

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLMOUCI  
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA  
KATEDRA OPTIKY

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Rovnoměrně zrychlený pohyb ve speciální  
teorii relativity



Vypracovala:	<b>Tereza Giblová</b>
Studijní program:	B1701 Fyzika
Studijní obor:	Obecná fyzika a matematická fyzika
Forma studia:	Prezenční
Vedoucí diplomové práce:	Mgr. Lukáš Richterek, Ph.D.
Termín odevzdání práce:	květen 2018

### **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem předloženou diplomovou práci vypracovala samostatně pod vedením Mgr. Lukáše Richterka, Ph.D. a že jsem použila zdrojů, které cituji a uvádím v seznamu použitých pramenů.

V Olomouci dne 10. května 2018

.....  
Tereza Giblová

## Bibliografická identifikace

Jméno a příjmení autora	Tereza Giblová
Název práce	Rovnoměrně zrychlený pohyb ve speciální teorii relativity
Typ práce	Bakalářská
Pracoviště	Katedra optiky
Vedoucí práce	Mgr. Lukáš Richterek, Ph.D.
Rok obhajoby práce	2018
Abstrakt	Bakalářská práce se zabývá některými zajímavými jevy spojenými s rovnoměrně zrychleným pohybem ve speciální teorii relativity jako jsou kupříkladu paradox Bellových raket, časoprostorová omezení komunikace mezi dvěma pozorovateli či relativistickým vztlakem řešeným pomocí principu ekvivalence.
Klíčová slova	speciální teorie relativity, Minkowského diagramy, paradox Bellových raket, paradox dvojčat, princip ekvivalence
Počet stran	55
Počet příloh	0
Jazyk	český

## Bibliographical identification

Autor's first name and surname	Tereza Giblová
Title	Uniformly accelerated movement in special theory of relativity
Type of thesis	Bachelor
Department	Department of Optics
Supervisor	Mgr. Lukáš Richterek, Ph.D.
The year of presentation	2018
Abstract	This bachelor thesis concentrates on some remarkable phenomena involved in uniformly accelerated movement in special theory of relativity such as Bell's spaceship paradox, spacetime limitations of communication between two observers, or relativistic buoyancy addressed by equivalence principle.
Keywords	special theory of relativity, Minkowski diagrams, Bell's spaceship paradox, twin paradox, equivalence principle
Number of pages	55
Number of appendices	0
Language	czech

# Obsah

Úvod	7
<b>1 Základní myšlenky speciální teorie relativity</b>	<b>8</b>
1.1 Lorentzova transformace a její důsledky . . . . .	8
1.2 Rovnoměrně zrychlený pohyb . . . . .	9
<b>2 Pohyb dvou raket</b>	<b>13</b>
2.1 Pozorování vůči soustavě $K$ . . . . .	13
2.2 Pozorování vůči soustavě $K'$ . . . . .	13
2.3 Kontrakce délky mezi dvěma vesmírnými stanicemi . . . . .	15
2.4 Úhel pohledu pilota v raketě . . . . .	16
<b>3 Paradox Bellových raket</b>	<b>17</b>
3.1 Základní varianta řešení . . . . .	18
3.2 Rozšířená varianta řešení . . . . .	20
3.3 Srovnání . . . . .	23
<b>4 Komunikace se zrychlenými pozorovateli ve zrychleném Minkowského prostoru</b>	<b>25</b>
4.1 Komunikace mezi inerciálním pozorovatelem a zrychleným pozorovatelem . . . . .	25
4.1.1 Prostorová omezení . . . . .	25
4.1.2 Časová omezení . . . . .	26
4.2 Komunikace mezi zrychlenými pozorovateli . . . . .	29
4.2.1 Prostorové omezení mezi zrychlenými pozorovateli . . . . .	30
4.2.2 Časové omezení mezi zrychlenými pozorovateli . . . . .	32
<b>5 Paradox dvojčat</b>	<b>35</b>
5.1 Rovnoměrné zrychlení . . . . .	35
5.2 Čtyřfázová cesta . . . . .	36
5.3 Pozorování světelných signálů . . . . .	36
5.3.1 Pohled dvojčete zůstávajícího na Zemi . . . . .	37
5.3.2 Pohled cestujícího dvojčete . . . . .	39
5.4 Cesta ke hvězdě Vega . . . . .	40
5.4.1 Pohled dvojčete zůstávajícího na Zemi . . . . .	40
5.4.2 Pohled cestujícího dvojčete . . . . .	41
<b>6 Jevy spojené se zrychleným pohybem</b>	<b>43</b>
6.1 Rudý posuv . . . . .	45
6.2 Ohýbání světelných paprsků . . . . .	45

<b>7 Relativistický vztlak</b>	<b>48</b>
7.1 Pohled v soustavě $K$ . . . . .	48
7.2 Pohled v soustavě $K'$ . . . . .	49
<b>Závěr</b>	<b>52</b>
<b>Literatura</b>	<b>54</b>

# Úvod

Speciální teorie relativity byla navržena Albertem Einsteinem roku 1905. Einstein vyšel z Galileiho principu relativity a nahradil představy o prostoru a čase tzv. „klasické fyziky“ vytvořené Isaacem Newtonem, vysvětlil a odvodil Lorentzovy transformace (transformace prostorových souřadnic a času mezi dvěma vztažnými soustavami pohybujícími se vůči sobě velmi vysokými rychlostmi) za předpokladu konstantní rychlosti světla.

Tato práce se zabývá rovnoměrně zrychleným pohybem ve speciální teorii relativity. Díky principu ekvivalence (viz např. Rindler, 2006) jsou zrychleně se pohybující soustavy z hlediska fyzikálních dějů lokálně ekvivalentní soustavám nacházejícím se v klidu v gravitačním poli. V nejjednodušším případě pohybu s konstantním zrychlením (popsaným v části 1.2) je pak taková soustava ekvivalentní soustavě v homogenním gravitačním poli. Díky tomu lze v těchto soustavách poměrně jednoduše ukázat některé jevy diskutované v obecné teorii relativity, jako je rudý posuv nebo ohyb světelných paprsků. Cílem práce bylo na základě rešerše dostupných pramenů systematicky popsat jevy spojené se zrychleným pohybem na úrovni základního vysokoškolského kurzu fyziky.

V první kapitole jsou stručně shrnuty základní rovnice potřebné k odvození nejdůležitějších vztahů pro rovnoměrně zrychlený pohyb ve speciální teorii relativity a znázornění tohoto pohybu, pomocí Minkowského prostoročasových diagramů, jež je symetricky používáno i v dalším výkladu. Následujících kapitoly se zabývají konkrétními problémy, jež jsou samostatně popsány v zahraničních časopiseckých periodikách uvedených v seznamu literatury.

Rozebrán je paradox Bellových raket pouze za použití Lorentzovy transformace a Minkowského diagramů nejprve se zanedbáním časového průběhu. Následně je rozebrán bez zanedbání času zrychlování ve dvou různých variantách. V další kapitole jsou odvozeny vztahy pro prostorové a časové omezení v komunikaci mezi dvěma pozorovateli, z nichž jeden se pohybuje zrychleně. Další kapitoly se zabývají paradoxem dvojčat a dalšími jevy spojenými s rovnoměrně zrychleným pohybem, jako je rudý posuv a ohýbání světelných paprsků. Poslední kapitola se zaměřuje na popis vztlakové síly ve speciální teorii relativity za použití principu ekvivalence.

Chtěla bych poděkovat vedoucímu bakalářské práce Mgr. Lukáši Richterovi, Ph.D. za cenné rady, připomínky a čas, který mi při řešení problematiky věnoval, a Mgr. Janu Říhovi, Ph.D. za poskytnutí softwaru Wolfram Mathematica, s jehož pomocí jsem vykreslila grafy a ilustrační obrázky.

# Kapitola 1

## Základní myšlenky speciální teorie relativity

Před podrobnějšími úvahami o rovnoměrně zrychleném pohybu připomeňme stručně některé myšlenky speciální teorie relativity, na něž navážeme v následujících kapitolách.

Speciální teorie relativity je založena na dvou postulátech: principu relativity a konstantní rychlosti šíření světla ve vakuu  $c$ .

Princip relativity říká [1]: *Je-li  $K$  Galileův systém souřadnic (takový souřadnicový systém, jehož pohybový stav je takový, že relativně k němu platí zákon setrvačnosti), pak je jím také každý druhý  $K'$ , který je vzhledem ke  $K$  ve stavu rovnoměrného translačního pohybu. Přírodní děje probíhají ke  $K'$  dle týchž obecných zákonů jako vzhledem ke  $K$ .* Takové soustavy označujeme jako inerciální.

Postulát rychlosti světla říká [2]: *Rychlost světla ve vakuu má stejnou velikost  $c$ <sup>1</sup> ve všech směrech a ve všech inerciálních vztažných soustavách, nezávislou na rychlosti zdroje.*

### 1.1 Lorentzova transformace a její důsledky

Mějme vztažnou soustavu  $K$ , kterou spojíme s kartézskou soustavou souřadnic  $(x, y, z)$ , s vlastním časem  $t$ ; vůči ní se pohybuje soustava  $K'$  rychlostí  $v$  (obrázek (1.1)); čárkované souřadnice vztahující se ke  $K'$  se nám transformují následujícími vztahy dle [1]:

$$x' = \gamma(x - vt) = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad (1.1)$$

$$y' = y,$$

$$z' = z,$$

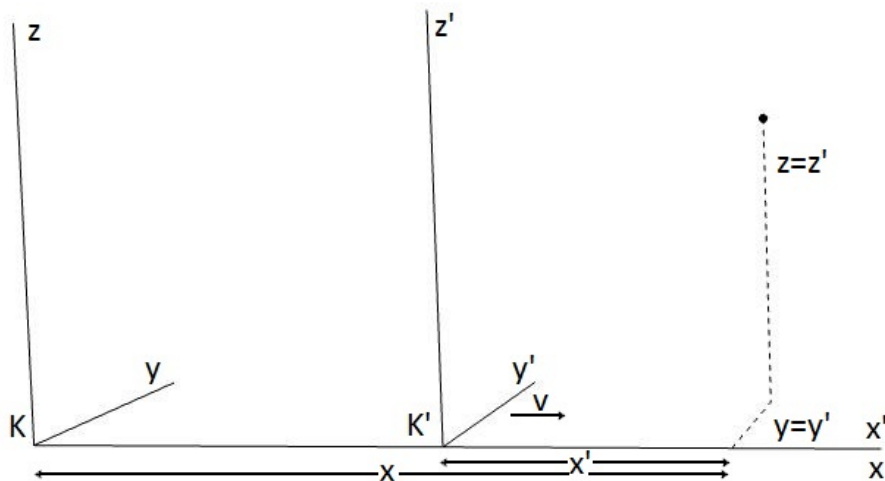
$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad (1.2)$$

kde  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$ . Tento systém rovnic se nazývá Lorentzova transformace.

---

<sup>1</sup> $c = 299\,792\,458$  m/s viz [6]





Obrázek 1.1: Vztažná soustava  $K$  a vůči ní se pohybující soustava  $K'$  rychlostí  $v$  (nakresleno podle [1]).

Z Lorentzovy transformace pak vyplývá kontrakce délek a dilatace času, jež jsou dané vztahy (viz [3]):

$$L' = \gamma^{-1}L = L\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}, \quad (1.3)$$

$$\Delta t' = \gamma\Delta t = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

kde  $L$  je vlastní klidová délka tyče (vzhledem ke  $K$ ) a  $L'$  je zkrácená délka tyče (vzhledem k pohybující se soustavě  $K'$ );  $\Delta t'$  je délka trvání děje měřená v soustavě, která se vzhledem k tomuto ději pohybuje, a  $\Delta t$  je vlastní doba trvání děje v soustavě  $K$ , v níž tento děj proběhne na stejném místě. Často se zavádí vlastní čas děje, který je z časů naměřených v různých inerciálních soustavách nejkratší (viz[4]):

$$d\tau = \gamma^{-1}dt = dt\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}. \quad (1.4)$$

## 1.2 Rovnoměrně zrychlený pohyb

Pro částici s konstantním vlastním zrychlením  $a$  vzhledem k vztažné soustavě  $K'$ , vůči níž je částice v daném čase v klidu platí vztah (viz [4, 5]):

$$\frac{dv}{dt} = a \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}. \quad (1.5)$$

Pro počáteční podmínku  $v|_{t=0} = 0$  dostáváme rovnici

$$\frac{dx}{dt} = v = \frac{at}{\sqrt{1 + \left(\frac{at}{c}\right)^2}}. \quad (1.6)$$

Dosazením do (1.4) dostáváme:

$$d\tau = \frac{dt}{\sqrt{1 + \left(\frac{at}{c}\right)^2}}.$$

Provedeme následující substituci:

$$\frac{at}{c} = \sinh z,$$

$$\frac{adt}{c} = \cosh z dz$$

a dostáváme:

$$d\tau = \frac{\frac{c}{a} \cosh z}{\underbrace{\sqrt{1 + \sinh^2 z}}_{\cosh z}} dz = \frac{c}{a} dz.$$

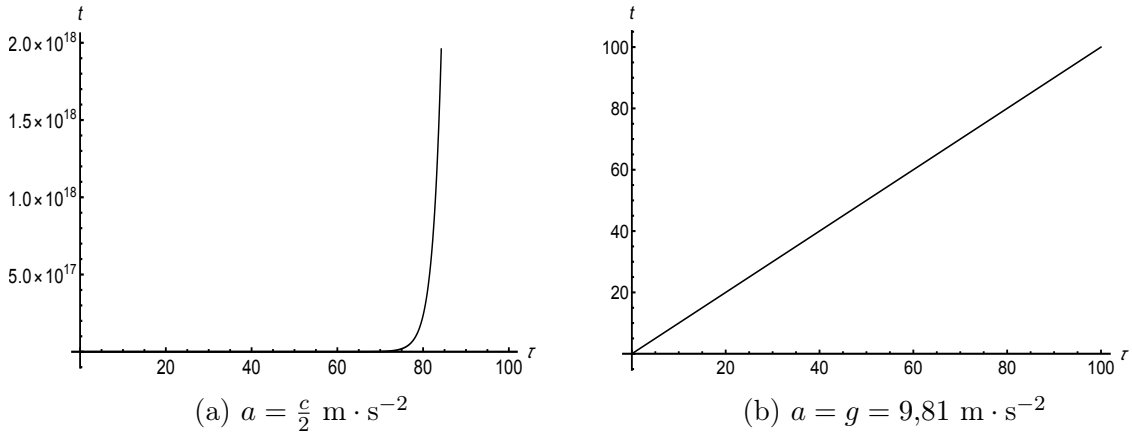
Integrací, při zvolení počáteční podmínky  $\tau|_{t=0} = 0$  a zpětným dosazením dostáváme:

$$\tau = \frac{c}{a} \sinh^{-1} \left( \frac{at}{c} \right),$$

odkud lze vyjádřit:

$$ct = \frac{c^2}{a} \sinh \left( \frac{a\tau}{c} \right). \quad (1.7)$$

Graf závislosti času na vlastním čase můžeme vidět na obrázku 1.2.



Obrázek 1.2: Závislost času  $t$  na vlastním čase  $\tau$ .

Na obr. 1.2a je zřejmá extrémní dilatace času při obrovském zrychlení, jehož bylo prakticky nemožné dosáhnout, zejména po delší dobu. Na obr. 1.2b je závislost lineární.

Obdobně nalezneme závislost polohy na čase, z rovnice (1.6) víme:

$$dx = \frac{at}{\sqrt{1 + \left(\frac{at}{c}\right)^2}} dt.$$

Integrací a zvolením počáteční podmínky  $x|_{t=0} = x_0$  dostáváme:

$$x - x_0 = \frac{c^2}{a} \sqrt{1 + \left(\frac{at}{c}\right)^2} - \frac{c^2}{a},$$

dosazením  $t$  z rovnice (1.7):

$$x - x_0 = \frac{c^2}{a} \cosh\left(\frac{a\tau}{c}\right) - \frac{c^2}{a}. \quad (1.8)$$

Umocněním vztahů (1.7) a (1.8) a jejich následným odečtením dostáváme rovnici rovnoměrně zrychleného pohybu s konstantním vlastním zrychlením  $a$ :

$$\left(x - x_0 + \frac{c^2}{a}\right)^2 - (ct)^2 = \left(\frac{c^2}{a}\right)^2, \quad (1.9)$$

což je rovnice hyperboly. Přímočarému pohybu s konstantním vlastním zrychlením se říká „hyperbolický pohyb“.

Středová rovnice hyperboly s osou rovnoběžnou s osou  $x$  je:

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} - \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1, \quad (1.10)$$

pro její asymptoty platí následující vztah viz [6]:

$$y - n = \pm \frac{b}{a}(x - m). \quad (1.11)$$

Obdobně lze nalézt rovnice asymptot pro hyperbolu (1.9), kde  $y = ct$ ,  $a = b = c^2/a$ ,  $m = x_0 - c^2/a$  a  $n = 0$ :

$$ct = \pm \left(x - x_0 + \frac{c^2}{a}\right). \quad (1.12)$$

Na obrázku (1.3) můžeme vidět některé hyperboly se stejným zrychlením a různými  $x_0$  a jejich příslušné asymptoty – části světelných kuželů.

Volbou  $x_0 = c^2/a$  dostáváme hyperbolu:

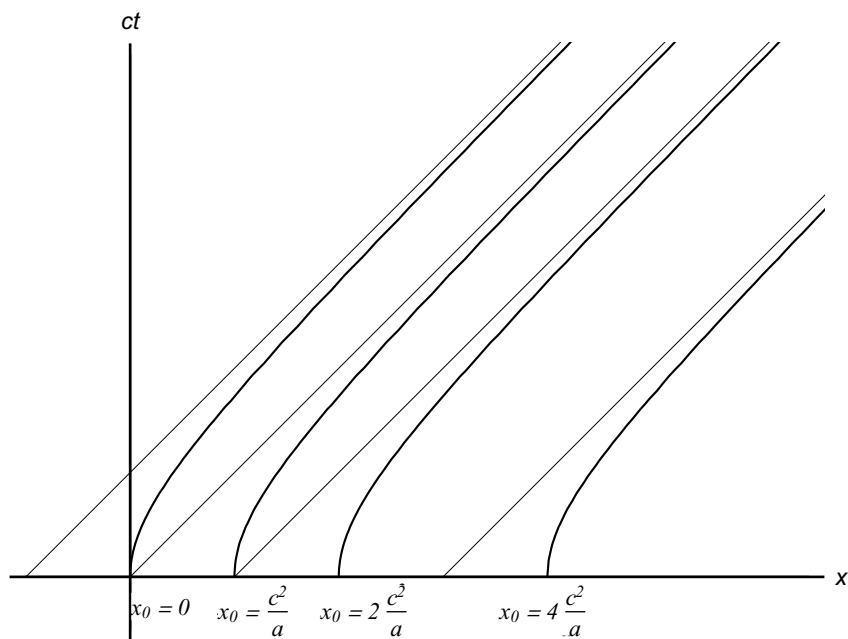
$$x^2 - (ct)^2 = \left(\frac{c^2}{a}\right)^2 \quad (1.13)$$

s asymptotami ve tvaru:

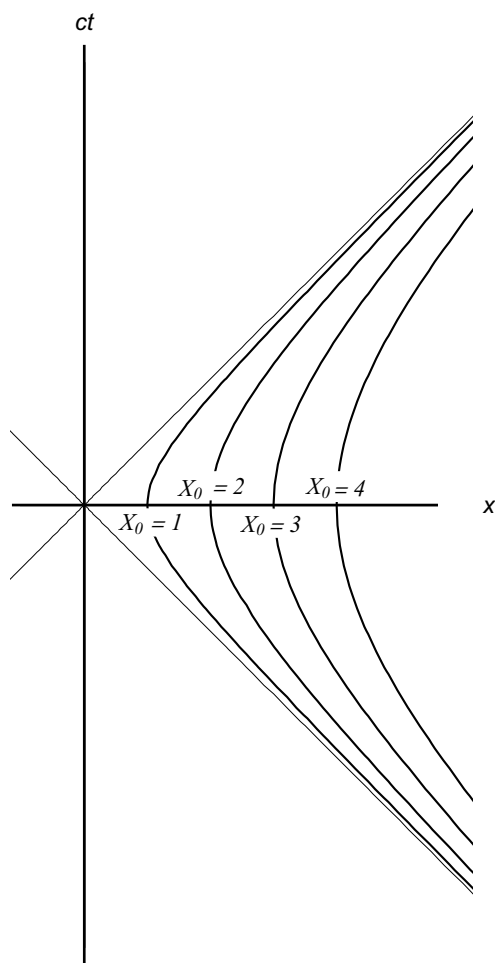
$$ct = \pm x, \quad (1.14)$$

odpovídajícím rovnici světelného kužele s vrcholem v počátku  $[0,0]$ .

