jedná o tři vázané rovnice pro tři složky (C_j kde $j = 1,2,3$) vektoru $\vec{C}(\vec{r})$; tři nezávislé rovnice získáme v kartézské soustavě souřadné (pak je většinou řešena pouze rovnice pro jednu složku). Hledání souboru *nezávislých vektorových* řešení se relativně dlouho nevěnovala pozornost. První práce

[2] Ještě jednou je třeba zdůraznit, že hovoříme o EM poli v homogenním izotropním nevodivém prostředí bez volných nábojů a proudů!

na toto téma pocházejí od Hansena (citace lze nalézt v [2] v sekci 42.1). Je-li funkce $U(\vec{r})$ řešením skalární Helmholtzovy rovnice, tj.

$$(\Delta + k^2)U = 0, \tag{15}$$

potom tři nezávislá řešení rovnice (14) sestrojíme takto:

$$\vec{L}(\vec{r}) = \nabla U, \qquad \vec{M}(\vec{r}) = \nabla \times (\vec{\ell} U), \qquad \vec{N}(\vec{r}) = \frac{1}{k}\nabla \times \vec{M}. \tag{16}$$

Jednotkový *konstantní* vektor $\vec{\ell}$ je možno volit libovolně. Předchozí tvrzení (vektory $\vec{L}(\vec{r})$, $\vec{M}(\vec{r})$ a $\vec{N}(\vec{r})$ řeší Helmholtzovu rovnici) ověříme dosazením vektorů do vektorové Helmholtzovy rovnice (14). Jedná se velmi důležitý výsledek, který je základem reprezentačního teorému pro Helmholtzovu rovnici (viz kapitola 2) a tvoří most mezi skalárními řešeními skalární Helmholtzovy rovnice a vektorovými řešeními vektorové Helmholtzovy rovnice.

Na tomto místě by bylo dobré připomenout, že všechny dosud použité veličiny (především vektory intenzit a potenciály) lze chápat jako komplexní funkce reálných proměnných přesto, že to neodpovídá jejich fyzikální podstatě. Zvykem, kterého se budeme držet, je uložení veličiny s přímým fyzikálním smyslem $\vec{C}_{\mathrm{R}}(\vec{r})$ (reálné) do reálné části příslušného komplexního rozšíření $\vec{C}(\vec{r})$. Omezíme-li se pouze na lineární operace nad tímto komplexním rozšířením, pak v každém okamžiku můžeme říci, že reálná fyzikální veličina má průběh $\vec{C}_{\mathrm{R}}(\vec{r}) = \Re\vec{C}(\vec{r})$. V tomto přirozeném komplexním rozšíření nabývají zvláště vztahy pro v čase vystředované veličiny elegantních tvarů, jak uvidíme dále. V komplexní symbolice lze pokročit ještě dále, použijeme-li i imaginární složku komplexního rozšíření (tímto zobecněním se zabýval např. Silberstein a Bateman; viz [2] str. 46).

Důležitým aspektem každé fyzikální teorie je nenarušení zákonů zachování a jejich formulace pro danou teorii. Základním zákonem EM teorie je z tohoto pohledu Poyntingova rovnice představující zákon zachování EM energie

$$\nabla \cdot \left[\Re\vec{\tilde{E}}(\vec{r},t) \times \Re\vec{\tilde{H}}(\vec{r},t)\right] + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\epsilon}{2}(\Re\vec{\tilde{E}}(\vec{r},t))^2 + \frac{\mu}{2}(\Re\vec{\tilde{H}}(\vec{r},t))^2\right] = 0. \tag{17}$$

Rovnici lze velmi snadno odvodit ze dvou z Maxwellových rovnic (1) obsahujících rotace vektorů intenzit jejich vynásobením příslušnými opačnými vektory intenzit a jejich vzájemným odečtením. Chápeme-li výraz ve druhé hranaté závorce jako hustotu EM energie $\tilde{w}_{\mathrm{R}}(\vec{r},t) = \tilde{w}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{el}}(\vec{r},t) + \tilde{w}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{mag}}(\vec{r},t)$, pak vektorový součin v první závorce musíme interpretovat jako tok této hustoty a nazýváme ho Poyntingův vektor $\vec{\tilde{S}}_{\mathrm{R}}(\vec{r},t)$. Index 'R' pouze označuje reálnost veličiny. Pomocí těchto veličin přepíšeme (17) na tvar rovnice kontinuity EM energie

$$\nabla \cdot \vec{\tilde{S}}_{\mathrm{R}}(\vec{r},t) + \frac{\partial}{\partial t}\tilde{w}_{\mathrm{R}}(\vec{r},t) = 0. \tag{18}$$

Poyntingův vektor a hustota EM energie jsou v čase proměnné funkce s velmi vysokou frekvencí jejichž okamžité změny nejsme schopni detekovat. Význam má pro nás pouze jejich střední časová hodnota, například

$$\langle\vec{S}_{\mathrm{R}}(\vec{r})\rangle = \frac{1}{\tau_i}\int_0^{\tau_i}\left[\Re\vec{\tilde{E}}(\vec{r},t) \times \Re\vec{\tilde{H}}(\vec{r},t)\right]dt, \tag{19}$$

kde τ_i je integrační doba detektoru. Komplexní rozšíření je přímočaré, stačí si uvědomit algebraické pravidlo $\Re x = (x + x^*)/2,\ x \in \mathbb{C}$ a stejně jako v předchozím použít předpoklad o monofrekvenčnosti pole:

$$\langle \vec{S}_{\mathrm{R}}(\vec{r}) \rangle = \frac{1}{2} \Re \left[\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}^*(\vec{r}) \right]. \tag{20}$$

Je vidět, že výborným adeptem na komplexní rozšíření Poyntingova vektoru je výraz

$$\vec{S}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}^*(\vec{r}), \tag{21}$$

pak totiž středování (20) elegantně vyjádříme

$$\langle \vec{S}_{\mathrm{R}}(\vec{r}) \rangle = \Re \vec{S}(\vec{r}). \tag{22}$$

K definici (21) lze dospět ještě další cestou. Postup, kterým jsme odvodili zákon zachování EM energie (17) z Maxwellových rovnic (1), aplikujeme na Maxwellovy rovnice pro monofrekvenční pole (11) a obdržíme rovnost

$$\nabla \cdot \vec{S}(\vec{r}) = i2\omega \left[\langle \tilde{w}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{mag}}(\vec{r}, t) \rangle - \langle \tilde{w}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{el}}(\vec{r}, t) \rangle \right], \tag{23}$$

jejíž reálná část má tvar

$$\nabla \cdot \langle \vec{S}_{\mathrm{R}}(\vec{r}) \rangle = 0. \tag{24}$$

Toto tvrzení se nazývá Poyntingův teorém (viz např. [3]).

1.2 Skalární aproximace

Omezíme-li se při popisu optického pole pouze na jedinou skalární funkci, označme ji v analogii s předchozím $\tilde{U}(\vec{r}, t)$, hovoříme o tzv. skalární aproximaci, resp. o skalárním popisu optického pole. Přitom předpokládáme, že tato funkce[3] splňuje skalární homogenní rovnici

$$\Delta \tilde{U}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{U}(\vec{r}, t) = \Box \tilde{U}(\vec{r}, t) = 0 \tag{25}$$

a představuje tak amplitudu jakéhosi optického vzruchu. Je třeba zdůraznit, že jde o bezrozměrnou veličinu udávající pouze relativní poměry optického vzruchu v různých místech. Konkrétněji, funkce $\tilde{U}$ a $\lambda \tilde{U}$ (kde $\lambda \in \mathbb{C}$ je konstantní multiplikátor) popisují *totéž* pole. Jde o podobnou situaci jako v kvantové mechanice (dokonce bychom mohli prohlásit, že pro jednofotonové pole se po normování chová funkce $\tilde{U}$ jako vlnová Schrödingerova funkce).

Zásadní otázkou je vztah skalární aproximace reprezentované funkcí $\tilde{U}(\vec{r}, t)$ s exaktní EM teorií popisující pole pomocí vektorů intenzit nebo ekvivalentně pomocí potenciálů. Nejtriviálnějším řešením je považovat skalární vlnovou

[3] Opět můžeme fci $\tilde{U}(\vec{r}, t)$ považovat za komplexní, nyní nám ale nic nebrání chápat ji jako “nativně” komplexní funkci, jejíž obě složky (reálná i imaginární) se podílejí na uložení fyzikální informace (viz dále).

funkci $\tilde{U}(\vec{r},t)$ za jednu ze složek vektorů intenzit EM pole, respektive za jednu ze složek některého vektorového potenciálu. Tento přístup je v literatuře nejčastější, současně však z našeho pohledu nejméně vhodný, neboť vztah mezi původním EM polem a skalárním polem $\tilde{U}(\vec{r},t)$ je velmi neurčitý (různé složky mohou vykazovat zcela rozdílný průběh) a především nezachovávající důležité charakteristiky pole (viz dále).

Mnohem lepším a fyzikálnějším pohledem na tuto problematiku je snaha zakódovat *veškerou* informaci z přesného EM popisu do jediné skalární funkce. Na první pohled se to zdá nemožné, ale pečlivá úvaha ukazuje, že tento přenos je proveditelný. Diskuze je vynikajícím způsobem provedena v článku [4] Greena a Wolfa, který je přiložen. Klíčová je strana 1121, na které najdeme právě konstrukci skalární funkce. Využito je skutečnosti, že za našich podmínek (homogenní, izotropní a nevodivé prostředí bez zdrojů) je EM pole kompletně posáno vektorovým potenciálem $\vec{\tilde{A}}(\vec{r},t)$, navíc vyhovujícím vztahům (6) a (7). Druhý z nich znamená, že rozložíme-li $\vec{\tilde{A}}_{\mathrm{R}}(\vec{r},t) = \Re\vec{\tilde{A}}(\vec{r},t)$ v úhlové spektrum

$$\vec{\tilde{A}}_{\mathrm{R}}(\vec{r},t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\vec{\tilde{a}}(\vec{k},t)\cos(\vec{k}\cdot\vec{r}) + \vec{\tilde{b}}(\vec{k},t)\sin(\vec{k}\cdot\vec{r})\right] d\vec{k}, \tag{26}$$

pak pro reálné Fourierovy koeficienty $\vec{\tilde{a}}(\vec{k},t)$ a $\vec{\tilde{b}}(\vec{k},t)$ platí

$$\vec{\tilde{a}}(\vec{k},t)\cdot\vec{k} = 0 \quad \text{a} \quad \vec{\tilde{b}}(\vec{k},t)\cdot\vec{k} = 0. \tag{27}$$

Platnost tvrzení ověříme aplikací operátoru divergence $\nabla\cdot$ na rovnost (26). Jinak řečeno, vektorové koeficienty $\vec{\tilde{a}}(\vec{k},t)$ a $\vec{\tilde{b}}(\vec{k},t)$ mohou ležet pouze v rovině kolmé k vektoru $\vec{k}$ a lze je rozložit v této rovině do dvou nezávislých směrů reprezentovaných libovolnými nezávislými jednotkovými vektory $\vec{\ell}_1(\vec{k})$ a $\vec{\ell}_2(\vec{k})$, přičemž $\vec{\ell}_1(\vec{k}) \perp \vec{k}$ a $\vec{\ell}_2(\vec{k}) \perp \vec{k}$. Celkem obdržíme čtyři nezávislé složky

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1(\vec{r},t) &= \vec{\tilde{a}}(\vec{k},t)\cdot\vec{\ell}_1(\vec{k}), & \tilde{a}_2(\vec{r},t) &= \vec{\tilde{a}}(\vec{k},t)\cdot\vec{\ell}_2(\vec{k}), \\ \tilde{b}_1(\vec{r},t) &= \vec{\tilde{b}}(\vec{k},t)\cdot\vec{\ell}_1(\vec{k}), & \tilde{b}_2(\vec{r},t) &= \vec{\tilde{b}}(\vec{k},t)\cdot\vec{\ell}_2(\vec{k}). \end{aligned}$$

Z těchto čtyř nezávislých (v každém bodě $\vec{k}$) reálných funkcí můžeme zkompletovat dvě funkce komplexní a to 4! způsoby. Například

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}(\vec{k},t) &= \tilde{a}_1(\vec{r},t) + i\tilde{a}_2(\vec{r},t), \\ \tilde{\beta}(\vec{k},t) &= \tilde{b}_1(\vec{r},t) + i\tilde{b}_2(\vec{r},t). \end{aligned}$$

Jde o prosté nahrazení dvou vektorů (každý má dvě složky) dvěma komplexními funkcemi (každá má opět dvě složky a žádná informace se nám tudíž neztratí) v každém bodě "$\vec{k}$ prostoru". Považujme dále tyto komplexní funkce za Fourierovy koeficienty (tentokrát skalární a komplexní) nejaké komplexní skalární funkce:

$$\tilde{U}(\vec{r},t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\tilde{\alpha}(\vec{k},t)\cos(\vec{k}\cdot\vec{r}) + \tilde{\beta}(\vec{k},t)\sin(\vec{k}\cdot\vec{r})\right] d\vec{k}. \tag{28}$$

Komplexní potenciál $\tilde{U}(\vec{r},t)$ nese kompletní informaci o EM poli popsaném reálným vektorovým potenciálem $\tilde{\vec{A}}_{\mathrm{R}}(\vec{r},t)$. Můžeme tedy prohlásit:

> V oblasti prostoru bez volných nábojů a proudů vyplněné homogenním izotropním a nevodivým prostředím mohou být všechny charakteristiky EM pole vyvozeny z jediné *komplexní* skalární funkce.

