

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLMOUCI  
Přirodovědecká fakulta  
Katedra optiky



**Analema**  
Bakalářská práce

Vypracoval:	Denis Musil
Studijní program:	B1701 Fyzika
Studijní obor:	Obecná fyzika a matematická fyzika
Vedoucí práce:	Mgr. Lukáš Richterek Ph.D.
Termín odevzdání:	květen 2021

## **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma Analema vypracoval samostatně pod vedením pana Mgr. Lukáše Richterka Ph.D. a využil jsem zdrojů, které cituji a uvádím v seznamu literatury.

V Olomouci, dne 9. 5. 2021

## **Poděkování**

Chtěl bych poděkovat vedoucímu bakalářské práce panu Mgr. Lukáši Richterkovi Ph.D. za veškerou pomoc při vypracovávání této práce. Také bych chtěl poděkovat své rodině za její podporu.

# Obsah

Úvod	4
<b>1 Teorie</b>	<b>5</b>
1.1 Keplerova úloha . . . . .	5
1.2 Systém souřadnic . . . . .	9
1.3 Analema . . . . .	11
<b>2 Sestavení analemy</b>	<b>15</b>
2.1 Fotografování Slunce . . . . .	15
2.2 Zpracování snímků . . . . .	20
2.3 Výsledný snímek . . . . .	22
<b>3 Porovnání s teoretickým modelem</b>	<b>24</b>
3.1 Teoretická analema . . . . .	24
3.2 Srovnání . . . . .	26
Závěr	29
Použité programy	30
Použité zdroje	31
Přílohy	32
A Výpis skriptu pro vykreslení analemy pomocí Eulerovy metody	32
B Výpis skriptu pro vykreslení kuželoseček	34

# Úvod

Cílem této práce je zaznamenat analemu Slunce z určitého místa a času. Výslednou analemu pak porovnáme s teoretickými modely. Práce se skládá ze tří kapitol. První kapitola se zabývá jevy, které způsobují tvar analemy a ukážeme si jak vytvořit jednoduchý model analemy. Ve druhé kapitole je rozebrán jak průběh jednotlivých pozorování Slunce v průběhu roku, tak i postup sestavení analemy z jednotlivých pozorování Slunce. V poslední, třetí kapitole jsou získané výsledky porovnány s několika teoretickými modely analemy a je ukázáno jak moc se od sebe teoretická a pozorována analema od sebe liší.

Analema je označení pro křivku, kterou získáme spojením poloh Slunce na obloze pro danou zeměpisnou šířku a délku ve zvoleném čase. Tyto zaznamenané polohy vytvářejí tvar osmičky, kde Slunce v průběhu roku stoupá a klesá přibližně o  $23,5^\circ$  nad a pod nebeský rovník. To je způsobeno skolen zemské osy rotace vůči rovině ekliptiky. Na tvar analemy má také vliv excentricita dráhy Země okolo Slunce.

Na první pohled se může zdát, že se zdánlivý pohyb Slunce po obloze jeví jednoduše, ale ve skutečnosti v sobě zahrnuje spoustu zajímavých jevů. Sluneční čas je čas určovaný otáčením Země vzhledem ke Slunci. Sluneční čas je měřen na sluneční dny, což je doba mezi dvěma průchody daného poledníku. Pravý sluneční čas určen průchodem pravého Slunce místním poledníkem. Délka pravého slunečního dne není stálá a v průběhu roku se mění. Zavádí se proto střední sluneční čas, který se vztahuje k myšlenému tělesu, tzv. střednímu Slunci, které se pohybuje rovnoměrně po ekliptice a jeho jeden den trvá 24 h.

Analema může být znázorněná i na slunečních hodinách (např. na slunečních hodinách před budovou PřF UP vytvořených v rámci diplomové práce [7]).

# Kapitola 1

## Teorie

Slunce, které je pozorováno vždy ve stejný čas a ze stejného místa, se pohybuje po obloze v průběhu roku takovým způsobem, že opisuje určitou křivku nazývanou analema. Na její tvar mají zásadní vliv hlavně dva faktory, sklon zemské osy vůči rovině ekliptiky a excentricita zemské oběžné dráhy.

### 1.1 Keplerova úloha

Jakékoliv těleso působí na ostatní tělesa ve svém okolí prostřednictvím gravitační síly. Tudíž na planetu nepůsobí pouze gravitace mateřské hvězdy, ale také gravitace ostatních těles. Při řešení Keplerovy úlohy je zanedbáno silové působení okolních planet a uvažuje se pouze interakce planety a hvězdy. Planeta i hvězda na sebe vzájemně působí obíhají kolem společného bodu. Jelikož hvězdy jsou mnohem hmotnější než planety, bude se takový společný bod nacházet velmi blízko hvězdě, ne-li uvnitř samotné hvězdy, a obíhání kolem tohoto společného bodu bude zanedbatelné. Lze tak uvažovat, že hvězda je nehybná a planeta kolem ní obíhá [3].

Vyřešením Keplerovy úlohy, můžeme zjistit, po jaké trajektorii se bude daný objekt pohybovat. Na těleso Sluneční soustavy působí Slunce gravitační silou  $\vec{F}$

$$\vec{F} = -G \frac{mM_S}{r^3} \vec{r}. \quad (1.1)$$

Velikost vektoru  $\vec{F}$  je dána jako

$$F = G \frac{mM_S}{r^2}, \quad (1.2)$$

kde  $G = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$  je gravitační konstanta,  $m$  je hmotnost daného tělesa,  $M_S$  je hmotnost Slunce a  $r$  je vzdálenost daného tělesa od Slunce [3].