Několik světočar příslušných hyperbol je znázorněno na obrázku (1.4) pro různé hodnoty  $X$ , kde  $X = c^2/a$  (pro větší  $X$  hodnota  $a$  klesá) odpovídá průsečíku s osou  $x$  pro čas  $t = 0$ , se společnou asymptotou – světelným kuželem procházejícím počátkem  $[0,0]$ . Části hyperboly, pro něž platí  $ct < 0$  odpovídají rovnoměrně zpomalenému pohybu.



Obrázek 1.3: Ukázky hyperbolického pohybu pro různý počátek  $x_0$



Obrázek 1.4: Ukázky hyperbolického pohybů pro hodnoty  $X = 1,2,3,4$ , směrem vpravo zrychlení klesá (zakresleno podle [3])

# Kapitola 2

## Pohyb dvou raket

Uvažujme raketu s vlastní délkou  $L$ , jež je na počátku v klidu vůči inerciální soustavě  $K$ . Raketa pak začne zrychlovat, až dosáhne stálé rychlosti  $v$ . Po jejím dosažení je délka rakety pro pozorovatele v  $K$  zkrácená z  $L$  na  $L'$  dle vztahu (1.3).

Uvažujme dvě stejné rakety  $A$  a  $B$ , jež jsou zpočátku v klidu vůči inerciální soustavě  $K$  ve vzájemné vzdálenosti  $L$ . V čase  $t = 0$  rakety začnou zrychlovat ve stejném směru podél spojnice  $A$  a  $B$  se stejným zrychlením a po stejně dlouho trvající časový interval vůči  $K$ . Ve stejnou chvíli přestanou zrychlovat a vůči vztažné soustavě  $K$  dosáhnou stálé rychlosti  $v$ . V této kapitole uvažujeme, že rakety zrychlují po velmi krátkou dobu, takže změna rychlosti nastává skoro okamžitě. Zaměříme se na otázku, jaká bude vzdálenost mezi dvěma raketami z hlediska dvou různých vztažných soustav.

### 2.1 Pozorování vůči soustavě $K$

Výsledek lze i bez složitých výpočtů znázornit pomocí Minkowského časoprostorového diagramu 2.1.

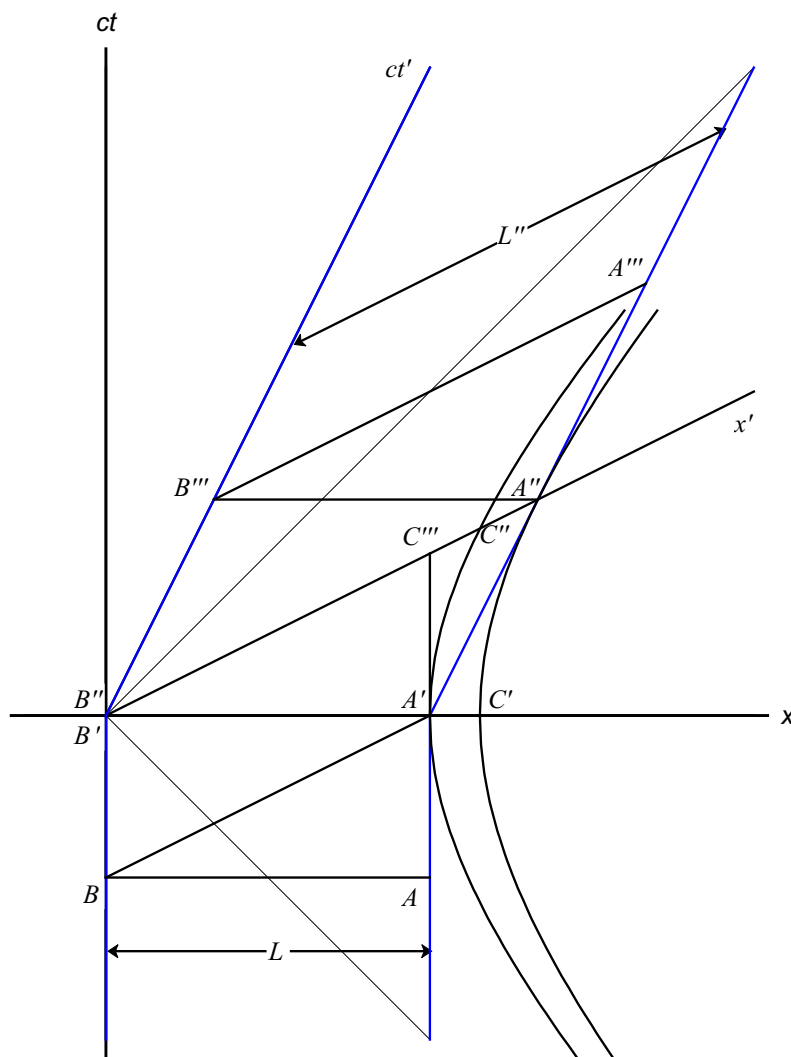
Jsou-li před zrychlením rakety v klidu vůči  $K$  ve vzájemné vzdálenosti  $L$ , pak světočáry dvou raket jsou  $A \rightarrow A'$  a  $B \rightarrow B'$ . Pro zjednodušení předpokládejme zrychlení ve velmi krátkém čase, potom jsou světočáry raket kombinací dvou polopřímek. Událost  $B'$  je těsně před zrychlením a  $B''$  těsně po zrychlení. Světočáry dvou raket po zrychlení jsou  $A' \rightarrow A'' \rightarrow A'''$  a  $B'' \rightarrow B'''$ , kde  $A''B'''$  je rovnoběžné s  $A'B''$ . Vzdálenost v  $K$  by měla být měřena ve stejném okamžiku z hlediska pozorovatele v  $K$ , užijeme vztahu viz [7]:

$$x^2 - (ct)^2 = (x')^2 - (ct')^2 = L^2, \quad (2.1)$$

což je rovnice tzv. kalibrační hyperboly, jež odpovídá  $|B''C'''| = L$  (obrázek 2.1). Vzdálenost dvou raket po zrychlení je pak  $|A'B''| = |A''B'''| = L$ . Vzdálenost dvou raket nepodléhá vzhledem k soustavě  $K$  lorentzovskému zkracování délek a zůstává stejná, jako když byly rakety v klidu vzhledem ke  $K$ .

### 2.2 Pozorování vůči soustavě $K'$

Pokud budeme situaci popisovat vůči inerciální soustavě  $K'$  ( $x', ct'$ ) (viz obr. 2.1 a obr. 2.2), která se pohybuje rychlostí  $v$  směrem vpravo, budou vůči ní rakety po zrychlení v klidu. Dvě události se jeví jako současné události pro pozorovatele v  $K'$ , pokud je



Obrázek 2.1: Světočáry raket (modře), světelný kužel a kalibrační hyperboly v soustavě  $K(x, ct)$  a  $K'(x', ct')$ . Body  $A$ ,  $A'$  a  $C''$  jsou soumísné v soustavě  $K$ , zatímco v soustavě  $K'$  jsou soumísné body  $A'$ ,  $A''$  a  $A'''$  (nakresleno podle [7]).

spojnice těchto událostí rovnoběžná s osou  $x'$ , proto jsou z hlediska  $K'$  současné události  $A''$  a  $B'$ , nikoliv události  $A'$  a  $B'$ ,  $B'$  jsme navíc ztotožnili s  $B''$ . Pro pozorovatele v  $K'$  je vzdálenost dvou raket  $|A''B''| = |A'''B''| = L''$ . Vzdálenost  $L''$  se zdá být delší než  $L$ , jenomže jednotky pro soustavy  $K$  a  $K'$  v diagramu nejsou stejně velké. Pro transformaci délky platí vztah (viz např. [7]):

$$x^2 - (ct)^2 = (x')^2 - (ct')^2 = (L'')^2, \quad (2.2)$$

což je opět rovnice tzv. kalibrační hyperboly (obrázek 2.1), jejíž asymptotou je světelný kužel. Její tečnou je v bodě  $A''$  přímka  $A'A''A'''$ . Bod  $C'$  je průsečík hyperboly s osou  $x$ . Dosazením  $t' = 0$  dostaneme  $x' = L''$ , stejně tak dosazením  $t = 0$  dostaneme  $x = L''$ . V diagramu je znázorněno  $|B''C'| = L''$ , kde je vidět, že  $|B''C'| > |B''A'|$ , z čehož plyne, že  $L'' > L$ .

Na určení vzdálenosti  $L''$  využijeme Lorentzovy transformace. Události  $A'$  a  $A''$  jsou v  $K'$  soumísné, proto vzdálenost  $L'' = |B'A''| = |B'A'|$  v soustavě  $K'$ . Do vztahu (1.1) dosadíme vzdálenosti  $|B'A'|$  v soustavě  $K$  a  $K'$ :

$$L'' = |B'A'|_{K'} = \gamma(|B'A'|_K - vt_{\langle B'A' \rangle |K}).$$

Jak je patrné z obrázku 2.1, vzdálenost  $|B'A'|_K = L$  a vzhledem k současným událostem je časový rozdíl  $t_{\langle B'A' \rangle |K} = 0$ , dosazením dostáváme:

$$L'' = \gamma L = \frac{L}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \quad (2.3)$$

Ačkoliv v soustavě  $K$  nastanou události zrychlení raket  $A'$  a  $B' = B''$  současně, z hlediska pozorovatele v soustavě  $K'$  současné nejsou a raketa  $A'$  začne zrychlovat dříve. Z obrázku 2.1 můžeme za použití Lorentzovy transformace (1.2) vyjádřit čas:

$$t'_{A'} - t'_{B'} = \gamma\left(0 - \frac{v}{c^2}L\right) - \gamma\left(0 - \frac{v}{c^2}0\right) = -\gamma L \frac{v}{c^2}. \quad (2.4)$$

Díky tomu musí být vzdálenost mezi raketami v soustavě  $K'$  větší než  $L$ .

## 2.3 Kontrakce délky mezi dvěma vesmírnými stanicemi

Uvažujme navíc dvě vesmírné stanice, jež jsou v klidu vzhledem k soustavě  $K$ . Před zrychlením jsou rakety umístěny v těchto vesmírných stanicích a jejich vzdálenost je  $L$  vzhledem ke  $K$ . Nakreslíme Minkowského diagram z hlediska pozorovatele v  $K'$  (obrázek 2.2).

Pro pozorovatele v  $K'$  se rakety stejně tak jako vesmírné stanice pohybují směrem vlevo rychlostí  $v$ : podél světočar  $A \rightarrow A'$  a  $B \rightarrow B'$ . V události  $A'$  se raketa  $A$  vzhledem k soustavě  $K'$  zastaví zažehnutím raketového motoru a později v události  $B'$  zastaví raketa  $B$ . Kvůli časovému zpoždění způsobené relativitou současnosti se vzdálenost mezi raketami pro pozorovatele v  $K'$  zvětší. Vzdálenost mezi raketami stejně tak i vesmírnými stanicemi před zastavením (z pohledu  $K'$ ) je  $A'B = L'$ . Opět využijme kalibrační hyperboly ((2.1)), jejíž tečnou je v bodě  $A'$  přímka  $AA'$  a její asymptotou je světelný kužel. Hyperbola protíná osu  $x'$  v bodě  $C''$ . Je vidět, že  $|A'B'|_K = |C''B'|_{K'} = L$  je zcela jistě delší než  $|A'B| = L'$ .

Z obrázku 2.1 lze vyčíst, že  $x_{A'} = L$ ,  $x_{B'} = 0$  a  $t_{A'} = t_{B'} = 0$  vzhledem k soustavě  $K$ . Za použití Lorentzovy transformace pro délku (1.1) a za využití obrázku 2.2 vychází v soustavě  $K'$ :

$$x'_{A'} = \gamma L,$$

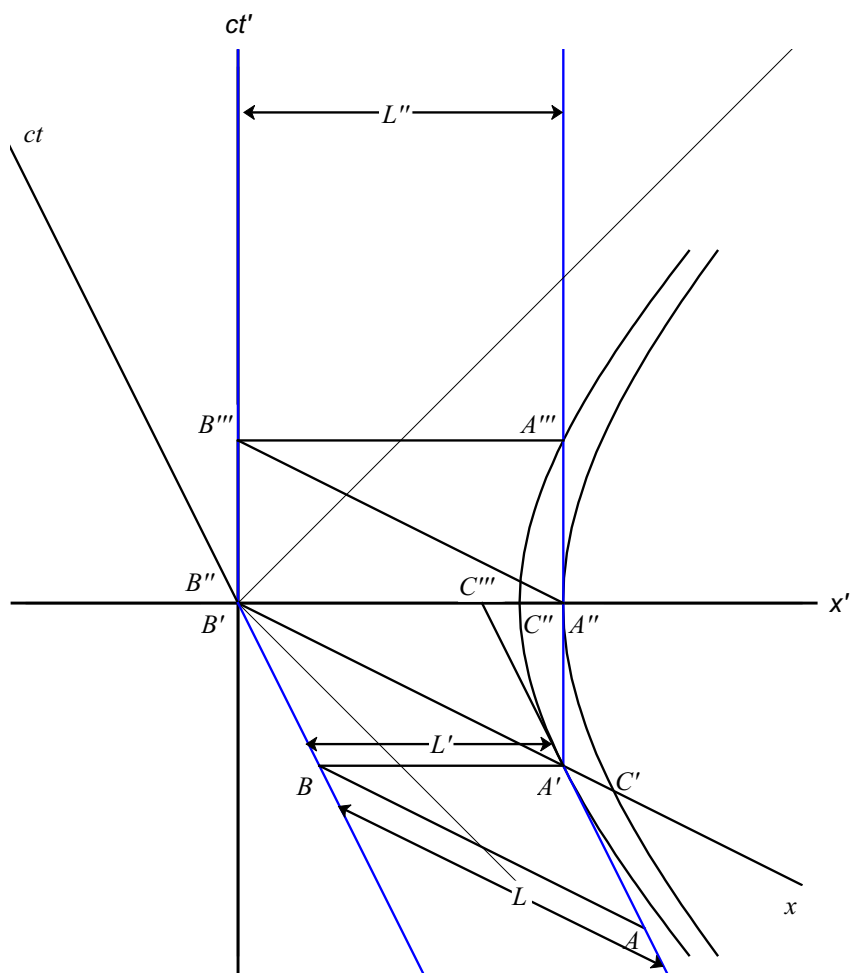
$$x_B = \gamma(x'_B + vt'_B),$$

dosadíme  $x_B = 0$  a jelikož  $t'_B = t'_{A'}$  viz obr. 2.2, dosadíme z (2.4) a vyjádříme:

$$x'_B = \gamma L \frac{v^2}{c^2},$$

$$L' = x'_{A'} - x'_B = L \frac{1}{\gamma} < L.$$

Pro pozorovatele v  $K'$  se vzdálenost mezi vesmírnými stanicemi zkrátí podle (1.3).



Obrázek 2.2: Vztažná soustava  $K'(x', ct')$  jako kartézský souřadnicový systém. Světelný kužel a hyperboly odpovídají světelnému kuželu a hyperbolám na obrázku 2.1 (nakresleno podle [7])

## 2.4 Úhel pohledu pilota v raketě

Pro pilota v raketě  $B$  se jeví vzdálenost dvou raket jako  $A'B' = L$  před zrychlením, ale zvýší se náhle na  $A''B'' = L''$  těsně po zrychlení.

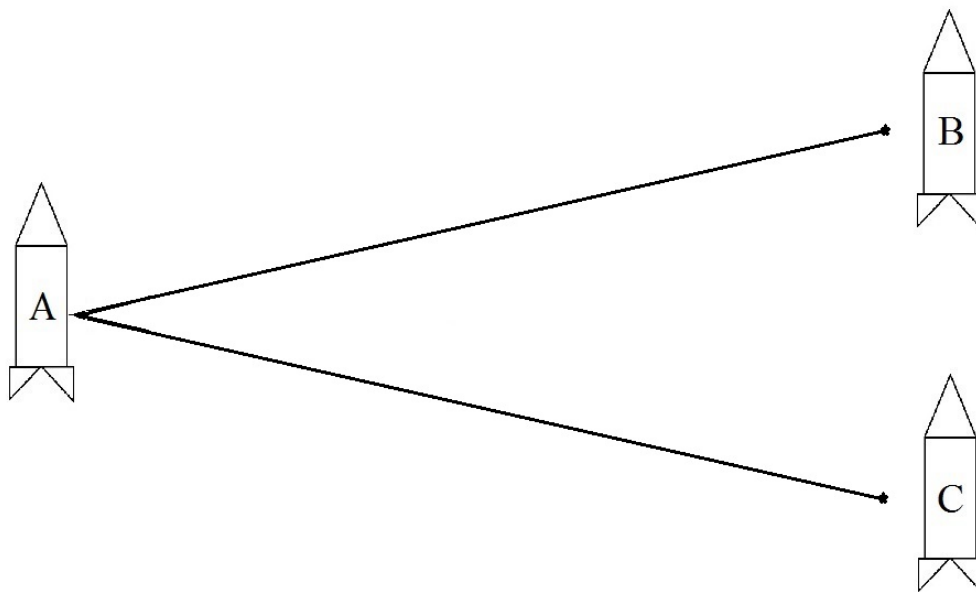
Raketa  $A$  se skokem posune z  $A'$  do  $A''$ , což je kvůli náhlému časovému skoku  $t_{A'} = t_{A''}$ . Pro pilota v  $B$  je  $A' = A''$ , což je zapříčiněno naším předpokladem zrychlení ve velmi krátkém čase, které se objeví okamžitě. U skutečného pohybu je doba urychlení zrychlení nenulová, náhlý časový skok se tedy neobjeví.



