UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

Přírodovědecká fakulta

Katedra experimentální fyziky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vlastní frekvenční módy Chladniho obrazců

Autor:	Alice Kutnarová
Studijní program:	B1701 Fyzika
Studijní obor:	1701R003 Fyzika se zaměřením na vzdělávání
Forma studia:	Prezenční
Vedoucí práce:	Mgr. Lukáš Richterek, Ph.D.
Termín odevzdání práce:	Srpen 2020

Prohlašuji, že jsem předloženou bakalářskou práci vypracovala samostatně pod vedením Mgr. Lukáše Richterka, Ph.D. a že jsem použila zdrojů, které cituji a uvádím v seznamu použitých pramenů.

V Olomouci dne 20. srpna 2020 ……..

Alice Kutnarová

Bibliografická identifikace:

Jméno a příjmení autora:	Alice Kutnarová
Název práce:	Vlastní frekvenční módy Chladniho obrazců
Typ práce:	Bakalářská
Pracoviště:	Katedra experimentální fyziky, Přírodovědecká fakulta, Univerzita Palackého v Olomouci
Vedoucí práce:	Mgr. Lukáš Richterek, Ph.D.
Rok obhajoby práce:	2020
Abstrakt:	Předkládaná bakalářská práce se zabývá vznikem Chladniho obrazců na kovové desce. Cílem práce je teoretické a experimentální studium vlastních frekvencí pro vznik Chladniho obrazců na čtvercové kovové desce pomocí tónového generátoru a reproduktoru. Výstupem je sada frekvencí, při nichž vznikají tyto obrazce s fotodokumentací.
Klíčová slova:	Chladniho obrazce, vlnění, frekvence
Počet stran:	38
Jazyk:	Český

Bibliographical identification:

Author's first name and surname:	Alice Kutnarová
Title:	Natural frequency modes of Chladni patterns
Type of thesis:	Bachelor
Department:	Department of Experimental Physics, Faculty of Science, Palacký University Olomouc, Czech Republic
Supervisor:	Mgr. Lukáš Richterek, Ph.D.
The year of presentation:	2020
Abstract:	The presented bachelor thesis deals with the formation of Chladni patterns on a metal plate. The aim of the thesis is theoretical and experimental study of natural frequencies for the creation of Chladni patterns on a square metal plate using a tone generator and a loudspeaker. The output is a set of frequencies at witch self-oscillations are generated with photo-documentation.
Keywords:	Chladni patterns, waves, frequency
Number of pages:	38
Language:	Czech

OBSAH

ÚVOD **7**

1 TEORETICKÁ ČÁST **9**

1.1 Z HISTORIE 9

1.2 VLNĚNÍ A ZVUK 10

1.3 CHVĚNÍ MECHANICKÝCH SOUSTAV 11

1.4 TENZOR DEFORMACE A NAPĚTÍ 13

1.5 OHYBOVÝ MOMENT A POSOUVACÍ SÍLY 17

1.6 POHYBOVÁ ROVNICE DESKY 18

1.7 OBRAZCE OZVUČNÝCH DESEK 19

2 PRAKTICKÁ ČÁST **22**

2.1 POPIS APARATURY 22

2.2 POSTUP MĚŘENÍ 24

2.3 VÝSLEDKY MĚŘENÍ 25

2.3.1 MĚŘENÍ V LABORATOŘI 26

2.3.2 MĚŘENÍ V DOMÁCÍM PROSTŘEDÍ 31

2.4 URČENÍ MÓDOVÝCH ČÍSEL 33

ZÁVĚR **36**

POUŽITÁ LITERATURA **37**

ÚVOD

Chladniho obrazce jsou zajímavým fyzikálním jevem nejenom pro lidské oko, ale také pro ucho. Jsou zmiňovány v řadě učebnic a patří k repertoáru vděčných školních výukových experimentů z oblasti akustiky. Na základě vytváření těchto obrazců na různě uchycených dřevěných deskách se konstruují hudební nástroje nebo také hudební prostory. Díky tomu má potom hudební nástroj například vyšší nebo naopak hlubší zvuk. Původně se pro vznik Chladniho obrazců třel smyčec o hranu desky, která byla posypána jemným materiálem jako je písek nebo krupice. V dnešní době se pro jejich vznik využívá moderních technologií jako například generátor frekvencí spojený s reproduktorem, na němž je přichycena posypaná deska. Vibrace z reproduktoru se přenesou na desku a na ní se vytvoří obrazec. Chladniho obrazce lze také vytvořit pomocí běžných pomůcek jako jsou kovové desky libovolného tvaru nebo špachtle. Těmito způsoby lze poměrně jednoduše demonstrovat stojaté vlnění na desce.

Hlavním cílem předkládané práce je studium vlastních frekvencí pro vznik Chladniho obrazců na čtvercové kovové desce pomocí tónového generátoru a reproduktoru. Výstupem je sada frekvencí, při nichž vznikají vlastní kmity s výrazným rozmístěním kmiten a uzlů desky s fotodokumentací a videodokumentací. Díky tomu bude možné demonstrační experimenty s Chladniho obrazci snáze zařadit i do výuky např. na PřF UP.

Práce je strukturována do dvou kapitol. V teoretické části je představen pojem vlnění a stojaté vlnění šířící se v jednom směru, jeho vznik a charakteristické veličiny. Dále na základě vlnové rovnice je odvozen vztah pro stojatou vlnu na membráně obdélníkového tvaru. Protože se deska při ohybu namáhá (deformuje, napíná), pak jsou čtenáři představeny pojmy tenzor deformace a napětí, které popisují děje v desce při jejím ohybu. Samozřejmě záleží také na materiálu desky, proto jsou uvedeny pojmy jako Youngův modul pružnosti, hustota materiálu nebo Poissonův poměr. Následně je odvozena pohybová rovnice desky, jejíž řešení lze určit různými metodami výpočtu. Pro kruhovou desku je také zmíněn Chladniho zákon. Uváděny jsou typické Chladniho obrazce vznikající na ozvučných deskách houslí a kytar a použití současných technologií pro převedení obrazců do digitální podoby. Experimentální část je věnována naměřeným datům v laboratoři školních pokusů PřF UP a také v domácím prostředí. Zahrnuje popis sestavení použitých měřících aparatur. První aparatura byla sestavena s bezdrátovým reproduktorem a druhá s obyčejným reproduktorem s papírovou membránou.

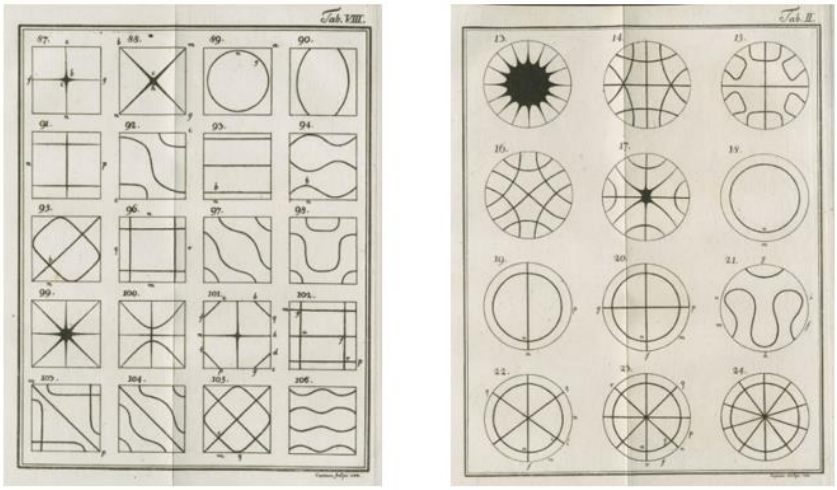
Experimenty byly prováděny na dvou čtvercových kovových deskách a jedné kovové kruhové desce. Vzniklé Chladniho obrazce byly zdokumentovány pomocí fotoaparátu v telefonu. V domácím prostředí byl proveden experiment, kdy se vytvářely obrazce na ozvučných deskách dvou hudebních nástrojů (houslí a kytary), které byly rozeznívány smyčcem. Měření v domácím prostředí také zahrnovalo domácí potřeby a opět houslový smyčec. Toto měření demonstruje vznik obrazců na kovových deskách jiného tvaru a upevnění. Navazující kapitola je věnována určení módových čísel některých obrazců pomocí on-line kalkulátoru, který dané obrazce vymodeloval.

Ráda bych upřímně poděkovala Mgr. Lukáši Richterkovi, Ph.D. za odborné vedení, cenné rady, čas a vstřícnost, které mi věnoval během tvorby práce.

1 TEORETICKÁ ČÁST

1.1 Z historie

Ernst Florens Friedrich Chladni (30. listopadu 1756, Wittenberg – 4. dubna 1827, Vratislav) byl německý fyzik a hudebník. Už od dětských let se zajímal o vědu, avšak jeho otec chtěl, aby se stal právníkem. Až po smrti svého otce v roce 1782 se Chladni pustil do experimentování v oblasti akustiky. Při studiu vibrujících desek navázal na výzkum anglického fyzika Roberta Hooka. Ten prováděl pokusy se skleněnými deskami, které rozechvěl třením smyčce o okraj. Chladni studoval chvění kovových kruhových a pravoúhlých desek, které upevnil v různých bodech. Danou desku lehce posypal pískem a rozezněl ji pomocí smyčce. Písek se usadil v uzlových bodech a tím vznikly obrazce na desce. Tuto techniku popsal ve své knize *Entdeckungen über die Theorie des Klagens* z roku 1787, kde také zmínil, že vibrace desek ještě nejsou matematicky vyřešeny. Při návštěvě Paříže, kde své obrazce předváděl, Napoleon Bonaparte o Chladnim řekl: „Tento muž zviditelnil tóny.“ Samotný Napoleon vypsal odměnu tomu, kdo matematicky objasní tyto vibrace. Bohužel s tehdejší matematikou to bylo obtížné. Dnes se k řešení tohoto problému používají aproximativní metody jako je Ritzova, Rayleighova nebo Southwellův teorém. V současnosti se Chladniho obrazce stále používají při výrobě některých hudebních nástrojů jako jsou housle a kytara nebo při stavbě hudebních prostor. Jde především o to, aby se zvuk co nejlépe šířil buď daným hudebním nástrojem nebo prostorem v místnosti [1, 2].



a) b)

Obrázek 1: Obrazce pozorované E. Chladnim na a) čtvercové desce, b) kruhové desce, převzato z [1]

1.2 Vlnění a zvuk

Mechanické vlnění je harmonický pohyb šířící se prostorem, který dělíme na dva základní druhy – vlnění postupné a stojaté. Dále se postupné vlnění dělí na příčné a podélné. U příčného postupného vlnění hmotné body kmitají kolmo ke směru šíření vlny a u vlnění podélného body kmitají ve směru šíření vlny. Každá vlna je charakterizována několika veličinami.