Uvedené tvrzení je základem přiloženého článku [4] a má také souvislost s Whittakerovou prací [5]. Green a Wolf dále vyjadřují hustotu EM energie a její tok pomocí zavedeného komplexního potenciálu (viz str. 1132-1134)

$$
\begin{array}{lcl}
\tilde{w}(\vec{r},t) & \sim & \frac{1}{c^2}\frac{\partial\tilde{U}(\vec{r},t)}{\partial t}\frac{\partial\tilde{U}^*(\vec{r},t)}{\partial t}+\nabla\tilde{U}(\vec{r},t)\cdot\nabla\tilde{U}^*(\vec{r},t)\\
\tilde{\vec{S}}(\vec{r},t) & \sim & -\left(\frac{\partial\tilde{U}^*(\vec{r},t)}{\partial t}\cdot\nabla\tilde{U}(\vec{r},t)+\frac{\partial\tilde{U}(\vec{r},t)}{\partial t}\cdot\nabla\tilde{U}^*(\vec{r},t)\right).
\end{array}
\tag{29}
$$

Odvozené vztahy (29) sice vyhovují rovnici kontinuity

$$
\nabla\cdot\tilde{\vec{S}}(\vec{r},t)+\frac{\partial}{\partial t}\tilde{w}(\vec{r},t)=0,
$$

avšak (jak uvidíme vzápětí) vztahy (29) nekorespondují se standardně používanými “kvadratickými charakteristikami” pro skalární pole. Konkrétně výraz pro hustotu EM energie není shodný s hustotou $\tilde{\rho}(\vec{r},t)$ ve skalární aproximaci. Dalším problémem Greenova-Wolfova postupu (který je velmi elegantní v rovině teoretické) je jeho nevhodnost pro použití při konkrétních přechodech mezi exaktně vektorově popsaným polem a skalárním polem. Proto z něj v dalším nebudeme vycházet. Náš postup bude předpokládat monofrekvenční pole a bude založen na reprezentačním teorému pro Helmholtzovu rovnici (viz kapitola 2).

Již několikrát jsme se zmínili o kvadratických charakteristikách optického pole. V EM teorii jsou jimi již definovaná hustota EM energie a Poyntingův vektor. Ve skalární teorii se jedná o hustotu (resp. intezitu) a tok hustoty. Nyní je zavedeme.

První ale učiníme domluvu týkající se značení. Pro jednoduchost zápisu již nadále *ne*budeme explicitně vypisovat závislost na časové a prostorových souřadnicích. Proměnnost v prostoru je automatická a případnou proměnnost v čase vyjádří vlnka nad veličinou. Stejně tak nebudeme zdůrazňovat komplexnost.

Mějme optické pole popsané funkcí $\tilde{U}$ vyhovující homogenní vlnové rovnici (25). Zapišme tutéž rovnici, jen komplexně sdruženou. První rovnici vynásobme funkcí $\tilde{U}^*$, druhou funkcí $\tilde{U}$. Získali jsme soustavu

$$
\begin{array}{lcl}
\tilde{U}^*\Delta\tilde{U}-\frac{1}{c^2}\tilde{U}^*\frac{\partial^2}{\partial t^2}\tilde{U} & = & 0\\
\tilde{U}\Delta\tilde{U}^*-\frac{1}{c^2}\tilde{U}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\tilde{U}^* & = & 0.
\end{array}
$$

Rovnice od sebe odečteme a po úpravě (vytknutí $\nabla\cdot$ a $\partial/\partial t$ před závorky) obdržíme

$$
\nabla\cdot\left[-(\tilde{U}\nabla\tilde{U}^*-\tilde{U}^*\nabla\tilde{U})\right]+\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{c^2}(\tilde{U}\frac{\partial}{\partial t}\tilde{U}^*-\tilde{U}^*\frac{\partial}{\partial t}\tilde{U})\right]=0. \tag{30}
$$

Výraz má podobu rovnice kontinuity pro veličinu ve druhé hranaté závorce. V časově proměnném poli je právě tato veličina považována za hustotu (vzruchu), resp. intenzitu ve skalární aproximaci. Označíme-li ji symbolem $\tilde{\rho}$ a výraz v první hranaté závorce symbolem $\tilde{\vec{j}}$, můžeme (30) přepsát na tvar

$$\nabla \cdot \tilde{\vec{j}} + \frac{\partial}{\partial t}\tilde{\rho} = 0. \tag{31}$$

Veličina $\nabla \cdot \tilde{\vec{j}}$ popisuje výtok hustoty $\tilde{\rho}$ v daném místě a vektor $\tilde{\vec{j}}$ budeme proto chápat jako tok hustoty ve skalární aproximaci. Srovnáme-li zavedení kvadratických veličin $\tilde{\vec{j}}$ a $\tilde{\rho}$ se vztahy (29), vidíme již zmíňěný rozdíl.
Zaměřme se na monofrekvenční pole $Ue^{i\omega t}$, neboť z těchto můžeme (jak již bylo několikrát řečeno) superpozicí

$$\tilde{U} = \int_{-\infty}^{\infty} Ue^{i\omega t} d\omega$$

vytvořit pole obecné. Dosazením do definičních vztahů pro hustotu $\tilde{\rho}$ a tok hustoty $\tilde{\vec{j}}$ získáme

$$\begin{array}{rcl} \rho & = & -\frac{2i\omega}{c^2} UU^* \sim UU^* \quad \text{a} \\ \vec{j} & = & -(U\nabla U^* - U^*\nabla U). \end{array} \tag{32}$$

Zde se nám již objevuje známý člen UU^* obvykle postulovaný jako intenzita skalárního optického pole (viz např. [1], [2] nebo třeba Goodmanův Úvod do fourierovské optiky). Pro tuto interpretaci hovoří také již zmíněná podobnost s kvantovou mechanikou. Pro jednofotonové pole považujeme funkci $\tilde{U}$, resp. U za vlnovou funkci a je proto logické interpretovat kvadrát její absolutní hodnoty $|U|^2 = UU^*$ jako "hustotu pravděpodobnosti výskytu fotonu" což znamená intenzitu. Je třeba ještě poznamenat, že rovnice kontinuity (31) nabývá pro monofrekvenční pole $Ue^{i\omega t}$ tvar

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0.$$

Tvrzení lze ověřit buď dosazením vztahů (32) do rovnice (31) nebo zopakováním postupu vedoucího k rovnici (30), přičemž vyjdeme z Helmholtzovy rovnice pro U místo z vlnové rovnice. Bylo by jistě zajímavé srovnat tento vztah s Poyntingovým teorémem (24).

Postup, kterým jsme zavedli kvadratické charakteristiky skalárního pole (hustotu a tok hustoty), je sice přímočarý, ale existuje možnost, jak jej zobecnit i na pole kvazimonofrekvenční. Toto zobecnění, které ještě více prohlubuje analogii mezi skalárním popisem optického pole a kvantovou mechanikou, nyní provedeme.
Předpokládejme kvazimonofrekvenční pole $\tilde{U}e^{i\omega t}$, kde člen $e^{i\omega t}$ popisuje rychlé optické oscilace a funkce $\tilde{U}$ je v čase *pomalu* proměnná. Dosaďme do homogenní vlnové rovnice[4], proveďme časové derivace a vynásobme rovnici výrazem $\exp(-i\omega t)/c^2$. Obdržíme rovnost

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\tilde{U} + 2i\frac{k}{c}\frac{\partial}{\partial t}\tilde{U} = \Delta\tilde{U} + k^2\tilde{U}. \tag{33}$$

[4] Jde o podobný postup jako při odvození paraxiální Helmholtzovy rovnice, nebo při limitním přechodu od rovnic relativistické kvantové mechaniky k rovnici Schrödingerově.

Vzhledem k tomu, že funkce $\tilde{U}$ je pomalu proměnná v čase, lze diskutovat zanedbání prvního členu předchozí rovnice. Přesněji, platí-li

$$\left|\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\tilde{U}\right| \ll \left|2i\frac{k}{c}\frac{\partial}{\partial t}\tilde{U}\right|,$$

tj. po parciální integraci dle času, dělení $\tilde{U}$ a vynechání dvojky na pravé straně

$$\left|\frac{\frac{\partial}{\partial t}\tilde{U}}{\tilde{U}}\right| \equiv \text{ relativní změna } \tilde{U} \text{ v čase } \ll \omega, \tag{34}$$

můžeme zanedbat první člen oproti druhému a psát (33) ve výsledném tvaru

$$2i\frac{\omega}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\tilde{U} = \hat{\mathcal{H}}\tilde{U}, \tag{35}$$

kde jsme využili vztahu $k = \omega/c$ a označili Helmholtzův operátor $(\Delta + k^2)$ symbolem $\hat{\mathcal{H}}$. Podobnost "časově paraxiální" Helmholtzovy rovnice (35) se Schrödingerovou rovnicí je zřejmá. Použijeme tudíž pro odvození rovnice kontinuity stejný postup jako v kvantové mechanice. Rovnici (35) znásobíme funkcí $\tilde{U}^*$, komplexně sdruženou rovnici funkcí $\tilde{U}$ a vzájemně je odečteme. Získáme

$$\nabla \cdot \vec{\tilde{j}} + \frac{\partial}{\partial t}\tilde{\rho} = 0, \tag{36}$$

kde

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= \tilde{U}\tilde{U}^*, \\ \vec{\tilde{j}} &= -i\ const\ (\tilde{U}\nabla\tilde{U}^* - \tilde{U}^*\nabla\tilde{U}), \\ const &= \tfrac{c}{2k} = \tfrac{c^2}{2\omega}. \end{aligned} \tag{37}$$

Jde o naprosto stejné vztahy jako v případě (31) a (32), pouze $\tilde{\rho}$ a $\vec{\tilde{j}}$ si vyměnily konstantní činitel $i\ const$ (odpovídá to vynásobení rovnice (31) výrazem $ic^2/2\omega$) a nad veličinami se objevily vlnky – vztahy (36), (37) platí i pro v čase proměnné pole. Platnost je ovšem pouze přibližná a je tím lepší, čím přesněji je splněna podmínka (34) časové paraxiálnosti.
Dokonale je vyhověno podmínce (35) v případě monofrekvenčního pole (tj. když $\tilde{U}$ přejde v U) a vztahy (37) získají až na zmíněnou konstantu podobu shodnou s (32):

$$\rho = UU^* \tag{38}$$

a

$$\begin{aligned} \vec{j} &= -i\ const\ (U\nabla U^* - U^*\nabla U) \ = \ \rho\vec{v}, \\ \vec{v} &= i\ const\ \left(\tfrac{\nabla U}{U} - \tfrac{\nabla U^*}{U^*}\right) \quad [m \cdot s^{-1}], \\ const &= \tfrac{c}{2k} = \tfrac{c^2}{2\omega}. \end{aligned} \tag{39}$$

Výhodnost přidružení činitele $const$ k $\vec{j}$ je zřejmá.