V tomto centrálním gravitačním poli lze definovat potenciální energii  $E_p$  následujícím způsobem.

$$E_p = \int_{\infty}^r F dr = -G \frac{mM_S}{r} \quad (1.3)$$

Kinetická energie  $E_k$  je definována klasicky jako

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2, \quad (1.4)$$

kde  $v$  představuje velikosti rychlosti tělesa pohybující se kolem Slunce. Ze zákona zachování energie pak plyne rovnice [3]

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - G \frac{mM_S}{r}. \quad (1.5)$$

V centrálním gravitačním poli Slunce má vektor gravitační síly  $\vec{F}$  působící na těleso opačný směr vůči polohovému vektoru  $\vec{r}$ , spojující Slunce a těleso. Vektor momentu síly  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$  je pak nulový a vektor momentu hybnosti  $\vec{L}$  je v čase konstantní.

Nyní je výhodné přejít od kartézských souřadnic  $x$  a  $y$  k polárním souřadnicím  $r$  a  $\phi$ . Transformační vztahy jsou dány rovnicemi

$$x = r \cos \phi \quad (1.6)$$

$$y = r \sin \phi. \quad (1.7)$$

Dané těleso se při svém pohybu posune o elementární úsek  $ds$  a jeho velikost je dána rovnicí

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad (1.8)$$

Pomocí totálních diferenciálů

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \phi} d\phi$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \phi} d\phi$$

a transformačních vztahů (1.6) a (1.7), lze rovnici (1.8) vyjádřit v polárních souřadnicích jako

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2.$$

Z tohoto vztahu lze vyjádřit velikost rychlosti jako

$$v^2 = v_r^2 + v_\phi^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2. \quad (1.9)$$

Z této rovnice vyplývá, že vektor rychlosti  $\vec{v}$  je tvořen radiální složkou  $\vec{v}_r$ , která svírá nulový úhel s polohovým vektorem  $\vec{r}$ , a tečnou složkou  $\vec{v}_\phi$ , která je kolmá na polohový vektor  $\vec{r}$ .

Vektor momentu hybnosti  $\vec{L}$  je určen jako

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{r} \times m \vec{v} = m [\vec{r} \times (\vec{v}_r + \vec{v}_\phi)] \\ &= m [\vec{r} \times \vec{v}_r + \vec{r} \times \vec{v}_\phi] = m (\vec{r} \times \vec{v}_\phi). \end{aligned}$$

Z rovnice (1.9) odpovídá velikost tečné složky rychlosti  $v_\phi = r\dot{\phi}$ . Velikost momentu hybnosti  $L$  je konstantní, jak je uvedeno výše, a je rovna

$$L = mr^2\dot{\phi}. \quad (1.10)$$

Vyjádřením  $\dot{\phi}$  a dosazením do rovnice (1.5) společně s rovnicí (1.9) a následnou úpravou lze získat vztah

$$\dot{r} = \sqrt{2 \frac{E}{m} + 2G \frac{M_S}{r} - \frac{L^2}{m^2 r^2}}.$$

Využitím vztahu

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{\frac{dr}{dt}}{\frac{d\phi}{dt}} = \frac{\dot{r}}{\dot{\phi}}$$

je získána diferenciální rovnice



$$\frac{1}{r^2} \left( \frac{dr}{d\phi} \right)^2 - 2mr^2 \frac{E}{L^2} - 2Gm^2 M_S \frac{r}{L^2} = -1$$

Řešením této rovnice je funkce

$$r = \frac{\frac{L^2}{2Gm^2 M_S}}{1 + K_1 \cos(\phi) + K_2 \sin(\phi)}. \quad (1.11)$$

Konstanty  $K_1$  a  $K_2$  lze nahradit konstantami  $K$  a  $\phi_0$ , pro které platí

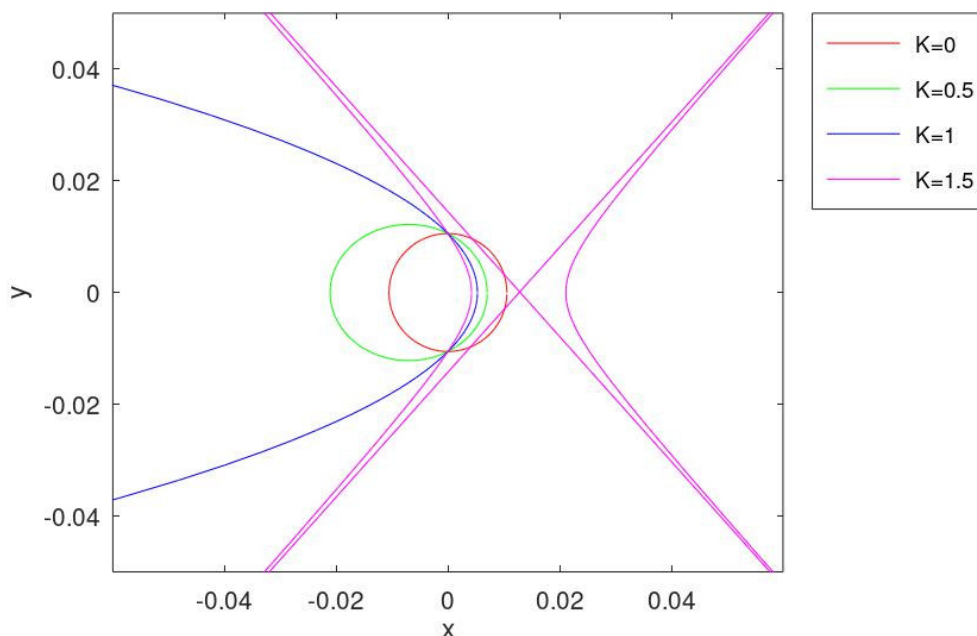
$$\begin{aligned} K_1 &= K \cos \phi_0 \\ K_2 &= K \sin \phi_0. \end{aligned}$$

Po dosazení do rovnice 1.11 a úpravě získáme vztah

$$r = \frac{\frac{L^2}{2Gm^2 M_S}}{1 + K \cos(\phi - \phi_0)}. \quad (1.12)$$

Tato rovnice odpovídá rovnici kuželosečky v polárních souřadnicích, kde  $K = \epsilon$  a  $\epsilon$  značí excentricitu kuželosečky [8].