## Kapitola 3

### Paradox Bellových raket

Uvažujme tři rakety  $A$ ,  $B$  a  $C$  plující volným prostorem dostatečně vzdáleným od jakékoliv hmotného tělesa, bez jakékoliv rotace a vzájemného relativního pohybu.  $B$  a  $C$  jsou ve stejné vzdálenosti od  $A$  a rakety jsou v klidu vůči inerciální soustavě  $K$  spojené s raketou  $A$  (viz obrázek 3.1). Raketa  $A$  vyšle současně dva identické světelné signály směrem k raketám  $B$  a  $C$ . Současně (vzhledem ke  $K$ ) s přijetím těchto signálů zažehnou rakety  $B$  a  $C$  své motory a začnou ve stejném směru zrychlovat. Považujme  $B$  i  $C$  za identické rakety se stejným zrychlením, potom každý bod  $B$  bude mít ve stejnou chvíli stejnou rychlost jako odpovídající bod  $C$  a dva odpovídající body raket budou mít vůči sobě vždy stejnou vzdálenost (vzhledem k soustavě  $K$ ).



Obrázek 3.1: Rakety  $B$  a  $C$  jsou ve stejné vzdálenosti od  $A$  (zakresleno podle [10])

Mějme vlákno právě tak dlouhé, aby bez jakéhokoliv napětí spojilo středy raket  $B$  a  $C$  před zrychlením. Po zrychlení se vlákno pohybuje spolu s nimi (obrázek 3.2). Předpokládejme, že vlákno nemá vliv na pohyb raket. Přetrhne se vlákno, pokud rakety  $B$  a  $C$  dosáhnou dostatečně vysoké rychlosti?



Obrázek 3.2: Schématické znázornění raket  $B$  a  $C$  spojených vlákem (nakresleno podle [10])

Tato zajímavá hádanka byla navržen Dewanem a Beranem [8] jako ilustrace povahy prostorového zkrácení a zvláště povahy efektů napětí způsobených relativistickou kontrakcí délky. Ve známost vešel tento problém díky fyziku Johnu Bellovi [9], který o tomto starém problému polemizoval s jedním význačným experimentálním fyzikem v jídelně v CERNu. Problém se nakonec dostal na posouzení do širšího osazenstva – byl probírán a diskutován teoretickými fyziky v CERNu.

Jedná se o rozšíření problému z předchozí kapitoly (nyní již však bez zanedbání doby zrychlení), na který budeme nahlížet dvěma způsoby.

### 3.1 Základní varianta řešení

Označme  $L$  vzdálenost mezi dvěma odpovídajícími body raket  $B$  a  $C$ . Nechť  $B$  a  $C$  přestanou zrychlovat současně v čase  $t = t_1$  a současně dosáhnou stejné stálé rychlosti  $v$  vůči  $K$ . Jaká bude vzdálenost  $L'$  mezi dvěma odpovídajícími body raket  $B$  a  $C$  měřeno vzhledem ke klidové soustavě raket  $K'$ ?

Hledáme vztah mezi vzdáleností dvou bodů měřenou v jejich klidové soustavě  $K'$  se vzdáleností těchto dvou rovnoměrně se pohybujících bodů měřenou v soustavě  $K$ , vůči níž se pohybují stejným směrem a stejnou rychlostí  $v$ .

Klidová vzdálenost mezi dvěma body raket (délka  $L$ ) je měřena v jejich klidové soustavě, což je nyní soustava  $K'$ , jelikož se společně i s raketami pohybuje rychlostí  $v$  vůči soustavě  $K$ , kde naopak mezi dvěma body naměříme vzdálenost  $L'$ .

Jejich vztah je dán výrazem (1.3). Hledaná vzdálenost mezi dvěma odpovídajícími body raket  $B$  a  $C$ , poté, co dosáhnou stálé rychlosti  $v$  vůči  $K$ , je:

$$L' = \frac{L}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

Jaká by byla délka (měřeno v  $K'$ ) vlákna dlouhého právě tak, aby bez jakéhokoliv

napětí spojovalo středy raket  $B$  a  $C$ , pokud by byly v klidu vůči  $K'$ , tak jak jsou popsány na obrázku 3.2? Jelikož  $K'$  je jich klidová soustava, naměřená délka by byla  $L$ . Tedy konečné protažení měřené z pohledu  $K'$  je:

$$\delta'_f = L' - L = L \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1 \right) = L(\gamma - 1). \quad (3.1)$$

Pro  $v \rightarrow c$  směřuje  $\delta'_f$  k nekonečnu. Při dostatečně vysoké rychlosti vlákno dosáhne své meze pružnosti a přetrhne se. Jak jsme již viděli v přechodí kapitole,  $K'$  je klidovou vztaznou soustavou raket poté, co dosáhnou konstantní rychlosti  $v$  vzhledem ke  $K$ . Vzhledem k soustavě  $K'$  nepřejdou do stavu klidu současně,  $B$  začne zpomalovat první v čase  $t'_{zB}$  zažehnutím motoru a nakonec v čase  $t'_{sB}$  zastaví. Mezitím  $C$  pokračuje rovnoměrnou rychlostí  $v$ , dokud motor rakety  $C$  nezažehne v čase:

$$t'_{zC} = t'_{zB} + \Delta t', \quad (3.2)$$

kde  $\Delta t'$  je časové zpoždění způsobené vzdáleností raket  $\Delta x = L$ , dosazením do rovnice (1.2) dostáváme:

$$\Delta t' = \frac{vL/c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

Dosazením dostáváme:

$$t'_{zC} = t'_{zB} + \frac{vL/c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

Poté  $C$  zpomalí stejně jako  $B$ , až se nakonec vůči  $K'$  zastaví v čase

$$t'_{sC} = t'_{sB} + \frac{vL/c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

Mezi časy  $t'_{zC}$  a  $t'_{sB}$  se vzdálenost mezi středy raket (odpovídající délce vlákna) nepřetržitě zvětšuje z  $L\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$  na  $L'$  díky relativní rychlosti raket vzhledem ke  $K'$ , z čehož vyplývá i následující rovnice:

$$L' = L\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} + v\Delta t', \quad (3.3)$$

kde  $v\Delta t'$  směřuje k nekonečnu pro  $v \rightarrow c$ , zatímco  $L\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$  se pro stejné podmínky blíží nule. Tedy vlákno, které se zpočátku pohybuje rovnoměrně bez napětí nakonec přejde do stavu klidu s natažením  $\delta'_f$  daným výrazem (3.1) s relativním protažením  $\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} - 1$  v trvalém konečném stavu.

Délka vlákna vůči  $K$  je před zrychlením  $L$ , jakmile rakety zrychlí, pozorovatel v  $K$  znající Lorentzovu transformaci by u vlákna, které je v klidu vůči soustavě  $K'$ , v níž má i klidovou délku  $L$ , očekával kontrakci délky, oproti tomu je však pro něj vlákno prodlouženo o vzdálenost  $L - L\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$  vůči  $K$ . Ve vláknu se vyvíjí napětí v reakci na prodloužení, přetrhne se pro dostatečně velkou rychlost, kdy už bude napětí vlákna neúnosné.

Popis a fyzikální interpretace dějů z hlediska různých vztažných soustav mohou být odlišné, což samozřejmě neodporuje principu relativity. Zatímco pro  $K$  je přetržení vlákna způsobeno jeho napínáním, jež odpovídá lorentzovskému prodloužení (opačně nahlížená kontrakce), pro  $K'$  je přetržení způsobeno relativností současnosti, díky níž se rakety po určitou dobu vůči sobě vzájemně pohybují. Nicméně fyzikální závěr pro pozorovatele v těchto různých soustavách je stejný – vlákno se přetrhne při dostatečně vysoké rychlosti. Vysvětlení příčin přetržení pro  $K$  a  $K'$  jsou v podstatě totožné: relativní natažení vlákna vůči jeho přirozenému stavu (bez napětí) – délka v odpovídajícím přetrvávajícím konečném stavu se blíží nekonečnu, když se odpovídající stálá rychlost raket blíží  $c$ , což vede k napětí, které překročí mez pružnosti, a přetrhnutí vlákna.

## 3.2 Rozšířená varianta řešení

Předpoklad okamžité skokové změny v předchozích úvahách je samozřejmě nereálný, i když nám umožňuje poukázat na některé zajímavé efekty. Nyní uvažujme, že rakety budou zrychlovat po určitou dobu.

Označme středy raket  $B$  a  $C$ , nechť se pohybují v kladném směru osy  $x$  s konstantním vlastním zrychlením začínajícím z klidu v čase  $t = 0$  vůči  $K$ ,  $x_B = x_{B0}$  v čase  $t = 0$  a pro zjednodušení předpokládejme, že počáteční vzdálenost ( $t \leq 0$ ) mezi  $B$  a  $C$ , tedy počáteční délka vlákna bez jakéhokoliv napětí spojující středy raket vyhovuje podmínce [10]:

$$L < \frac{c^2}{a}. \quad (3.4)$$

Jak je známo,  $B$  a  $C$  vykonávají hyperbolický pohyb, rovnice jejich pohybu vůči  $K$  plynou z (1.9) (viz obr. 3.3):

$$x_B = \sqrt{(ct)^2 + \left(\frac{c^2}{a}\right)^2} - \frac{c^2}{a} + x_{B0},$$

$$x_C = \sqrt{(ct)^2 + \left(\frac{c^2}{a}\right)^2} - \frac{c^2}{a} + x_{B0} - L.$$

Výpočet se zjednoduší, pokud v soustavě  $K$  vytvoříme nový prostorový souřadnicový systém:

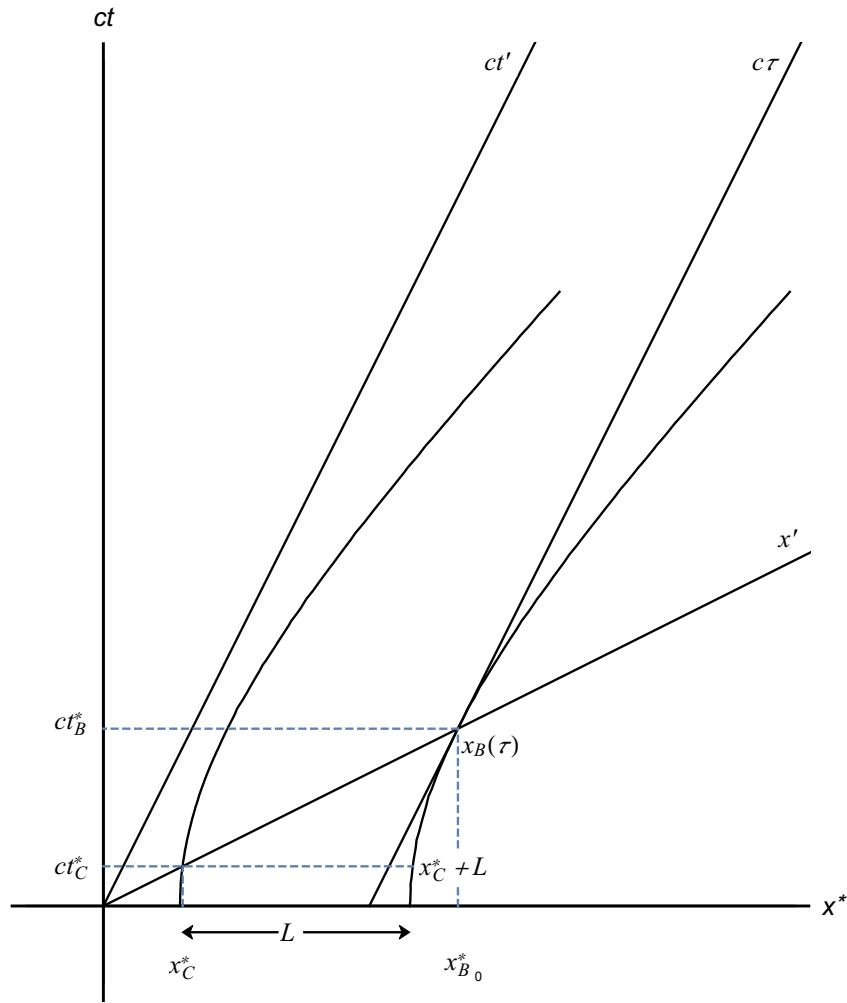
$$x^* = x + \frac{c^2}{a} - x_{B0},$$

ostatní prostorové souřadnice zůstanou nezměněné ( $y^* = y$ ,  $z^* = z$ ). Dále budeme označovat  $K^*$  naši soustavu  $K$ , ve které jsou hvězdičkováné souřadnice  $x^*$ ,  $y^*$  a  $z^*$  použity jako kartézský souřadnicový systém namísto  $x$ ,  $y$  a  $z$ . V  $K^*$  jsou rovnice pohybu:

$$x_B^* = \sqrt{(ct)^2 + \left(\frac{c^2}{a}\right)^2},$$

$$x_C^* = \sqrt{(ct)^2 + \left(\frac{c^2}{a}\right)^2} - L.$$

Označme  $\tau$  vlastní čas pozorovatele v raketě  $B$ , vezmeme-li  $\tau = 0$  pro  $t = 0$  dostaneme s využitím rovnic (1.7) a (1.9) vztahy:



Obrázek 3.3: Rakety ve vzdálenosti  $L$

$$x_B^*(\tau) \equiv x_{B\tau}^* = \frac{c^2}{a} \cosh\left(\frac{a\tau}{c}\right),$$

$$t(\tau) \equiv t_\tau = \frac{c}{a} \sinh\left(\frac{a\tau}{c}\right) = \frac{x_{B\tau}^*}{c} \tanh\left(\frac{a\tau}{c}\right). \quad (3.5)$$

Obdobně pro  $x_{C\tau}^*$ :

$$x_{C\tau}^*(\tau) + L \equiv x_{C\tau}^* + L = \frac{c^2}{a} \cosh\left(\frac{a\tau}{c}\right),$$

Pro vlastní čas rakety využijeme obrázku 3.3:

$$t(\tau) \equiv t_{C\tau} = \frac{c}{a} \sinh\left(\frac{a\tau}{c}\right) = \frac{x_{C\tau}^*}{c} \tanh\left(\frac{a\tau}{c}\right). \quad (3.6)$$

Dosazením do rovnice (1.9) dostaneme:

$$(x_{C\tau}^* + L)^2 - \left(\frac{c^2}{a}\right)^2 = \left[\tanh^2\left(\frac{a\tau}{c}\right)\right] x_{C\tau}^{*2}. \quad (3.7)$$

Fyzikálně vyhovujícím (kladným) kořenem této rovnice je:

$$x_{C\tau}^* = \left[ \sqrt{\left(\frac{c^2}{a}\right)^2 - \left(\frac{c^2}{a}\right)^2 \tanh^2\left(\frac{a\tau}{c}\right) + L^2 \tanh^2\left(\frac{a\tau}{c}\right)} - L \right] \cosh^2\left(\frac{a\tau}{c}\right). \quad (3.8)$$

Vzdálenost  $\Delta'(\tau)$  mezi  $B$  a  $C$  vůči  $K'_{B\tau}$  je rovna [10]:

$$\Delta'(\tau) = \sqrt{(x_{B\tau}^* - x_{C\tau}^*)^2 - c^2(t_\tau - t_{C\tau})^2} = (x_{B\tau}^* - x_{C\tau}^*) \cosh^{-1}\left(\frac{a\tau}{c}\right). \quad (3.9)$$

Dosadíme (3.6) a (3.8) do (3.9):

$$\Delta'(\tau) = \frac{c^2}{a} + L \cosh\left(\frac{a\tau}{c}\right) - \sqrt{\left(\frac{c^2}{a}\right)^2 + L^2 \sinh^2\left(\frac{a\tau}{c}\right)}. \quad (3.10)$$

Výraz (3.10) znamená, že natažení vlákna  $\delta'(\tau)$  (měřeno v  $K'_{B\tau}$ ) je dáno

$$\delta'(\tau) = \Delta'(\tau) - L = \frac{c^2}{a} - L + L \cosh\left(\frac{a\tau}{c}\right) - \sqrt{\left(\frac{c^2}{a}\right)^2 + L^2 \sinh^2\left(\frac{a\tau}{c}\right)}.$$

Lze ukázat, že natažení vlákna  $\delta'$  je rostoucí funkcí  $\tau$  pokud bude jeho derivace kladná:

$$\begin{aligned} \frac{d\delta'}{d\tau} &= \frac{a}{c} L \sinh\left(\frac{a\tau}{c}\right) - \frac{1}{2} \frac{2L^2 \sinh\left(\frac{a\tau}{c}\right) \cosh\left(\frac{a\tau}{c}\right) \frac{a}{c}}{\sqrt{\left(\frac{c^2}{a}\right)^2 + L^2 \sinh^2\left(\frac{a\tau}{c}\right)}} > 0 \\ \frac{d\delta'}{d\tau} &= \frac{a}{c} L \sinh\left(\frac{a\tau}{c}\right) \left[ 1 - \frac{L \cosh\left(\frac{a\tau}{c}\right)}{\sqrt{\left(\frac{c^2}{a}\right)^2 + L^2 \sinh^2\left(\frac{a\tau}{c}\right)}} \right] > 0, \end{aligned}$$

což platí za splnění podmínky (3.4). V limitním případě  $\tau \rightarrow \infty$  máme:

$$\delta' \rightarrow \delta'_f \equiv \frac{c^2}{a} - L,$$

$$\Delta' \rightarrow \Delta'_f \equiv \frac{c^2}{a}.$$

Vlákno se přetrhne, pokud je limitní protažení  $\delta'_f \equiv \frac{c^2}{a} - L$  větší nebo rovno kritickému natažení vlákna.

Pokud bude tato podmínka splněna, vlákno bude pod určitým zvyšujícím se napětím, ale neporušeno. Vlákno by se nakonec přetrhlo kvůli únavě materiálu, ale to v našich úvahách zanedbáváme.

### 3.3 Srovnání

Hlavní rozdíl mezi těmito dvěma variantami je v konečné době zrychlené fáze pohybu. Zdá se poněkud divné, že se může objevit limitní napětí vůči okamžité pohybuující se soustavě s přední raketou v rozšířené variantě se stále zrychlujícími se raketami, zatímco v základní variantě může být natažení libovolně velké a to i přes konečnou rychlost raket. Jistě by bylo užitečné zanalyzovat základní variantu v rámci rozšířené varianty. Snažíme se vysvětlit, jak velké napětí se může objevit v základním omezení rozšířené varianty diskutované výše.