Nyní, když máme zavedeny kvadratické charakteristiky skalárního pole můžeme přesněji zformulovat náš cíl. Omezme se v dalším výhradně na monofrekvenční pole a předpokládejme, že veličinami měřitelnými (jistým fiktivním detektorem s obrovskou prostorovou rozlišovací schopností avšak časově integrujícím) na optickém poli jsou při vektorovém popisu v čase vystředovaný Poyntingův vektor (22) a při skalárním popisu tok (39) ve skalární aproximaci. Sice neexistuje žádný argument pro tuto volbu, ale ani proti ní. Na úrovni klasické fyziky o její správnosti asi nerozhodneme. V kvantové mechanice je šance v tomto směru větší, ale i tak nebude s největší pravděpodobností naše zjištění jednoznačné a bude se lišit případ od případu. Pro určitý experiment možná zjistíme, že detektor reaguje na Poyntingův vektor, pro jinou konfiguraci pak zase na hustotu EM energie. V závěru práce bude zmíněna i alternativa: měřitelné veličiny jsou hustota EM energie a hustota ve skalární aproximaci. Zbývající (křížové) kombinace vypadají (už intuitivně) nepravděpodobně, což však ještě neznamená, že je lze z úvah úplně vypustit.
Zaměřme se na přechod od skalárního popisu k popisu vektorovému. Studované optické pole nechť je posáno skalární funkcí U, která v monofrekvenčním případě vyhovuje skalární Helmholtzově rovnici (15). Pomocí vztahů (16) vygenerujeme tři nezávislá řešení $\vec{L}$, $\vec{M}$ a $\vec{N}$ příslušné vektorové Helmholtzovy rovnice z funkce U. Jestliže nyní chceme zadané optické pole popsát exaktně vektorově, stačí nám k tomu pouze získat vektorový potenciál $\vec{A}$, o němž víme, že splňuje právě vektorovou Helmholtzovu rovnici. Nejpřímějším řešením je vyjádřit vektorový potenciál jako lineární kombinaci vektorů $\vec{L}$, $\vec{M}$ a $\vec{N}$. Z něj pak lze prostřednictvím předpisů (3), resp. (8) a (9) sestrojit libovolnou další veličinu EM teorie. Vidíme, že jsme vygenerovali EM vektorový popis z jediné skalární funkce, ovšem *ne* jednoznačně. Uvedený postup (reprezentační teorém pro Helmholtzovu rovnici) obsahuje stupeň volnosti – libovolný jednotkový vektor $\vec{\ell}$. Přesněji řečeno čtyři stupně volnosti: vektor $\vec{\ell}$ a tři konstanty v lineární kombinaci tvořící vektorový potenciál. Jak se přesvědčíme v kapitole 2, střední časová hodnota Poyntingova vektoru ve vygenerovaném vektorovém poli není obecně totožná s tokem hustoty v původním skalárním poli U. V následující kapitole 3 ale uvidíme, že naložením vhodných podmínek na vektor $\vec{\ell}$ a konstanty v rozvoji $\vec{A}$ (v terminologii stupňů volnosti: vytvoříme nové vazby) lze dosáhnout alespoň teoreticky shody mezi v čase vystředovaným Poyntingovým vektorem vygenerovaného vektorového pole a tokem hustoty původního skalárního pole U. Potom můžeme konstatovat, že uvedený postup (včetně dodatečných podmínek) generace vektorového popisu zachovává určitou vazbu mezi skalárním a vektorovým popisem na úrovni kvadratických charakteristik optického pole, na rozdíl od samotného reprezentačního teorému bez dodatečných podmínek (tak, jak je aplikován v naprosté většině prací, např. [3], [6] a [7]).

2 Reprezentační teorém pro Helmholtzovu rovnici

Provedeme podrobně postup, popsaný v posledním odstavci předchozí kapitoly a budeme používat zavedených konvencí a symboliky. Viz [2].

Nechť funkce U skalárně popisující optické pole vyhovuje Helmholtzově rovnici (15), tj.

$$(\Delta + k^2)U = 0.$$

Pomocí vztahů (16) zkonstruujeme tři *nezávislá* vektorová řešení

$$\vec{L} = \nabla U, \qquad \vec{M} = \nabla \times (\vec{\ell} U) \quad \text{a} \quad \vec{N} = \frac{1}{k} \nabla \times \vec{M}$$

vyhovující vektorové Helmholtzově rovnici (14)

$$(\Delta + k^2)\vec{C} = 0.$$

Jinak řečeno, předchozí zápis je splněn pro $\vec{C} = \vec{L},\ \vec{M},\ \vec{N}$. Má-li platit též pro $\vec{C} = \vec{A}$, je nasnadě, že $\vec{A}$ nemůže už být nezávislý vektor a *musí* náležet do lineárního obalu vektorů $\vec{L}$, $\vec{M}$ a $\vec{N}$

$$\vec{A} \in [\vec{L}, \vec{M}, \vec{N}]_{\mathrm{L}},$$

tj.

$$\vec{A} = \frac{i}{\omega}(a\vec{M} + b\vec{N} + c\vec{L}). \tag{40}$$

Konstantní multiplikátor není podstatný, pouze zajišťuje co nejjednodušší tvar vektoru elektrické intenzity. Konstanty a, b a c jsou ve většině prací (např. [3], [6], [7]) voleny reálné. Jak uvidíme dále, je výhodnější volit je v komplexním oboru (umožní nám to nastavit polarizaci generovaného EM pole).

Ještě než začneme s konstrukcí vektorů intenzit a ostatních charakteristik EM pole, zaměříme se na některé důležité vlastnosti vektorů $\vec{L}$, $\vec{M}$ a $\vec{N}$. Vektor $\vec{L}$ je prostým gradientem funkce U. Platí

$$\nabla \times \vec{L} \equiv 0 \quad \text{pro } \forall\ U. \tag{41}$$

Vektor $\vec{M}$ je pro změnu rotací součinu $\vec{\ell} U$ a proto

$$\nabla \cdot \vec{M} \equiv 0 \quad \text{pro } \forall\ U. \tag{42}$$

Dále, uvědomíme-li si

$$M_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j}(U \ell_k) = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial U}{\partial x_j} \ell_k + \varepsilon_{ijk} U \frac{\partial \ell_k}{\partial x_j} = \varepsilon_{ijk} (\nabla U)_j \ell_k + U(\nabla \times \vec{\ell})_i$$

(ε značí Levi-Civitův tenzor) a konstantnost vektoru $\vec{\ell}$, je zřejmé

$$\vec{M} = \nabla U \times \vec{\ell} = \vec{L} \times \vec{\ell}. \tag{43}$$

Učiňme úmluvu, že veškeré operátory (především se jedná o ∇, $\nabla\cdot$, $\nabla\times$, $\vec{\ell} \cdot \nabla$ a Δ) působí pouze na nejbližší následující funkci.

Co se týče vektoru $\vec{N}$, víme, že až na konstantu $1/k$ je rotací vektoru $\vec{M}$. Proto také

$$\nabla \cdot \vec{N} \equiv 0 \quad \text{pro } \forall\, U. \tag{44}$$

Nyní odvodíme další vztah mezi vektory $\vec{M}$ a $\vec{N}$. Za tím účelem aplikujme na $\vec{N}$ operátor $\frac{1}{k}\nabla\times$. Obdržíme

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{k}\nabla \times \vec{N} &= \tfrac{1}{k^2}\nabla \times \nabla \times \vec{M} = \tfrac{1}{k^2}\nabla\nabla \cdot \vec{M} - \tfrac{1}{k^2}\Delta\vec{M} = \tfrac{1}{k^2}\Delta\vec{M} = \\ &= \tfrac{1}{k^2}\Delta(\vec{L} \times \vec{\ell}) = \tfrac{1}{k^2}\Delta\vec{L} \times \vec{\ell}. \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že

$$\Delta\vec{L} = \Delta(\nabla U) = \nabla(\Delta U) = \left| \begin{array}{c}\text{z Helmholtzovy} \\ \text{rovnice}\end{array} \right| = \nabla(-k^2 U) = -k^2\vec{L},$$

lze pokračovat

$$\frac{1}{k}\nabla \times \vec{N} = -\frac{1}{k^2}(-k^2\vec{L}) \times \vec{\ell} = \vec{L} \times \vec{\ell} = \vec{M}.$$

Tedy

$$\vec{M} = \frac{1}{k}\nabla \times \vec{N} \tag{45}$$

a smíme prohlásit ve vztahu k vektorům $\vec{M}$ a $\vec{N}$, že jeden je až na konstantu rotací druhého. A nakonec relace ortogonálnosti mezi vektory $\vec{L}$ a $\vec{M}$

$$\vec{L} \cdot \vec{M} = 0, \tag{46}$$

což se velmi snadno ověří.

Budeme pokračovat dále v konstrukci vektorového pole. Máme definován vektorový potenciál vztahem (40), jímž je zajištěno, že vyhovuje vektorové Helmholtzově rovnici. To ovšem není jediná podmínka kladená na vektorový potencilál. Z Lorentzovy kalibrační podmínky (13) víme, že jeho divergence má být nulová. Aplikujeme-li operátor divergence na předpis (40), zjistíme, že nutnou podmínkou pro platnost (13) je $c = 0$. Stačí tedy zkonstruovat vektorový potenciál $\vec{A}$ pouze ze solenoidálních polí $\vec{M}$ a $\vec{N}$:

$$\vec{A} = \frac{i}{\omega}(a\vec{M} + b\vec{N}). \tag{47}$$

Přistupme ke konstrukci vektorů intenzit. Z první a třetí rovnice z (11) najdeme

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \tfrac{1}{i\epsilon\omega}\nabla \times \vec{H} &= -\tfrac{i\mu\omega}{k^2}\nabla \times \vec{H}, \\ \vec{H} &= \tfrac{i}{\mu\omega}\nabla \times \vec{E}. \end{aligned} \tag{48}$$

Jeden vektor intenzity je (až na konstantu) rotací druhého – je zde tedy velká podobnost s vektory $\vec{M}$ a $\vec{N}$ a toho využijeme. Vytvoříme solenoidální bezzdrojové EM pole z vektorového potenciálu, který je zkonstruován ze solenoidálních vektorů $\vec{M}$ a $\vec{N}$. Pro intenzitu elektrického pole máme (použijeme (3))

$$\vec{E} = -\frac{i\omega}{k^2}\nabla \times (\mu\vec{H}) = \frac{1}{k^2}(a\nabla \times \nabla \times \vec{M} + b\nabla \times \nabla \times \vec{N}),$$

z čehož užitím (16) a (45) získáme

$$\vec{E} = (a\vec{M} + b\vec{N}). \tag{49}$$

Podobně pro intenzitu magnetického pole

$$\vec{H} = \frac{i}{\mu\omega}\nabla \times \vec{E} = \frac{i}{\mu\omega}(a\nabla \times \vec{M} + b\nabla \times N)$$

tj.

$$\vec{H} = i\zeta(a\vec{N} + b\vec{M}), \tag{50}$$

kde jsme opět použili (16) a (45). Konstanta $1/\zeta = \sqrt{\mu/\epsilon} = \mu\omega/k$ je impedance prostředí. Nyní si povšimneme polarizačních potenciálů, pomocí kterých lze zapsát vektory intenzit (viz (9))

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= \nabla \times \nabla \times \vec{\Pi}_{\mathrm{e}} - i\mu\omega\nabla \times \vec{\Pi}_{\mathrm{m}}, \\
\vec{H} &= i\epsilon\omega\nabla \times \vec{\Pi}_{\mathrm{e}} - \nabla \times \nabla \times \vec{\Pi}_{\mathrm{m}}.
\end{aligned}$$

Je vidět, že

$$\begin{aligned}
\vec{\Pi}_{\mathrm{e}} &\sim bU\vec{\ell} \quad \text{a} \\
\vec{\Pi}_{\mathrm{m}} &\sim aU\vec{\ell}.
\end{aligned} \tag{51}$$

Vygenerovali jsme EM pole z jediné skalární funkce a popsali jej vektory intenzit a potenciály. Je tedy vhodný okamžik na vyjádření kvadratických charakteristik tohoto vektorového pole. Vzhledem k našim předpokladům bude pro nás nejdůležitější v čase vystředovaný Poyntingův vektor (22)

$$\langle\vec{S}_{\mathrm{R}}\rangle = \Re\vec{S} = \frac{1}{2}\Re\left[\vec{E} \times \vec{H}^*\right] = \frac{1}{4}\left[\vec{E} \times \vec{H}^* + c.c.\right],$$

kde $c.c.$ je výraz komplexně sdružený s prvním členem v hranaté závorce. Dosadíme-li za $\vec{E}$ a $\vec{H}$ z (49) a (50) obdržíme

$$\begin{aligned}
\langle\vec{S}_{\mathrm{R}}\rangle &= -\tfrac{\zeta}{4}\left[i\ (a\vec{M} + b\vec{N}) \times (a^*\vec{N}^* + b^*\vec{M}^*) + c.c.\right] = \\
&= -\tfrac{\zeta}{4}\Big[i\ (aa^*\vec{M} \times \vec{N}^* + ab^*\vec{M} \times \vec{M}^* + ba^*\vec{N} \times \vec{N}^* + \\
&\qquad + bb^*\vec{N} \times \vec{M}^*) + c.c.\Big].
\end{aligned}$$