Z obrázku 1.1 je patrné, že pokud je excentricita  $\epsilon$  nulová je trajektorie kruhová, pokud je větší jak nula, ale menší jak jedna, pak má trajektorie tvar elipsy. Pro excentricitu rovné jedné má tvar paraboly a pokud je větší jak jedna, má tvar hyperboly. Vázané trajektorie těles, které pravidelně obíhají kolem Slunce v centrálním gravitačním poli mají obecně tvar elipsy. Země se tedy pohybuje po elipse s určitou excentricitou  $\epsilon = 0,0167$  a Slunce se nachází v jednom z ohnisku elipsy [5]. Vzdálenost Země od Slunce tak není stálá. Jak bylo výše řečeno, vektor momentu hybnosti, a tudíž i jeho velikost, jsou v čase konstantní a platí  $L = M_Z r v = \text{konst.}$  Aby byl moment hybnosti zachován, tak při zvětšení vzdálenosti od Slunce se sníží rychlost oběhu Země a obráceně. Tento jev, společně se sklonem zemské osy vůči rovině ekliptiky, způsobuje typický tvar analemy.



Obrázek 1.1: Grafy funkce 1.12 pro  $\phi_0 = 0$  a různé hodnoty excentricity  $\epsilon$

## 1.2 Systém souřadnic

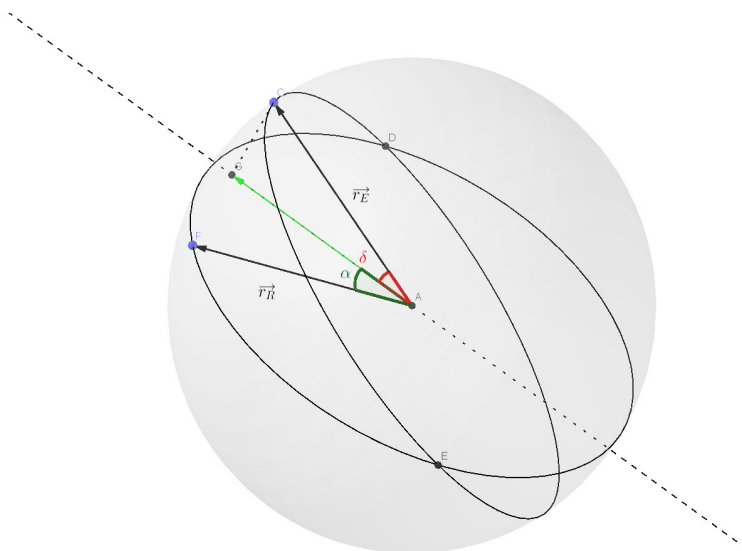
K popisu zdánlivého pohybu Slunce na nebeské sféře je potřeba zavést vhodný systém souřadnic. K tomu se využívá rovin rovníku a ekliptiky. Tyto roviny vytínají kružnice, které se zobrazují na nebeské sféře. Slunce se na nebeské sféře pohybuje v rovině ekliptiky a v této rovině zavádíme vektor  $\vec{r}_E$ , který spojuje Zemi se Sluncem. Pohyb Slunce v průběhu dne není pravidelný po celý rok, a proto se zavádí tzv. střední Slunce. Toto myšlené Slunce se pohybuje pravidelně v rovině zemského rovníku a doba mezi dvěma průchody přes určitý poledník je přesně 24 hodin. Vektor  $\vec{r}_R$  poté v rovině rovníku spojuje střední Slunce se Zemí. Střední Slunce je zaváděno, právě kvůli nepravidelnému pohybu Slunce, kdy se Země otočí o úhel  $2\pi$  za den, ale zároveň se Země posune při svém pohybu kolem Slunce o  $\frac{2\pi}{365}$ . Je uvažován zaokrouhlený počet dnů v roce. Když se Slunce nachází ve stejné pozici na obloze jako předchozí den, pak Země se musela otočit, nikoliv o úhel  $2\pi$ , ale o úhel  $(2\pi + \frac{2\pi}{365})$ . Vektor  $\vec{r}_R$  opisuje na obloze kružnici a tento vektor lze vyjádřit

jako

$$\vec{r}_R = \cos\left(2\pi n + n \frac{2\pi}{365}\right) \cdot \vec{e}_x + \sin\left(2\pi n + n \frac{2\pi}{365}\right) \cdot \vec{e}_y, \quad (1.13)$$

kde  $n$  počet dnů a vektory  $\vec{e}_x$  a  $\vec{e}_y$  jsou jednotkové vektory ve směru os  $x$  a  $y$  [5].

Toto ovšem platí pouze za předpokladu, že by se Země pohybovala stálou rychlostí. Pokud se mění rychlost pohybu planety kolem Slunce, pak se mění úhel, o který se musí Země otočit, aby se Slunce vrátilo do původní pozice. Polohu Slunce pak lze zaznamenat pomocí úhlů  $\delta$  a  $\alpha$ . Úhel  $\delta$  se nazývá deklinace a je to úhel, který svírá vektor  $\vec{r}_E$  s rovinou rovníku. Úhel  $\alpha$  je takový úhel, který svírá vektor  $\vec{r}_R$  s průmětem vektoru  $\vec{r}_E$  na rovinu rovníku.