Podle [6]: „*Mají-li částice bodové řady vlnění stejné fyzikální vlastnosti, šíří se vlnění jistou konstantní rychlostí c, která se nazývá fázová rychlost šíření vlnění. Za periodu T se vlnění rozšíří do vzdálenosti λ, která se nazývá vlnová délka. Platí*

$$\lambda = cT = \frac{c}{f} = \frac{2\pi c}{\omega}. \tag{1}$$

Z uvedeného je zřejmé, že každé dva body, vzdálené od sebe o celý počet vlnových délek, kmitají se stejnou fází.“

Stojaté vlnění zpravidla vzniká při interferenci vln, které se šíří v prostředí opačným směrem, mají stejnou frekvenci a jejich amplitudy jsou stejnou funkcí souřadnic. Jde vlastně o skládání vlny přímé a odražené. Výsledné vlny se potom jeví jako kdyby „stály“ na místě. V nejjednodušším případě dvou harmonických vln, šířících se ve směru osy *x*, jsou výchylky v případě stejných amplitud popsány rovnicemi

$$u_1 = u_\mathrm{m} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right), \tag{2}$$

$$u_2 = u_\mathrm{m} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right), \tag{3}$$

kde *u* je okamžitá výchylka, u_m je amplituda výchylky, čas t a *x* je vzdálenost od počátku soustavy v čase *t*. Okamžitá výchylka výsledného vlnění je pak dána vztahem

$$u = 2u_\mathrm{m} \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t}{T}. \tag{4}$$

Rovnice (4) odpovídá harmonickým kmitům s amplitudou $A(x) = 2u_\mathrm{m} \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}$, která je periodickou funkcí souřadnice *x*. Při stojatém vlnění vznikají tzv. kmitny a uzly. Kmitny jsou části vlny, které kmitají s maximální výchylkou a uzly jsou naopak v klidu. Vzdálenost dvou kmiten nebo dvou uzlů je rovna $\lambda/2$ a vzdálenost mezi kmitnou a uzlem je $\lambda/4$.

Kmitna vzniká pro $x = \pm k\lambda/2$ a uzel vzniká pro $x = \pm (2k + 1)\lambda/4$, kde $k = 0, 1, 2, \ldots$ [3, 4].

Zvuk je podélné mechanické vlnění, které se šíří látkovým prostředím. Zdroje zvuku mohou být různé (lidské hlasivky, hudební nástroje, reproduktory, hromy apod.). Nejjednodušší harmonický průběh má zvuk ladičky. Ta při jejím rozechvění vydá zvuk o přesné frekvenci. Proto se také používá k ladění hudebních nástrojů. Podobně jednoduchý průběh má také zvuk tónového generátoru připojeného k reproduktoru. Výhodou u tónového generátoru je, že umožňuje získat nejenom harmonický průběh, ale i průběh např. obdélníkový nebo trojúhelníkový.

Zvuk s periodickým průběhem je tón. Tóny se rozlišují na jednoduché a složené, kdy rozdíl spočívá v jejich časovém průběhu. Jednoduchý tón má periodický harmonický průběh, zatímco složený tón pouze periodický. Neperiodický zvuk je vnímán jako tzv. hluk, který lze označit např. za šum, skřípání nebo dunění. Další vlastností zvuku je výška. Podílem frekvencí určitého tónu a tzv. referenčního tónu je relativní výška tónu. Referenční tón v hudební akustice má frekvenci 440 Hz a je označován jako komorní a, v technice má frekvenci 1000 Hz. Zdravé lidské ucho je schopno vnímat rozmezí frekvencí od 16 Hz až po 20 kHz [3].

1.3 Chvění mechanických soustav

Se stojatým vlněním je spojen i pojem chvění, které můžeme definovat jako pohyb útvarů, jejichž jednotlivé body konají kmitavý pohyb. Chvění vzniká v pružných tělesech, která jsou nějakým způsobem ohraničena nebo upevněna. Pokud se vlnění šíří prostředím, kde převládá jeden rozměr (např. struna nebo tyč), potom se na jeho konci odrazí a skládá se s vlněním šířícím se v původním směru. Vzniká tak chvění, jehož průběh závisí na upevnění tyče [3].

Při chvění desek dochází ke složitějšímu průběhu vlnění. Pro jeho představu vycházíme z chvění strun. Tenkou čtvercovou desku pomyslně rozdělíme podél jedné strany na tenké proužky zanedbatelné šířky vzhledem k délce hrany celé desky. Každý proužek tak představuje strunu s volnými konci. Jestliže uvažujeme, že všechny tyto struny kmitají se stejnou maximální výchylkou, frekvencí a ve stejné fázi, potom body s totožnou souřadnicí *x* kmitají stejně. Nyní provedeme stejné rozdělení v kolmém směru, čímž zavedeme druhou souřadnici *y*. S takto zavedenými souřadnicemi má výchylka vlny

na ose *x* harmonický průběh a na ose *y* je konstantní. Existují ale i vlny s harmonickou výchylkou na obou souřadných osách zároveň. Abychom dostali výsledný průběh vlny, musíme použít princip superpozice [5].

Podle [6]: *„Pro prostorové vlnění můžeme odvodit obecnou diferenciální rovnici, tzv. vlnovou rovnici, která popisuje všechny druhy prostorového vlnění. Protože je výchylka* $\vec{u} = \vec{u}(x, y, z, t)$ *libovolného bodu prostředí funkcí souřadnic x, y, z, dostaneme vlnovou rovnici podobného tvaru jako rovnice* $\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}$*, která je však rozšířena o druhé parciální derivace výchylky podle y a z, tedy*

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}.\text{“} \tag{5}$$

Vlnovou rovnici lze zapsat také pomocí Laplaceova operátoru ve tvaru

$$\nabla^2 u = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}. \tag{6}$$

Jde o hyperbolickou parciální diferenciální rovnici druhého řádu. Řešení takové rovnice je složitější, protože v prostoru se může šířit velké množství vln, jejichž body kmitají s různými fázemi. Proto se tato rovnice řeší v každém případě zvlášť. Musíme ovšem brát v úvahu i okrajové podmínky a vlastnosti zdroje vlnění. Obecné typy okrajových podmínek jsou a) volný okraj, b) vetknutý okraj, c) podepřený okraj [6].

Při odvození stojaté vlny na obdelníkové membráně vyjdeme z vlnové rovnice. Předpokládejme, že módy chvění mají harmonický tvar $u(x, y, t) = U(x, y)\cos\omega t$. Dostaneme Helmholtzovu rovnici [16]

$$\Delta U + \frac{\omega^2}{c^2}U = 0. \tag{7}$$

Řešení rovnice (7) můžeme určit, pouze když známe okrajové podmínky. Uvažujme tedy obdélníkovou membránu s rozměry $a \times b$ s pevnými okraji. Platí $U(0, y) = U(a, y) = 0$ a $U(x, 0) = U(x, b) = 0$. Hledáme řešení ve tvaru $U = X(x)\,Y(y)$. Rovnice potom přechází do tvaru

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{\omega^2}{c^2} = 0. \tag{8}$$

První člen je funkcí pouze x a druhý člen je funkcí y. Abychom rovnici (8) splnili, pak musíme první dva členy v rovnici nahradit konstantou. Tak dostaneme soustavu diferenciálních rovnic.

$$\frac{X''}{X} = -k_1^2, \quad \frac{Y''}{Y} = -k_2^2, \quad \text{kde} \quad k_1^2 + k_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \tag{9}$$

Řešení těchto diferenciálních rovnic jsou harmonická a mají tvar $X = A_1 \sin k_1 x$, kde $k_1 a = m\pi$ a $Y = A_2 \sin k_2 x$, kde $k_2 b = n\pi$; m, n jsou libovolná přirozená čísla. Výsledný tvar stojaté vlny na membráně tvaru obdélníka je

$$u_{mn} = A \sin\frac{\pi m x}{a} \sin\frac{\pi n y}{b} \cos\omega_{mn} t. \tag{10}$$

Uzlové čáry na takové membráně jsou úsečky popsané vztahy

$$x = \frac{q_1 a}{m}, \qquad y = \frac{q_2 b}{n}, \tag{11}$$

kde $q_1 = 1, 2, \ldots, m-1$ a $q_2 = 1, 2, \ldots, n-1$. Pro frekvence chvění obdelníkové membrány s pevnými okraji platí vztah [16]

$$f_{mn} = \frac{1}{2\pi}\omega_{mn} = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}. \tag{12}$$

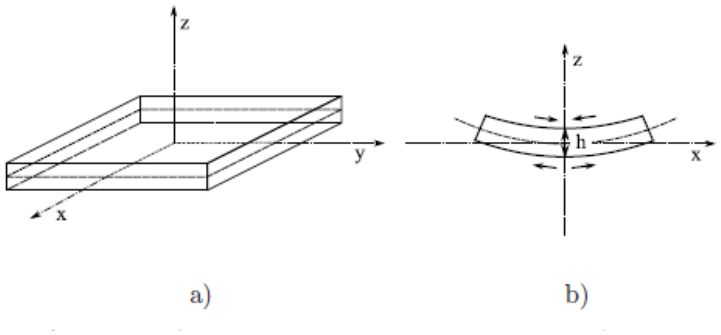
Dvojice čísel (m, n) určují jednotlivé módy chvění membrány. Pro každou dvojici takových čísel existuje rozdílný obraz stojaté vlny na membráně.

U čtvercových desek může nastat situace, kdy některé módy jsou tzv. degenerované. To znamená, že při jedné frekvenci deska může kmitat různými módy. Při těchto módech se na desce vytvoří dva vzájemně pootočené obrazce o 90° nebo jejich libovolná kombinace. V případě čtvercové desky o rozměrech $a \times a$ budou např. módy (1, 8) a (8, 1) kmitat se stejnou frekvencí $f_{18} = f_{81} = \sqrt{65/4}\,c/a$ podle vztahu (12). Degenerace módů nastává pouze u desek, které mají soudělné rozměry [16].