Předpokládejme, že rakety  $B$  a  $C$  zažehnou své motory současně vůči  $K$  v okamžiku  $t_\tau$  daným výrazem (3.5). Tedy okamžitá klidová soustava  $K'_{B\tau}$  přední rakety  $B$  v čase  $\tau$  vlastního času  $B$  z naší rozšířené varianty se stane soustavou  $K'$  ze základní varianty. Označme  $V_\tau$  rychlost  $K'_{B\tau}$  ( $K'$ ) vůči  $K$  a  $K^*$ , derivací vztahů (3.2) a (3.5) obdržíme:

$$\begin{aligned} dx_{B\tau}^* &= c \sinh\left(\frac{a\tau}{c}\right), \\ dt_\tau &= \cosh\left(\frac{a\tau}{c}\right). \end{aligned}$$

Jelikož  $V_\tau = \frac{dx_{B\tau}^*}{dt_\tau}$ , dostáváme vztah pro rychlost:

$$\frac{V_\tau}{c} = \tanh\left(\frac{a\tau}{c}\right) \quad (3.11)$$

a následně

$$\gamma(V_\tau) \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V_\tau}{c}\right)^2}} = \cosh\left(\frac{a\tau}{c}\right). \quad (3.12)$$

Zvolíme čas, kdy  $B$  začíná brzdit vzhledem ke  $K'$ :

$$t'_{sB} = 0,$$

použitím Lorentzovy transformace (1.2) a užitím vztahu (3.5) a (3.12) dostáváme:

$$t'_{sC} = \frac{V_\tau L}{c^2} \gamma(V_\tau) = \frac{L}{c} \sinh\left(\frac{a\tau}{c}\right)$$

a

$$\Delta t' = t'_{zC} - t'_{zB} = t'_{sC} - t'_{sB} = \frac{L}{c} \sinh\left(\frac{a\tau}{c}\right). \quad (3.13)$$

Konečná délka vlákna v  $K'$  je dána

$$L' = \frac{L}{\sqrt{1 - \left(\frac{V_\tau}{c}\right)^2}} = L \cosh\left(\frac{a\tau}{c}\right). \quad (3.14)$$

Z výrazů (3.14) a (3.10) vyplývá, že mezi časy  $t'_{sB}$  a  $t'_{sC}$  se vlákno prodlouží o délku:

$$L' - \Delta'(\tau) = \sqrt{\left(\frac{c^2}{a}\right)^2 + L^2 \sinh^2\left(\frac{a\tau}{c}\right)} - \frac{c^2}{a}. \quad (3.15)$$

Na druhou stranu z výrazů (3.11) a (3.13) vyplývá, že délka  $V_\tau \Delta t'$ , kterou střed rakety  $C$  urazí rovnoměrným pohybem mezi  $t'_{zB}$  a  $t'_{zC}$  je rovna:

$$V_\tau \Delta t' = L \sinh\left(\frac{a\tau}{c}\right) \tanh\left(\frac{a\tau}{c}\right). \quad (3.16)$$

Zřejmě v limitním případě  $\tau \rightarrow \infty$  pravé strany rovnic (3.15) a (3.16) jdou do nekonečna jako  $L \sinh(a\tau/c)$ . To znamená, že natažení  $L' - \Delta'(\tau)$  během časového intervalu mezi zastavením  $B$  a zastavením  $C$  vůči  $K'$  (pocházející z intervalu, kdy  $C$  zpomaluje vůči  $K'$ ) v limitě  $\tau \rightarrow \infty$  se blíží  $V_\tau \Delta t'$  a tedy  $L'$ , jak je zřejmé z výrazů (3.3) a (3.11).

Pro malé hodnoty  $a\tau/c$  výsledek z rozšířené varianty přechází do základní varianty. Výraz (3.10) přejde s využitím (3.12) na vztah (3.1), což odpovídá začátku pohybu.

Zdůrazněme, že v rozšířené variantě máme nekonečnou sekvenci přechodných stavů vláknů, zatímco v základní variantě je skoková změna do konečného stavu.



# Kapitola 4

## Komunikace se zrychlenými pozorovateli ve zrychleném Minkowského prostoročase

Chceme zjistit prostorové a časové omezení komunikace mezi dvěma pozorovateli, z nichž alespoň jeden je zrychlován s konstantním vlastním zrychlením. Komunikace  $A$  s  $B$  probíhá tímto způsobem:  $A$  vyšle světelný signál  $B$ , ve chvíli, kdy  $B$  obdrží světelný paprsek, okamžitě posílá světelný signál zpět  $A$ . Komunikace  $B$  s  $A$  probíhá obdobně, avšak není symetrická, jak uvidíme dále.

### 4.1 Komunikace mezi inerciálním pozorovatelem a zrychleným pozorovatelem

Mějme pozorovatele  $A$  a  $B$ , jež jsou v klidu a ve vzájemné vzdálenosti  $d$  vůči souřadnému systému  $K$ . V čase  $t = 0$  pozorovatel  $B$  obdrží světelný signál od  $A$  a začne zrychlovat s konstantním vlastním zrychlením  $a$  ve směru kladné osy  $x$  obrázek 4.1.

Zajímá nás jen komunikace mezi  $A$  a  $B$  od okamžiku, kdy  $B$  začal zrychlovat, zanedbáme tu část světočáry  $B$ , kdy  $ct < 0$ . Světočárou pohybu pozorovatele pohybujícího se s konstantním vlastním zrychlením  $a$  je hyperbola daná rovnicí (1.9) se souřadnicí vrcholu v bodě  $P = [d, 0]$ :

$$\left(x + \frac{c^2}{a} - d\right)^2 - (ct)^2 = \left(\frac{c^2}{a}\right)^2. \quad (4.1)$$

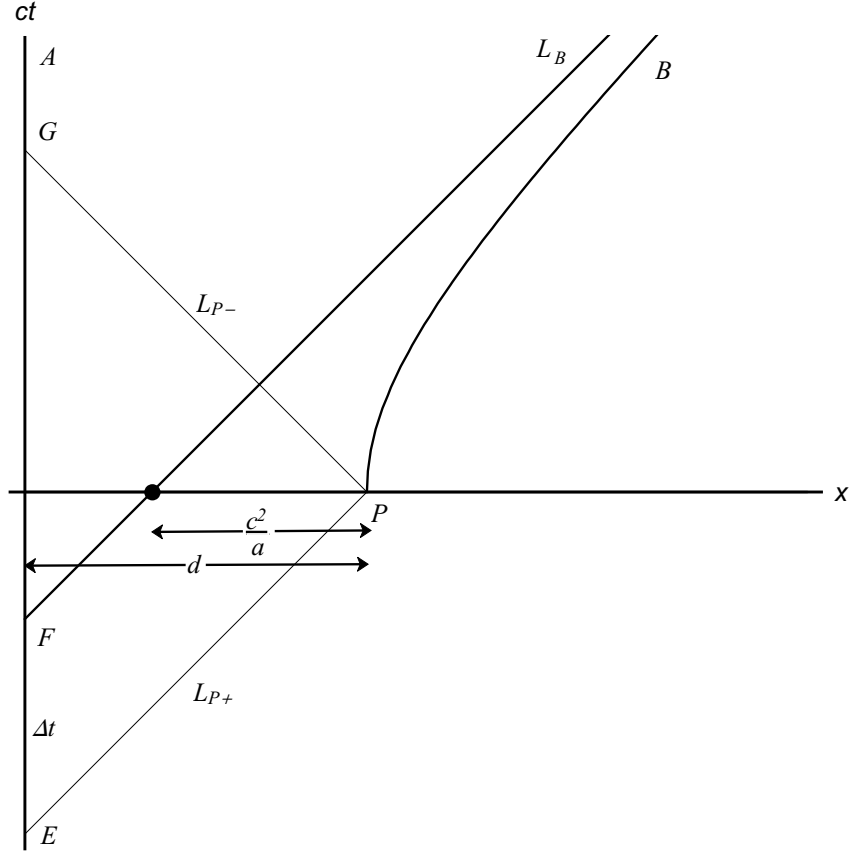
Vztah pro světelný kužel  $L_B$ , který je asymptotou hyperboly  $B$  je pak podle (1.11).

$$ct = x + \frac{c^2}{a} - d. \quad (4.2)$$

#### 4.1.1 Prostorová omezení

Na prostoročasovém diagramu (4.1) lze vidět, že pro jakoukoli hodnotu  $d$  existuje časový interval  $\Delta t$ , během kterého může  $A$  vyslat světelný signál  $B$ . Bez ohledu na vzdálenost  $d$  vždy existuje světelný signál  $L_{p+}$ , který může být vyslán pozorovatelem  $A$  v události  $E = [0, E]$  a dosáhne  $B$  v události  $P$ . Stejně tak existuje světelný signál  $L_{p-}$  od  $B$ , který dosáhne  $A$  v  $G$ .  $A$  může s  $B$  komunikovat v  $E$ .  $A$  může pokračovat v komunikaci s  $B$  do události  $F$ , což je mezní časová souřadnice události, kdy už se světelný signál

stane asymptotou  $L_B$ . Není žádné prostorové omezení na schopnosti  $A$  komunikovat s  $B$ .



Obrázek 4.1: Limitní případ pro sporočasové omezení ukazující, že vždy existuje časový interval  $\Delta t$ , během kterého může  $A$  komunikovat s  $B$  (dle [11]).

Prostorová omezení komunikace  $B$  s pozorovatelem  $A$  jsou odlišná. Což lze očekávat vzhledem k asymetrii. Aby  $B$  bylo schopno komunikovat s  $A$ , světelný signál vyslaný  $B$  v čase  $t \geq 0$  a odražený pozorovatelem  $A$  musí protínat světočáru pozorovatele  $B$ . Limitní případ se zde objeví ve vzdálenosti  $d_B$  mezi  $A$  a  $B$ , pokud je paprsek odražený od  $A$  v události  $S$  zároveň asymptotou  $L_B$ . Jak můžeme vidět na obrázku (4.2).

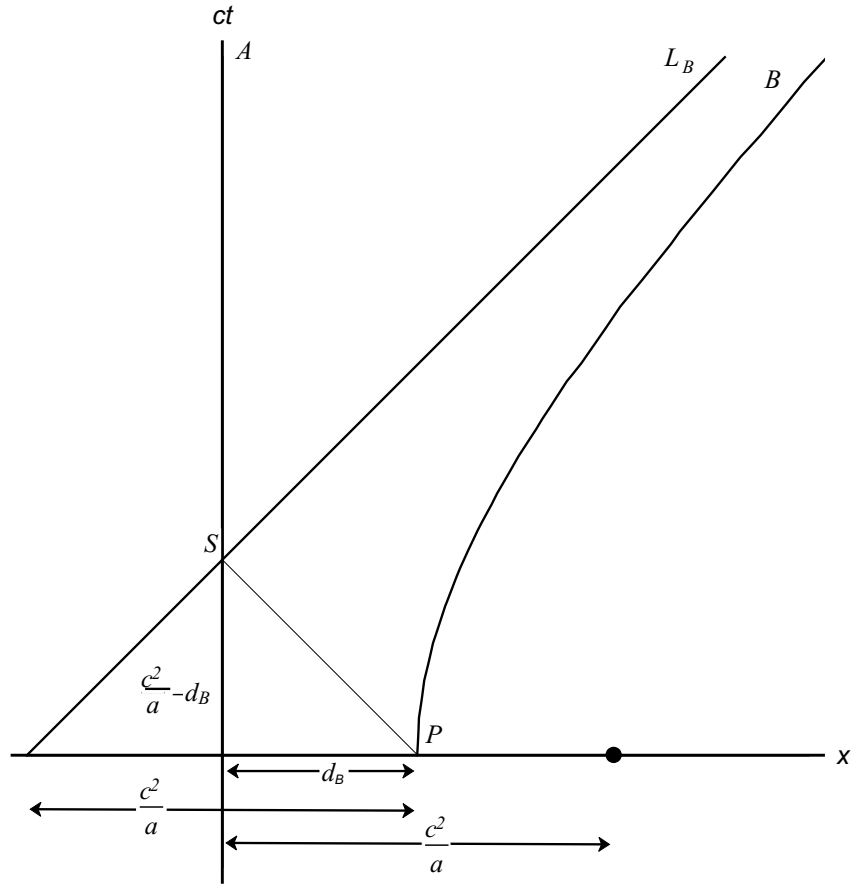
Pro limitní vzdálenost  $d_B$  od  $A$  dostaneme dle vztahu (4.2) souřadnici  $S = [0, c^2/a - d_B]$  a dle vztahu (4.1) jsou souřadnice  $P = [d_B, 0]$ . Události  $S$  a  $P$  jsou spojeny světelným paprskem  $L_{SP}$ , potom je  $(S_x - P_x)^2 - (S_t - P_t)^2 = 0$ . Dosazením dostáváme:

$$d_B^2 - \left(-\frac{c^2}{a} + d_B\right)^2 = 0,$$

z čehož plyne limitní vzdálenost  $d_B = c^2/2a$ .  $B$  může komunikovat s  $A$ , pouze pokud  $d \in \langle 0, c^2/2a \rangle$ .

### 4.1.2 Časová omezení

Na určení vlastního času  $\Delta t = \tau_{A(E,F)}$ , během kterého může  $A$  komunikovat s  $B$  stačí porovnat časové souřadnice událostí  $E$  a  $F$  na obrázku (4.1). S využitím rovnice světelného kužele  $L_{p+}$ :



Obrázek 4.2: Prostorčasový diagram pro prostorčasová omezení mezi  $A$  a  $B$  (dle [11])

$$ct = x - d \quad (4.3)$$

dostaneme  $E$  dosazením do souřadnic  $ct$  a  $x = 0$  do vztahu (4.3) a obdobně  $F$  ze vztahu (4.2):

$$ct_E = -d, \quad (4.4)$$

$$ct_F = \frac{c^2}{a} - d. \quad (4.5)$$

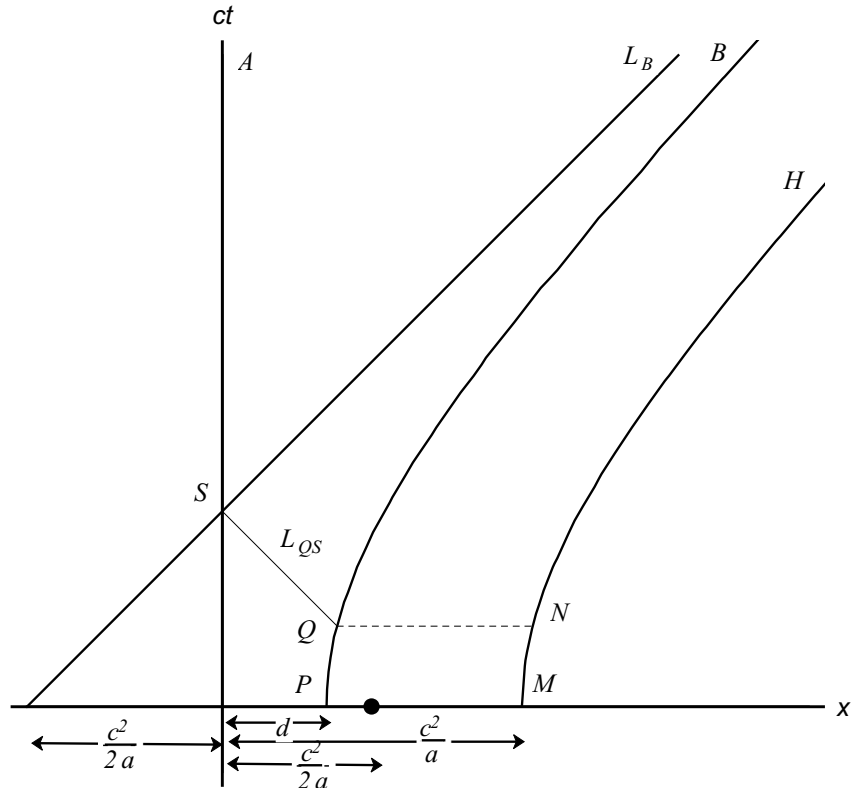
Dostáváme pak:

$$\Delta t = \frac{ct_F - ct_E}{c} = \tau_{I\langle E,F \rangle} = \frac{c}{a}. \quad (4.6)$$

Doba, kdy může  $A$  komunikovat s  $B$  je nezávislá na vzdálenosti  $d$  jak se dalo očekávat z již řečeného, ale závisí na zrychlení.

Pro určení doby, kdy  $B$  může komunikovat s  $A$ , uvažujme v čase  $t = 0$  vzdálenost  $d < c^2/2a$  potřebnou, aby  $B$  mohlo komunikovat s  $A$ . Z prostorčasového diagramu (4.3) je zřejmé, že  $B$  může komunikovat s  $A$  pouze mezi událostmi  $P$  a  $Q$  (včetně). Cílem je zde najít vlastní čas  $\tau_{B\langle P,Q \rangle}$ .

Z obrázku (4.3) je zřejmé, že  $\tau_{B\langle P,Q \rangle} = \tau_{H\langle M,N \rangle}$ , kde  $M = [c^2/a, 0]$  je vrchol hyperboly  $H$  s hlavní a vedlejší poloosou  $c^2/a$  posunuté ve směru osy  $x$  o  $c^2/a - d$ ,  $N$  je obrazem



Obrázek 4.3: Prostoronočasový diagram ukazující, že  $B$  může komunikovat s  $A$  jen mezi událostmi  $P$  a  $Q$  (dle [11]).

$Q$ , který obdržíme projekcí  $Q$  na  $H$ . Dokážeme nalézt vlastní čas  $\tau_{B\langle P,Q \rangle}$  nalezením souřadnice  $N$ .

Vhodnou úpravou vztahu (1.4) dostaneme

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 \left( \frac{dt}{dx} \right)^2 - 1} dx. \quad (4.7)$$

Derivací vztahu (1.9) dostaneme:

$$2x dx - 2c^2 t dt = 0.$$

Vyjádříme poměr druhých derivací za použití vztahu (1.9):

$$\left( \frac{dt}{dx} \right)^2 = \frac{x^2}{c^2 (ct)^2} = \frac{x^2}{c^2 [x^2 - (c^2/a)^2]}.$$

Dosazením do (4.7) dostaneme hledanou závislost vlastního času na  $x$ :

$$\begin{aligned} \tau_{H\langle M,N \rangle} &= \int_{x_M}^{x_N} \frac{c/a}{\sqrt{x^2 - (c^2/a)^2}} dx = \int_{c^2/a}^{x_N} \frac{c/a}{\sqrt{x^2 - (c^2/a)^2}} dx = \\ \tau_{H\langle M,N \rangle} &= \frac{c}{a} \ln \left( \frac{x_N + ct_N}{c^2/a} \right) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Pro nalezení souřadnice  $N$  nejdříve nalezneme souřadnici  $Q$  a poté provedeme následující transformaci:

$$x_N = x_Q + \left( \frac{c^2}{a} - d \right), \quad (4.9)$$

$$ct_N = ct_Q. \quad (4.10)$$

Nalezneme souřadnici  $Q$  pomocí rovnice pro světelný paprsek  $L_{SQ}$  a jeho průsečíku s hyperbolou  $B$ . Z (4.2) vyplývá souřadnice  $S = [0, c^2/a - d]$ . Jelikož  $L_{SQ}$  je světelný kužel a jeho směrnice je  $-1$ , jeho rovnice je:

$$ct = -x + \frac{c^2}{a} - d. \quad (4.11)$$

Nalezením průsečíku (4.11) a (4.1) nalezneme:

$$x_Q = \left( \frac{1}{4} \right) \frac{(c^2/a)^2}{c^2/a - d},$$

$$ct_Q = \left( \frac{1}{4} \right) \frac{3(c^2/a)^2 - 8(c^2/a)d + 4d^2}{c^2/a - d}.$$

Použitím transformačních vztahů vztahů (4.9) a (4.10) obdržíme:

$$x_N = \left( \frac{1}{4} \right) \frac{5(c^2/a)^2 - 8(c^2/a)d + 4d^2}{c^2/a - d}, \quad (4.12)$$

$$ct_N = \left( \frac{1}{4} \right) \frac{3(c^2/a)^2 - 8(c^2/a)d + 4d^2}{c^2/a - d}. \quad (4.13)$$

S využitím (4.8) dosadíme (4.12) a (4.13) a nalezneme:

$$\tau_{B\langle P, Q \rangle} = \frac{c}{a} \ln \left( 2 \frac{c^2/a - d}{c^2/a} \right).$$

Pokud zavedeme  $k = d/(c^2/a)$ , pro  $k \in \langle 0, 1/2 \rangle$ , což je kvůli podmínce  $d_B < c^2/(2a)$ , obdržíme

$$\tau_{B\langle P, Q \rangle} = \frac{c}{a} \ln [2(1 - k)].$$

Doba, po kterou může  $B$  komunikovat s  $A$ , je vždy kratší než doba, po kterou může  $A$  komunikovat s  $B$  daná vztahem (4.6), pro  $k = 1/2$  vychází  $\tau_B = 0$ .