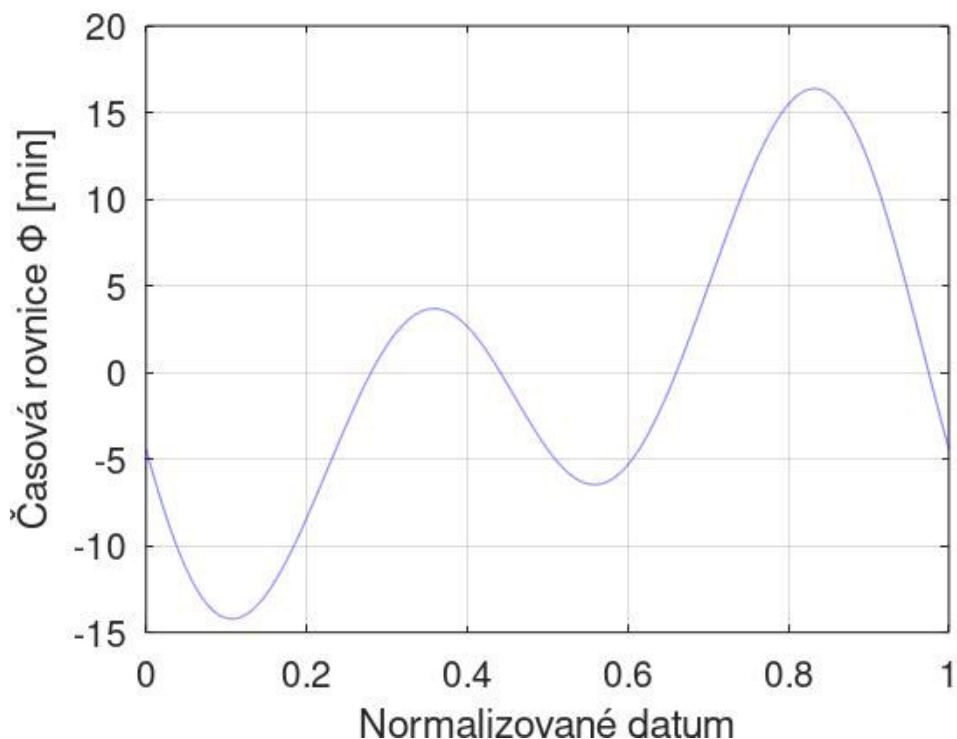


Obrázek 1.2: Nákres vektorů  $\vec{r}_E$  a  $\vec{r}_R$  společně s úhly  $\alpha$  a  $\delta$

Úhel  $\alpha$  je také možné nahradit veličinou  $\Phi$  nazvanou "časová rovnice". Tato veličina je definovaná jako

$$\Phi = T_E - T_R,$$

kde  $T_E$  je tzv. pravý sluneční čas a  $T_R$  je střední sluneční čas. Pravý sluneční čas je takový, který se měří pomocí slunečních hodin. Střední sluneční čas odpovídá pohybu středního Slunce, které se navrátí do počáteční polohy přesně za 24 hodin. Tento čas tedy odpovídá času měřeném pomocí občanských hodin [2, 4].



Obrázek 1.3: Graf časové rovnice  $\Phi$  v závislosti na čase, vytvořený pomocí skriptu Briana Tunga [P2]

Obrázek 1.3 ukazuje, že časová rovnice  $\Phi$  nabývá jak kladných tak i záporných hodnot. To znamená, že právě Slunce jednou předchází právě Slunce a potom se za ním opoždí v průběhu celého roku.

### 1.3 Analema

K vytvoření modelu analemy Slunce potřebujeme znát, jak vektory  $\vec{r}_R$  a  $\vec{r}_E$  závisí na čase. Pro vektor  $\vec{r}_R$  tuto závislost známe z rovnice (1.13). Je potřeba tedy zjistit časovou závislost vektoru  $\vec{r}_E$ . Pro jednoduchost předpokládáme, že pozorujeme Slunce v oblasti rovníku.

K určení závislosti  $\vec{r}_E$  potřebujeme vektor  $\vec{r}_S$ , pro který platí, že v každém okamžiku je

$$\vec{r}_S = -\vec{r}_E. \quad (1.14)$$

Pro tento vektor platí pohybová rovnice

$$\frac{d^2 \vec{r}_S}{dt^2} = G \frac{M_Z M_S \vec{r}_S}{|\vec{r}_S|^3}. \quad (1.15)$$

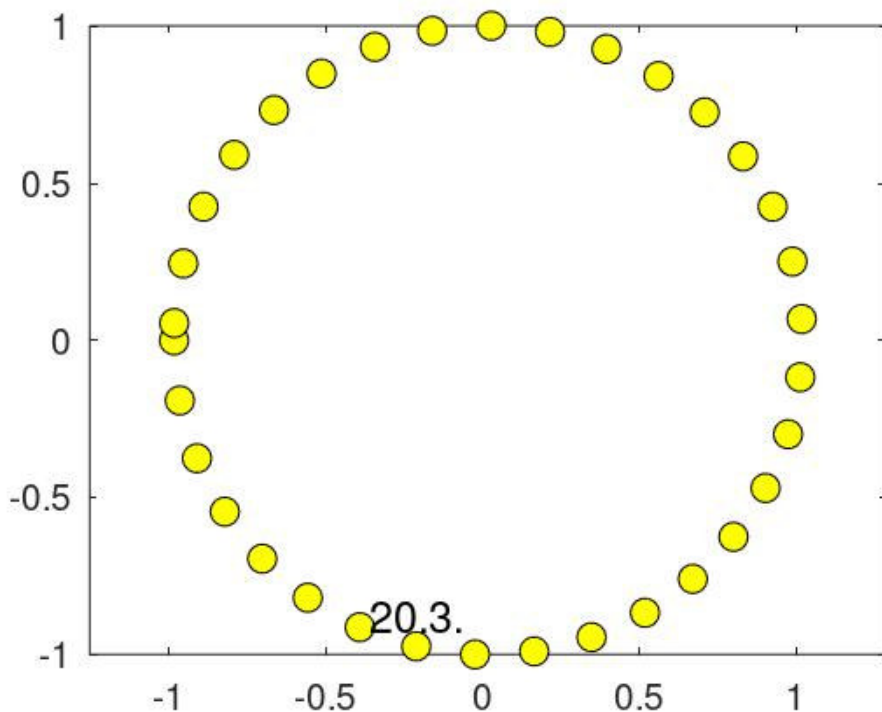
Určením počátečních podmínek, můžeme tuto rovnici řešit numericky, například pomocí Eulerovy metody. Zvolme vektor  $\vec{r}_S(0) = (-a(1-\epsilon), 0, 0)$ , kde  $a = 1$  au označuje velikost hlavní poloosy elipsy a  $\epsilon = 0,0167$  označuje excentricitu trajektorie Země. Země se tedy na počátku nachází v perihéliu. Druhou podmínku lze získat z momentu hybnosti  $\vec{L}$ . Jak je uvedeno výše, moment hybnosti Země se s časem nemění a platí