Uvědomíme si, že

$$\begin{aligned}
c.c. &= -i\ (a^*a\vec{M}^* \times \vec{N} + a^*b\vec{M}^* \times \vec{M} + b^*a\vec{N}^* \times \vec{N} + b^*b\vec{N}^* \times \vec{M}) = \\
&= i\ (aa^*\vec{N} \times \vec{M}^* + ba^*\vec{M} \times \vec{M}^* + ab^*\vec{N} \times \vec{N}^* + bb^*\vec{M} \times \vec{N}^*),
\end{aligned}$$

dosadíme zpět do výrazu pro $\langle\vec{S}_{\mathrm{R}}\rangle$, přeskupíme členy a získáme výsledný vztah

$$\begin{aligned}
\langle\vec{S}_{\mathrm{R}}\rangle &= -i\tfrac{\zeta}{4}\Big\{(aa^* + bb^*)\left[\vec{M} \times \vec{N}^* + \vec{N} \times \vec{M}^*\right] + \\
&+ (ab^* + ba^*)\left[\vec{M} \times \vec{M}^* + \vec{N} \times \vec{N}^*\right]\Big\}
\end{aligned} \tag{52}$$

pro střední časovou hodnotu Poyntingova vektoru. Je zřejmé (vzledem k solenoidálnosti), že vyhovuje Poyntingovu teorému (24). Ze vztahu (52) není ale na první pohled zřejmá závislost na vstupním skalárním poli U. Dalším krokem proto bude nalezení funkční závislosti

$$\langle\vec{S}_{\mathrm{R}}\rangle = \langle\vec{S}_{\mathrm{R}}\rangle(U), \qquad \text{resp.} \qquad \langle\vec{S}_{\mathrm{R}}\rangle = \langle\vec{S}_{\mathrm{R}}\rangle(U, \vec{\ell}, a, b). \tag{53}$$

Za tím účelem je třeba nalézt závislosti vektorů $\vec{M}$ a $\vec{N}$ na U. U prvního z nich již potřebný vztah známe, viz (16) a (43). Pro vektor $\vec{N}$ lze psát

$$\vec{N} = \frac{1}{k}\nabla \times \vec{M} = \frac{1}{k}\nabla \times (\vec{L} \times \vec{\ell}),$$

tj.

$$\begin{aligned} N_i &= \tfrac{1}{k}\varepsilon_{ijk}\tfrac{\partial}{\partial x_j}(\varepsilon_{klm}L_l\ell_m) = \tfrac{1}{k}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk}\tfrac{\partial L_l}{\partial x_j}\ell_m = \\ &= \tfrac{1}{k}\tfrac{\partial L_i}{\partial x_j}\ell_j - \tfrac{1}{k}\tfrac{\partial L_j}{\partial x_j}\ell_i = \tfrac{1}{k}(\ell \cdot \nabla)L_i - \tfrac{1}{k}(\nabla \cdot \vec{L})\ell_i, \end{aligned}$$

kde bylo použito známého pravidla pro úžený součin dvou Levi-Civitových tenzorů

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}. \tag{54}$$

Užitím Helmholtzovy rovnice $\nabla \cdot \vec{L} = \Delta U = -k^2 U$ pak

$$\vec{N} = \frac{1}{k}(\vec{\ell} \cdot \nabla)\nabla U + kU\vec{\ell}. \tag{55}$$

Mezivýsledky použijeme v rovnici (52) a zapíšeme výraz pro v čase vystředovaný Poyntingův vektor vyjádřený pouze pomocí původního skalárního pole U, vektoru $\vec{\ell}$ a koeficientů a, b:

$$\begin{aligned} \langle \vec{S}_{\mathrm{R}} \rangle &= -i\tfrac{\zeta}{4}\Bigg\{(aa^* + bb^*)\Bigg[\Big(\nabla U \times \vec{\ell}\Big) \times \Big(\tfrac{1}{k}(\vec{\ell} \cdot \nabla)\nabla U^* + kU^*\vec{\ell}\Big) + \\ &\quad + \Big(\tfrac{1}{k}(\vec{\ell} \cdot \nabla)\nabla U + kU\vec{\ell}\Big) \times \Big(\nabla U^* \times \vec{\ell}\Big)\Bigg] + \\ &\quad + (ab^* + ba^*)\Bigg[\Big(\nabla U \times \vec{\ell}\Big) \times \Big(\nabla U^* \times \vec{\ell}\Big) + \\ &\quad + \Big(\tfrac{1}{k}(\vec{\ell} \cdot \nabla)\nabla U + kU\vec{\ell}\Big) \times \Big(\tfrac{1}{k}(\vec{\ell} \cdot \nabla)\nabla U^* + kU^*\vec{\ell}\Big)\Bigg]\Bigg\}. \end{aligned} \tag{56}$$

Rovnost (56) je pro nás podstatná, neboť je z ní zřejmé, že v obecném případě *není* střední časová hodnota Poyntingova vektoru shodná s tokem hustoty ve skalární aproximaci

$$\begin{aligned} \vec{j} &= -i\ const\ (U\nabla U^* - U^*\nabla U) \\ const &= \tfrac{c}{2k} = \tfrac{c^2}{2\omega}. \end{aligned}$$

V následující kapitole se budeme věnovat hledání takových parametrů $\vec{\ell}$, a, b, popřípadě třídy funkcí U, pro které veličiny $\langle \vec{S}_{\mathrm{R}} \rangle$ a $\vec{j}$ splynou.
Ještě jedna důležitá vlastnost vztahu (56) stojí za pozornost. První hranatá závorka bude mít vliv i v případě, že jeden z koeficientů a a b bude nulový. Ne tak druhá, před níž vystupují křížové členy koeficientů a jež je nulová i v případě, že pouze jediný z koeficientů je roven nule.

Na závěr ještě poznamenejme, že zopakujeme-li postup vedoucí k rovnici (56), ale pro střední časovou hodnotu hustoty EM energie

$$\begin{aligned} \langle w_{\mathrm{R}} \rangle = \langle w_{\mathrm{R}}^{\mathrm{el}} \rangle + \langle w_{\mathrm{R}}^{\mathrm{mag}} \rangle &= \tfrac{\epsilon}{2}\langle \Re\vec{E} \cdot \Re\vec{E} \rangle + \tfrac{\mu}{2}\langle \Re\vec{H} \cdot \Re\vec{H} \rangle = \\ &= \tfrac{1}{2}\Re\Big(\tfrac{\epsilon}{2}\vec{E} \cdot \vec{E}^* + \tfrac{\mu}{2}\vec{H} \cdot \vec{H}^*\Big), \end{aligned}$$

obdržíme

$$
\begin{aligned}
\langle w_{\mathrm{R}} \rangle \quad = \quad & \tfrac{\epsilon}{4}\Bigg\{(aa^* + bb^*)\Bigg[\Big(\nabla U \times \vec{\ell}\,\Big) \cdot \Big(\nabla U^* \times \vec{\ell}\,\Big) + \\
& + \Big(\tfrac{1}{k}(\vec{\ell} \cdot \nabla)\nabla U + kU\vec{\ell}\,\Big) \cdot \Big(\tfrac{1}{k}(\vec{\ell} \cdot \nabla)\nabla U^* + kU^*\vec{\ell}\,\Big)\Bigg] + \\
& + (ab^* + ba^*)\Bigg[\Big(\nabla U \times \vec{\ell}\,\Big) \cdot \Big(\tfrac{1}{k}(\vec{\ell} \cdot \nabla)\nabla U^* + kU^*\vec{\ell}\,\Big) + \\
& + \Big(\nabla U^* \times \vec{\ell}\,\Big) \cdot \Big(\tfrac{1}{k}(\vec{\ell} \cdot \nabla)\nabla U + kU\vec{\ell}\,\Big)\Bigg]\Bigg\}.
\end{aligned}
\tag{57}
$$

Vidíme, že platí stejné tvrzení (o neshodě s ρ) jako v případě vztahu (56).

3 Podmínky zajišťující rovnost $\vec{j}$ a $\langle\vec{S}_{\mathrm{R}}\rangle$

Výchozím vztahem této kapitoly bude rovnost (56), kterou budeme ovšem dále upravovat s cílem zkonkretizovat rozdíly a případné podobnosti se vztahem (39).

3.1 Motivace zavedení omezujících podmínek pro vektor $\vec{\ell}$

Označme po řadě první a druhou hranatou závorku ve výrazu (56) pro $\langle\vec{S}_{\mathrm{R}}\rangle$ symboly $\vec{\mathcal{B}}_1$ a $\vec{\mathcal{B}}_2$, potom

$$\langle\vec{S}_{\mathrm{R}}\rangle = -i\frac{\zeta}{4}\Big\{\ (aa^* + bb^*)\vec{\mathcal{B}}_1 + (ab^* + ba^*)\vec{\mathcal{B}}_2\ \Big\}.$$

Roznásobením nabydou členy $\vec{\mathcal{B}}_1$ a $\vec{\mathcal{B}}_2$ tvaru

$$\begin{aligned}
\vec{\mathcal{B}}_1 &= \tfrac{1}{k}\Big(\nabla U \times \vec{\ell}\,\Big) \times (\vec{\ell}\cdot\nabla)\nabla U^* + kU^*\Big(\nabla U \times \vec{\ell}\,\Big) \times \vec{\ell} - \\
&\quad -\tfrac{1}{k}\Big(\nabla U^* \times \vec{\ell}\,\Big) \times (\vec{\ell}\cdot\nabla)\nabla U - kU\Big(\nabla U^* \times \vec{\ell}\,\Big) \times \vec{\ell}, \\
\vec{\mathcal{B}}_2 &= \Big(\nabla U \times \vec{\ell}\,\Big) \times \Big(\nabla U^* \times \vec{\ell}\,\Big) + \tfrac{1}{k^2}\Big((\vec{\ell}\cdot\nabla)\nabla U\Big) \times \Big((\vec{\ell}\cdot\nabla)\nabla U^*\Big) + \\
&\quad +\Big((\vec{\ell}\cdot\nabla)\nabla U\Big) \times \vec{\ell}U^* + U\vec{\ell} \times \Big((\vec{\ell}\cdot\nabla)\nabla U^*\Big).
\end{aligned}$$

Jednoduchými úpravami a užitím pravidla (54) pro Levi-Civitovy symboly získáme

$$\begin{aligned}
\vec{\mathcal{B}}_1 &= k(U\nabla U^* - U^*\nabla U) - k\Big[(U\nabla U^* - U^*\nabla U)\cdot\vec{\ell}\,\Big]\vec{\ell} + \\
&\quad +\tfrac{1}{k}\Big[\nabla U\cdot(\vec{\ell}\cdot\nabla)\nabla U^* - \nabla U^*\cdot(\vec{\ell}\cdot\nabla)\nabla U\Big]\vec{\ell} - \\
&\quad -\tfrac{1}{k}\Big[\nabla U\Big(\vec{\ell}\cdot(\vec{\ell}\cdot\nabla)\nabla U^*\Big) - \nabla U^*\Big(\vec{\ell}\cdot(\vec{\ell}\cdot\nabla)\nabla U\Big)\Big] = \\
&= k\vec{\mathcal{B}}_1(1) + k\vec{\mathcal{B}}_1(2) + \tfrac{1}{k}\vec{\mathcal{B}}_1(3) + \tfrac{1}{k}\vec{\mathcal{B}}_1(4), \\
\vec{\mathcal{B}}_2 &= \Big[\vec{\ell}\cdot(\nabla U \times \nabla U^*)\Big]\vec{\ell} - \Big[U(\vec{\ell}\cdot\nabla)\nabla U^* - U^*(\vec{\ell}\cdot\nabla)\nabla U\Big] \times \vec{\ell} + \\
&\quad +\tfrac{1}{k^2}(\vec{\ell}\cdot\nabla)\nabla U \times (\vec{\ell}\cdot\nabla)\nabla U^* = \\
&= \vec{\mathcal{B}}_2(1) + \vec{\mathcal{B}}_2(1) + \tfrac{1}{k^2}\vec{\mathcal{B}}_2(3).
\end{aligned}$$

Symboly $\vec{\mathcal{B}}_1(.)$ a $\vec{\mathcal{B}}_2(.)$ opět slouží pouze k označení jednotlivých členů. Nyní už vidíme, že naše snaha rozepsat původně kompaktní a elegantní výraz pro střední časovou hodnotu Poyntingova vektoru na řadu jednodušších členů nebyla marná. člen $\vec{\mathcal{B}}_1(1)$ je až na konstantní činitel shodný s tokem ve skalární aproximaci. Je to současně jediný člen neobsahující vektor $\vec{\ell}$. Této skutečnosti využijeme.
Můžeme shrnout:

> Poyntingův vektor $\langle\vec{S}_{\mathrm{R}}\rangle$ EM pole vygenerovaného z jediné skalární funkce U za pomoci volitelného vektoru $\vec{\ell}$ se rozpadá na řadu členů, z nichž pouze jediný – odpovídající toku $\vec{j}$ ve skalární aproximaci – *ne*obsahuje vektor $\vec{\ell}$. Další úvaha je přímočará. Naložíme-li na vektor $\vec{\ell}$ takové podmínky, aby všechny členy (kromě prvního) v čase vystředovaného Poyntingova vektoru byly nulové, pak získáme rovnost (až na konstantu) $\langle\vec{S}_{\mathrm{R}}\rangle = \vec{j}$.