## 4.2 Komunikace mezi zrychlenými pozorovateli

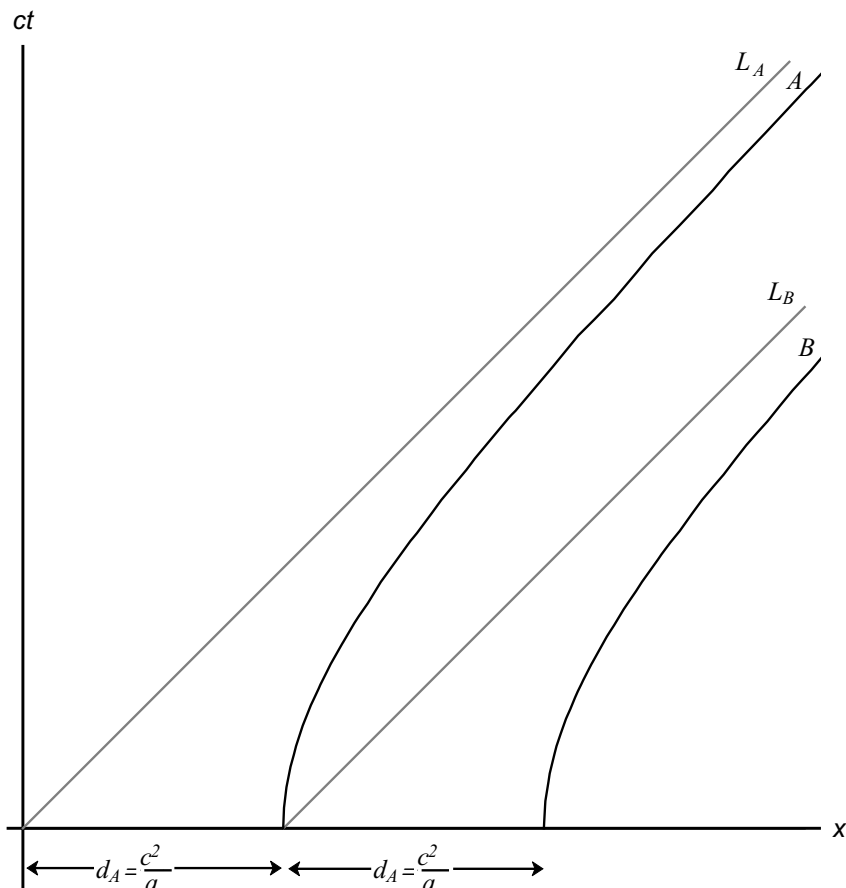
Uvažujme pozorovatele  $A$  a  $B$ , kteří se pohybují s konstantním vlastním zrychlením  $a$ . Začnou zrychlovat v čase  $t = 0$ , kdy jsou od sebe ve vzdálenosti  $d$  vůči vztažné soustavě  $K$ . Pro zjednodušení je  $K$  zvoleno tak, že osa  $x$  se shoduje s poloosou hyperboly  $A$  a  $B$ ; počátek  $K$  se shoduje se středem hyperboly  $A$ . Rovnice toho pohybu bude dle (4.1) a podmínkou  $d_A = c^2/a$  stejná jako rovnice (1.9), v rámci zachování stejného značení:

$$(x)^2 - (ct)^2 = \left( \frac{c^2}{a} \right)^2 = d_A^2. \quad (4.14)$$

Jelikož nás zajímá pouze komunikace mezi  $A$  a  $B$ , jakmile začnou zrychlovat, nemusíme vykreslovat světočáry  $A$  i  $B$  pro čas  $t < 0$ .

#### 4.2.1 Prostorové omezení mezi zrychlenými pozorovateli

Z prostoročasového diagramu na obrázku 4.4 je zřejmé, že existuje jistá maximální vzdálenost  $d_A = c^2/a$  taková, že pro  $d \geq d_A$  už nemůže  $A$  komunikovat s  $B$  – neexistuje žádný světelný signál opouštějící  $A$ , který by dosáhl  $B$ .  $A$  může komunikovat s  $B$  pouze pokud  $d \in (0, d_A)$ . Přitom předpokládáme  $d > 0$ , protože pro  $d < 0$  se situace  $A$  a  $B$  pouze prohodí. Příklad  $d = 0$  je triviální – světočáry  $A$  a  $B$  splývají.

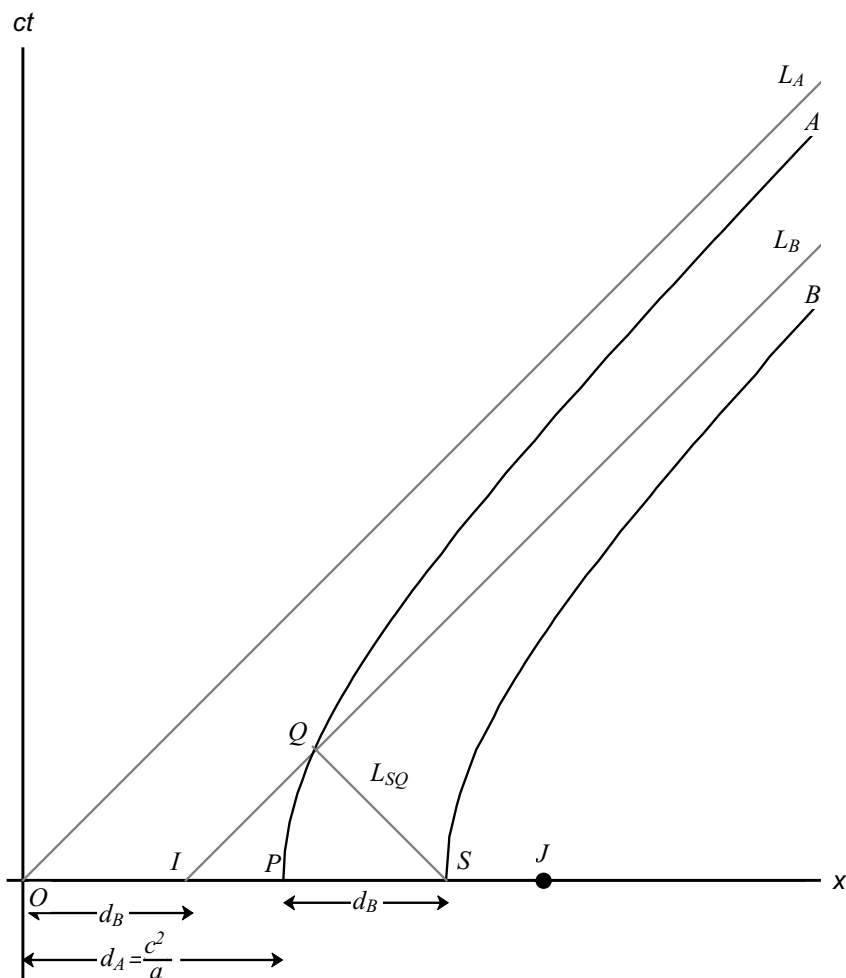


Obrázek 4.4: Prostoročasový diagram ukazující, že  $A$  nemůže komunikovat s  $B$ , pokud  $d_A \geq c^2/a$  (dle [11]).

Aby  $B$  mohl komunikovat s  $A$ , světelný signál vyslaný  $B$  a odražený  $A$  musí protínat světočáru  $B$ . Limitní případ nastane pro vzdálenost  $d_B$ , kdy se světelný signál odražený od  $A$  stane asymptotou  $L_B$  pozorovatele  $B$ .

Hodnotu  $d_B$  obdržíme s pomocí časoprostorového diagramu na obrázku 4.5. Nejdříve nalezneme rovnici  $L_{SQ}$ , kde  $S$  je bod průniku světelného kužele  $L_{SQ}$  z bodu  $Q$  s osou  $x$ . Uvážíme-li podmínku pro prostorové omezení souřadnice  $S$  na nalezení  $d_B$  za podmínky  $d_A = d_B = c^2/a$ :

$$x_S = \frac{c^2}{a} + d_B. \quad (4.15)$$



Obrázek 4.5: Prostorčasový diagram ukazující, že  $B$  může komunikovat s  $A$ , pokud  $d < d_B$  (dle [11]).

V souřadnicovém systému  $K$  je rovnice pohybu  $A$  daná vztahem (4.14). Rovnice pohybu hyperboly  $B$  vzdálené o  $d$  v čase  $t = 0$  od  $P$  je pak:

$$(x - d)^2 - (ct)^2 = \left(\frac{c^2}{a}\right)^2. \quad (4.16)$$

Rovnice světelných kuželů, které jsou asymptotami hyperbol  $A$  a  $B$  jsou jednoduše

$$L_A : ct = x, \quad (4.17)$$

$$L_B : ct = x - d. \quad (4.18)$$

Souřadnici  $Q$  obdržíme nalezením průsečíku (4.14) a (4.18):

$$x_Q = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{(c^2/a)^2}{d} + d\right), \quad (4.19)$$

$$ct_Q = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{(c^2/a)^2}{d} - d\right). \quad (4.20)$$

Použitím souřadnice  $Q$  a skutečnosti, že směrnice  $L_{SQ} = -1$ , obdržíme:

$$L_{SQ} : ct = -x + \frac{(c^2/a)^2}{d}. \quad (4.21)$$

Ve zvláštním případě, kdy vzdálenost mezi  $A$  a  $B$  bude  $d_B$ , bude rovnice světelného kuželu:

$$L_{SQ} : ct = -x + \frac{(c^2/a)^2}{d_B}. \quad (4.22)$$

Položením  $t = 0$  ve vztahu (4.22), obdržíme  $x$ -ovou souřadnici  $S$ :

$$x_S = \frac{(c^2/a)^2}{d_B}. \quad (4.23)$$

Použitím vztahů (4.15) a (4.23) nalezneme

$$d_B = \frac{1}{2} (\sqrt{5} - 1) \frac{c^2}{a}.$$

Jak jsme již viděli  $d_A = c^2/a$ , čímž dostáváme vztah:

$$d_B = \frac{1}{2} (\sqrt{5} - 1) d_A. \quad (4.24)$$

Numerická konstanta ve výrazu (4.24) je  $\frac{1}{\Phi} = (\Phi - 1)$ , kde  $\Phi$  je zlatý řez, což je hodnota, která vznikne rozdělením úsečky na dvě části tak, že poměr větší části k menší je stejný jako poměr celé úsečky k větší části.  $B$  může komunikovat s  $A$  pouze pokud vzdálenost mezi pozorovateli v  $K$  v čase  $t = 0$  je  $d_B < d_A/\Phi$ . Dále označme  $O$  počátek  $K$ ,  $I$  průnik  $L_B$  s osou  $x$ ,  $P$  průnik  $A$  s osou  $x$  a bod  $J$  se souřadnicemi  $[2c^2/a, 0]$ , viz obrázek 4.5. Zajímá nás poslední jmenovaný, jelikož je ve vzdálenosti  $d_A$  od  $P$ . Vzdálenost následujících událostí jsou v poměru zlatého řezu a jde o invariantní vztah.

$$\frac{|PJ|}{|PS|} = \frac{|OP|}{|OI|} = \frac{d_A}{d_B} = \Phi.$$

Uvažujme vzdálenost mezi pozorovateli  $A$  a  $B$  v čase  $t = 0$  rovnou  $d < d_B$ , tedy oba pozorovatelé jsou schopni spolu komunikovat, viz obrázek 4.6.

Prostorčasový diagram ukazuje, že existuje pár událostí  $P$  a  $Q$  na  $A$  takových, že  $A$  může komunikovat s  $B$  pouze mezi těmito danými událostmi.

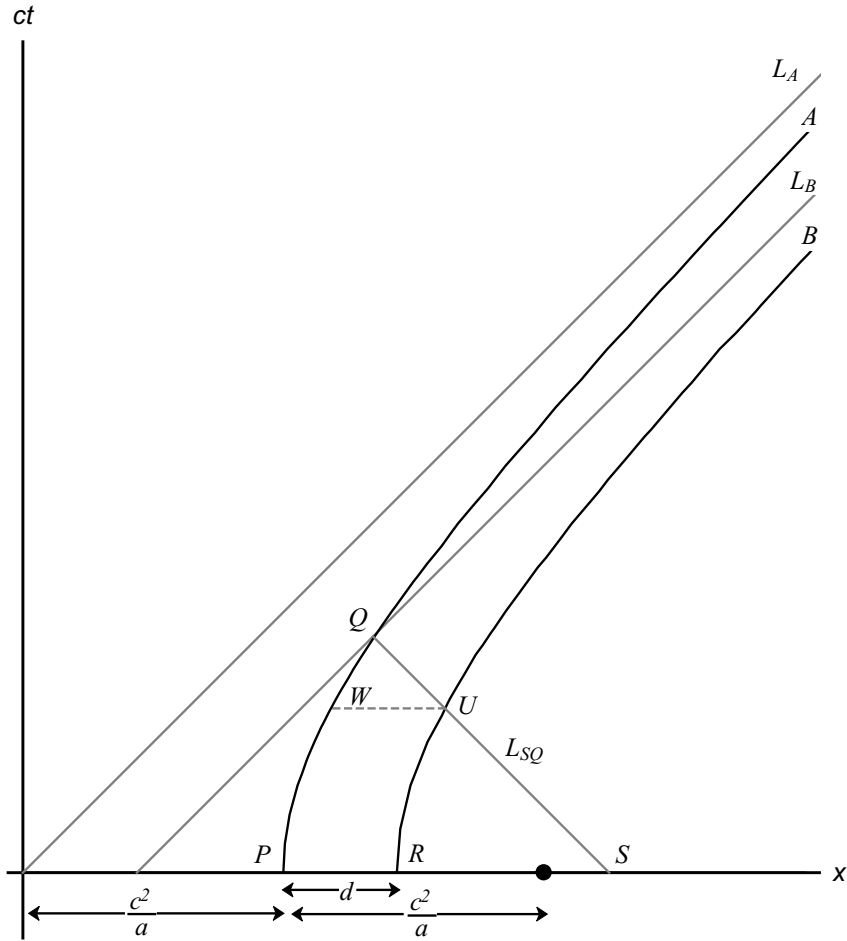
Obdobně existuje pár událostí  $R$  a  $U$  na  $B$  takových, že  $B$  může komunikovat s  $A$  pouze mezi těmi to událostmi. Jelikož světočára  $B$  je stejná křivka jako světočára  $A$ , pouze posunutá v kladném směru osy  $x$  o vzdálenost  $d < d_B$ , prostorčasový diagram ukazuje, že doba mezi událostmi  $R$  a  $U$ , během které  $B$  může komunikovat s  $A$  je kratší, než doba mezi událostmi  $P$  a  $Q$  během které  $A$  může komunikovat s  $B$ .

## 4.2.2 Časové omezení mezi zrychlenými pozorovateli

Chceme najít vlastní čas  $\tau_{A(P,Q)}$  a  $\tau_{B(R,U)}$  a porovnat dobu, během které  $A$  může komunikovat s  $B$  s dobou, po kterou může  $B$  komunikovat s  $A$ . Obdržíme  $\tau_{A(P,Q)}$  dosazením (4.19) a (4.20) do (4.8):

$$\tau_{A(P,Q)} = \frac{c}{a} \ln \left( \frac{c^2/a}{d} \right). \quad (4.25)$$





Obrázek 4.6: Prostorčasový diagram ukazující omezení komunikace mezi  $A$  a  $B$  pro  $d < d_B$  (dle [11]).

Na nalezení  $\tau_{B\langle R,U \rangle}$ , využijeme, že  $\tau_{B\langle R,U \rangle} = \tau_{B\langle P,W \rangle}$  (viz obr. 4.6), kde  $W$  je obraz události  $U$  na světočáře  $A$  (obrázek 4.6). Potřebujeme zjistit souřadnici  $W$ . Nalezneme  $U$  pomocí průsečíku  $L_{SQ}$  (vztah (4.21)) a  $B$  (vztah (4.16)):

$$x_U = \frac{1}{2} \frac{a^4 d^4 - a^2 c^4 d^2 - c^8}{a^2 d (a^2 d^2 - c^4)}, \quad (4.26)$$

poté provedeme translaci ve směru osy  $x$  o vzdálenost  $-d$ . Dostaneme souřadnice  $W$ :

$$x_W = \left(-\frac{1}{2}\right) \left(\frac{(c^2/a)^4 - (c^2/a)^2 d^2 + d^4}{d(d^2 - (c^2/a)^2)}\right), \quad (4.27)$$

$$ct_W = \left(-\frac{1}{2}\right) \left(\frac{(c^2/a)^4 - 3(c^2/a)^2 d^2 + d^4}{d(d^2 - (c^2/a)^2)}\right). \quad (4.28)$$

Dosazením (4.27) a (4.28) do (4.8) obdržíme:

$$\tau_{B\langle r,u \rangle} = \frac{c}{a} \ln \left(\frac{(c^2/a)^2 - d^2}{(c^2/a)d}\right). \quad (4.29)$$

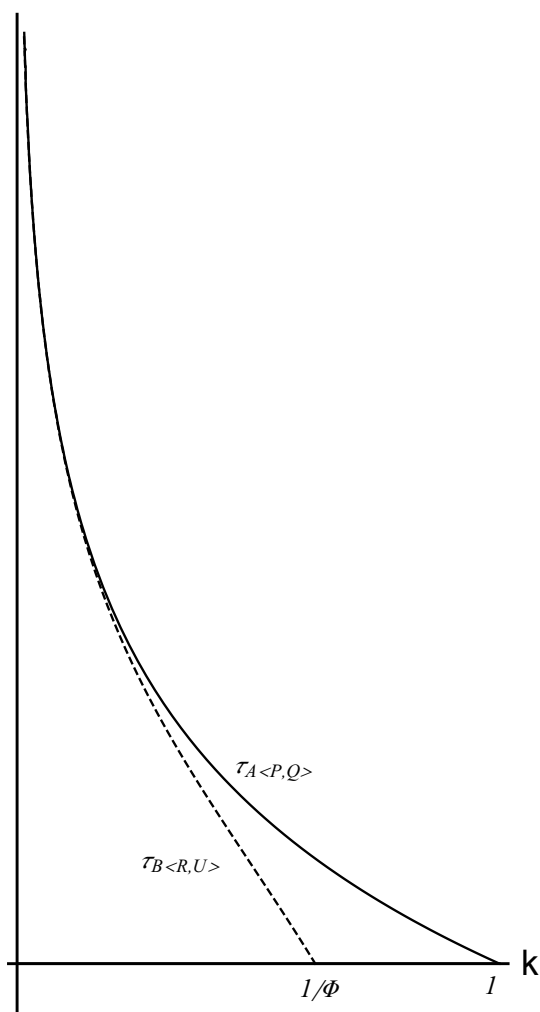
Na porovnání vlastních časů  $\tau_{A\langle P,Q \rangle}$  a  $\tau_{B\langle R,U \rangle}$  je vyjádříme pomocí vztahu  $k = d/(c^2/a)$ :

$$\tau_{A\langle P,Q \rangle} = \frac{c}{a} \ln \left( \frac{1}{k} \right), \quad (4.30)$$

$$\tau_{B\langle R,U \rangle} = \frac{c}{a} \ln \left( \frac{1 - k^2}{k} \right). \quad (4.31)$$

Graf  $\tau_{A\langle P,Q \rangle}$  a  $\tau_{B\langle R,U \rangle}$  jako funkce  $k$  pro pevnou hodnotu  $c^2/a$  na obrázku 4.7 nám dává dobrou představu na porovnání vlastních časů.