$$L = M_Z |\vec{r}_S \times \vec{v}|. \quad (1.16)$$

Jelikož výraz  $|\vec{r}_S \times \vec{v}|$  je úměrný ploše  $S$  kterou opíše vektor  $\vec{r}_S$  za určitý čas  $t$ , pak platí

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} |\vec{r}_S \times \vec{v}| = \frac{\pi a^2 \sqrt{1-\epsilon^2}}{T}, \quad (1.17)$$

kde  $T = 1$  y je perioda oběhu Země. Vyjádřením z rovnice (1.17) a dosazením do rovnice (1.16) získáme hodnotu velikosti momentu hybnosti  $L$ . S využitím rovnice (1.10) pak dokážeme určit druhou počáteční podmínku jako  $\vec{r}_S = \left(0, -\frac{L}{M_Z a(1-\epsilon)}, 0\right)$ . Takto určené podmínky lze použít k řešení rovnice (1.15) a k určení vektoru  $\vec{r}_S$  [5].



Obrázek 1.4: Pozice Země při oběhu kolem Slunce

Aby se vektor  $\vec{r}_S^*(t)$ , popřípadě vektor  $\vec{r}_E^*(t)$ , měnil v čase stejně tak jak se mění poloha Slunce na obloze, je potřeba výsledný vektor rotovat kolem osy  $y$  o  $23,4^\circ$ , což odpovídá sklonu zemské osy vůči rovině ekliptiky. Předtím je však potřeba rotovat rovinu ekliptiky kolem osy  $z$  tak, aby osa  $y$  protínala trajektorii Země 20. března. V té době totiž Slunce na obloze protíná nebeský rovník. Souřadnice získané pro den 20. 3. jsou  $(-0,21141; -0,97452)$ . Soustavu je potřeba otočit tak, aby souřadnice tohoto bodu byly  $(0; -1)$ . Pro otočení soustavy o jistý úhel  $\phi_0$  platí

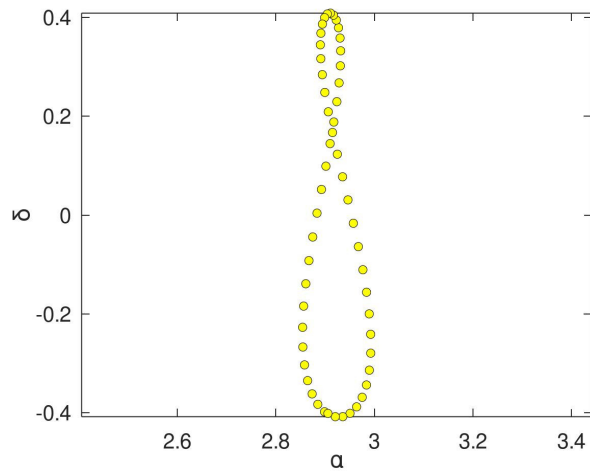
$$\begin{aligned}x' &= x \cos \phi_0 - y \sin \phi_0 \\y' &= x \sin \phi_0 + y \cos \phi_0.\end{aligned}$$

Z těchto rovnic lze získat úhel  $\phi_0 = -12,8^\circ$  o který je potřeba otočit souřadnou soustavu. K vytvoření analemý je nutné ještě určit úhly  $\alpha$  a  $\delta$ , které lze vypočítat jako

$$\delta = \arcsin \left( \frac{\vec{e}_z \cdot \vec{r}_E^*}{|\vec{r}_E^*|} \right) \quad (1.18)$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{r}_{E_{xy}} \cdot \vec{r}_R}{|\vec{r}_{E_{xy}}|}\right), \quad (1.19)$$

kde vektor  $\vec{r}_{E_{xy}}$  představuje průmět vektoru  $\vec{r}_E$  do roviny nebeského rovníku. Výsledná analema je zobrazena na obrázku 1.5 [5, 6].



Obrázek 1.5: Analema vytvořená pomocí vztahů (1.19) a (1.18)

# Kapitola 2

## Sestavení analemmy

### 2.1 Fotografování Slunce

Před samotným fotografováním je nutné si zvolit dobu, kdy budeme pořizovat fotografie a také vhodné místo. Je výhodné mít na dané fotografii krajinu s několika výraznými body, jako jsou budovy nebo kopce. Analemu fotografujeme ve Velkých Kuněticích a to v časech 9:45 SEČ a 15:15 SEČ, popřípadě 10:45 SELČ a 16:15 SELČ.



Obrázek 2.1: Mapa na stránkách Mapy.cz s vyznačeným místem pozorování





Obrázek 2.2: Pozadí analemy ve Velkých Kuněticích v čase 9:45 SEČ  
(10:45 SELČ)



Obrázek 2.3: Pozadí analemy ve Velkých Kuněticích v čase 15:15 SEČ  
(16:15 SELČ)

Na obrázcích 2.2 a 2.3 je vyfoceno pozadí, které je následně použito k vytvoření analemy, z daného pozorovacího místa. Pro pozadí jsme vyfotili několik různých snímků a pomocí programu Image Composite Editor [P4] jsme je složili do jednoho panoramatického snímku. Jelikož jsou budovy na fotografiích v různých vzdálenostech, způsobuje to určitý zákryt jednotlivých budov vůči ostatním, což pomáhá k určení daného místa pozorování během následujících pozorování.