1.4 Tenzor deformace a napětí

Kmity desek a membrán se z teoretického hlediska zabývá mechanika kontinua, kde za tímto účelem zavádíme některé další veličiny. Při ohybu se deska deformuje tak, že její vrstvy se buď napínají, nebo jsou stlačovány k sobě. To znamená, že se mění vzdálenosti

mezi jednotlivými částicemi kontinua. Představme si desku o tloušťce *h* se středem v počátku souřadnicového systému (*x, y, z*) podle obrázku 2.



Obrázek 2: a) Deska umístěná v souřadnicovém systému, b) ohyb desky, převzato z [7]

Pokud dojde k ohybu, potom jediná vrstva desky, která se nedeformuje, je v jejím středu. Jedná se o rovinu (*x*, *y*). Tato rovina se také nazývá neutrální nebo střednicová. Pro pohyb bodů v neutrální rovině platí, že se přemisťují pouze ve směru osy *z* [7].

Podle Gustava Roberta Kirchhoffa je řešení ohybu tenkých desek založeno na několika předpokladech [11]:

1. Střednicová rovina je minimálně deformována.
2. Normálová napětí σ_z jsou vzhledem k napětí σ_x a σ_y malá a zanedbávají se.
3. Ve střednicové rovině jsou nulová normálová napětí.

Pro představu výpočtu tenzoru deformace, uvádíme následující citaci ze zdroje [8]: *„Představme si v kontinuu nějaký bod P charakterizovaný polohovým vektorem o složkách* x_i*; v jeho blízkosti nechť se nachází jiný bod Q, jehož poloha bude charakterizována polohovým vektorem o složkách* $x_i + \mathrm{d}x_i$*. Předpokládejme dále, že vlivem působení sil přejde bod P do nové polohy P' určené vektorem o složkách* y_i *a podobně bod Q přejde do nové polohy Q' charakterizované polohovým vektorem o složkách* $y_i + \mathrm{d}y_i$*. Změna polohy bodu P je určena vektorem posunutí o složkách* u_i*.*

Protože u_i *je funkcí souřadnic bodu P, což zkráceně zapíšeme* $u_i = u_i(x)$*, můžeme pro posunutí bodu Q přibližně psát*

$$u_i(x + \mathrm{d}x) = u_i(x) + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j = u_i + \mathrm{d}u_i.\text{“} \qquad (13)$$

Tenzor deformace je potom popsán rovnicí

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right), \tag{14}$$

kde $i, j = 1, 2, 3$ a $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$. Protože ale hodnoty posunutí i hodnoty jejich derivací můžeme považovat za velmi malé, rovnice (14) přejde do tvaru

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \tag{15}$$

který se nazývá tenzor malé deformace [8].

Pro složky tenzoru napětí σ platí, že jsou lineární kombinací složek tenzoru deformace. Vztah mezi těmito dvěma veličinami při pružné deformaci popisuje Hookův zákon ve tvaru

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \tag{16}$$

kde C_{ijkl} jsou tzv. elastické koeficienty, které vyjadřují vlastnosti použitého materiálu. Protože složky ε_{kl} a σ_{ij} jsou složkami tenzoru, potom také elastické koeficienty musí být složkami tenzoru. Obecně má tenzor C_{ijkl} $3^4 = 81$ složek.

Pokud se jedná o izotropní těleso, pak se počet složek elastických koeficientů zredukuje na dva, tzv. Laméovy koeficienty λ a μ. Tyto koeficienty lze vyjádřit pomocí Youngova modulu pružnosti E a Poissonova poměru ν, který je definován jako poměr příčného zkrácení k relativnímu prodloužení.

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \qquad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \tag{17}$$

Hookův zákon pro izotropní těleso vyjádřený pomocí Laméových koeficientů bude ve tvaru

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\vartheta + 2\mu\varepsilon_{kl}, \tag{18}$$

kde $\vartheta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$ je první invariant tenzoru malých deformací a δ_{ij} je Kroneckerův symbol. Tato rovnice se také nazývá zobecněný Hookův zákon. Dosazením λ a μ do rovnice (18) vyjádříme složky tenzoru napětí jako [7–9]

$$\sigma_{ij} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\delta_{ij}\vartheta + \frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_{ij}. \tag{19}$$

Jak jsme již zmínili, deska se deformuje nejvíce v rovině (x, y). Proto všechny složky tenzoru napětí s indexem z budou rovny nule. Díky této skutečnosti a vztahu (19) můžeme pro některé složky tenzoru deformace psát

$$\varepsilon_{xz} = 0, \qquad \varepsilon_{yz} = 0. \tag{20}$$

Poněvadž je tenzor deformace symetrický, pak i složky $\varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = 0$.

Díky podmínkám (20) můžeme posunutí vyjádřit pomocí výchylky pouze v jednom směru, např. osy z (tedy $u_z = u$) a dále pomocí vztahů (15) a (19). Pro výchylku tedy píšeme

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{21}$$

Po integraci podle z získáme vztah

$$u_x = -z\frac{\partial u}{\partial x} + C, \tag{22}$$

kde C je integrační konstanta, která se podle okrajových podmínek rovná nule. Stejným způsobem vypočítáme i výchylku ve směru osy y. Dopočítáme zbylé složky tenzoru deformace a vyjádříme jeho výsledný tvar

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} -z\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & -z\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & 0 \\ -z\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & -z\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & 0 \\ 0 & 0 & z\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Složku ε_{zz} vypočítáme z podmínky $\sigma_{zz} = 0$. Při derivaci nezáleží na pořadí derivování, proto lze zaměnit pořadí parciálních derivací. Pro $\vartheta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$ potom platí

$$\vartheta = -\frac{(2\nu-1)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)z}{(\nu-1)}. \tag{24}$$

Podle vztahu (19) určíme i tentor napětí

$$\sigma = -z\frac{E}{1+\nu}\begin{pmatrix} \frac{1}{1-\nu}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \frac{1}{1-\nu}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Složky napětí σ_{xx}, σ_{yy} odpovídají ohybovým účinkům, zatímco složky σ_{xz} a σ_{yz} odpovídají smykovým účinkům. Složka σ_{xy} odpovídá kroutícím účinkům [7, 9, 12].

1.5 Ohybový moment a posouvací síly

Dalším důležitým aspektem pro výslednou pohybovou rovnici desky je ohybový moment a posouvací síly. Výslednice normálového napětí, která je integrovaná po výšce desky, se nazývá ohybový moment *M*. Jednotlivé vztahy pro složky ohybových momentů vztažených na jednotku délky jsou ve tvaru

$$\begin{aligned} m_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx}\, z\, \mathrm{d}z = -D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \\ m_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy}\, z\, \mathrm{d}z = -D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right), \\ m_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy}\, z\, \mathrm{d}z = -D(1-\nu)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \tag{26}$$

kde D se nazývá ohybová desková tuhost, která je dána vztahem

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \tag{27}$$

Podle [12] platí:

$$\sigma_{xz} = \frac{E}{2(1-\nu^2)}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - z^2\right]\frac{\partial \Delta u}{\partial x} \tag{28}$$

$$\sigma_{yz} = \frac{E}{2(1-\nu^2)}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - z^2\right]\frac{\partial \Delta u}{\partial y},$$

kde Δu je změna svislé deformace po výšce průřezu.

Stejně jako u ohybových momentů můžeme určit vztahy pro posouvací síly Q pro případ lineárně pružného izotropního materiálu jako [12, 13]

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz}\,\mathrm{d}z = -D\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}\right), \tag{29}$$

$$Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz}\,\mathrm{d}z = -D\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}\right).$$

1.6 Pohybová rovnice desky

Rovnici pro kmity desky lze získat odvozením na základě podmínek rovnováhy na diferenciálním elementu desky. Uveďme rovnici platnou pro desku z izotropního materiálu.

Uvažujme element desky o rozměrech d*x*, d*y*, tloušťce *h* a hustotě ρ. Podle [11] platí: *„Ohybové momenty M_x, M_y jsou vztaženy na délkovou jednotku a jsou způsobeny napětími σ_x a σ_y. M_{xy}, M_{yx} jsou torsní momenty smykových napětí σ_{xy}, σ_{yx}. Posouvající síly Q_x, Q_y jsou rovněž vztaženy na jednotku délky. Pohybová rovnice elementu je*

$$\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y}. \tag{30}$$

Dvě momentové rovnice rovnováhy jsou

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0, \tag{31}$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x = 0.“$$

Ze soustavy rovnic (26), (27), (30) a (31) získáme pohybovou rovnici desky ve tvaru

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = -\frac{\rho h}{D}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{32}$$

nebo jinak

$$\nabla^2 \nabla^2 u = -\frac{\rho h}{D}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{33}$$

kde *t* je čas a ∇^2 je Laplaceův operátor. Metody přibližného výpočtu rovnice (33) jsou např. Ritzova metoda nebo metoda sítí [11].

Podle [16]: *„Disperzní relace má tvar* $\omega = Ak^2$*, kde A je materiálová konstanta, takže fázová a grupová rychlost příčných vln na tuhé desce jsou* $c = Ak$ *a* $v = 2Ak = 2c$*. Grupová rychlost má stejný směr jako fázová rychlost, ale je dvakrát vyšší než rychlost fázová. Obě rychlosti však závisejí na délce vlny.*

Pro pevný kloubový obvod obdelníkové desky $a \times b$ *vychází pro frekvence vlastních kmitů desky vzorec*

$$\omega_{mn} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho(1-\nu^2)}}, \tag{34}$$

který je analogický vzorci pro chvění membrány. Zde m *a* n *jsou opět módová čísla 1, 2, 3, … V případě jiného upevnění desky se vzorec stává mnohem komplikovanějším, podobně jako tomu bylo u tuhé tyče.“*

Pro frekvence módů vibrací kruhové desky podepřené ve středu platí tzv. Chladniho zákon, který je ve tvaru

$$f = C(m + 2n)^p, \tag{35}$$

kde C a p jsou konstanty, které závisí na vlastnostech desky [14].

Pro znázornění obrazců podle jednotlivých módů jsou na internetu dostupné on-line generátory. Umožňují zobrazení obrazců jak na čtvercové desce, tak i na kruhové. Zde je odkaz na jeden z nich: https://demonstrations.wolfram.com/ChladniFigures/.