3.2 Konstrukce omezujících podmínek pro vektor $\vec{\ell}$

Diskuze by sice mohla být provedena na úrovni funkce U, ale myslím, že další postup povede k fyzikálně snáze interpretovatelným výsledkům.
Předpokládejme skalární funkci U ve tvaru

$$U = \psi e^{-i\phi}, \tag{58}$$

kde ψ a ϕ jsou *reálné* fukce prostorových souřadnic. Při této volbě nedochází k újmě na obecnosti, je nutné pouze ošetřit případnou nejednoznačnost fázové funkce ϕ v nulových bodech funkce U. Skalární pole (58) vykazuje hustotu $\rho = UU^* = \psi^2$ a tok hustoty

$$\begin{aligned} \vec{j} &= -i\ const\ (U\nabla U^* - U^*\nabla U) = -i\ const\ 2i\ \psi^2\nabla\phi, \\ const &= \tfrac{c}{2k} = \tfrac{c^2}{2\omega}, \end{aligned}$$

tj.

$$\vec{j} = \frac{c}{k}\psi^2\nabla\phi, \tag{59}$$

jak se jednoduše ověří dosazením

$$\begin{aligned} U &= \psi e^{-i\phi}, & U^* &= \psi e^{i\phi}, \\ \nabla U &= \nabla\psi e^{-i\phi} - i\psi\nabla\phi e^{-i\phi}, & \nabla U^* &= \nabla\psi e^{i\phi} + i\psi\nabla\phi e^{i\phi} \end{aligned}$$

do vztahů (38) a (39). Nyní se zaměříme na jednotlivé členy v čase vystředovaného Poyntingova vektoru.
Jak už bylo zmíněno, člen

$$\vec{\mathcal{B}}_1(1) = U\nabla U^* - U^*\nabla U = 2i\psi^2\nabla\phi \tag{60}$$

je až na konstantní činitel shodný s tokem (59).
Druhý člen

$$\vec{\mathcal{B}}_1(2) = -\vec{\ell}\left[(U\nabla U^* - U^*\nabla U)\cdot\vec{\ell}\right] \tag{61}$$

má směr $-\vec{\ell}$ a velikost úměrnou skalárnímu součinu $\vec{j}\cdot\vec{\ell}$, tj. $\nabla\phi\cdot\vec{\ell}$. Tento člen bude nulový *jedině* tehdy, budeme-li $\vec{\ell}$ volit kolmé ke gradientu fázové funkce. Nutnou a postačující podmínkou vymizení členu $\vec{\mathcal{B}}_1(2)$ je tedy $\nabla\phi\cdot\vec{\ell} = 0$. U tohoto členu bychom mohli tolerovat také volbu $\vec{j}\|\vec{\ell}$, která zajistí, že se člen bude chovat přesně jako tok $\vec{j}$.
Člen

$$\vec{\mathcal{B}}_1(3) = \vec{\ell}\left[\nabla U\cdot(\vec{\ell}\cdot\nabla)\nabla U^* - \nabla U^*\cdot(\vec{\ell}\cdot\nabla)\nabla U\right] \tag{62}$$

má směr vektoru $\vec{\ell}$ a velikost (za U dosadíme z (58))

$$\begin{aligned} \left|\vec{\mathcal{B}}_1(3)\right| &= 2i(\nabla\psi\cdot\nabla\psi)(\nabla\phi\cdot\vec{\ell}\,) + 2i(\nabla\psi\cdot\nabla\phi)(\nabla\psi\cdot\vec{\ell}\,)+ \\ &\quad +2i\psi\left[\nabla\psi\cdot(\vec{\ell}\cdot\nabla)\nabla\phi - \nabla\phi\cdot(\vec{\ell}\cdot\nabla)\nabla\psi\right]+ \\ &\quad +2i\psi^2(\nabla\phi\cdot\nabla\phi)(\nabla\phi\cdot\vec{\ell}\,). \end{aligned} \tag{63}$$

Vzhledem k záměnnosti operátorů $(\vec{\ell} \cdot \nabla)$ a ∇ platí

$$\begin{aligned}(\vec{\ell} \cdot \nabla)\nabla\phi &= \nabla(\vec{\ell} \cdot \nabla\phi) \quad \text{a} \\ (\vec{\ell} \cdot \nabla)\nabla\psi &= \nabla(\vec{\ell} \cdot \nabla\psi),\end{aligned}$$

což se snadno dokáže. Například ($\vec{e}_j$ je j-tý bázový vektor) pro funkci ϕ:

$$(\vec{\ell} \cdot \nabla)\nabla\phi = (\ell_i \frac{\partial}{\partial x_i})\vec{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j}\phi = \vec{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j}(\ell_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i}) = \nabla(\vec{\ell} \cdot \nabla\phi).$$

Vidíme, že postačujícími podmínkami vymizení třetího členu jsou $\nabla\phi \cdot \vec{\ell} = 0$ a $\nabla\psi \cdot \vec{\ell} = 0$. Druhá z podmínek však není nutná. Například vhodnou úpravou hranaté závorky ve vztahu (63) na tvar

$$2\nabla\psi \cdot \nabla(\vec{\ell} \cdot \nabla\phi) - (\vec{\ell} \cdot \nabla)(\nabla\psi \cdot \nabla\phi)$$

lze nalézt jinou sadu postačujících podmínek, za nichž je třetí člen nulový:

$$\nabla\phi \cdot \vec{\ell} = 0 \qquad \text{a} \qquad \nabla\psi \cdot \nabla\phi = 0.$$

Čtvrtý člen má obecný směr určený gradientem $\nabla\psi$ amplitudové i gradientem $\nabla\phi$ fázové funkce. Dosazením za U z (58) najdeme

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{B}}_1(4) &= -\nabla U \vec{\ell} \cdot (\vec{\ell} \cdot \nabla)\nabla U^* + \nabla U^* \vec{\ell} \cdot (\vec{\ell} \cdot \nabla)\nabla U = \\ &= -2i\nabla\psi\Big[2(\vec{\ell} \cdot \nabla\phi)(\vec{\ell} \cdot \nabla\psi) + \psi\vec{\ell} \cdot (\vec{\ell} \cdot \nabla)\nabla\phi\Big] + \\ &\quad +2i\psi\nabla\phi\Big[\vec{\ell} \cdot (\vec{\ell} \cdot \nabla)\nabla\psi - \psi(\vec{\ell} \cdot \nabla\phi)^2\Big]\end{aligned} \tag{64}$$

Odstranění členu dosáhneme opět volbou $\nabla\phi \cdot \vec{\ell} = 0$ a $\nabla\psi \cdot \vec{\ell} = 0$.
Člen

$$\vec{\mathcal{B}}_2(1) = \vec{\ell}\left[\vec{\ell} \cdot (\nabla U \times \nabla U^*)\right]$$

má směr vektoru $\vec{\ell}$ a podobně jako u ostatních členů určíme jeho velikost

$$\left|\vec{\mathcal{B}}_2(1)\right| = 2i\psi\vec{\ell} \cdot (\nabla\psi \times \nabla\phi), \tag{65}$$

která je úměrná smíšenému součinu vektorů $\vec{\ell}$, $\nabla\psi$ a $\nabla\phi$. Budou-li alespoň dva z nich rovnoběžné (závislé), součin bude nulový a člen vymizí. Volba $\nabla\phi \times \vec{\ell} = 0$ nebo $\nabla\psi \times \vec{\ell} = 0$ je v rozporu s podmínkami nalezenými u předešlých členů a zůstává nám pouze volba $\nabla\psi \times \nabla\phi = 0$.
Provedeme-li stejnou analýzu pro zbývající dva členy, znovu zjistíme, že budou nulové při splnění podmínek $\nabla\phi \cdot \vec{\ell} = 0$ a $\nabla\psi \cdot \vec{\ell} = 0$.
Můžeme tedy shrnout:

> Vygenerujeme-li ze skalárního pole $U = \psi e^{-i\phi}$ (vyhovujícího Helmholtzově rovnici) pole vektorové pomocí reprezentačního teorému pro Helmholtzovu rovnici, pak splnění podmínek
>
> $$\nabla\phi \cdot \vec{\ell} = 0, \qquad \nabla\psi \cdot \vec{\ell} = 0 \quad \text{a} \quad \nabla\phi \times \nabla\psi = 0 \tag{66}$$
>
> zajistí rovnost (až na konstantu) v čase vystředovaného Poyntingova vektoru $\langle\vec{S}_\mathrm{R}\rangle$ ve zkonstruovaném EM poli a toku $\vec{j}$ ve skalární aproximaci.

Sada podmínek je postačující, ne však nutná. Konkrétně jde o druhou podmínku, kterou bychom mohli nahradit jinou, obecnější, ovšem už ne tak jednoduchou a fyzikálně snadno interpretovatelnou. První a třetí podmínka je ale nutná. Jak ukážeme v dalším, uvedené podmínky silně omezují třídu použitelných funkcí U.

3.3 Analýza omezujících podmínek pro vektor $\vec{\ell}$

V následujícím si všimneme fyzikálního smyslu podmínek (66) a demonstrujeme nutnost jejich zeslabení. První ale vyjádříme explicitně *všechny* podmínky – tedy i tu, že funkce U je řešením Helmholtzovy rovnice – vzhledem k reálným funkcím ψ a ϕ. Za tím účelem dosadíme skalární pole (58) do Helmholtzovy rovnice a přenásobíme členem $e^{i\phi}$. Srovnáním reálných a imaginárních částí získané rovnice

$$\Delta\psi + k^2\psi - \nabla\phi \cdot \nabla\phi\psi - i\psi\Delta\phi - 2i\nabla\phi\nabla\psi = 0$$

dostaneme vztahy jimž se funkce ψ a ϕ musí bezpodmínečně podřídit. Spolu s (66) obdržíme kompletní sadu podmínek (pravidel) pro funkce ψ a ϕ a konstantní vektor $\vec{\ell}$

$$\left\{ (\Delta + k^2 - \nabla\phi \cdot \nabla\phi)\psi = 0,\ \psi\Delta\phi + 2\nabla\phi \cdot \nabla\psi = 0, \right. \\ \left. \nabla\phi \cdot \vec{\ell} = 0,\ \nabla\psi \cdot \vec{\ell} = 0,\ \nabla\phi \times \nabla\psi = 0 \right\}. \tag{67}$$

První dvě podmínky říkají, že $U = \psi e^{-i\phi}$ je řešením Helmholtzovy rovnice. Třetí, resp. čtvrtá pak představují podmínku kolmosti konstantního vektoru $\vec{\ell}$ a gradientu $\nabla\phi$, resp. $\nabla\psi$. Zvolíme-li určitý konstantní vektor $\vec{\ell}$ v třírozměrném euklidovském prostoru $\mathbb{E}_3$, pak všechny vektory kolmé na $\vec{\ell}$ vytvářejí dvoudimenzionální podprostor a $\nabla\phi$, resp. $\nabla\psi$ pak musí náležet právě do tohoto podprostoru. Naopak (náš případ), máme-li jisté pole ϕ, ψ, můžeme určit gradienty $\nabla\phi$, $\nabla\psi$, které jsou obecně různé v různých místech prostoru. Jestliže $[\nabla\phi(\vec{r})]_\mathrm{L} = \mathsf{A} \subseteq \mathbb{E}_3$ a $[\nabla\psi(\vec{r})]_\mathrm{L} = \mathsf{B} \subseteq \mathbb{E}_3$ ($[\vec{f}(\vec{r})]_\mathrm{L}$ je lineární obal všech vektorů $\vec{f}(\vec{r})$ pro libovolné $\vec{r}$), pak vektor $\vec{\ell}$ musíme volit jako konstantní vektor z množiny $\mathsf{L} = \mathsf{D_A} \cap \mathsf{D_B}$, kde $\mathsf{D_A}$, resp. $\mathsf{D_B}$ je ortogonální doplněk množiny A, resp. B v $\mathbb{E}_3$. A nakonec poslední podmínka hovoří o rovnoběžnosti gradientů fázové a amplitudové funkce v každém bodě a silně tak omezuje volbu skalárního pole. Důsledkem této poslední podmínky je (v našem předchozím značení) rovnost $\mathsf{A} = \mathsf{B}$.