Po určení času a místa pozorování jsme fotily z daného místa již se Sluncem v záběru fotoaparátu. K fotografování byl použit fotoaparát Sony Cyber-shot DSC-H300 se stativem a také byl použit sluneční filtr firmy Baader Planetarium GMBH. Sestavu můžete vidět na obrázku 2.4.



Obrázek 2.4: Sestava použitá při pozorování

První fotografie každého pozorování byla nejdříve vyfocena přes sluneční filtr. Příklad takové fotografie lze vidět na obrázku 2.5. Tento filtr odráží

většinu světla přicházejícího od Slunce a umožňuje nám pozorovat sluneční kotouč. Následně filtr odstraníme z objektivu fotoaparátu a vyfotíme tři snímky krajiny, každou s jiným expozičním stupněm. Většina dnešních fotoaparátů má nastavení, kdy po stisknutí spouště fotoaparát automaticky zachytí řadu snímků s nižším a vyšším expozičním stupněm. Příklady takových snímků jsou vidět na obrázcích 2.6–2.8.



Obrázek 2.5: Fotografie přes sluneční filtr



Obrázek 2.6: Fotografie s nižší expozicí



Obrázek 2.7: Fotografie se základní expozicí



Obrázek 2.8: Fotografie s vyšší expozicí

Takovéto snímky jsme pak pořizovali v průběhu celého roku, přibližně každý druhý týden v závislosti na počasí v místě pozorování.

## 2.2 Zpracování snímků

Snímky jsou zpracovány pomocí volně dostupného programu GIMP [P1]. Nejprve jsme vytvořili složený snímek vytvořený z fotografií na obrázcích 2.6–2.8. Vybereme fotografii s nejvyšší expozicí (obrázek 2.8) a v programu GIMP bude tvořit základní vrstvu. Zbytek snímků tvoří další jednotlivé vrstvy na základní vrstvě. V programu GIMP můžeme přidávat jednotlivým vrstvám různé masky. Použijeme masku, která vytvoří kopii dané vrstvy v odstínech šedé a zobrazíme je na základní vrstvě. Vytvoříme tak snímek krajiny, na kterém lépe vyniknou detaily okolí. Stejným způsobem přidáme fotografii pořízenou přes sluneční filtr, čímž získáme přesnější polohu Slunce na obloze [1].



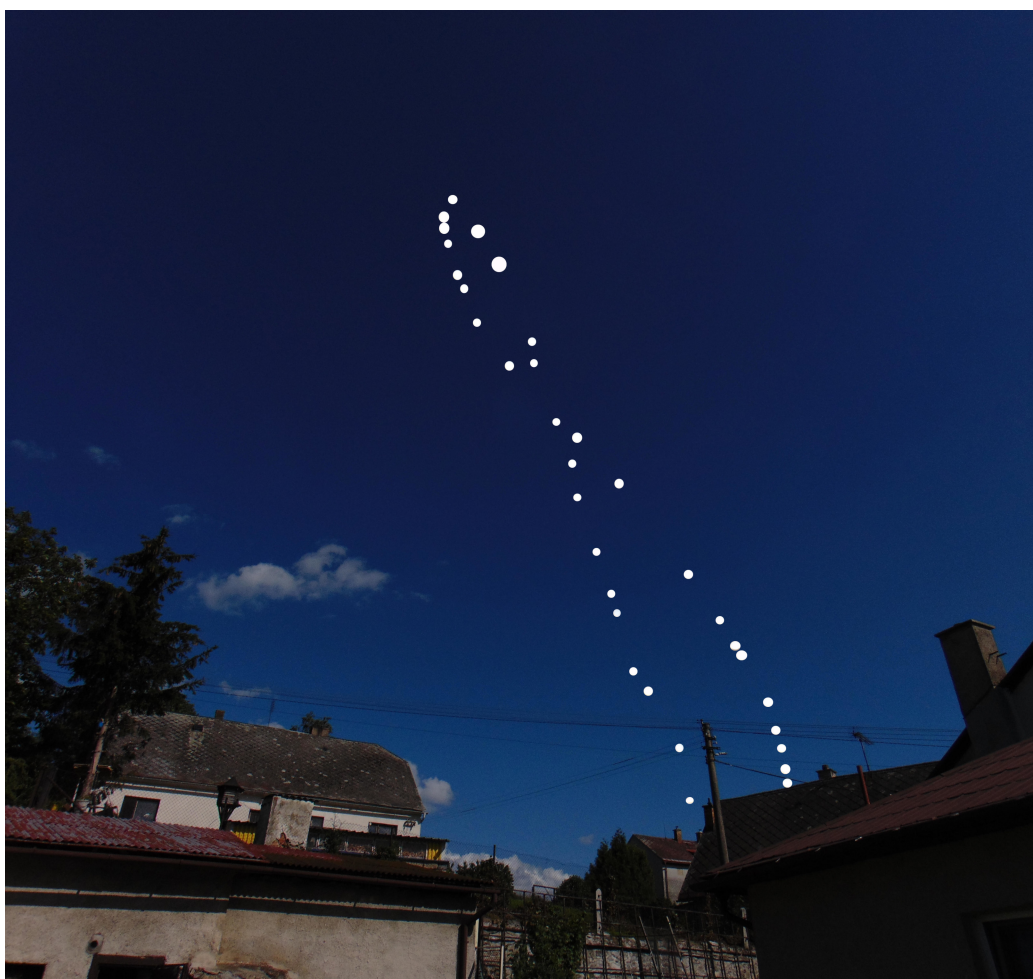
Obrázek 2.9: Snímek složený z několika fotografií

V dalším kroku, výsledný snímek z obrázku 2.9, nahrajeme jako vrstvu

na pozadí, které jsme fotili dříve. Viditelnost vrstvy je snížena přibližně na 50%, abychom viděli obrysy krajin jak z pozadí tak i z dané vrstvy. Poté vrstvu upravujeme tak, aby se krajiny z obou snímků překrývaly. K tomu byl využit nástroj "Jednotné transformace" programu GIMP, který nám dovoluje s danou vrstvou pohybovat, otáčet ji, škálovat a také měnit perspektivu vrstvy. Nejdříve zarovnáme obrys krajin na snímcích a poté se zaměříme na menší detaily jako jsou například okna na budovách, podle kterých pak ještě upravujeme fotografii. Je to nutné z toho důvodu, že se může stát, že obrysy budou zarovnány správně, ale například okna na nějaké budově se budou vychylovat, což pak může způsobit větší, či menší chybu ve výsledném snímku.