Vlastní čas



Obrázek 4.7: Prostorčasový diagram ukazující vlastní časy komunikace  $A$  s  $B$  a  $B$  s  $A$ , kde  $d = kc^2/a$  (dle [11]).

# Kapitola 5

## Paradox dvojčat

Uvažujme dvě dvojčata  $A$  a  $B$ , z nichž jedno je astronaut ( $B$ ), který se vydá v raketě k velmi vzdálené hvězdě, přičemž se pohybuje velmi vysokou rychlostí. Z pohledu soustavy spojené se Zemí bude v raketě díky vysoké rychlosti ubíhat čas pomaleji než na Zemi kvůli dilataci času. Bude se zdát, že zatímco v raketě uběhlo jen pár let, na Zemi uběhlo několik dekad, takže dvojče astronauta setrvávajícího na Zemi očekává, že astronaut bude při návratu mladší než on. Jenomže z pohledu soustavy rakety je to právě Země, která se pohybuje vysokou rychlostí, takže pro astronauta bude čas na Zemi ubíhat pomaleji než v raketě a očekává, že jeho dvojče, které zůstalo na Zemi, bude naopak mladší než on. Tento problém je znám jako „paradox dvojčat“. Paradox vzniká pokud nesprávně aplikujeme princip relativity a dilataci času. Pozorovatel, který pocítil zrychlení, bude stárnout pomaleji, např. pohybující se miony žijí déle než stacionární viz [13]. Ukažme to pomocí vztahů pro pohyb s konstantním vlastním zrychlením.

### 5.1 Rovnoměrné zrychlení

Dvojče  $A$  zůstávající na Zemi je v klidové soustavě  $K$ , zatímco jeho cestující dvojče opouští Zemi s konstantním vlastním zrychlením  $a$  vzhledem k jeho vlastní klidové soustavě  $K'$ . Obecně dvojče  $A$  zůstávající na Zemi bude měřit zrychlení dané vztahem (1.5), zvolením počáteční podmínky pro rychlost  $v_0$ , obdržíme vztah pro rychlost v čase  $t$ :

$$v = \frac{at + c\zeta}{\sqrt{1 + (at/c + \zeta)^2}}, \quad (5.1)$$

kde  $\zeta = \gamma(\beta_0)\beta_0$ . Vzdálenost  $x = x(t)$  vyplývá ze vztahu (5.1) další integrací

$$x = \frac{c^2}{a} \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{at}{c} + \zeta\right)^2} - \sqrt{1 + \zeta^2} \right] + x_0, \quad (5.2)$$

kde  $x_0$  je okamžitá poloha v čase  $t = 0$ .

Plynutí času v obou soustavách bude rozdílné kvůli relativní rychlosti  $\beta$  dané vztahem (1.4). Synchronizací  $t = \tau = 0$  dostáváme

$$\tau = \frac{c}{a} \left[ \sinh^{-1} \left( \frac{at}{c} + \zeta \right) - \sinh^{-1}(\zeta) \right] \quad (5.3)$$

nebo

$$t = \frac{c}{a} \left[ \sinh \left( \frac{a\tau}{c} + \sinh^{-1}(\zeta) \right) - \zeta \right]. \quad (5.4)$$

Dosazením (5.4) do (5.2) dostáváme:

$$x = \frac{c^2}{a} \left[ \sqrt{\sinh^2 \left( \frac{a\tau}{c} + \sinh^{-1}(\zeta) \right) + 1} - \sqrt{\zeta^2 + 1} \right] + x_0. \quad (5.5)$$

Pro  $\beta_0 = 0$  se nám výraz (5.4) zjednoduší na (1.7). Potom bude poloha dvojčete daná vztahem (1.8), s počáteční podmínkou  $x_0 = 0$  dostáváme vztah

$$x = \frac{c^2}{a} \left[ \cosh \left( \frac{a\tau}{c} \right) - 1 \right]. \quad (5.6)$$

Rychlost cestujícího dvojčete s ohledem vůči jeho vlastnímu času dostaneme dosazením (1.7) do (1.6):

$$v = c \tanh \left( \frac{at}{c} \right). \quad (5.7)$$

## 5.2 Čtyřfázová cesta

Zatímco  $A$  zůstává na Zemi,  $B$  se vydá na cestu rozdělenou do čtyř fází, z nichž každá trvá dobu  $T'$  z hlediska pozorovatele v raketě (viz obr. 5.1). V první fázi  $B$  začíná zrychlovat z místa  $I$  s konstantním zrychlením  $a$ , dokud nedosáhne maximální rychlosti v místě  $II$  podle (5.7):

$$v_{\max} = c \tanh \left( \frac{aT'}{c} \right). \quad (5.8)$$

Poté začne zpomalovat konstantním  $a$  v opačném směru, (využíváme zde symetrie mezi zrychleným a zpomaleným pohybem), dokud nezastaví v  $III$ , kde dvojče  $B$  urazilo vzdálenost:

$$x_{\max} = 2 \frac{c^2}{a} \left( \cosh \frac{aT'}{c} - 1 \right). \quad (5.9)$$

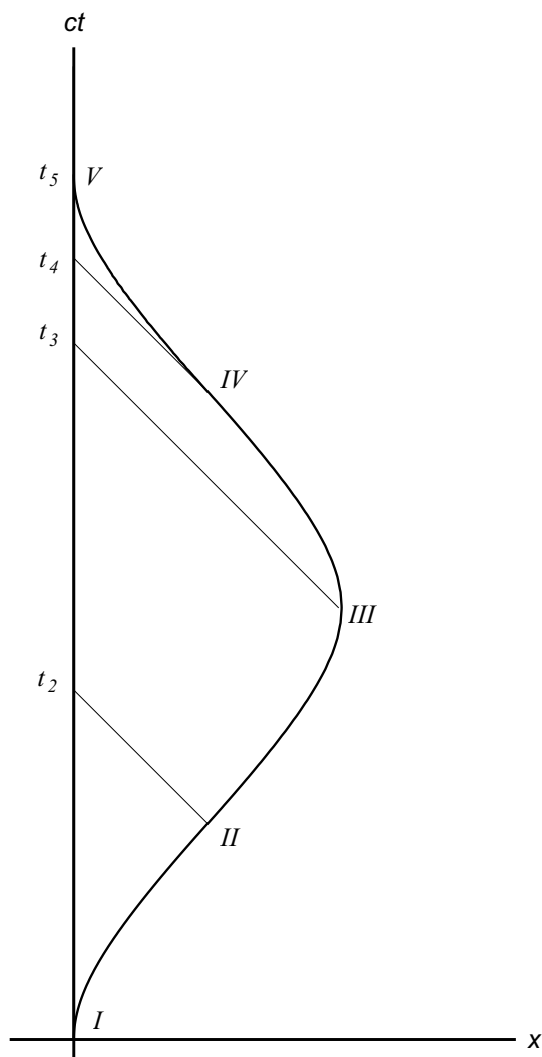
Stejným způsobem (v opačném směru) se dostává  $B$  zpět na Zemi. Celá cesta zabere čas  $4T'$  vůči soustavě  $K'$ , zatímco dvojče  $A$  čeká na Zemi dobu

$$4T = 4 \frac{c}{a} \sinh \left( \frac{aT'}{c} \right). \quad (5.10)$$

Čím větší zrychlení, tím déle cesta trvá a tím je i větší efekt dilatace času a rozdílného stárnutí dvojčat.

## 5.3 Pozorování světelných signálů

Na určení vlastního času každého z dvojčat můžeme využít světelných signálů označených časem vyslání ( $t_v$  nebo  $t'_v$ ) a časem přijetí ( $t_p$  nebo  $t'_p$ ).



Obrázek 5.1: Čtyřfázová cesta,  $B$  vysílá světelné signály  $A$  (nakresleno podle [12]).

### 5.3.1 Pohled dvojčete zůstávajícího na Zemi

Dvojče  $A$  pozoruje signály vyslané  $B$  v jeho vlastním čase  $t_p$ . Kvůli konečné rychlosti světla musel být signál vyslán v čase  $t_v$

$$t_p = t_v + \frac{x(t_v)}{c}. \quad (5.11)$$

Rozdíl mezi  $t_v$  a  $t_p$  je čas potřebný pro signál, aby cestoval z místa stávající polohy dvojčete  $B$   $x_v = x(t_v)$  na Zemi. Na určení pozice  $x_v$  musíme najít interval, kdy  $B$  vyslal

signál (obrázek 5.1). Hraniční body  $t_i$  ( $i = 1,2,3,4$ ) intervalů vyplývají z podmínek jako  $t_2 = t_{II} + x_{II}/c$ ,  $t_5$  pak vyplývá z rovnice (5.10). Dostáváme:

$$t_1 = 0, \quad (5.12a)$$

$$t_2 = \frac{c}{a} \left[ \sinh \left( \frac{aT'}{c} \right) + \cosh \left( \frac{aT'}{c} \right) - 1 \right], \quad (5.12b)$$

$$t_3 = \frac{c}{a} \left[ 2 \sinh \left( \frac{aT'}{c} \right) + 2 \cosh \left( \frac{aT'}{c} \right) - 2 \right], \quad (5.12c)$$

$$t_4 = \frac{c}{a} \left[ (3 \sinh \left( \frac{aT'}{c} \right) + \cosh \left( \frac{aT'}{c} \right) - 1 \right], \quad (5.12d)$$

$$t_5 = 4 \frac{c}{a} \sinh \left( \frac{aT'}{c} \right). \quad (5.12e)$$

V závislosti na intervalu  $\langle t_i, t_i + 1 \rangle$   $A$  obdrží signál od dvojčete v raketě, jehož aktuální poloha při vyslání signálu byla  $x_v = t(x_v)$ . V prvním časovém intervalu  $\langle t_1, t_2 \rangle$  dostaneme z rovnice

$$t_p = t_v + \frac{x_{I-II}(t_v)}{c} = t_v + \frac{c}{a} \left( \sqrt{1 + \frac{a^2 t_v^2}{c^2}} - 1 \right), \quad (5.13)$$

z čehož můžeme vyjádřit

$$t_v = \frac{t_p a t_p + 2c}{2 a t_p + c}$$

a najdeme pozorovaný čas signálu  $t'_v$  s využitím vztahu  $\sinh^{-1}(z) = \ln(z + \sqrt{1 + z^2})$ :

$$t'_v = \frac{c}{a} \sinh^{-1} \frac{a t_p}{c} = \frac{c}{a} \ln \left( 1 + \frac{a t_p}{c} \right). \quad (5.14)$$

V časovém intervalu  $\langle t_2, t_4 \rangle$  je čas  $t_p$  dvojčete  $A$  odvozen od času vyslání  $t_v$  přes

$$t_p = T + \tilde{t}_v + \frac{x_{II-IV}(\tilde{t}_v)}{c}, \quad (5.15)$$

kde  $\tilde{t}_v = t_v - T$  měří čas z místa  $II$ . Poloha dvojčete  $B$  vyplývá pro zápornou složku zrychlení z rovnice (1.8):

$$x_{II-IV}(\tilde{t}_v) = -\frac{c^2}{a} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{-a\tilde{t}_v}{c} \right)^2} - 1 \right) + \frac{c^2}{a} \left( \sqrt{1 + \frac{a^2 T^2}{c^2}} - 1 \right). \quad (5.16)$$

Z rovnice (5.15) můžeme určit  $\tilde{t}_v$ :

$$\tilde{t}_v = \frac{1}{2} \frac{2\xi - \xi^2 a/c}{1 - \xi a/c}, \quad (5.17)$$

kde

$$\xi = t_p - T - \frac{c^2}{a} \left( \sqrt{1 + \frac{a^2 T^2}{c^2}} - 1 \right). \quad (5.18)$$

Rovnice pro  $t'$  odpovídá času  $\tilde{t}'_v$ , tedy dvojče  $A$  obdrží v jeho čase  $t_p$  paprsek vyslaný z  $B$  k  $A$  v čase  $t'_v = \tilde{t}'_v + T'$ .

V posledním intervalu  $\langle t_4, t_5 \rangle$  čas pozorování  $A$  vyplývá z:

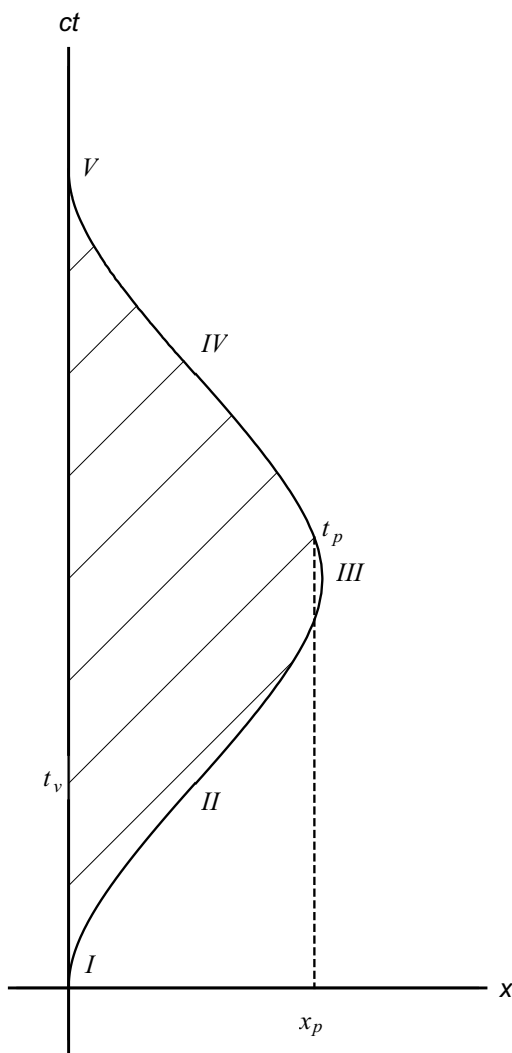
$$t_p = \bar{t}_v + 3T + \frac{x_{IV-V}(\bar{t}_v)}{c}, \quad (5.19)$$

kde  $x_{IV-V}(\bar{t}_v) = x_{II-IV}(\tilde{t}_v)$  s tím rozdílem, že  $a \mapsto -a$ ,  $\tilde{t}_v \mapsto \bar{t}_v$  a  $\bar{t}_v = t_v - 3T$ .

### 5.3.2 Pohled cestujícího dvojčete

Uvažujme opačnou situaci, kdy dvojče  $A$  zůstávající na Zemi posílá v jeho vlastním čase  $t_v$  světelné signály cestujícímu dvojčeti  $B$  viz obr. 5.2. Přijetí signálu  $t'_p$  zjistíme z průsečíku světelného kuželu  $A$  a světočáry  $B$ :

$$t_p = t_v + \frac{x_p}{c}. \quad (5.20)$$



Obrázek 5.2: Čtyřfázová cesta,  $A$  vysílá světelné signály  $B$ .

Zatímco  $B$  zrychluje ve fázi  $I - II$  jeho vlastní čas  $t'_p$  se transformuje na  $t_p$  dle rovnice (1.7) Jeho poloho je dána vztahem:

$$x_p = \frac{c^2}{a} \left[ \cosh \left( \frac{at'_p}{c} \right) - 1 \right] \quad (5.21)$$

a signál od  $A$ , který přichází v čase  $t'_p$ , je časově označen

$$t_v = \frac{c}{a} \left[ \sinh \left( \frac{at'_p}{c} \right) - \cosh \left( \frac{at'_p}{c} \right) + 1 \right]. \quad (5.22)$$

Ve fázi  $II - IV$  je složka zrychlení záporná, obdržíme  $\tilde{t}_p = t_p - T$  z rovnice (5.4) pro  $\zeta = \sinh(aT'/c)$ . Pro čas přijetí  $t'_p = t'_p - T'$ , dostáváme s ohledem na zápornou složku  $\tilde{t}_p$ :

$$t_p = T - \frac{c}{a} \left[ \sinh \left( \frac{a(-t'_p + 2T')}{c} \right) - \sinh \left( \frac{aT'}{c} \right) \right]. \quad (5.23)$$

Poloha  $x_p$  pozorovatele  $A$ , když obdrží světelný signál od  $A$  je dána rovnicí (5.2), která se zjednoduší podle vztahu (5.5) na:

$$x_p = -\frac{c^2}{a} \left[ \cosh \left( \frac{a(-t'_p + 2T')}{c} \right) - 2 \cosh \left( \frac{aT'}{c} \right) + 1 \right]. \quad (5.24)$$

Stejný způsob lze aplikovat na poslední část - fázi  $IV - V$ , pro kterou nalezneme

$$t_p = 3T + \frac{c}{a} \left[ \sinh \left( \frac{a(t'_p - 4T')}{c} \right) + \sinh \left( \frac{aT'}{c} \right) \right], \quad (5.25)$$

$$x_p = \frac{c^2}{a} \left[ \cosh \left( \frac{a(t'_p - 4T')}{c} \right) - 1 \right]. \quad (5.26)$$

V obou případech čas vyslání  $t_v$  vyplývá ze vztahu (5.20) s odpovídajícím časem pozorování  $t_p$  a polohou  $x_p$ .

## 5.4 Cesta ke hvězdě Vega

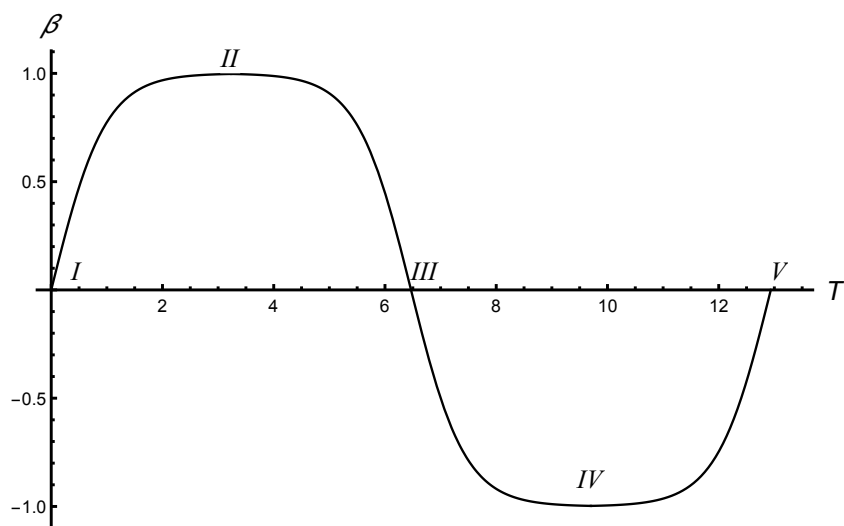
Pro ilustraci dilatace času uvažujme let k sousední hvězdě jménem Vega, která je zhruba 25,3 ly daleko od Země. Pro co nejpohodlnější cestu uvažujme zrychlení cestujícího dvojčete  $a = g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Zatímco pro cestující dvojče cesta trvá  $T'_{\text{celk.}} = 4T' = 12,93$  let s ohledem vůči jeho vlastnímu času, dvojče zůstávající na Zemi musí čekat  $T_{\text{celk.}} = 54,48$  let na návrat cestujícího dvojčete. Světočára cestujícího dvojčete vzhledem k Zemi je na prostoročasovém diagramu 5.4. Ačkoliv cestující dvojče vykonává rovnoměrně zrychlený pohyb, světočára je takřka lineární. Kvůli mírnému zrychlení potřebuje raketa zrychleného dvojčete skoro rok na to, aby dosáhla 80 % rychlosti světla. V bodě  $II$  dosáhne maximální rychlosti  $\beta \approx 0,9975$  podle (5.8) viz obr. 5.3.