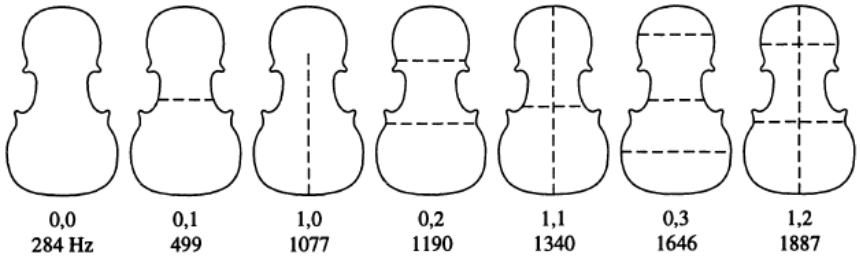
Je zřejmé, že teoretický popis na úrovni středoškolské matematiky i v rámci základního kurzu fyziky na VŠ je značně komplikovaný, proto se ve druhé kapitole soustřeďujeme na experimentální měření reálných desek.

1.7 Obrazce ozvučných desek

Princip vzniku Chladniho obrazců je dnes využíván při výrobě hudebních nástrojů. Zákonitosti kmitání desek se využívají nejenom k výběru vhodného materiálu na výrobu hudebního nástroje, ale také k jejich tvarování.

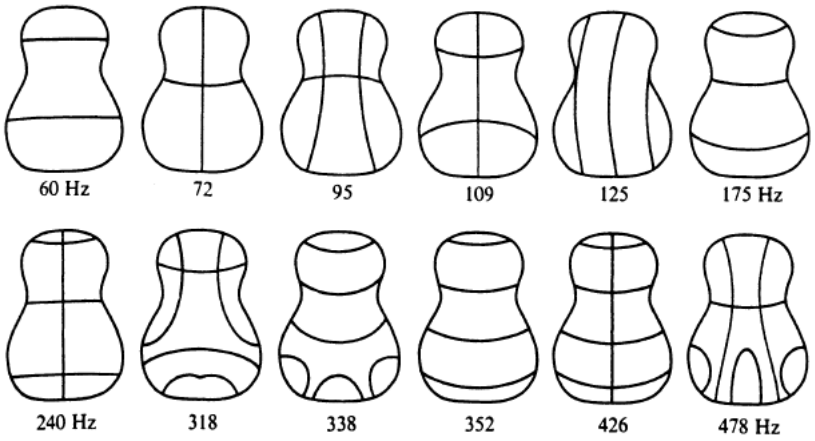
Houslové desky jsou složitějšího tvaru („vykrojené“ a prohnuté) a mají mnoho vibrujících módů. Chladniho obrazce se zpravidla vytváří na desce ve tvaru houslí, která je ale rovná. Je to takový „průřez“ tělem houslí. Také se studují případy, kdy okraje desky jsou upnuté nebo volné. Nejlépe studovanými módy jsou ty s nejnižší frekvencí a jsou

užitečné pro tvarování desek a celkovou konstrukci houslí. Například po obvodu houslí je vyříznuta malá drážka (anglicky nazývaná purfling), která slouží k lepšímu vibrování desek. Ty půdobí jako by byly na okraji spíše zavěšené než upnuté. Pro lepší přenos nižších frekvencí na horní desku houslí je pod strunou g umístěn basový trámec. Naopak pro přenos vysokých frekvencí na desku spodní je pod strunou e umístěná tzv. duše (dřevěný špalíček), která spojuje obě desky.



Obrázek 3: Prvních sedm módů vzduchové dutiny houslí, převzato z [14]

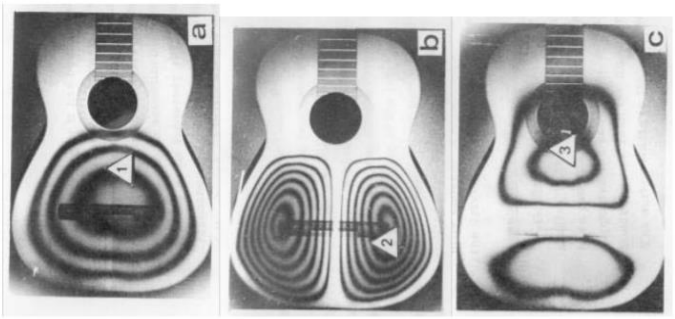
U kytar desky také vibrují mnoha způsoby. Při nízkých frekvencích se módy podobají módům na obdelníkové desce. Jejich tvar a frekvence závisí na okrajových podmínkách a na výztuhách umístěných uvnitř kytary. Tvar obrazců se výrazně změní, pokud bude okraj volný, nebo naopak upnutý či zavěšený. Zatímco menší změna nastane při přidání nebo posunutí výztuh v kytaře.



Obrázek 4: Módy kytarové desky bez výztuh a s volným okrajem, převzato z [14]

Chladniho obrazce se rovněž využívají u dalších hudebních nástrojů jako např. u bicích nástrojů, kde jsou používány bubny s membránou, která má upnutý okraj, nebo u klavírů a varhan.

Dříve se pro znázornění obrazců používal písek na desce hudebního nástroje, která byla rozpohybována smyčcem. V dnešní době se současnými technologiemi se spíše využívá tzv. holografická interferometrie. Je to optická měřící metoda, která má využití v mnoha oblastech fyziky. Pro měření je využíván laser s dostatečnou koherenční délkou, děliče svazku, prostorové filtry (k filtrování svazku), kolimační objektivy, rovinná zrcadla a kamery pro záznam hologramu. Metoda je založena na interferenci dvou vlnění, která původně neexistovala ve stejném čase (je tzv. dvoukroková). Nejprve kamera zaznamená hologram původního stavu tělesa, následně je těleso rozvibrováno (změní se jeho stav) a dojde ke změně fáze. Prvotní hologram je přenesen na deformovaný objekt, čímž se překryjí oba obrazy, a tam, kde došlo ke změně, se vytvoří interferenční obraz (interferogram). Interferenční proužky na interferogramu znázorňují pohyb povrchu (kmitny). Výhoda této metody spočívá v zobrazení změny interferenčních paprsků v reálném čase [10, 14].



Obrázek 5: Vrchní deska kytary zachycená holografickou interferometrií, převzato z [15]

2 PRAKTICKÁ ČÁST

Cílem praktické části bylo zjistit frekvence, při kterých vznikaly Chladniho obrazce. Praktická část práce je rozdělena dle způsobu měření. Nejdříve jsme prováděli měření pomocí dvou aparatur na konkrétních deskách čtvercového tvaru v laboratoři školních pokusů PřF UP a „chytrého“ telefonu s aplikací pro generování frekvencí. Další experiment v laboratoři byl proveden na konkrétní kruhové desce a jako doplňující byla provedena měření v domácím prostředí s využitím houslového smyčce, abychom si ověřili možnost, zda lze při dosažení určitých frekvencí získat Chladniho obrazce i tímto „původním“ způsobem.

Prvotní myšlenka, jak vytvořit Chladniho obrazce, byla přikládat bezdrátový reproduktor ze spodu desky. Nejprve jsme desku rozezněli smyčcem a pomocí aplikace v telefonu jsme zaznamenali spektrum frekvencí. Nejvýraznější hodnoty ze spektra jsme potom využili pro měření s reproduktorem. Praktické měření však prokázalo, že vibrace z reproduktoru se na desku nepřenášejí v takové míře, aby se na desce vytvořil obrazec. Z toho důvodu se od původní myšlenky upustilo a upřednostnil se nový způsob měření pomocí aparatur popsaných v části 2.1.

K sestavení aparatur jsme využili bezdrátový reproduktor[1], obyčejný reproduktor[2] s papírovou membránou, zesilovač z běžného reproduktoru k PC, zmiňované desky z laboratoře školních pokusů PřF UP, propojovací kabely, kabel s konektory 3,5 mm jack na obou koncích a běžně dostupné pomůcky jako polystyrenové koule, nůž, tavná pistole a lepicí guma. Inspiraci pro sestavení aparatur jsme čerpali z webových stránek: https://www.spsnational.org/programs/outreach/chladni-plates-speaker.

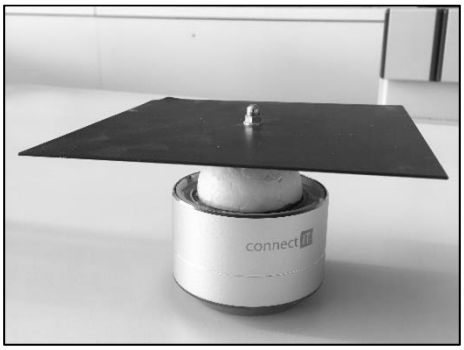
2.1 Popis aparatury

První konstrukci tvořil bezdrátový reproduktor, na jehož membránu jsme po odstranění kovového krytu pomocí tavné pistole upevnili půlku polystyrenové koule o průměru cca 3 cm. Menší čtvercovou desku z černé lakované oceli o hraně $a = 140$ mm

[1] Bezdrátový reproduktor značky connectIT® model CI-1227.

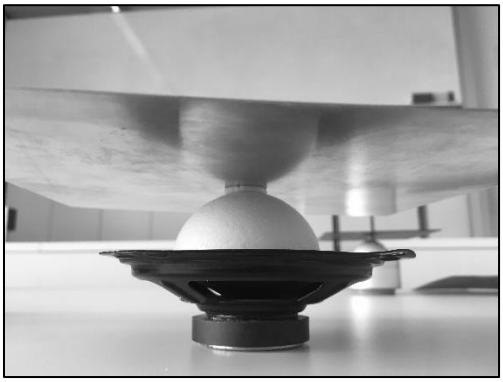
[2] Reproduktor s označením YD103-01F, odpor 8 Ω, výkon 2 W.

a tloušťce $h = 1{,}3$ mm jsme shora zapíchli do polystyrenu a následně přilepili tavnou pistolí. Pomocí rozhraní Bluetooth došlo k připojení mezi reproduktorem a telefonem značky Apple s nainstalovanou aplikací Audio Function Generator, jejíž funkce byly vyhovující pro měření. Nebylo tak nutné používat speciální tónový generátor nebo vibrátor typu: https://www.ucebnipomucky.net/p/elektromechanicky-vibrator. Aplikace je volně dostupná z webových stránek: https://apps.apple.com/us/app/audio-function-generator/id768229610.