Vynecháme-li triviální případ homogenní rovinné vlny $\nabla\psi = 0$, zjistíme, že už jednoduché pole $\phi = \vec{k} \cdot \vec{r}$ ($\vec{k}$ je konstantní vektor), $\psi = \psi(\vec{r})$ je vyloučeno podmínkami $\nabla\phi \times \nabla\psi = 0$ a $\psi\Delta\phi + 2\nabla\phi \cdot \nabla\psi = 0$. Snadno se o tom přesvědčíme, přepíšeme-li je pro náš případ: $\vec{k} \times \nabla\psi = 0$ a $\vec{k} \cdot \nabla\psi = 0$. Může tedy vzniknout potřeba zeslabení sady podmínek (67). Jak již bylo zmíněno, vhodným řešením je sada

$$\left\{ (\Delta + k^2 - \nabla\phi \cdot \nabla\phi)\psi = 0,\ \psi\Delta\phi + 2\nabla\phi \cdot \nabla\psi = 0, \right. \\ \left. \nabla\phi \cdot \vec{\ell} = 0,\ \nabla\psi \cdot \vec{\ell} = 0,\ a = 0 \text{ nebo } b = 0 \right\}. \tag{68}$$

Slovy, jde o nahrazení poslední podmínky zajišťující nulovost členu $\vec{\mathcal{B}}_2(1)$, jinou, která zruší vliv celého členu $\vec{\mathcal{B}}_2$ a neomezuje přitom výběr ϕ a ψ. Sada (68) tedy nabízí výběr ze širší třídy polí (minimálně nevylučuje nehomogenní rovinné vlny), ale současně představuje jisté zmenšení obecnosti generovaného vektorového pole. Konkrétněji, EM pole vytvořené za podmínky $a = 0$, resp. $b = 0$ odpovídá poli zkonstruovanému pouze z jediného Hertzova vektoru (viz (51)) a ne z obou jako v případě obecného EM pole.

Obecně můžeme říci, že existuje pouze úzká třída funkcí ϕ a ψ (polí U) splňujících[5] *exaktně* sadu podmínek (67) nebo (68). Příklady jsou uvedeny v podkapitole 3.4. Lze předpokládat existenci větší třídy funkcí ϕ a ψ, pro které jsou podmínky ze sady (67) respektive (68) splněny pouze přibližně. Tato třída představuje optická pole, u nichž se tok ve skalární aproximaci a střední časová hodnota Poyntingova vektoru shodují pouze přibližně (viz dále). Funkce nepatřící do první ani druhé třídy popisují skalární pole u nichž nelze *přímo* použít ke konstrukci vektorového popisu reprezentační teorém pro Helmholtzovu rovnici a současně alespoň přibližně zachovat rovnost toku $\vec{j}$ ve skalární aproximaci a v čase vystředovaného Poyntingova vektoru $\langle \vec{S}_{\mathrm{R}} \rangle$ ve vygenerovaném vektorovém poli.

3.4 Příklady

Na několika příkladech ilustrujeme použití vybudované teorie.

Příklad 1.
Konstrukce vektorového popisu pro skalární pole

$$U = A \exp\left[-i(\vec{k} \cdot \vec{r} + \phi_0)\right] \tag{69}$$

tj. homogenní rovinnou vlnu, kde $\vec{k}$ a A jsou konstantní činitelé a ϕ_0 aditivní fázová konstanta. Podle (58), (38) a (39) platí

$$\begin{aligned} \phi &= \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi_0, \\ \psi &= A, \\ \rho &= A^2, \\ \nabla\phi &= \vec{k}, \\ \vec{j} &= \tfrac{c}{k} A^2 \vec{k}, \\ \nabla\psi &= \Delta\psi \;=\; \Delta\phi \;=\; 0. \end{aligned}$$

Sada podmínek (67) získá proto tvar

$$\left\{\ (k^2 - \vec{k} \cdot \vec{k})A = 0,\ \ 0 = 0,\ \ \vec{k} \cdot \vec{\ell} = 0,\ \ 0 = 0\ \right\}.$$

[5] Nejlepším postupem by na tomto místě bylo přímé řešení sady rovnic (67) nebo (68).

Vidíme, že platí-li $|\vec{k}| = k = \omega/c$ a $\vec{k}\cdot\vec{\ell} = 0$ ($\vec{\ell}$ tedy musíme volit kolmé na $\vec{k}$), vyhovuje rovinná vlna (69) sadě podmínek (67), která zaručuje, že užitím našeho postupu získáme vektorový popis s kvadratickými charakteristikami stejnými jako ve výchozím poli (69).
Pro určitost studujme rovinnou vlnu šířící se ve směru osy z, tj.

$$U = A \exp\left[-i(kz + \phi_0)\right].$$

Vektor $\vec{\ell}$ pak musíme volit v rovině xy, např. ve směru osy x, tj. $\vec{\ell} = \vec{e}_x = (1, 0, 0)$. Tři nezávislá vektorová řešení vektorové Helmholtzovy rovnice najdeme snadno podle vztahů (16) a (43)

$$\begin{aligned} \vec{L} &= -ikU\vec{e}_z, \\ \vec{M} &= -ikU\vec{e}_y, \\ \vec{N} &= kU\vec{e}_x. \end{aligned}$$

Vektory $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ a $\vec{e}_z$ jsou jednotkové vektory ve směru souřadných os. Užitím (49) a (50) zkonstruujeme vektory intenzit

$$\begin{aligned} \vec{E} &= kbU\vec{e}_x - ikaU\vec{e}_y, \\ \vec{H} &= i\zeta kaU\vec{e}_x + \zeta kbU\vec{e}_y, \end{aligned}$$

nebo ve složkách

$$\begin{array}{lllllll} E_x &=& kbAe^{-i(kz+\phi_0)}, & H_x &=& i\zeta kaAe^{-i(kz+\phi_0)} &= -\zeta E_y, \\ E_y &=& -ikaAe^{-i(kz+\phi_0)}, & H_y &=& \zeta kbAe^{-i(kz+\phi_0)} &= \zeta E_x, \\ E_z &=& 0, & H_z &=& 0. & \end{array} \qquad (70)$$

Dosazením do (11) se můžeme přesvědčit, že (70) vyhovují Maxwellovým rovnicím. Vidíme, že konstantní fázový faktor ϕ_0 se objevil ve všech členech vektorů intenzit EM pole a je možné ho zanedbat. Také je zřejmá výhodnost volby $a, b \in \mathbb{C}$, protože nám dává možnost nastavit libovolný typ polarizace (který ovšem nemá vliv na střední časovou hodnotu toku energie).
Pro Poyntingův vektor, vystředovaný v čase, obdržíme

$$\langle \vec{S}_{\mathrm{R}} \rangle = \frac{1}{2}\Re \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ kbAe^{-i(kz+\phi_0)} & -ikaAe^{-i(kz+\phi_0)} & 0 \\ -i\zeta ka^*Ae^{i(kz+\phi_0)} & \zeta kb^*Ae^{i(kz+\phi_0)} & 0 \end{vmatrix},$$

což dává

$$\begin{aligned} \langle \vec{S}_{\mathrm{R}} \rangle &= \tfrac{1}{2}\zeta k^2(aa^* + bb^*)A^2\vec{e}_z, \\ \zeta &= \sqrt{\epsilon/\mu}, \\ \vec{e}_z &= \vec{k}/k. \end{aligned} \qquad (71)$$

Reálnou konstantu $(aa^* + bb^*)$ lze použít pro rozměrovou úpravu výsledku, například položíme $k^2(aa^* + bb^*)A^2 = (A_x^2 + A_y^2)$, kde amplitudy A_x^2, resp. A_y^2 x-ové, resp. y-ové složky $\vec{E}$ mají rozměr Vm^{-1}.
Vztah (71) se až na konstantu shoduje s tokem původního skalárního pole.

Příklad 2.
Konstrukce vektorového popisu pro skalární pole

$$U = \vec{A} \cdot \vec{r} \exp\left[-i(\vec{k} \cdot \vec{r})\right]$$

tj. *ne*homogenní rovinnou vlnu, kde $\vec{A}$ a $\vec{k}$ jsou reálné vektorové konstanty. Poznamenejme, že jde o značně nereálné optické pole vykazující hustotu a tok hustoty

$$\begin{aligned} \rho &= (\vec{A} \cdot \vec{r})^2, \\ \vec{j} &= \tfrac{c}{k}(\vec{A} \cdot \vec{r})^2 \vec{k}. \end{aligned}$$

Jak už bylo zmíněno, musíme použít zeslabenou sadu podmínek (68), která pro dané pole nabývá tvaru

$$\left\{ \, (k^2 - \vec{k} \cdot \vec{k})(\vec{A} \cdot \vec{r})^2, \ \vec{k} \cdot \vec{A} = 0, \ \vec{k} \cdot \vec{\ell} = 0, \ \vec{A} \cdot \vec{\ell} = 0, \ b = 0 \, \right\}.$$

Pro konkrétní fázovou funkci $\phi = \vec{k} \cdot \vec{r} = kz$ musíme $\vec{A}$ volit kolmé ke $\vec{k} = k\vec{e}_z$, tedy například $\vec{A} = \vec{e}_x$ a pole má následující tvar a kvadratické charakteristiky:

$$\begin{aligned} U &= Axe^{-ikz}, \\ \rho &= A^2 x^2, \\ \vec{j} &= cA^2 x^2 \vec{e}_z. \end{aligned}$$

Pro volbu vektoru $\vec{\ell}$ nám zbývá jediná možnost $\vec{\ell} = \lambda \vec{e}_y$, $\lambda = \pm 1$. Dále postupujeme stejně jako v předchozím případě (λ volíme např. $+1$)

$$\begin{aligned} \vec{L} &= Ae^{-ikz}\vec{e}_x - ikAxe^{-ikz}\vec{e}_z, \\ \vec{M} &= ikAxe^{-ikz}\vec{e}_x + Ae^{-ikz}\vec{e}_z, \\ \vec{N} &= kAxe^{-ikz}\vec{e}_y. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_x &= ikaAxe^{-ikz}, & H_x &= 0, \\ E_y &= 0, & H_y &= i\zeta kaAxe^{-ikz}, \\ E_z &= aAe^{-ikz}, & H_z &= 0. \end{aligned}$$

Opět lze ověřit splnění Maxwellových rovnic.
Komplexní Poyntingův vektor

$$\vec{S} = i\frac{1}{2}\zeta kaa^* A^2 x \vec{e}_x + \frac{1}{2}\zeta k^2 aa^* A^2 x^2 \vec{e}_z$$

a jeho reálná část

$$\langle \vec{S}_{\mathrm{R}} \rangle = \frac{1}{2}\zeta k^2 aa^* A^2 x^2 \vec{e}_z.$$

Opět pozorujeme shodu s tokem ve skalární aproximaci až na konstantu, o které platí to samé, co v prvním příkladu.

Příklad 3.
Konstrukce vektorového popisu pro skalární pole

$$U = \mathrm{J}_0(k_\perp R)\exp -ik_\parallel z, \quad \text{kde} \quad k_\perp^2 + k_\parallel^2 = k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \tag{72}$$

J_ν je Besselova funkce[6] prvního druhu ν-tého řádu. Toto pole je exaktním řešením Helmholtzovy rovnice v cylindrických souřadnicích (R, φ, z) (a tedy spolehlivě vyhovuje prvním dvěma podmínkám ze sady (68), o čemž se můžeme přesvědčit například v [6]) a představuje nedifrakční svazek s hustotou a tokem[7]

$$\begin{aligned} \rho &= \mathrm{J}_0^2(k_\perp R), \\ \vec{j} &= \tfrac{ck_\parallel}{k}\mathrm{J}_0^2(k_\perp R)\vec{e}_z. \end{aligned}$$

Protože

$$\begin{aligned} \nabla\phi &= k_\parallel \vec{e}_z, \\ \nabla\psi &= k_\perp \tfrac{\partial \mathrm{J}_0(k_\perp R)}{\partial k_\perp R}\vec{e}_R \;=\; -k_\perp \mathrm{J}_1(k_\perp R)\vec{e}_R, \end{aligned}$$

platí podle zavedeného značení $\mathsf{A} = [\nabla\phi]_\mathrm{L} = [\vec{e}_z]_\mathrm{L} \;\Rightarrow\; \mathsf{D}_\mathsf{A} = [\vec{e}_x, \vec{e}_y]_\mathrm{L}$ a $\mathsf{B} = [\nabla\psi]_\mathrm{L} = [\vec{e}_R]_\mathrm{L} = [\vec{e}_x, \vec{e}_y] \;\Rightarrow\; \mathsf{D}_\mathsf{B} = [\vec{e}_z]_\mathrm{L}$. Neexistuje proto žádný vektor $\vec{\ell}$ vyhovující podmínkám kolmosti na gradient fázové a amplitudové funkce. Jinak: $\mathsf{L} = \mathsf{D}_\mathsf{A} \cap \mathsf{D}_\mathsf{B} = \emptyset$. Vektor $\vec{e}_\varphi$ je sice v každém bodě kolmý k $\nabla\phi$ a $\nabla\psi$, *ne*jedná se však o konstantní vektor, o čemž se můžeme přesvědčit např. aplikací operátoru rotace na tento vektor: $\nabla \times \vec{e}_\varphi = \vec{e}_z/R \neq 0$.)
Neexistuje[8] tedy možnost, jak zkonstruovat (pomocí naší metodiky) EM pole se střední časovou hodnotou Poyntingova vektoru stejnou jako tok ve skalární aproximaci!