Uvažujme výměnu světelných signálů mezi dvojčaty.

### 5.4.1 Pohled dvojčete zůstávajícího na Zemi

Zatímco jedno z dvojčat zůstává na Zemi, druhé opouští Zemi se zrychlením  $g$ . Protože vzdálenost mezi oběma dvojčaty roste, je zřejmé, že signály vyslané cestujícím dvojčetem potřebují čím dál více času, aby dosáhly dvojčete na Zemi. Také díky dilataci času





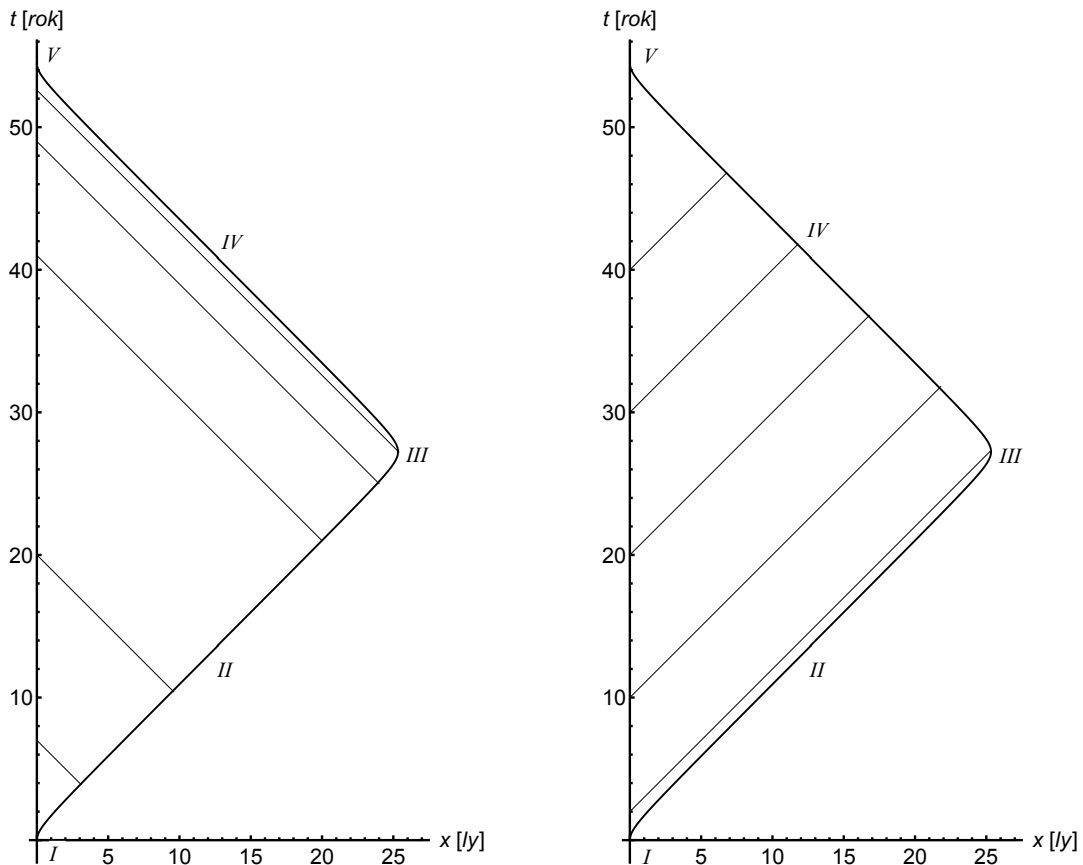
Obrázek 5.3: Okamžitá rychlost cestujícího dvojčete ke hvězdě Vega v závislosti na jeho vlastním čase (nakresleno podle [12])

se zdá, že cestující dvojče musí čekat delší dobu, než vyšle další světelný signál. Ačkoliv dvojče už je na své cestě zpět na Zemi, když opustí místo *III*, zůstávající dvojče obdrží většinu jeho signálů během poslední fáze cesty.

Dvojče na Zemi obdrží signál v jeho vlastním čase  $t_p = 20$  let ačkoliv byl vyslán dvojčetem v jeho vlastním čase  $t'_v = 3$  roky (viz obr. 5.4a a obr. 5.5a), když bylo pouze 10 světelných let od domova. Ale poloha cestujícího dvojčete v okamžiku přijetí signálu je vůči dvojčeti zůstávajícímu na Zemi  $x = 19$  světelných let a zatím pro něj uplynuly zhruba 4 roky.

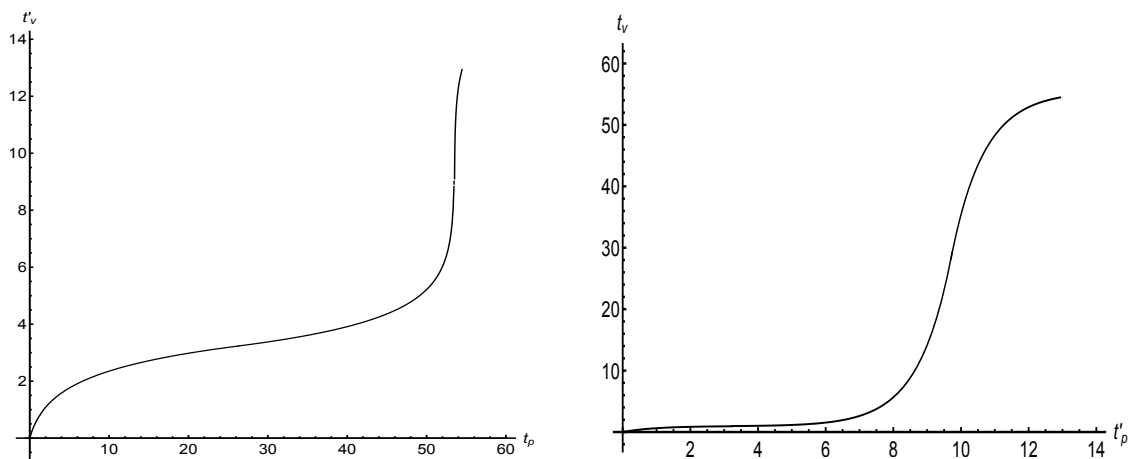
### 5.4.2 Pohled cestujícího dvojčete

Z obrázků 5.4 je zřejmé, že perspektiva cestujícího dvojčete je odlišná. Paprsek vyslaný dvojčetem setrvávajícím na Zemi v jeho prvním roce dosáhne cestujícího dvojčete až zpomalí v bodě *III*. Na jeho cestě zpět se zdá, že dostává paprsky pravidelně, ale kvůli dilataci času obdrží většinu signálů kolem bodu *IV*, kdy cestuje maximální rychlostí a tedy se nejvíce projevují efekty časové dilatace.



(a) Cestující dvojče posílá signály dvojčeti zů- (b) Dvojče zůstávající na Zemi posílá signály stávajícímu na Zemi. cestujícímu dvojčeti.

Obrázek 5.4: Čtyřfázová cesta na hvězdu Vega (nakresleno podle [12])



(a) Závislost času  $t'_v$  v signálech vysílaných ces- (b) Závislost času  $t_v$  v signálech vysílaného tujícíím dvojčetem na čase  $t_p$  dvojčete na Zemi dvojčetem na Zemi na čase  $t'_p$  cestujícího dvoj- v okamžiku přijetí signálu. čete v době přijetí signálu.

Obrázek 5.5: Závislost vlastních časů vyslání a přijetí signálů dvojčat při cestě ke hvězdě Vega (nakresleno podle [12])

# Kapitola 6

## Jevy spojené se zrychleným pohybem

Mějme pozorovatele  $A$ , jehož světočára je dána rovnicí (1.9). Zaveďme druhého pozorovatele  $B$ , jenž je ve vzdálenosti  $L$  před  $A$  v každém okamžiku (viz obr. 1.4), jeho hyperbolický pohyb je pak daný rovnicí

$$x^2 - (ct)^2 = \left(\frac{c^2}{a} + L\right)^2 = \left(\frac{c^2}{a_1}\right)^2. \quad (6.1)$$

Parametr  $\tau$  pro pozorovatele  $B$  neodpovídá vlastnímu času, pokud  $L \neq 0$ . Pozorovatel  $B$  má konstantní vlastní zrychlení  $a/(1 + aL/c^2)$  s ohledem vůči inerciální soustavě, která jej okamžitě doprovází.

Dva rovnoměrně zrychlení pozorovatelé musí mít rozdílná zrychlení, aby zůstali oddělení vlastní konstantní vzdáleností. Zvyšující se rychlosti pozorovatelů vyvolají zvyšující se Lorentzovskou kontrakci délky takovým způsobem, že se zdá, že se pozorovatelé přibližují z inerciální soustavy  $K$ , což odpovídá různému zrychlení pozorovatelů.

Nyní vytvoříme souřadnicovou soustavu  $K'$ , jejíž počátek se shoduje se zrychleným pozorovatelem  $A$  v nějakém čase. Prostorovočasové souřadnice  $x'$  a  $ct'$  libovolné události  $P$  jsou definované takovým způsobem, že  $x'$  je prostorová vzdálenost od události  $P$  k pozorovateli  $A$  a  $t'$  je taková hodnota, že vlastní čas pozorovatele  $A$  je současný s událostí  $P$ . Máme:

$$ct = \left(\frac{c^2}{a} + x'\right) \sinh\left(\frac{a\tau}{c}\right), \quad (6.2a)$$

$$x = \left(\frac{c^2}{a} + x'\right) \cosh\left(\frac{a\tau}{c}\right), \quad (6.2b)$$

což dává

$$x \pm ct = \left(\frac{c^2}{a} + x'\right) \exp\left(\pm \frac{at'}{c}\right). \quad (6.3)$$

Derivací vztahů (6.2) máme

$$c \frac{dt}{d\tau} = \left(\frac{ax'}{c^2} + 1\right) \cosh\left(\frac{a\tau}{c}\right), \quad (6.4a)$$

$$\frac{dx}{d\tau} = \left(\frac{ax'}{c^2} + 1\right) \sinh\left(\frac{a\tau}{c}\right). \quad (6.4b)$$

Minkowského prostoročasový interval  $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2$  má pak tvar:

$$ds^2 = \left(1 + \frac{ax'}{c^2}\right)^2 c^2 dt^2 - dx^2. \quad (6.5)$$

Z rovnice (6.3) vyplývá rovnice pro šíření světelného paprsku podél osy  $x$

$$0 = \left(\frac{c^2}{a} + x'\right) \exp\left(\mp \frac{at'}{c}\right) = \frac{c^2}{a} \left(1 + \frac{x'a}{c^2}\right) \exp\left(\mp \frac{at'}{c}\right), \quad (6.6)$$

kde horní (dolní) znaménko odpovídá šíření v kladném (záporném) směru osy  $x$ . Celkový čas (měřený pozorovatelem  $A$ ) potřebný, aby světelný signál šel od  $A$  do místa  $x' = L$  a zpět k  $A$ , je roven

$$2 \frac{c}{a} \ln \left(1 + \frac{aL}{c^2}\right), \quad (6.7)$$

což odpovídá střední rychlosti měřené pozorovatelem v  $A$ :

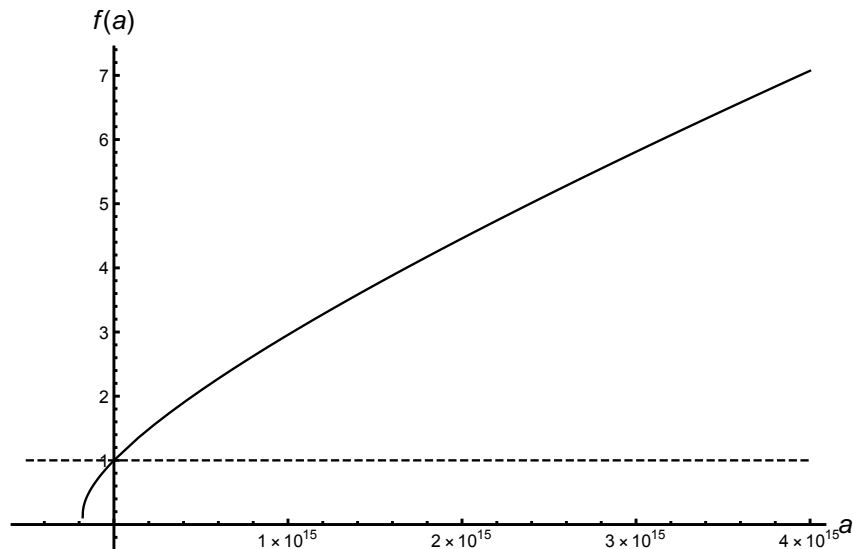
$$\frac{aL}{c \ln(1 + aL/c^2)} \geq c. \quad (6.8)$$

Platnost nerovnice lze ověřit např. následujícím způsobem. Podělením nerovnice (6.8)  $c$  odpovídá vztah

$$\frac{aL}{c^2 \ln(1 + aL/c^2)} \geq 1,$$

čemuž odpovídá graf 6.1 a Taylorův rozvoj v okolí nuly má tvar:

$$\frac{aL}{c^2 \ln(1 + aL/c^2)} = 1 + \frac{La}{2c^2} - \frac{L^2 a^2}{12c^4} + \frac{L^3 a^3}{24c^6} - \frac{19L^4 a^4}{720c^8} + \frac{3L^5 a^5}{160c^{10}} \dots$$



Obrázek 6.1: Závislost  $f(a) = \frac{aL}{c^2 \ln(1 + aL/c^2)}$

Použitím rovnice (6.3) můžeme odvodit inverzní vztahy z (6.2)

$$ct' = \frac{c^2}{2a} \ln \left( \frac{x + ct}{x - ct} \right), \quad (6.9a)$$

$$x' = \sqrt{x^2 - (ct)^2} - \frac{c^2}{a}. \quad (6.9b)$$

## 6.1 Rudý posuv

V počátku souřadnicové soustavy  $K'$  ( $x' = 0$ ) se nám rovnice (6.5) zredukuje na

$$ds^2 = c^2 dt'^2,$$

což ukazuje, že  $t'$  je vlastní čas  $\tau$  měřený hodinami umístěnými v tomto bodě. Obdobně rovnice (6.5) znamená, že čas  $\tau'$  měřený hodinami umístěnými s ohledem vůči zrychlené soustavě  $K'$  v  $x' = L$  souvisí s  $t'$  vztahem

$$d\tau' = \left( 1 + \frac{aL}{c^2} \right) dt'$$

a tedy

$$d\tau' = \left( 1 + \frac{aL}{c^2} \right) d\tau. \quad (6.10)$$

Na rozdíl od případu inerciální soustavy, hodiny fixované polohou vzhledem ke  $K'$  nemohou být synchronizovány. Rozdíl zrychlení dvou hodin je nutný, aby vztah (6.10) byl symetrický. Odtud obdržíme

$$d\tau = \left( 1 + \frac{aL}{c^2} \right)^{-1} d\tau' = \frac{c^2}{c^2 + aL} d\tau' = \left( 1 + \frac{a}{1 + aL/c^2} \frac{(-L)}{c^2} \right) d\tau', \quad (6.11)$$

což je výraz (6.10) se zaměněnými časy. Výraz  $\frac{a}{1+aL/c^2}$  je zrychlení hodin v  $x' = L$ .

Rovnice (6.10) znamená, že frekvence světelných signálů např  $\nu$  a  $\nu'$  měřené pozorovateli v  $x' = 0$  a  $x' = L$  spolu souvisí vztahem

$$\nu = \left( 1 + \frac{aL}{c^2} \right) \nu'. \quad (6.12)$$

Pokud bychom uvažovali pozorovatele v raketě s klidovou délkou  $L$ , který by se pohyboval se zrychlením  $a$  v kladném směru osy  $x$ , vidíme, že signál vyslaný z předního konce na zadní bude zachycen s vyšší frekvencí (a kratší vlnovou délkou, půjde tedy o modrý posuv), než s jakou byl vyslán, a naopak.

## 6.2 Ohýbání světelných paprsků

Chceme najít trajektorii světelného paprsku vzhledem k zrychlené soustavě  $K'$ . Za tímto účelem studujme pohyb v rovině kolmé na pohyb  $K$  a  $K'$ , jež jsou ve vztahu

$$y = y', \quad (6.13a)$$

$$z = z', \quad (6.13b)$$

pokud jsou osy  $K$  a  $K'$  rovnoběžné. Vzhledem vůči soustavě  $K$  můžeme světelný paprsek kolmý na zrychlení  $K'$  popsat pomocí parametrických výrazů

$$x = x_0,$$

$$y = y_0 + ct,$$

$$z = 0,$$

kde  $x_0$  a  $y_0$  jsou konstanty. Poté podle rovnic (6.2) a (6.13a)

$$\begin{aligned} x_0 &= \left( \frac{c^2}{a} + x' \right) \cosh \left( \frac{at'}{c} \right), \\ y' &= y_0 + \left( \frac{c^2}{a} + x' \right) \sinh \left( \frac{at'}{c} \right), \\ z' &= 0. \end{aligned}$$

Po úpravě dostáváme

$$\left( x' + \frac{c^2}{a} \right) + (y' - y_0)^2 = x_0^2, \quad (6.14)$$

což znamená, že trajektorie světelného paprsku s ohledem vůči zrychlené soustavě je oblouk kružnice se středem  $[-c^2/a, y_0, 0]$  a s poloměrem  $|x_0|$ . Pokud světelný paprsek projde skrz počátek  $K'$ , musíme vybrat  $x_0 = c^2/a$ . Pro  $a = g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , poloměr  $c^2/a$  je přibližně roven 1 ly.

Podobným způsobem lze zjistit, že trajektorie jakéhokoliv světelného paprsku vzhledem vůči  $K'$  je přímka rovnoběžná s osou  $x'$  nebo kruh se středem v určitém bodě s  $x = -c^2/g$ . Pokud paprsek prochází počátkem  $K'$ , poloměr kruhu musí být větší nebo roven než  $c^2/g$ .

Tento výsledek také vyplývá ze skutečnosti, že světelné paprsky jsou nulové geodetické čáry, což má v podmínkách  $K'$  tvar

$$ds^2 = \left( 1 + \frac{ax'}{c^2} \right)^2 c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2. \quad (6.15)$$

Čas potřebný, aby světelný signál dorazil z místa  $P_1$  do  $P_2$ , je dán

$$\frac{1}{c} \int_{P_1}^{P_2} \frac{\sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}}{1 + ax'/c^2} \quad (6.16)$$

a světelný paprsek se pohybuje po geodetické čáře třírozměrného hyperbolického prostoru

$$ds^2 = \frac{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}{(1 + ax'/c^2)^2}, \quad (6.17)$$

což je metrika tohoto prostoru.