Obrázek 6: Konstrukce s bezdrátovým reproduktorem a menší deskou

Druhá aparatura byla sestrojena obdobně. Namísto bezdrátového reproduktoru jsme použili obyčejný reproduktor a čtvercovou mosaznou desku s délkou hrany $a = 200$ mm a tloušťkou $h = 0{,}5$ mm připevněnou k polystyrenu pomocí lepicí gumy. V tomto případě došlo k propojení reproduktoru s telefonem přes zesilovač reproduktoru. Propojovacími kabely jsme spojili reproduktor se zesilovačem a ten jsme připojili pomocí konektoru 3,5 mm jack k telefonu. Pro zobrazování obrazců jsme vyzkoušeli dva sypké materiály, a to pšeničnou krupici a kuchyňskou sůl.



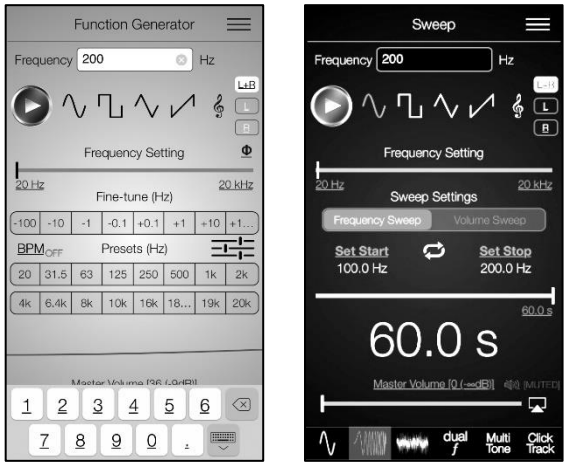
Obrázek 7: Obyčejný reproduktor s větší deskou

Důvodem pro zhotovení druhé měřící soustavy byly výsledky měření provedených první měřící soustavou. Při používání bezdrátového reproduktoru s menší silnější deskou jsme naměřili pouze několik hodnot frekvencí, při kterých vznikaly základní jednoduché obrazce. Důvodem mohla být zvolená malá deska z demonstrační sady a její ohnutý roh, který měření též mohl ovlivnit, nebo špatné nalepení polystyrenu na okraj membrány. Z tohoto důvodu jsme přistoupili k sestavení druhé aparatury, abychom získali složitější Chladniho obrazce.

2.2 Postup měření

Před samotným měřením frekvencí jsme vždy nejprve vyvážili desku pomocí vodováhy, aby byla vodorovná. V případě nerovností jsme papírem podložili reproduktor, ke kterému se následně připojil telefon. Na desku jsme nasypali pšeničnou krupici nebo kuchyňskou sůl. Pomocí nainstalované telefonní aplikace Audio Function Generator a její funkce „Frequency sweep“ jsme nejdříve proměřovali spektrum frekvencí od 0–100 Hz, 100–200 Hz vzestupně až do hodnoty 1000 Hz. Každý úsek se měřil po dobu 60 vteřin. Při tomto měření jsme prováděli záznamy hodnot frekvencí, kdy se na povrchu desky rozpohybovala krupice nebo sůl a následně se vrátili k poznamenaným hodnotám a proměřovali užší intervaly frekvencí. Potom proběhlo pozorování, při které frekvenci se obrazce tvoří nejlépe. Tímto způsobem jsme určili všechny výsledné naměřené hodnoty u obou aparatur.

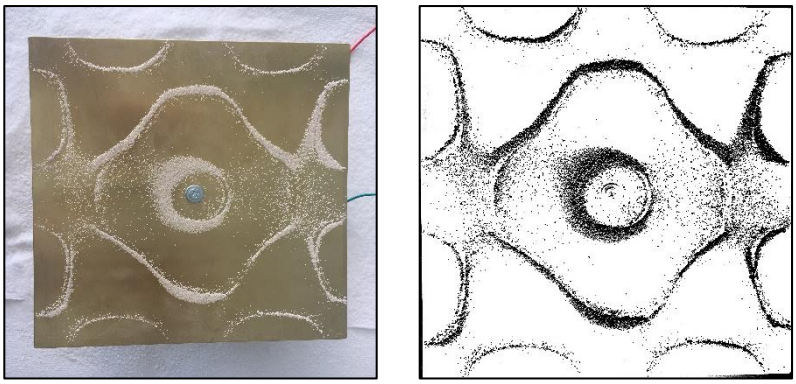
Měření jsme nejprve prováděli s pšeničnou krupicí. Při praktickém měření a pozorování jsme ovšem zjistili, že její jemnější struktura zanechává prachové částice, které v některých případech měření rušili vzor obrazců, což bylo více znatelné na černé desce. Při použití kuchyňské soli na černé desce byly obrazce patrnější.



Obrázek 8: Aplikace Audio Function Generator s funkcí generování frekvencí (vlevo) a „Frequency sweep“ (vpravo)

2.3 Výsledky měření

Vzniklé obrazce na deskách jsme dokumentovali pomocí telefonu. Získané snímky pak pomocí programu Zoner Photo Studio X upravili v počítači tak, aby uzlové čáry byly co nejzřetelnější. Toho jsme docílili snížením jasu, a naopak zvýšením kontrastu. Následným převedením fotografie na negativ a zobrazením pouze v odstínech šedé barvy. Pomocí opětovné úpravy jasu a kontrastu (popř. bílého a černého bodu), bylo dosaženo zvýšené viditelnosti obrazců. Oříznutím fotografie byly odstraněny nežádoucí plochy a zůstala tak zobrazena pouze deska s obrazcem. Příklad originální a upravené fotografie je uveden na obrázku 9.

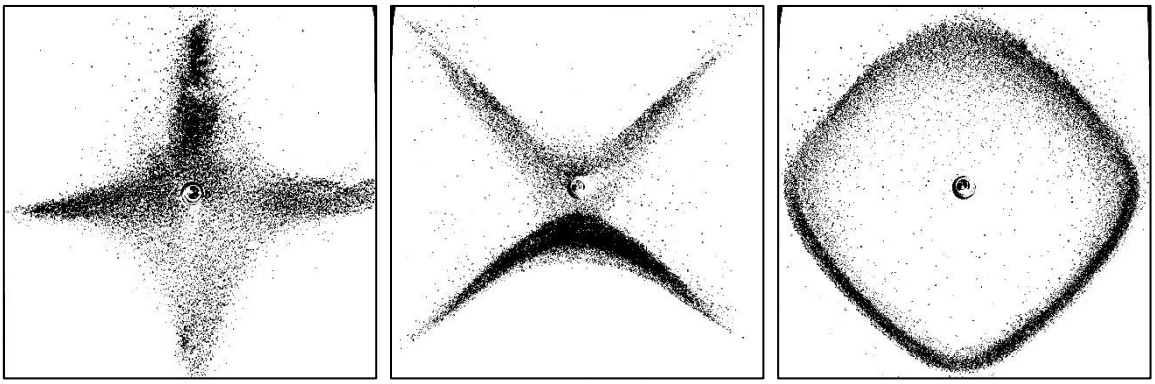


Obrázek 9: Originální fotografie obrazce (vlevo) a upravená fotografie obrazce (vpravo)

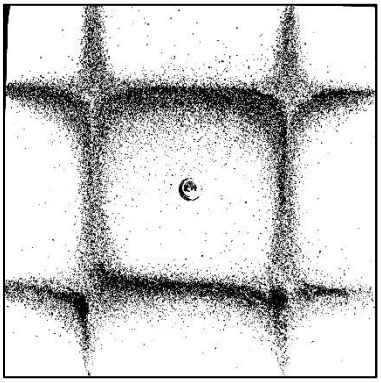
2.3.1 Měření v laboratoři

Při měření s bezdrátovým reproduktorem a černou čtvercovou deskou, jsme naměřili pouze čtyři frekvence, při nichž obrazce vznikaly. Tyto naměřené obrazce i s frekvencemi zobrazuje obrázek 10.

V některých případech, kdy jsme experimentálně zjišťovali vlastní frekvence, při nichž se vytvářejí Chladniho obrazce, byla pozorována změna amplitudy kmiten i při rozdílu několika desetin hertze. Snažili jsme se tedy určit hodnotu vlastní frekvence tehdy, kdy byl obrazec nejzřetelnější.



a) 168,6 Hz b) 238,9 Hz c) 333,5 Hz



d) 779,3 Hz

Obrázek 10: Obrazce na černé čtvercové desce

Na obrázku 10 si můžeme povšimnout, že některé obrazce našeho měření se shodují s obrazci zjištěné přímo Chladnim, které uvádíme v teoretické části na obrázku 1. Jedná se o obrazce 10a, 10b a 10d.

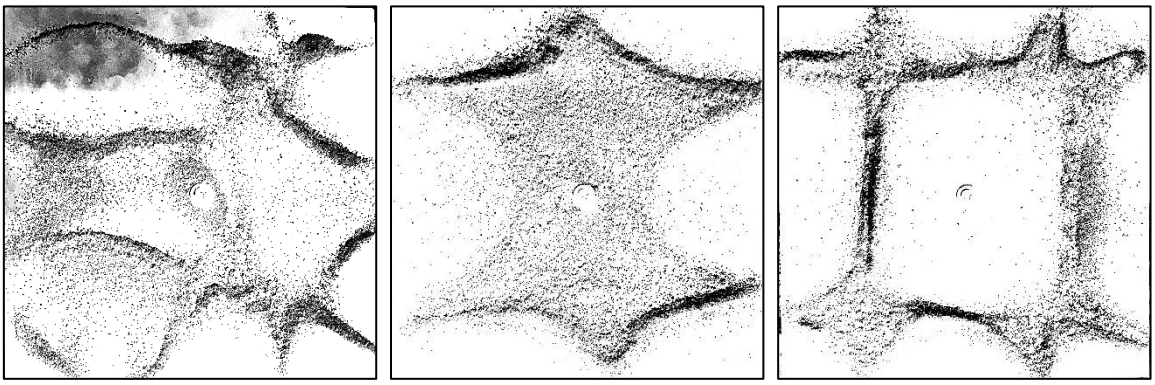
Měření s mosaznou deskou bylo podstatně úspěšnější. Díky větší velikosti desky se nám zobrazovalo více obrazců než na desce černé a také byly více složité. Polystyren byl

umístěn na membráně reproduktoru blíže k jeho středu, docházelo tedy k lepšímu přenosu vibrací na desku.