## 2.3 Výsledný snímek

Po roce zaznamenávání polohy Slunce na obloze, jsme složením všech snímků získali tvar analemy Slunce.



Obrázek 2.10: Analema zaznamenána ve Velkých Kuněticích v 9:45 SEČ



Obrázek 2.11: Analema zaznamenána ve Velkých Kuněticích v 15:15 SEČ

Z obrázků 2.10 a 2.11 vidíme, že zaznamenané polohy Slunce na obloze vytvářejí tvar "osmičky" s jednou smyčkou větší než ta druhá. Analemy jsou skloněné vůči horizontu směrem na východ v případě dopolední analemy na obrázku 2.10, nebo na západ pro odpolední analemu na obrázku 2.11.

Na obou snímcích není zaznamenána poloha Slunce v průběhu zimních měsíců a to kvůli tomu, že v době pozorování se Slunce nacházelo za budovami na snímcích. Výběrem jiného místa pozorování nebo jiného času pozorování by bylo možné zachytit kompletní analemu. Jelikož jsme s pozorováním začali až v jarních měsících, Slunce již bylo na obloze výše a mohli jsme jenom odhadovat jak nízko se Slunce při svém pohybu dostane.

Na obrázcích 2.10 a 2.11 si lze také všimnout, že poloha Slunce se v některých dnech vychyluje oproti ostatním dnům. To je pravděpodobně způsobené tím, že při každém pozorování je nutné postavit stativ s fotoaparátom na stejné místo, což se nemusí pokaždé podařit a malá změna polohy stativu oproti předchozímu pozorování mohla způsobit tuto výchylku v poloze Slunce na obloze.

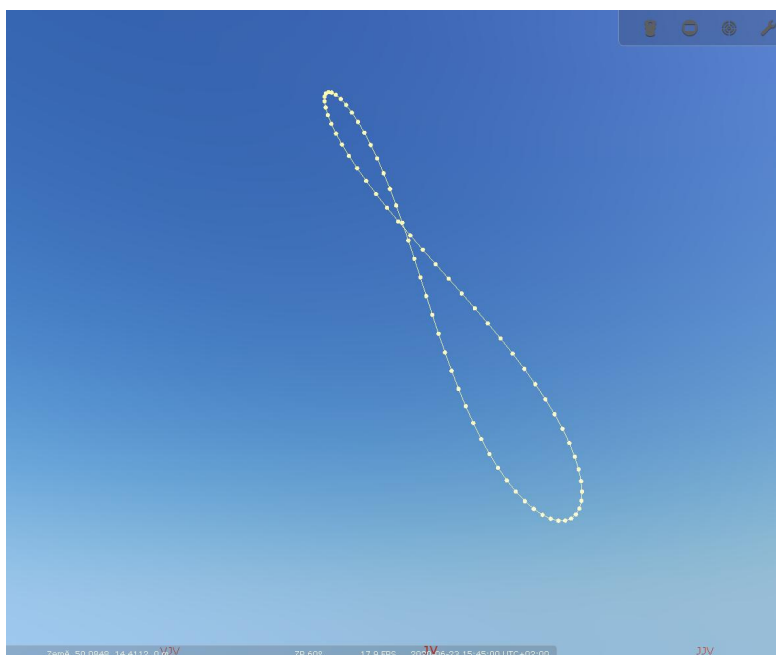


## Kapitola 3

# Porovnání s teoretickým modelem

### 3.1 Teoretická analema

Analemu lze vytvořit v programu Stellarium [P3], kde získáme analemu z předem nastaveného místa a v určitý čas tak, jak bychom ji pozorovali ve skutečnosti. Nastavíme v programu Stellarium čas pozorování, což je v našem případě 9:45 SEČ a 15:15 SEČ, respektive 10:45 SELČ a 16:15 SELČ. Poté v hlavní nabídce zvolíme „Astronomické výpočty“ a v daném okně záložku „Efemerida“. Zadáme Slunce jako nebeské těleso, které chceme pozorovat a časové rozpětí jednoho roku. Je důležité zaškrtnout políčko „O.S.“, aby nám program zaznamenal zdánlivý pohyb Slunce po obloze v obzorníkových souřadnicích. Pokud tak neuděláme, Stellarium bude zaznamenávat polohu Slunce pomocí rovníkových souřadnic 2. druhu, čímž bychom zjistili jak se Slunce pohybuje po obloze vůči hvězdnému pozadí. Vytvoříme snímky obrazovky v programu Stellarium daných analem, které můžeme vidět na obrázcích 3.1 a 3.1.