Při porovnání ohybu světelných paprsků zde odvozených s dobře známými výsledky získaných v rámci obecné teorie relativity pomocí Schwarzschildovy metriky, nalezneme

(přibližný) poloměr křivosti trajektorie světelného paprsku v bodě nejbližšího přiblížení k hmotnému bodu vytvářejícímu gravitační pole.

Poloměr křivosti  $R$  rovinné křivky zadané rovnicí  $r = r(\theta)$  v bodě, kde  $dr/d\theta = 0$ , tj. v bodě největšího přiblížení k počátku, je dán vztahem dle [15]

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 r}{d\theta^2} = \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u, \quad (6.18)$$

kde  $u = 1/r$ . Použitím obvyklého vztahu pomocí Schwarzschildovy metriky je trajektorie světelného paprsku v gravitačním poli vytvořeném hmotností  $M$  dána diferenciální rovnicí z [14]:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{3GM}{c^2} u^2, \quad (6.19)$$

kde  $G$  je gravitační konstanta a  $u = 1/r$ . Ve vztahu k rovnici (6.18), přičemž bereme v potaz, že  $r$  je zhruba radiální vzdálenost, poloměr křivosti zakřivení světelného paprsku v periastru je

$$R = \frac{c^2 r^2}{3GM} \simeq \frac{c^2}{3g}, \quad (6.20)$$

kde  $g$  je gravitační zrychlení ve vzdálenosti  $r$  od hmotného objektu  $M$ . Řešení pohybu částic v centrálním gravitačním poli objektu o hmotnosti  $M$  v rámci klasické newtonovské fyziky vede k rovnici dle [16]:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{h^2},$$

kde  $h = \frac{L}{m} = rc$  pro bod největšího přiblížení ve vzdálenosti  $r$  od centra. Pokud fotonu přiřadíme hmotnost podle vztahu  $E = mc^2$ , vede tato rovnice k poloměru křivosti trajektorie fotonu v tomto bodě:

$$R = \frac{c^2 r^2}{GM} \simeq \frac{c^2}{g}, \quad (6.21)$$

což se od výsledku (6.20) získaného výše liší faktorem  $\frac{1}{3}$ .

# Kapitola 7

## Relativistický vztlak

Uvažujme následující situaci: projektil má klidovou hustotu rovnou hustotě vody ( $\rho_0$ ), tedy pokud by byl projektil v klidu, volně by se vznášel ve vodě. Pokud je projektil horizontálně vystřelen skrz vodu, jeho energie/ $c^2$  (lorentzovská hmotnost) je zvýšena Lorentzovým faktorem  $\gamma$  a jeho délka ve směru pohybu (tedy i objem) je zmenšena podle vztahu (1.3). To činí hustotu projektilu  $\gamma^2\rho_0$ , což je větší než hustota vody, a projektil se potopí. Na první pohled se zdá, že se jedná o paradox (který je ovšem zdánlivý, jak je ukázáno níže): změnou vztažné soustavy, ve které má projektil nulovou rychlost, má pohybující se voda hustotu  $\gamma^2\rho_0$  a projektil se pak vznáší ve vodě namísto toho, aby se potopil.

Soustředíme se zde jen na relativistické vztahy pro ideální tekutinu, např. viskozitu zanedbáme.

### 7.1 Pohled v soustavě $K$

Mějme obdélníkovou nádrž (obr. 7.1). S využitím principu ekvivalence předpokládejme, že se nádrž pohybuje směrem nahoru se zrychlením  $g$ . Tato soustava je lokální, tedy všechny vzdálenosti zde jsou mnohem menší než  $c^2/g$ . Použití principu ekvivalence umožňuje dokončit výpočet bez ohledu na gravitační síly. Souřadnice na obrázku se vztahují k soustavě  $K$ , v níž byla nádrž v okamžitém stavu klidu ve chvíli, kdy byl projektil vystřelen. Počátek soustavy je shodný s levým dolním rohem nádrže v čase  $t = 0$ .

V soustavě  $K$  je vztlaková síla působící na projektil daná hmotností vytlačené vody násobené tíhovým zrychlením  $g$ :

$$f_{vz} = V_0\gamma^{-1}\rho_0g, \quad (7.1)$$

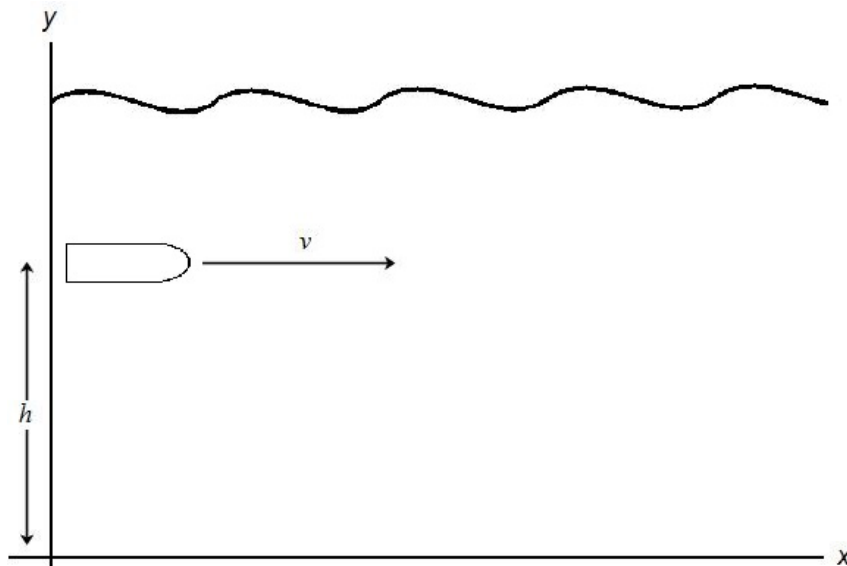
kde  $V_0$  a  $m_0$  je klidový objem a klidová hmotnost projektilu. Z Newtonova druhého zákona vyjádříme  $y$ -ovou složku dle [18]:

$$f_y = \frac{d}{dt}(\gamma m_0 v_y) = m_0 \left( \frac{d\gamma}{dt} v_y + \gamma \frac{dv_y}{dt} \right) \quad (7.2)$$

kde  $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$  je rychlost projektilu,  $f_y$  je  $y$ -ová složka klasické síly. Pro konstantní složku rychlosti  $v_x$  je Lorentzův faktor:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \left( \frac{\gamma^3}{c^2} \right) v_y \frac{dv_y}{dt}. \quad (7.3)$$





Obrázek 7.1: Nádrž a projektil v soustavě  $K$  (podle [18])

Dosažením do rovnice (7.2) dostaneme:

$$f_y = \gamma m_0 \frac{dv_y}{dt} \left( \frac{1 - (v_x/c)^2}{1 - (v_x/c)^2 - (v_y/c)^2} \right) \approx m_0 \gamma \frac{dv_y}{dt}, \quad (7.4)$$

aproximace odpovídá pro  $v_y \ll c$ .

Je zajímavé, že výsledek je shodný s rovnicí (7.2) při zanedbání členu  $\frac{dv_y}{dt}$ . Avšak velikost  $\frac{dv_y}{dt}$  neznáme.

Kombinace rovnic (7.1) a (7.2) vede na

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{g}{\gamma^2}. \quad (7.5)$$

Toto zrychlení projektilu je menší než zrychlení nádrže  $g$ , takže se projektil potopí s relativním zrychlením:

$$A = g - \frac{g}{\gamma^2} = g \left( \frac{v}{c} \right)^2. \quad (7.6)$$

Projektil tedy dopadne na dno v čase

$$t = \sqrt{\frac{2h}{A}} = \left( \frac{c}{v} \right) \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (7.7)$$

a urazí celkovou horizontální vzdálenost

$$x = vt = c \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (7.8)$$

## 7.2 Pohled v soustavě $K'$

Uvažujme daný problém v inerciální soustavě  $K'$ , ve které je počáteční rychlost projektilu nulová. Zvolme počátek tak, aby se v čase  $t = 0$  shodoval s počátkem soustavy

$K$ . V této soustavě je vertikální zrychlení jakéhokoliv pevného bodu dáno vztahem pro transformaci  $y$ -ové složky zrychlení z [17]

$$a'_y = \frac{a_y}{\gamma^2 D} + \frac{a_x v_y v}{c^2 \gamma^2 D^3},$$

kde  $D = 1 - u_x v / c^2$ . Jelikož  $a_y = g$  a  $v_x = 0$ , dostáváme vztah pro zrychlení s konstantním  $x$  na dně nádrže (například levého dolního rohu):

$$a' = \frac{g}{\gamma^2}. \quad (7.9)$$

V této soustavě je hustota vody

$$\rho' = \gamma^2 \rho_0. \quad (7.10)$$

Vztlaková síla působící na projektil je

$$f'_{vz} = \rho' V' a'. \quad (7.11)$$

Jelikož má projektil svou klidovou hmotnost a klidový objem v soustavě  $K'$ , dostáváme

$$f'_{vz} = m_0 g, \quad (7.12)$$

jelikož vztah mezi klidovou a relativistickou hmotností je z [4]:

$$m = m_0 \gamma,$$

porovnáním vztahů (7.1) a (7.12) ověříme, že lorentzovská transformace síly proběhla, jak měla. Použitím  $\gamma' = 1$  v rovnici (7.2) dostáváme:

$$\frac{dv'_y}{dt} = g. \quad (7.13)$$

Toto vertikální zrychlení projektilu je větší než vertikální zrychlení rohu nádrže (7.9), tedy se stále zdá, že projektil plave v čárkované soustavě.

Tento zdánlivý paradox může být vyřešen tím, pokud si uvědomíme, že dno nádrže není nadále ploché. Rovnice pro dno nádrže je dána vztahem z [18]:

$$y = \frac{1}{2} g t^2 \quad (7.14)$$

a použitím Lorentzovy transformace dostáváme:

$$y' = \frac{1}{2} g [\gamma (t' + v x' / c^2)]^2. \quad (7.15)$$

Nyní lze ověřit, zda a případně kdy projektil narazí na dno. Podle klasické kinematiky má projektil polohu:

$$y'_{vz} = h + \frac{1}{2} \left( \frac{dv'_y}{dt} \right) t'^2. \quad (7.16)$$

Dosazením (7.13) do (7.16) dostáváme:

$$y'_{vz} = h + \frac{1}{2} g t'^2. \quad (7.17)$$

Souřadnice místa dopadu v pohybující se soustavě je:

$$x' = 0, \quad (7.18)$$

Jelikož souřadnice projektilu je vždy  $x' = 0$ . Dopadu odpovídá podmínka, že se  $y$ -ová složky projektilu a dna nádrže shodují. Čas dopadu lze nalézt z rovnic (7.15) a (7.17)

$$t' = \sqrt{\frac{2h}{g}} \frac{1}{\sqrt{(\gamma^2 - 1)}} = \sqrt{\frac{2h}{h}} \frac{c}{\gamma v}. \quad (7.19)$$

Lorentzovou transformací rovnic (7.18) a (7.19) do nečárkované soustavy dostáváme rovnice (7.8) a (7.7), výpočty v obou dvou soustavách souhlasí.

Druhá metoda, jak se dostat ke stejnému výsledku v soustavě  $K$ , vyplývá z porovnání výrazů výše. Rovnice (7.9) je zrychlení rohu nádrže měřené v soustavě  $K'$ . Jelikož roh má pevné  $x$ , rovnici (7.9) lze napsat:

$$\frac{\partial^2 y'}{\partial t'^2} \Big|_{x=\text{konst.}} = \frac{g}{\gamma^2}, \quad (7.20)$$

což může být přímo ověřeno použitím rovnice (7.15) a Lorentzovy transformace. Jelikož projektil nakonec narazí na dno v jiné hodnotě  $x$ , je třeba brát v potaz zakřivené dno nádrže. Naproti tomu v soustavě  $K'$  dostáváme

$$\frac{\partial^2 y'}{\partial t'^2} \Big|_{x'=0} = g\gamma^2. \quad (7.21)$$

Vertikální zrychlení dna nádrže je větší než vertikální zrychlení projektilu (viz (7.13)), takže se projektil potopí s relativním zrychlením

$$\Delta a = g(\gamma^2 - 1). \quad (7.22)$$

Jelikož je tento výpočet pro  $x' = 0$ , na zakřivení dna nádrže nemusí být nahlíženo zvlášť, jednoduchá kinematika vede na

$$t' = \sqrt{\frac{2h}{\Delta a}} = \frac{2h}{g} \frac{c}{\gamma v}, \quad (7.23)$$

což je ve shodě s rovnicí (7.19).

# Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo přehledně popsat některé vybrané jevy spojené s rovnoměrně zrychleným pohybem ve speciální teorii relativity. Snahou bylo přehledně shrnout informace z různých časopiseckých pramenů, od často diskutovaných jevů (jako paradox dvojčat) k těm zřídka studovaným (jako např. pojetí vztlakové síly v teorii relativity).

V první kapitole jsou připomenuty základní rovnice speciální teorie relativity a odvozeny nejdůležitější vztahy pro rovnoměrně zrychlený pohyb se znázorněním tohoto pohybu pomocí Minkowského diagramů.

Druhá kapitola se zabývá tím, jaká bude vzdálenost mezi dvěma urychlenými raketami z hlediska různých pozorovatelů. Pokud se pro pozorovatele v soustavě  $K$  vzdálenost mezi raketami nezmění, z hlediska soustavy  $K'$  pohybující se spolu s raketami, pozorujeme mezi nimi prodloužení vzdálenosti. Vysvětlení v sobě zahrnuje jak relativnost současnosti, tak i kontrakci délky.

Paradox Bellových raket je v práci popsán ve dvou variantách. V základní variantě rakety nejprve zrychlí, načež přejdou vůči soustavě  $K'$  do stavu klidu a vlákno mezi nimi se přetrhne napětím, které překročí mez pružnosti. V rozšířené variantě rakety nepřejdou do stavu klidu vůči soustavě  $K'$  najednou, ale budou po nějakou konečnou dobu zrychlovat. Vlákno se přetrhne, pokud bude limitní protažení větší nebo rovno kritickému natažení vlákna. Pokud však bude limitní protažení menší, vlákno bude i pod zvyšujícím se napětím neporušeno.

Další kapitola je věnována prostoročasovému omezení komunikace mezi dvěma pozorovateli za podmínek, kdy se jeden, nebo oba dva pohybují rovnoměrně zrychleným pohybem. Tato komunikace není symetrická. Pomocí asymptot k hyperbolám znázorňujícím zrychlený pohyb je možné odvodit časové a prostorové intervaly umožňující jejich komunikaci.

K popisu paradoxu dvojčat je použito pohybu skládajícího se ze čtyř fází (zrychleného, zpomaleného, zrychleného a zpomaleného pohybu). Zároveň je uvažována komunikace mezi pozorovateli pomocí elektromagnetických signálů nesoucích informaci o čase odeslání v příslušné soustavě. Známý efekt dilatace času je ilustrován modelem letu ke hvězdě Vega, kdy pro cestující dvojče trvala cesta „pouze“ necelých čtrnáct let, zatímco pro dvojče zůstávající na Zemi uběhlo takřka šedesát let.

V páté kapitole jsou odvozeny vztahy pro rudý posuv a ohyb světelného paprsku ve zrychlené vztažné soustavě. Výsledek je srovnán s ohybem paprsku v okolí Schwarzschildovy sférické hvězdy a je ukázáno, že výsledky jsou řádově shodné a také že hodnota poloměru křivosti paprsku získaná ve zrychlené soustavě odpovídá výsledku newtonovské teorie gravitace při započítání hmotnosti fotonů podle Einsteinova vztahu  $E = mc^2$ .

V poslední kapitole je aplikován princip ekvivalence na odvození relativistického vztlaku. Zdánlivý paradox, při kterém by se měl projektil díky zvýšení hustoty z hlediska jedné soustavy potopit a z hlediska druhé ne, vede při pečlivé analýze k závěru,

že rychle se pohybující projektil by se za jinak nezměněných vnějších podmínek potopil z hlediska pozorovatelů v laboratorní soustavě i v soustavě spojené s projektilem.

Zajímavých jevů a zdánlivých paradoxů spojených se speciální teorií je samozřejmě mnohem více. Doufám, že zde uvedená řešení konkrétních vybraných problémů mohou sloužit jako vhodný a srozumitelný podklad ke studiu této problematiky v rámci základního vysokoškolského kurzu fyziky a najde využití i ve výuce na PřF UP, např. v předmětech Teorie relativity nebo Úvod do obecné teorie relativity.

# Literatura

- [1] EINSTEIN, A. *Teorie relativity*. Brno: VUTIUM, 2005.
- [2] HALLIDAY, D; RESNICK, R; WALKER, J, DUB, P, ed. *Fyzika. 2.*, přeprac. vyd. Přeložil Miroslav ČERNÝ. Brno: VUTIUM, c2013. Překlady vysokoškolských učebnic.
- [3] RINDLER, W. *Introduction to special relativity*. New York: Oxford University Press, 1991.
- [4] RICHTEREK, L. *Teorie relativity a astronomie*. Praha: Prometheus, 2003.
- [5] DEL CASTILLO, G. F. T.; SÁNCHEZ, C.I.P. Uniformly accelerated observers in special relativity. *REVISTA MEXICANA DE FÍSICA*, 2006, 52/1, 70-73.
- [6] MIKULČÁK, J. *Matematické, fyzikální a chemické tabulky a vzorce pro střední školy*. Praha: Prometheus, 2003.
- [7] MATSUDA, T; KINOSHITA, A. A Paradox of Two Space Ships in Special Relativity. *AAPPS Bulletin*, 2004, 14/1, 3-7.
- [8] DEWAN, E; BERAN, M. Note on stress effects due to relativistic contraction. *American Journal of Physics*. 1959 **27**(7), 517–518.
- [9] BELL, J. S.; How to teach special relativity. *John S. Bell on the foundations of quantum mechanics*. World Scientific, 2001, s. 61–73.
- [10] REDŽIĆ, D. V. Note on Dewan–Beran–Bell’s spaceship problem. *European Journal of Physics*. 2008 **29**(3), N11-N19.
- [11] FLORES, F. J. Communicating with accelerated observers in Minkowski spacetime. *European Journal of Physics*. 2007 **29**(1), 73-84.
- [12] MÜLLER, T; KING, A; ADIS, D. A trip to the end of the universe and the twin „paradox“. *American Journal of Physics*. 2008, **76**(4), 360-373.
- [13] FEYNMAN, R. P; LEIGHTON, R. B; SANDS, M. *Feynmanovy přednášky z fyziky: revidované vydání s řešenými příklady. 2. vydání*. Přeložil Ivan ŠTOLL. Praha: Fragment, 2013.
- [14] KENYON, I. R. *General relativity*. New York: Oxford University Press, 1990.
- [15] KORN, G, A; KORN T. M. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*. New York: McGraw-Hill, 1968.

- [16] FITZPATRICK, R. *An introduction to celestial mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2012.
- [17] RINDLER, W. *Relativity: special, general, and cosmological*. 2nd ed. New York: Oxford University Press, 2006.
- [18] SUPPLEE, J. M. Relativistic buoyancy. *American Journal of Physics*. 1988, **57**(1), 75-77.