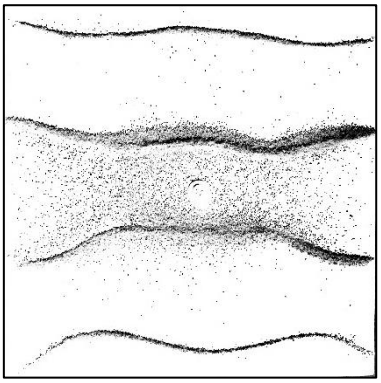
Obrázek 11: Umístění polystyrenu na membráně obyčejného reproduktoru

Celkem jsme naměřili 20 hodnot vlastních frekvencí. Hodnoty naměřených frekvencí, při nichž vznikaly zřetelné obrazce, nepřesáhly hodnotu 1 kHz. Při experimentech s hodnotami vyššími než 1000 Hz se už neprojevovaly výrazné změny na povrchu desky.

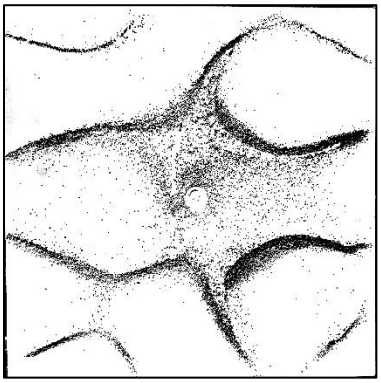
V případě měření s mosaznou deskou jsme dokázali experimentálně najít pouze jeden obrazec shodný s obrazcem E. Chladniho a tím je obrazec 12c, který se vytvořil i na menší ocelové desce.



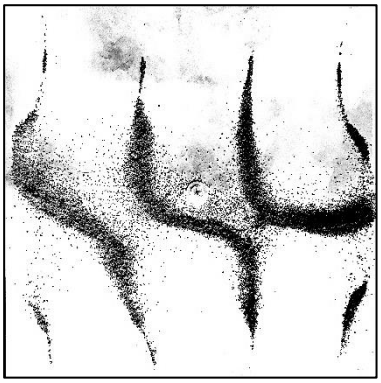
a) 91,9 Hz b) 145,5 Hz c) 156 Hz



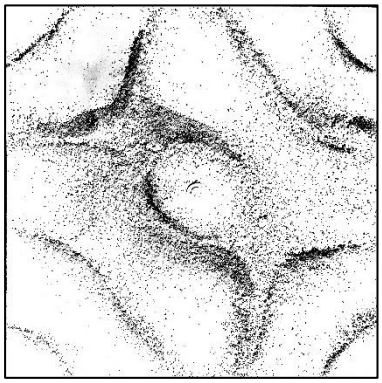
d) 243,5 Hz



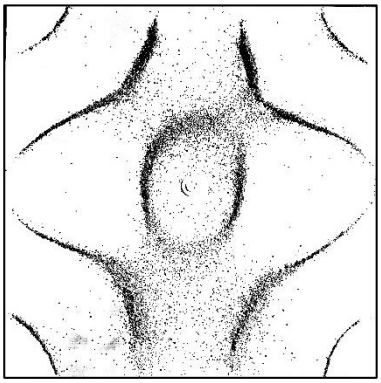
e) 280,3 Hz



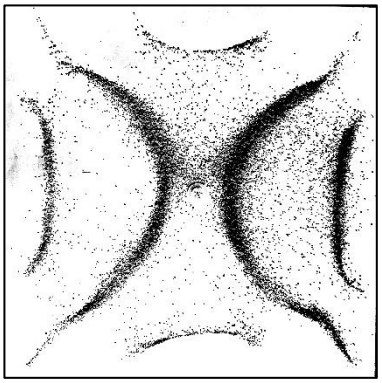
f) 300,3 Hz



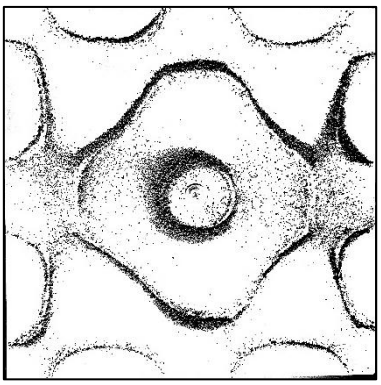
g) 328,9 Hz



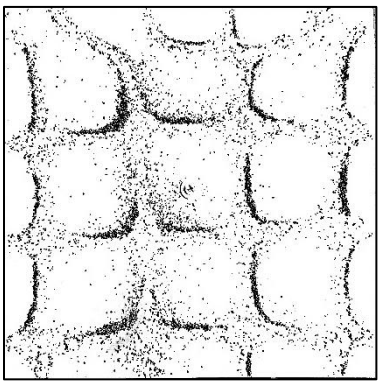
h) 336,5 Hz



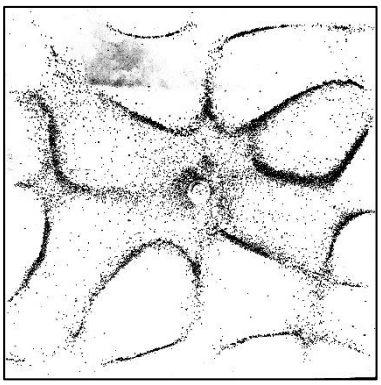
i) 358,9 Hz



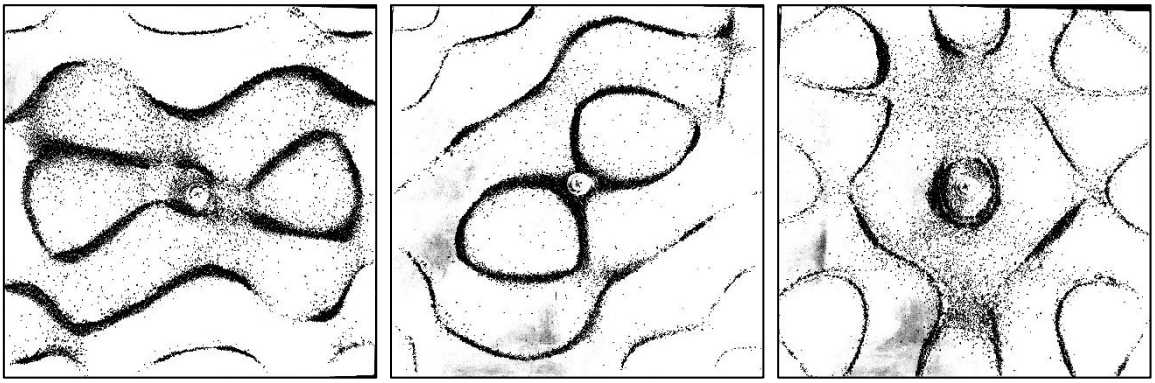
j) 553,2 Hz



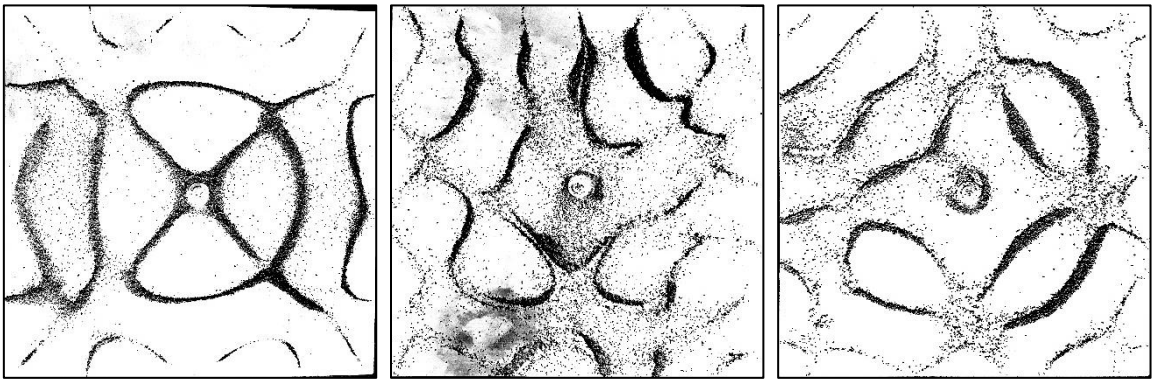
k) 595,2 Hz



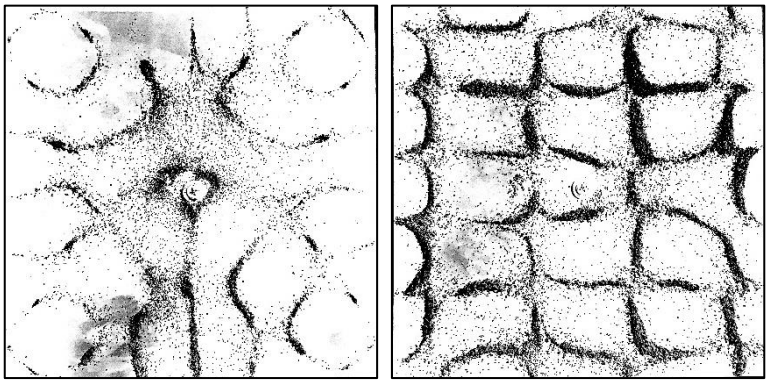
l) 615,6 Hz



m) 631,5 Hz n) 648,8 Hz o) 699,5 Hz



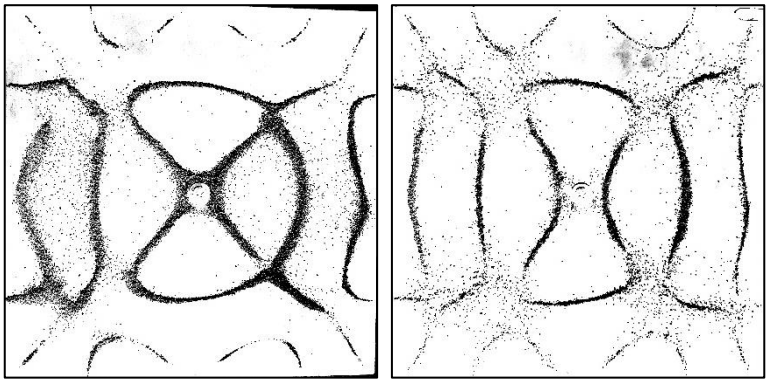
p) 725,6 Hz q) 886 Hz r) 916,1 Hz



s) 924,4 Hz t) 981 Hz

Obrázek 12: Obrazce na mosazné čtvercové desce

Jeden z výsledných obrazců jsme podrobili experimentu, kdy k jednomu rohu desky (pravý horní roh) byla připnuta kancelářská sponka. Pokus jsme realizovali u jedné frekvence (725,6 Hz) a pozorovali, do jaké míry se obrazec změní.