Poznámka 1:
Můžeme samozřejmě zkonstruovat EM pole bez požadavku rovnosti $\langle \vec{S}_\mathrm{R} \rangle$ a $\vec{j}$, jako je to provedeno např. v [6] a [7]. V těchto článcích je volen vektor $\vec{\ell} = \vec{e}_z$, tj. ve směru propagace svazku a konkrétně pro besselovský svazek (72) je vygenerováno pole

$$\begin{aligned} E_R &\sim i\mathrm{J}_1(k_\perp R)e^{-ik_\parallel z}, & H_R &= 0, \\ E_\varphi &= 0, & H_\varphi &\sim i\zeta \mathrm{J}_1(k_\perp R)e^{-ik_\parallel z}, \\ E_z &\sim -\mathrm{J}_0(k_\perp R)e^{-ik_\parallel z}, & H_z &= 0, \end{aligned}$$

a v čase vystředovaný Poyntingův vektor

$$\langle \vec{S}_\mathrm{R} \rangle \sim \mathrm{J}_1^2(k_\perp R)\vec{e}_z.$$

Závislost na J_1 je v rozporu s $\vec{j} \sim \mathrm{J}_0^2 \vec{e}_z$, což však není překvapující.

[6] Základní informace o Besselových funkcích lze nalézt například v [8] nebo v Arseninově Matematické fyzice. První citovaná kniha obsahuje navíc bohatý seznam další literatury k tomuto tématu.

[7] $\vec{e}_R$, $\vec{e}_R$ a $\vec{e}_z$ jsou bázové vektory v cylindrické soustavě souřadné.

[8] Tuto skutečnost můžeme zjistit přímou analýzou členů $\vec{\mathcal{B}}_1(.)$ a $\vec{\mathcal{B}}_2(.)$ pro náš konkrétní případ skalární funkce (nemusíme užít sady podmínek (68), jenž není nutná).

Poznámka 2:
Můžeme také zcela formálně volit $\vec{\ell} = \vec{e}_R$ nebo $\vec{\ell} = \vec{e}_\varphi$ — *ve sporu s požadavkem konstantnosti!* — a vygenerovat příslušné EM pole. Správnější by bylo použít výrazu vektorové pole, protože *ne*máme zaručeno, že bude vyhovovat Maxwellovým rovnicím! Vzhledem k tomu, že tento postup neodpovídá námi používané metodě, nebudeme se jím podrobněji zabývat[9] (přesto, že přináší překvapující výsledky).

[9] Pouze pro ilustraci uveďme příklad. Mějme již diskutované skalární pole

$$U = \mathrm{J}_0(k_\perp R)\exp -ik_\parallel z, \quad \text{kde} \quad k_\perp^2 + k_\parallel^2 = k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

a volme (ve sporu s požadavkem konstantnosti) vektor $\vec{\ell} = \vec{e}_R = (1,0,0)_{\text{cyl}}$, jenž je v každém bodě prostoru kolmý na gradient fázové funkce. Mechanickým aplikováním reprezentačního teorému (volme $b = 0$) získáme vektorové pole

$$\begin{array}{lcllcl} E_R &=& 0, & H_R &=& i\zeta a \frac{k_\parallel^2}{k}\mathrm{J}_0(k_\perp R)e^{-ik_\parallel z}, \\ E_\varphi &=& -ik_\parallel a\mathrm{J}_0(k_\perp R)e^{-ik_\parallel z}, & H_\varphi &=& 0, \\ E_z &=& 0, & H_z &=& \zeta a \frac{k_\parallel}{k}\frac{1}{R}\Big[\mathrm{J}_0(k_\perp R) + k_\perp R\mathrm{J}_1(k_\perp R)\Big]e^{-ik_\parallel z}, \end{array}$$

které přibližně vyhovuje Maxwellovým rovnicím. Konkrétněji, dobře splňuje Maxwellovy rovnice pouze pokud $k_\perp \ll k_\parallel$ a $R \gg \lambda$, kde $\lambda = 2\pi/k$ značí vlnovou délku. Tato vada na kráse vygenerovaného pole je však zčásti vynahrazena zjištěním, že střední časová hodnota Poyntingova vektoru

$$\langle \vec{S}_\mathrm{R} \rangle = \frac{1}{2}\zeta a a^* \frac{k_\parallel^3}{k}\mathrm{J}_0^2(k_\perp R)\vec{e}_z \overset{\text{až na konstantu}}{=} \frac{ck_\parallel}{k}\mathrm{J}_0^2(k_\perp R)\vec{e}_z = \vec{j}.$$

4 Modifikace a alternativní postupy

Na předchozích stranách jsme viděli, že nám vybudovaná metodika sice poskytuje shodu toku hustoty ve skalárním popisu optického pole s časově vystředovaným Poyntingovým vektorem ve vektorovém EM popisu, bohužel však za silně omezujících podmínek, jimž vyhovuje velmi úzká třída optických polí – ve vší obecnosti prakticky pouze homogenní rovinná vlna (vlnu zkoumanou v příkladu 2 nelze považovat za příliš fyzikální). Pro všechny ostatní nelze postupu vůbec použít. K těmto "nevyhovujícím" optickým polím patří i velmi jednoduchá a relativně snadno konstruovatelná pole (v omezené části prostoru). Příkladem mohou být sférická a parabolická vlna, Gaussův svazek, besselovské svazky a mnohé další.
Je tedy na místě, zamyslet se nad možným dalším zeslabením podmínek (67), resp. (68), jejich přibližným řešením nebo alternativními postupy.

4.1 Další možnosti zeslabení podmínek (67), resp. (68)

První dvě podmínky ze sady (67) a (68) jsou ekvivalentní tomu, že skalární pole U vyhovuje Helmholtzově rovnici. Z tohoto požadavku můžeme slevit a naložit na pole U slabší podmínku – totiž aby vyhovovalo Helmholtzově rovnici pouze přibližně. Například předpokládejme speciální tvar $U = A\exp(-ikz)$, kde A je pomalu proměnná obálka vyhovující paraxiální (vzhledem k ose z) Helmholtzově rovnici

$$\Delta_\perp A - 2ik\frac{\partial A}{\partial z} = 0.$$

Mění-li se A pomalu na vzdálenosti vlnové délky, řeší $U = A\exp(-ikz)$ velmi dobře Helmholtzovu rovnici. Příkladem obálky A může být gaussovský svazek

$$A = \frac{A_0}{q(z)}e^{-ikR^2/2q(z)}, \qquad \text{kde} \qquad q(z) = z + iz_0.$$

A_0, k a z_0 jsou reálné konstanty. Speciálním případem pro $z_0 = 0$ je parabolická vlna. Při použití paraxiální (nebo jakékoli jiné) aproximace můžeme zbylé podmínky ze sady (67), resp. (68) zachovat, nebo je také modifikovat.

Jiné zeslabení může vyjít z podmínek kolmosti gradientů fázové a amplitudové funkce a vektoru $\vec{\ell}$. Nebudeme požadovat přesné splnění těchto podmínek, ale jen platnost přibližných relací $\nabla\phi\cdot\vec{\ell}\approx 0$ a $\nabla\psi\cdot\vec{\ell}\approx 0$. Konkrétněji

$$\nabla\phi\cdot\vec{\ell}\approx\delta_\phi \qquad \text{a} \qquad \nabla\psi\cdot\vec{\ell}\approx\delta_\psi, \tag{73}$$

kde δ_ϕ a δ_ψ jsou reálné funkce polohy nabývající spolu se svými derivacemi malých hodnot (například srovnatelných s $1/k$). Dá se očekávat, že také rovnost $\langle\vec{S}_{\mathrm{R}}\rangle = \vec{j}$ (až na konstantu) se změní na přibližnou relaci. Lze se o tom přesvědčit dosazením relací (73) do obecného vztahu (56) pro střední časovou hodnotu Poyntingova vektoru

$$\begin{aligned}\langle\vec{S}_{\mathrm{R}}\rangle &= -i\tfrac{\zeta}{4}\Big\{(aa^*+bb^*)\Big[2ik\psi^2\nabla\phi - 2ik\psi^2\delta_\phi\vec{\ell} + 2i\tfrac{1}{k}\nabla\psi\cdot\nabla\psi\delta_\phi\vec{\ell}+\\ &+2i\tfrac{1}{k}\nabla\psi\cdot\nabla\phi\delta_\psi\vec{\ell} + 2i\tfrac{1}{k}\psi(\nabla\psi\cdot\nabla\phi - \nabla\phi\cdot\nabla\delta_\psi)\vec{\ell}+\\ &+2i\tfrac{1}{k}\psi^2\nabla\phi\cdot\nabla\phi\delta_\phi\vec{\ell} - 4i\tfrac{1}{k}\delta_\psi\delta_\phi\delta_\psi - 2i\tfrac{1}{k}\psi\nabla\psi\vec{\ell}\cdot\nabla\delta_\phi+\\ &+2i\tfrac{1}{k}\psi\nabla\phi\vec{\ell}\cdot\nabla\delta_\psi - 2i\tfrac{1}{k}\psi^2\nabla\phi\delta_\phi\delta_\psi\Big]+\\ &+(ab^*+ba^*)\Big[+2i\psi\vec{\ell}\cdot(\nabla\psi\times\nabla\phi)+\cdots\Big]\Big\},\end{aligned}$$

kde byly použity výsledky z části 3.2. Položíme-li např. $b = 0$ a budeme-li předpokládat, že $\phi = kf$, $\delta_\phi = p/k$ a $\delta_\psi = q/k$, kde f, p a q jsou reálné funkce, a dále, že f, p, q a ψ (a jejich derivace) *ne*nabývají velkých hodnot, řekněme srovnatelných s k, pak časově vystředovanému Poyntingovu vektoru přísluší tvar

$$\begin{aligned}\langle\vec{S}_{\mathrm{R}}\rangle &= -i\tfrac{\zeta}{4}aa^*2ik^2\Big[\psi^2\nabla f + \tfrac{1}{k^2}(-\psi p + \psi^2\nabla f\cdot\nabla f p)\vec{\ell}+\\ &+\tfrac{1}{k^3}(\nabla\psi\cdot\nabla f q\vec{\ell} - \psi\nabla f\cdot\nabla q\vec{\ell} + \psi\vec{\ell}\cdot\nabla q\nabla f)+\\ &+\tfrac{1}{k^4}(\nabla\psi\cdot\nabla\psi p\vec{\ell} + \psi\nabla\psi\cdot\nabla p\vec{\ell} - \psi\vec{\ell}\cdot\nabla p\nabla\psi - \psi^2 pq\nabla f)+\\ &+\tfrac{1}{k^5}(-2pq\nabla\psi)\Big].\end{aligned}$$

Je zřejmé, že s vynikající přesností – na členy řádu $1/k^2$ a menší – můžeme ztotožnit (až na konstantu) tok hustoty (první člen v hranaté závorce) a střední časovou hodnotu Poyntingova vektoru.

Další zajímavou a přitom jednoduchou možností je omezit se jen na podmínku

$$(\vec{j})_i \overset{\text{až na konstantu}}{=} (\langle\vec{S}_{\mathrm{R}}\rangle)_i \qquad \text{místo} \qquad \vec{j} \overset{\text{až na konstantu}}{=} \langle\vec{S}_{\mathrm{R}}\rangle,$$

kde index i představuje složku ve směru i-té osy. Právě tok hustoty, resp. energie ve směru i-té osy nás totiž v praxi zajímá – v rovině kolmé na tento směr leží čelní stěna detektoru. Všechny předchozí aproximace je samozřejmě možné kombinovat.