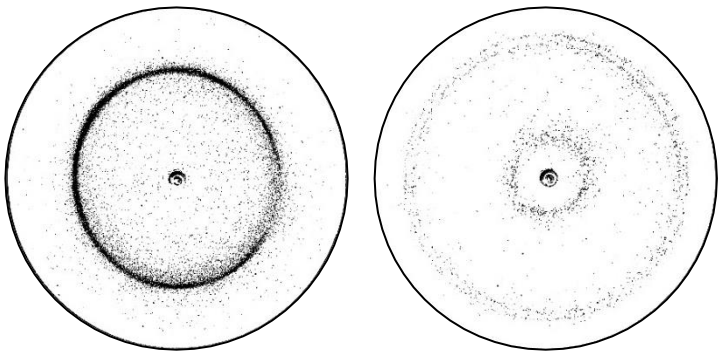


a) b)

Obrázek 13: a) původní obrazec, b) deformovaný obrazec

Na obrázku 13 můžeme vidět změnu, která nastala především na pravé části desky. Z původního obrazce se stal symetričtější útvar.

Další experiment tvorby obrazců jsme prováděli na desce jiného tvaru. V laboratoři školních pokusů PřF UP byla k dispozici i černá ocelová kruhová deska z demonstrační sady. Tu jsme opět připevnili k polystyrenové polokouli na reproduktoru, jako tomu bylo u druhé aparatury. Využili jsme tedy obyčejný reproduktor a postupovali při měření shodným způsobem. Na kruhové desce bylo zajímavé pozorovat frekvence v rozsahu 200–225 Hz. V tomto intervalu frekvencí se na desce zobrazilo hned několik obrazců. Nejlépe byly viditelné při použití aplikace v telefonu s funkcí *Frequency sweep* a opět jsme během 60 vteřin proměřili toto spektrum hodnot. Celý proces jsme zaznamenali na video: https://www.youtube.com/watch?v=4R6d13oPzE0. Změna obrazců byla, díky velmi blízkým frekvencím, tak rychlá, že se nám nepodařilo věrohodným způsobem zdokumentovat jednotlivé obrazce. Krupice se velmi rychle dostávala z povrchu desky pryč, a proto se nepodařilo obrazce zachytit. Na kruhové desce jsme tedy dokázali naměřit pouze dvě frekvence.



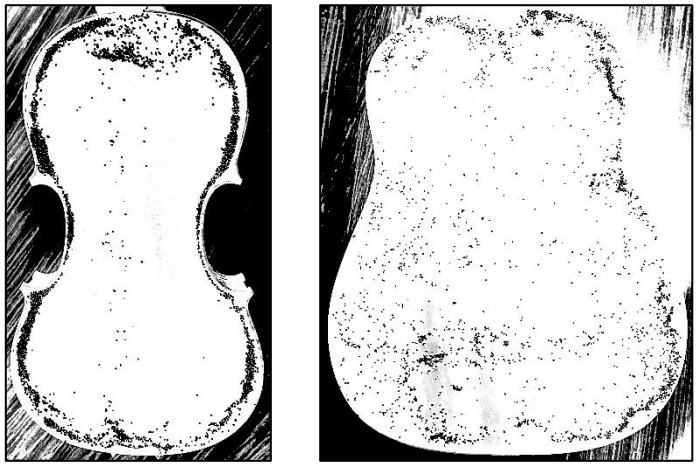
a) 216,1 Hz b) 785,2 Hz

Obrázek 14: Obrazce na černé kruhové desce

2.3.2 Měření v domácím prostředí

Na základě teorie, kterou jsme již zmiňovali v kapitole 1.7, která popisuje využití Chladniho obrazců při výrobě hudebních nástrojů, jsme v domácím prostředí provedli pokusy s houslemi velikosti 4/4 a klasickou kytarou. Pro měření jsme zvolili vzhledem k tmavé barvě laku obou hudebních nástrojů jako posypový materiál pšeničnou krupici, sůl nebo kuskus. Měření bylo prováděno pouze na spodní desce nástroje, protože na vrchních deskách by částice posypového materiálu mohly padat dovnitř nástroje, čemuž jsme se snažili předejít. V konečném důsledku se nejvíce osvědčil kuskus, který byl vzhledem k lakovaným povrchům nejzřetelnější.

První problém při experimentu bylo uchycení nástroje. S pomocí další osoby, která nástroj držela tak, aby byl ve vzduchu a zároveň se dotýkala co nejmenší plochy, jsme rozeznívali struny na nástroji smyčcem. U houslí se materiál na povrchu desky nejvíce pohyboval při frekvenci 440 Hz. U kytary tomu tak bylo při frekvenci 165 Hz. Jediným jevem, co jsme mohli pozorovat byl přesun sypkého materiálu na okraj desky, kde se shlukoval po jeho celém obvodu. Nepatrné obrazce čar i na dalších částech se během pár vteřin rozprostřely do okrajů desek. Tyto neúspěšné výsledky připisujeme především problému uchycení, jeho vodorovnosti a pevnosti a další významný rozdíl je, že se jednalo o zhotovené hudební nástroje jejichž desky jsou prohnuté. Domníváme se, že to byly důvody, proč se obrazce nevytvářely.



a) b)

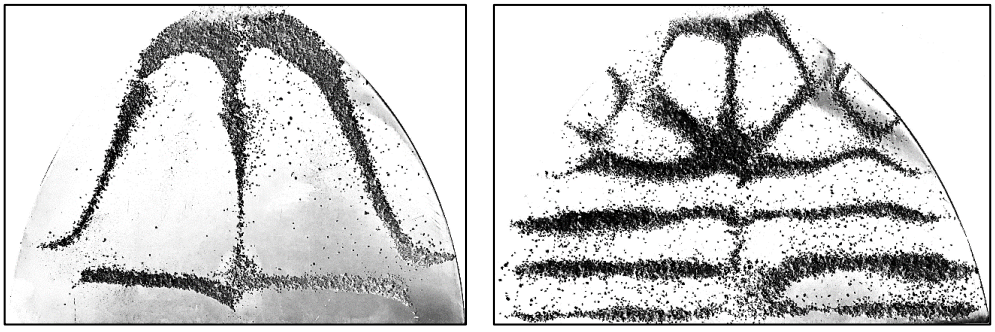
Obrázek 15: Obrazce na a) houslích a b) kytaře

Poslední měření jsme provedli pomocí pomůcek zobrazených na obrázku 16, houslového smyčce a pšeničné krupice. Jednalo se o kovové špachtle běžně využívané

v domácnosti například k sádrování. Pomocí šroubovacího držáku jsme špachtle uchytili na jedné straně k psacímu stolu. V tomto případě jde tedy o experimenty s deskami uchycenými na jedné straně, a ne podepřenými v jejich středu. K dispozici jsme měli dvě velikosti desek, jejichž kovovou část rozeznívaly pohyby houslového smyčce. Pro určení vlastní frekvence jsme nejprve „zahráli“ smyčcem na špachtli. Frekvence tónů byla nižší u volného okraje. Tedy přibližováním smyčce k upevněnému okraji jsme mohli slyšet vyšší frekvence. Při opakování tahů na stejném místě jsme zřetelně slyšeli danou frekvenci, při níž vznikal obrazec. Podle sluchu jsme odhadli vlastní frekvenci tak, že pomocí aplikace v telefonu jsme volili hodnoty blízké vlastní frekvenci. V tomto okamžiku byly slyšet zázněje. Dále jsme se tedy přibližovali k vlastní frekvenci, dokud zázněje slyšet nebyly. Tak jsme určili přibližnou hodnotu vlastní frekvence.

Obrázek 16: Držák na upevnění a dvě velikosti špachtlí

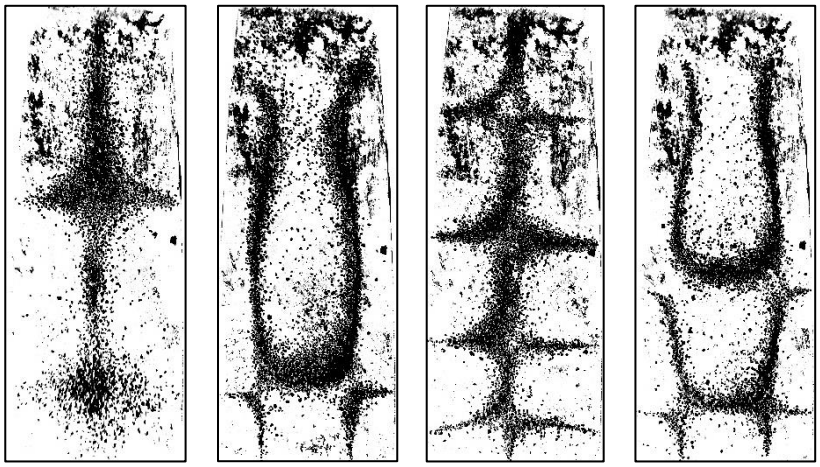
Uchycení obou špachtlí je v horní části obrázku. Na větší špachtli se nám podařilo zachytit dva obrazce.



a) 902 Hz b) 4699 Hz

Obrázek 17: Obrazce na větší špachtli

Kovová část menší špachtle byla v horní polovině trochu znečištěná, proto jsou obrazce v této části v horší kvalitě.



a) 1553 Hz b) 3250 Hz c) 3650 Hz d) 4400 Hz

Obrázek 18: Obrazce na menší špachtli

Na obrázcích špachtlí můžeme vidět, že na volných okrajích převažují kmitny a v místě upevnění uzly. Nejlépe je to patrné u větší špachtle na obrázku 17. Lze také pozorovat, že na rozdíl od desek upevněných uprostřed je rozložení zřetelně v jednom směru asymetrické.

U tohoto posledního měření lze pozorovat obrazce při vysokých frekvencích. I přesto, že se jednalo o běžné domácí potřeby a bylo použito mechanického nástroje, podařilo se zachytit zajímavé Chladniho obrazce.

2.4 Určení módových čísel

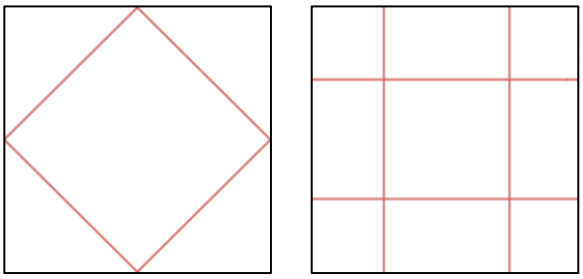
Pro určení módových čísel některých experimentálně zjištěných obrazců jsme využili internetový on-line kalkulátor *Desmos*, založený na multiplatformním dynamickém softwarovém prostředí *GeoGebra*, ve kterém jsme zadali rovnici uzlů na čtvercové desce o rozměru a podepřené uprostřed ve tvaru vycházející z analogie k rovnici (10). Rovnice (36) je převzata z [5]

$$A\cos\left(\frac{\pi n x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi m y}{a}\right) + B\cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi n y}{a}\right) = 0, \qquad (36)$$

kde lze libovolně měnit hodnoty A, B, a, m a n. Čísla m a n jsou hledaná módová čísla, která byla určena tehdy, když se vymodelovaný obrazec shodoval s naměřeným obrazcem.