4.2 Modifikace postupu

Uvedená zeslabení a aproximace z matematického pohledu znatelně rozšiřují třídu funkcí vyhovujících sadě podmínek (68), tj. "zpracovatelných" pomocí zavedeného postupu. Prakticky nám však téměř nepomohou, neboť i přibližné relace $\nabla\phi\cdot\vec{\ell}\approx 0$ a $\nabla\psi\cdot\vec{\ell}\approx 0$ jsou příliš silně omezující. Stále zůstává $\mathsf{L} = \emptyset$ i pro jednoduchá pole

$$\frac{1}{r}e^{-ikr}, \qquad \psi(R)e^{-ik_\parallel z} \quad \text{a} \quad \psi(R,\varphi)e^{-ik_\parallel z}$$

vyjmenovaná v úvodu kapitoly. Problémem přitom nejsou ani tak podmínky ortogonálnosti $\nabla\phi\cdot\vec{\ell}\approx 0$ a $\nabla\psi\cdot\vec{\ell}\approx 0$, jako spíše *požadavek konstantnosti* vektoru $\vec{\ell}$.

Máme pouze dvě možnosti: modifikovat náš postup nebo vytvořit nový (vytvořit novou metodu konstrukce EM pole z pole skalárního, nejlépe obsahující více stupňů volnosti a na ně pak naložit potřebné podmínky pro zachování kvadratických charakteristik).
První alternativa – modifikace – může vést již zmíněnou cestou odstranění podmínky konstantnosti vektoru $\vec{\ell}$, což by ovšem znamenalo nutnost kompletního přezkoumání postupu, především ověření toho, že vygenerované vektorové pole splňuje Maxwellovy rovnice (viz třetí příklad v sekci 3.4). Máme ovšem i jinou možnost. Místo prostorové nekonstantnosti vektoru $\vec{\ell}$ povolit "úhlovou nekonstantnost", tzn. výchozí skalární pole rozložit na superpozici jednoduchých polí (zde se nabízí rovinné vlny – úhlové spektrum), k těmto vygenerovat pomocí našeho postupu příslušná vektorová EM pole a ty pak následně složit do výsledného EM pole. Tento postup ovšem nezachovává rovnost toku hustoty a časově vystředovaného Poyntingova vektoru přesto, že je zachována pro jednotlivé elementární vlny v rozkladu. Výsledný Poyntingův vektor totiž obsahuje i křížové členy od různých elementárních vln. Připadá mi velmi pravděpodobné, že existuje možnost, aby pro určitá (symetrická) úhlová spektra byla rovnost $\vec{j}$ a $\langle\vec{S}_{\mathrm{R}}\rangle$ zachována, tj. aby křížové členy (jako celek) v Poyntingově vektoru byly zanedbatelné či dokonce nulové. Zmíněný postup (předpoklad nekonstantnosti $\vec{\ell}$ v úhlovém rozkladu) je, myslím, velmi nadějný už jen z toho důvodu, že garantuje platnost Maxwellových rovnic pro výsledné vektorové pole.
Co se týče druhé alternativy, chtěl bych se jí ještě věnovat (možná v příštím článku – co takhle udělat ještě jednu práci mezi bakalářskou a diplomovou :-) Dá se očekávat, že počet stupňů volnosti přechodu od skalárního pole U vyhovujícího Helmholtzově rovnici k vektorovámu poli $\vec{E},\vec{H}$ vyhovujícímu Maxwellovým rovnicím může být větší než jediný vektor (resp. tři: $\vec{\ell},\ a,\ b$), ale určitě bude omezený. Vyjdeme-li ze základních myšlenek práce [4], zjistíme, že by mohl existovat postup analogický reprezentačnímu teorému, ale se dvěma volitelnými konstantními vektory $\vec{\ell}_1,\ \vec{\ell}_2$.

4.3 Podmínky zajišťující rovnost jiných kvadratických veličin

Celý předchozí postup sice vycházel z toku hustoty ve skalární teorii a z Poyntingova vektoru v teorii EM, byly to však pouze "vstupní veličiny" a postup sám o sobě lze aplikovat na jakékoli charakteristiky polí – popřípadě na více charakteristik, máme-li dostatečný počet stupňů volnosti přechodu. Jak už bylo řečeno, známe celkem čtyři základní kvadratické charakteristiky, z nichž dvě a dvě v každé teorii jsou vázány příslušnou rovnicí kontinuity. O dvou z těchto čtyřech charakteristik (vždy po jedné z každé teorie) předpokládáme jejich měřitelnost a bereme je za vstupní veličiny při vyvozování našich podmínek. Celkem máme možnost sestavit čtyři různé kombinace.

Zkusme provést přechod od skalárního popisu funkcí U k vektorům intenzit EM pole s požadavkem rovnosti hustoty ve skalární teorii

$$\rho = UU^* = \psi^2 \tag{74}$$

a časově vystředované hustoty EM energie v teorii vektorové (viz kapitolu 2)

$$\langle w_{\mathrm{R}} \rangle = \langle w_{\mathrm{R}}^{\mathrm{el}} \rangle + \langle w_{\mathrm{R}}^{\mathrm{mag}} \rangle = \frac{1}{2}\Re\Big(\frac{\epsilon}{2}\vec{E}\cdot\vec{E}^* + \frac{\mu}{2}\vec{H}\cdot\vec{H}^*\Big). \tag{75}$$

Z kapitoly 2 též známe podobu v čase vystředované hustoty EM energie – vztah (57). Po roznásobení a úpravě nám první hranatá závorka poskytne členy

$$\begin{aligned} &k^2 UU^* + \nabla U\cdot\nabla U^* - \left(\nabla U\cdot\vec{\ell}\right)\left(\nabla U^*\cdot\vec{\ell}\right) + \\ &+\tfrac{1}{k^2}\nabla\left(\vec{\ell}\cdot\nabla U\right)\cdot\nabla\left(\vec{\ell}\cdot\nabla U^*\right) + \\ &+\nabla\left(\vec{\ell}\cdot\nabla U\right)\cdot\vec{\ell}U^* + \nabla\left(\vec{\ell}\cdot\nabla U^*\right)\cdot\vec{\ell}U \end{aligned}$$

a druhá členy

$$\tfrac{1}{k}\left(\nabla U\times\vec{\ell}\right)\cdot\nabla\left(\vec{\ell}\cdot\nabla U^*\right) + \tfrac{1}{k}\left(\nabla U^*\times\vec{\ell}\right)\cdot\nabla\left(\vec{\ell}\cdot\nabla U\right).$$

Situace je jednodušší než v předchozím případě. Postačujícími a tentokrát *i nutnými* (stačí se zaměřit na třetí člen) podmínkami pro vymizení všech členů kromě prvních dvou (které neobsahují vektor $\vec{\ell}$) jsou opět

$$\nabla\phi\cdot\vec{\ell} = 0 \qquad a \qquad \nabla\psi\cdot\vec{\ell} = 0, \tag{76}$$

pro pole $U = \psi e^{-i\phi}$.
První dva členy můžeme přepsát pomocí reálných funkcí ψ a ϕ

$$k^2 UU^* + \nabla U\cdot\nabla U^* = (k^2 + \nabla\phi\cdot\nabla\phi)\psi^2 + \nabla\psi\cdot\nabla\psi.$$

Zde se objevuje nový problém v podobě dvou skalárních součinů jenž jsou nadbytečné oproti hustotě (74), ale které nelze zrušit volbou vektoru $\vec{\ell}$. Zaměřme se první na skalární součin gradientů amplitudových funkcí – jediná možnost jak jej odstranit je volba $\nabla\psi = 0$ a tedy $\psi = A$ konstantní. Vzhledem k současnému požadavku, aby funkce U řešila Helmholtzovu rovnici, získáme soustavu

$$\begin{aligned} \left(\Delta + k^2 - \nabla\phi\cdot\nabla\phi\right)\psi &= 0, \\ \psi\Delta\phi + 2\nabla\phi\cdot\nabla\psi &= 0, \\ \psi - A &= 0, \end{aligned}$$

jejímž jediným řešením je homogenní rovinná vlna. O tom se snadno přesvědčíme dosazením poslední rovnice do obou předchozích

$$\begin{aligned} \left(k^2 - \nabla\phi\cdot\nabla\phi\right)A &= 0, \\ A\Delta\phi &= 0, \end{aligned}$$

což pro $A \neq 0$ dává $\nabla\phi\cdot\nabla\phi = k^2$ a $\Delta\phi = 0$. Gradient fázové funkce musí být konstantní vektor $\nabla\phi = \vec{k}$ o velikosti $|\vec{k}| = k$. Jako řešení jsme tudíž získali $U = A\exp\left(-i\vec{k}\cdot\vec{r}\right)$, tj. homogenní rovinnou vlnu.
Využijeme-li předchozích výsledků, můžeme pro v čase vystředovanou hustotu EM energie psát

$$\begin{aligned} \langle w_{\mathrm{R}} \rangle &= \tfrac{\epsilon}{2}k^2(aa^* + bb^*)\psi^2 \overset{\text{až na konstantu}}{=} \rho, \quad \text{kde} \\ \rho &= \psi^2 = A^2. \end{aligned} \tag{77}$$

Shrneme:

> Abychom zachovali až na konstantní činitel rovnost hustoty ve skalární aproximaci a hustoty EM energie v poli vygenerovaném pomocí reprezentačního teorému, *musíme* na amplitudovou ψ a fázovou ϕ funkci pole U naložit následující sadu podmínek
>
> $$\Big\{(\Delta + k^2 - \nabla\phi\cdot\nabla\phi)\psi = 0,\ \psi\Delta\phi + 2\nabla\phi\cdot\nabla\psi = 0,\\ \nabla\phi\cdot\vec{\ell} = 0,\ \nabla\psi\cdot\vec{\ell} = 0,\ \nabla\psi = \vec{0}\Big\}, \tag{78}$$
>
> jimž ale exaktně vyhovuje pouze homogenní rovinná vlna.

Podmínky (78) však můžeme zeslabit stejně jako v předchozím, například volbou $\nabla\psi = \vec{\delta}$, kde $\vec{\delta}$ je vektorové pole nabývající malých velikostí $\|\vec{\delta}\|$ oproti ψ. Konkrétněji

$$\frac{\|\vec{\delta}\|}{|\psi|} = \frac{\|\nabla\psi\|}{|\psi|} \ll k.$$

Z uvedeného je zřejmé, že jediným optickým polem, pro které je při přechodu od skalární teorie k teorii vektorové zachována shodnost (ve smyslu směru a funkční závislosti) toku hustoty $\vec{j}$ a v čase vystředovaného Poyntingova vektoru $\langle\vec{S}_{\mathrm{R}}\rangle$ a současně shodnost hustoty ρ a časově vystředované hustoty EM energie $\langle w_{\mathrm{R}}\rangle$, je homogenní rovinná vlna.

5 Závěr

Nebudeme formulovat žádné další shrnutí či dosažené výsledky. Důležitá tvrzení a závěry jsou v práci uvedeny a zvýrazněny, postup je průběžně diskutován a jsou zmíněny i alternativní přístupy. V práci je upřednostněn postup a jeho možné modifikace před konkrétními výslednými vztahy.
Je také nutné poznamenat, že práce byla zpracovaná spíše jako ucelené pojednání, než jako odborný článek. Tím ospravedlňuji zařazení kapitoly 1.1 a uvedení většiny mezivýsledků.

Reference

[1] Born, M. – Wolf, E.: *Principles of Optics.* 6th ed., 1993 Pergamon Press, Oxford, New York.

[2] Stratton, J.A.: *Teorie elektromagnetického pole.* 1961 SNTL, Praha. (Z originálu Electromagnetic Theory, 1941 McGraw-Hill Book Co., New York.)

[3] Bouchal, Z. – Horák, R. – Wagner, J.: *Propagation-invariant electromagnetic fields: theory and experiment.* 1996 J. Mod. Optics, vol. 43, 1905-1920.

[4] Green, H.S. – Wolf, E.: *A scalar representation of electromagnetic fields.* 1953 Proc. Phys. Soc. London, vol. 12-A, 1129-1137.

[5] Whittaker, E.T. 1904 Proc. Lond. Math. Soc, vol. 1, 367.

[6] Horák, R. – Bouchal, Z. – Bajer, J.: *Nondiffracting stationary electromagnetic field.* 1997 Optics Comm., vol. 133, 315-327.

[7] Bouchal, Z. – Olivík, M.: *Non-diffractive vector Bessel beams.* 1995 J. Mod. Optics, vol. 42, 1555-1566.

[8] Goertzel, G. – Tralli, N.: *Některé matematické metody fyziky.* 1970 SNTL (TKI), Praha.