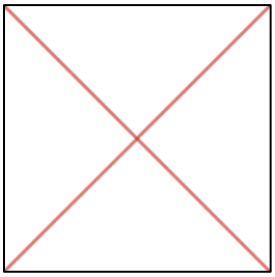
Tímto způsobem jsme určili módová čísla pouze u jednodušších obrazců. Odkaz na on-line kalkulátor se zadanou rovnicí: https://www.desmos.com/calculator/flki7fzjwp.

Pro ocelovou čtvercovou desku o hraně $a = 0{,}14$ m jsme určili módová čísla u tří obrazců (zapsány jsou pod obrazcem jako dvojice čísel (m, n)).



(1, 0) (1, 1)

Obrázek 19: Módová čísla pro hodnoty $A = B = 1$

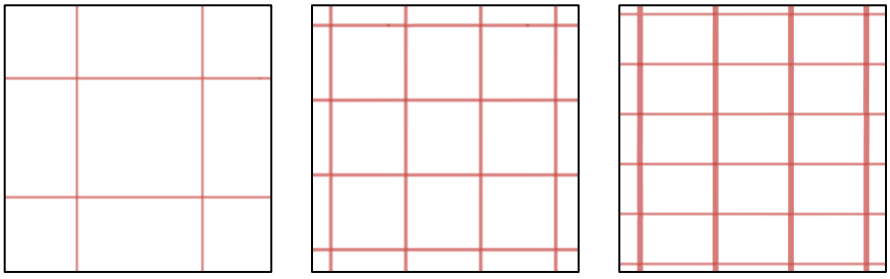


(1, 0)

Obrázek 20: Módová čísla pro hodnoty $A = 1$, $B = -1$

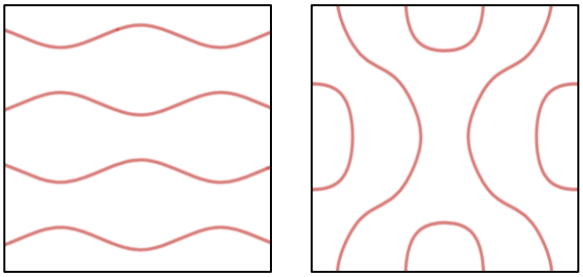
Modely obrazců na obrázku 19 odpovídají experimentálně získaným na obrázku 10c a 10d. Model na obrázku 20 odpovídá naměřenému obrazci 10b.

Pro mosaznou čtvercovou desku o hraně $a = 0{,}2$ m jsme určili módová čísla u šesti obrazců. Obrázek 21 vyjadřuje modely k experimentálním obrazcům s označením 12c, 12k a 12t.



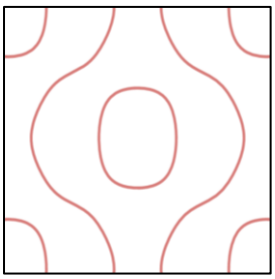
(1, 1) (1, 2) (2, 3)

Obrázek 21: Módová čísla pro hodnoty $A = 0$, $B = 1$



(2, 0) (1, 2)

Obrázek 22: Módová čísla pro hodnoty $A = 1$, $B = -0{,}5$



(1, 2)

Obrázek 23: Módová čísla pro hodnoty $A = 1$, $B = 0{,}5$

Naměřené obrazce s označením 12d a 12i odpovídají modelům na obrázku 22, obrazec 12h zachycuje model zobrazený na obrázku 23.

ZÁVĚR

Pro experimentální měření jsme sestrojili dvě aparatury se dvěma deskami jiných rozměrů. Na menší černé čtvercové desce jsme naměřili pouze čtyři vlastní frekvence, při nichž vznikaly výraznější obrazce. Důvodem malého množství naměřených frekvencí, při nichž se obrazce tvoří, mohla být tloušťka desky, její ohnutý roh nebo špatná konstrukce aparatury. Při měření s černou deskou jsme nejprve pro zobrazování používali pšeničnou krupici, která vytvářela nežádoucí prachové částice. Na základě získaných poznatků jsme zkonstruovali druhou aparaturu s rozměrově větší mosaznou deskou, která byla tenčí. Pro zobrazování jsme používali kuchyňskou sůl, která není tak jemná jako krupice a obrazce zobrazené pomocí tohoto posypového materiálu tak byly patrnější. Prachové částice z pšeničné krupice byly rušivým elementem, a to především na černé desce. Na mosazné desce jsme naměřili podstatně více vlastních frekvencí a podařilo se nám tak získat několik zajímavých, velmi dobře zobrazených, Chladniho obrazců. Vyzkoušené a ověřené experimenty mohou sloužit i ve výuce na PřF UP (např. v předmětu Fyzika 2 určeného pro studenty chemických oborů a studenty optometrie).

Teoretická část uvádí rovnici stojaté vlny na kmitající desce. Pomocí této rovnice a on-line kalkulátoru *Desmos* jsme určili módová čísla m a n některých obrazců naměřených v laboratoři. Bohužel se nám podařilo najít pouze několik těchto čísel, a to především u jednoduchých obrazců. Při modelování složitějších útvarů bychom museli volit jiné hodnoty A, B. Naše hodnoty jsme volili z množiny čísel {-1; -0,5; 0; 0,5; 1}. Je zřejmé, že tvar jednoduchých obrazců lze popsat i poměrně jednoduchou podmínkou (35), zahrnující goniometrické funkce středoškolské matematiky. Řešení goniometrické rovnice lze pak provést numericky pomocí vhodného software.

Nakonec jsme provedli měření v domácím prostředí pomocí domácích potřeb a houslového smyčce. Takové experimenty považujeme za inspirativní a vhodné například pro výuku na střední škole, kde žáci mohou získat představu o tom, jak „vypadá“ kmitání na desce. O Chladnim bylo řečeno, že zviditelnil tóny. Stejného výsledku by žáci mohli dosáhnout ve škole nebo v domácím prostředí.

POUŽITÁ LITERATURA

[1] BAROK, Dušan. *Monoskop.org* [online]. [cit. 2020-05-03]. Dostupné z: https://monoskop.org/Ernst_Chladni.

[2] KRHUT, Štěpán. *Materiály pro výrobu strun pro hudební nástroje*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, 2015. Bakalářská práce [online]. [cit. 2020-05-03]. Dostupné z: https://www.vutbr.cz/www_base/zav_prace_soubor_verejne.php?file_id=106336.

[3] LEPIL, Oldřich. *Mechanické kmitání a vlnění: studijní modul*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2012. ISBN 978-80-244-3295-3.

[4] *Mechanické vlnění*. [cit. 2020-05-03]. Dostupné z: https://smd.gytool.cz/downloads/4-8-MECHANICKE%20VLNENI_bar.pdf.

[5] POTOČEK, Václav. *Matematické modelování Chladniho obrazců na počítači*. *Rozhledy matematicko-fyzikální.* Praha: Jednota českých matematiků a fysiků, 2007, 82(2), článek (16-25). [cit. 2020-05-03]. Dostupné z: https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/146193/Rozhledy_082-2007-2_3.pdf.

[6] KOKTAVÝ, Bohumil. *Mechanické kmitání a vlnění: učební text pro studenty distančního a denního studia.* Brno: PC-DIR, 1995. ISBN 80-214-0703-4.

[7] STAŇOVÁ, Kateřina. *Fyzika Chladniho obrazců.* Brno: Masarykova univerzita, 2006. Bakalářská práce [online]. [cit. 2020-07-01]. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/jil0f/Fyzika_Chladniho_obrazcu.

[8] TILLICH, Josef, RICHTEREK, Lukáš. *Klasická mechanika*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, katedra experimentální fyziky, 2008, [online]. [cit. 2020-07-10]. Dostupné z: http://muj.optol.cz/richterek/lib/exe/fetch.php?media=mechanika:mechanika.pdf.

[9] KVASNICA, Jozef, HAVRÁNEK, Antonín, LUKÁČ, Pavel, SPRUŠIL, Boris. *Mechanika*. Vyd. 2. Praha: Akademie věd České republiky, 2004. ISBN 80-200-1268-0.

[10] DANIHELOVÁ, Anna. *Kmitanie tyčí, pravouhlých tenkých dosiek a membrán*. Zvolen: Technická univerzita Zvolen, katedra fyziky, elektrotechniky a aplikované mechaniky, 2009, [online]. [cit. 2020-07-11]. Dostupné z: http://sfs.sav.sk/smolenice/pdf_09/04_danihelova.pdf.

[11] BREPTA, Rudolf, TUREK, František, PŮST, Ladislav. *Mechanické kmitání*. Praha: Sobotáles, 1994. Česká matice technická (Sobotáles). ISBN 80-901684-8-5.

[12] BROŽOVSKÝ, Jiří, MATERNA, Alois. *Základy matematické teorie pružnosti*. Ostrava, 2012, [online]. [cit. 2020-07-15]. Dostupné z: http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/mat_teorie_pruznosti.pdf.

[13] MALVERN, Lawrence E. *Introduction to the mechanics of a continuous medium*. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1969. ISBN 0-13-487603-2. Dostupné z: http://www.ipgp.fr/~kaminski/web_doudoud/Malvern_book.pdf.

[14] FLETCHER, Neville H., ROSSING, Thomas D. *The Physics of Musical Instruments*. 2nd ed. New York: Springer, 1998. ISBN 978-0-387-21603-4.
[15] JANSSON, Erik. *Acoustics for violin and guitar makers*. Chapter VI. The function, tone, and tonal quality of the guitar. Kungl Tekniska Högskolan. Fourth edition, 2002, p. 9. Dostupné z: http://www.speech.kth.se/music/acviguit4/part6.pdf.
[16] BAJER, Jiří. *Mechanika*. 3., rozš. a dopl. Vyd. Olomouc: Vladimír Chlup, 2012. ISBN 978-80-903958-5-5.