Obrázek 3.1: Analema vytvořena pomocí programu Stellarium v čase 9:45 SEČ (10:45 SELČ)

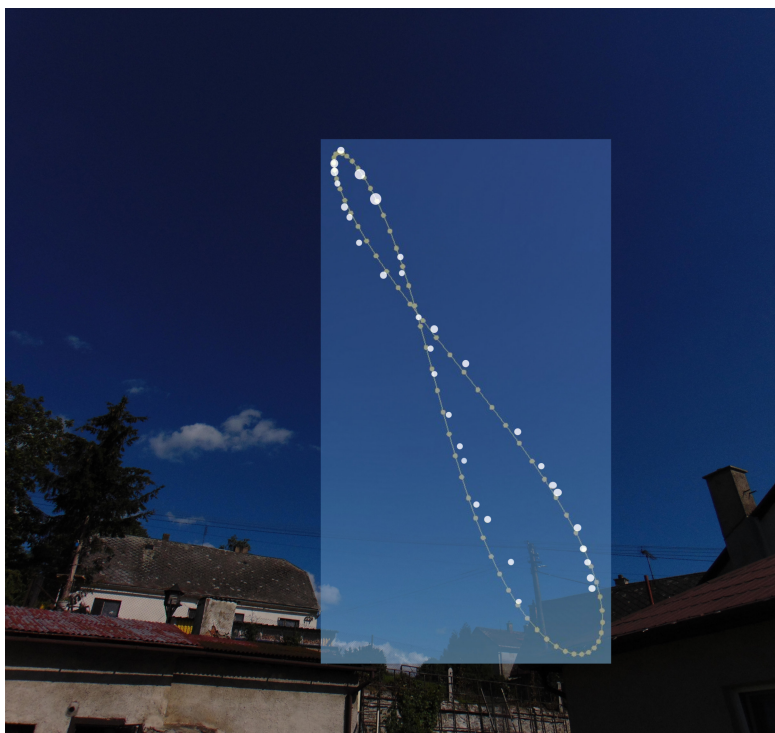


Obrázek 3.2: Analema vytvořena pomocí programu Stellarium v čase 15:15 SEČ (16:15 SELČ)

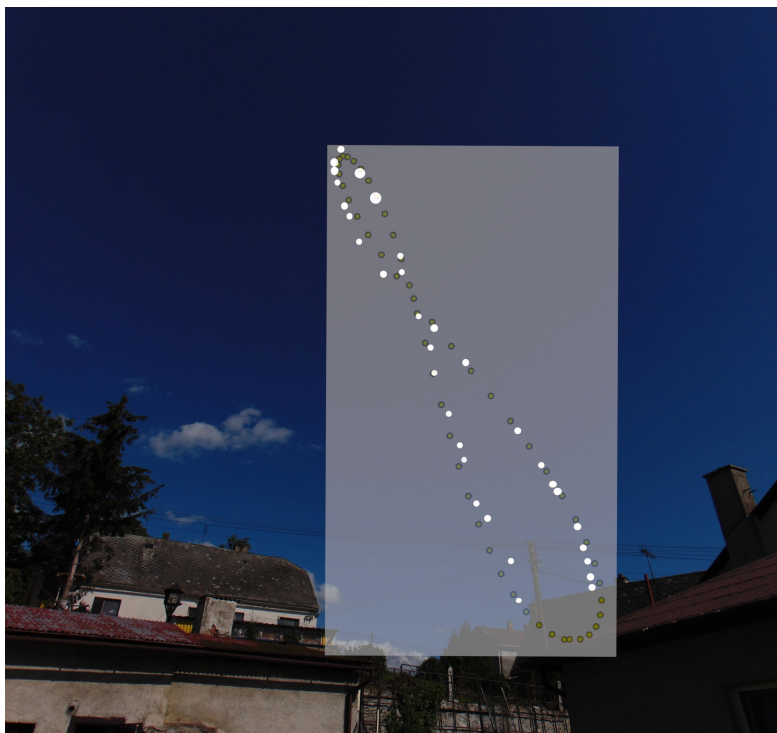
Zároveň můžeme také použít výslednou analemu získanou výše pomocí Eulerovy metody a zjistit jak přesný je takový model.

## 3.2 Srovnání

V programu GIMP vložíme obrázky teoretických analem 3.1, 3.1 a 1.5 jako vrstvy pozorovaných analem 2.10 a 2.11. Pomocí nástroje "Jednotné transformace" jsme upravili jednotlivé vrstvy tak, že jsme škálovali, popřípadě rotovali danou vrstvu. Při skládání vrstev jsme využívali body, kdy jsme Slunce zaznamenali nejnvýše a nejniže na obloze. Výsledky lze pak vidět na obrázcích 3.3–3.6.

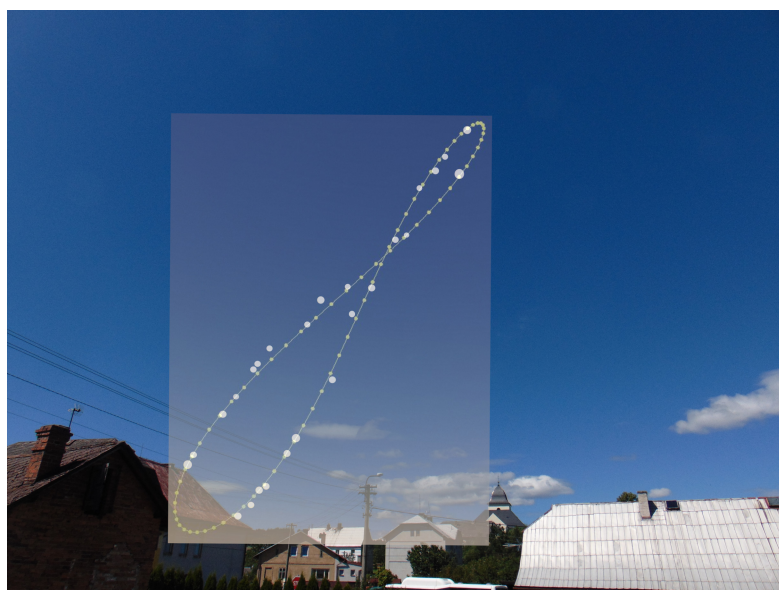


Obrázek 3.3: Srovnání s analemou vytvořenou v programu Stellarium v čase 9:45 SEČ (10:45 SELČ)

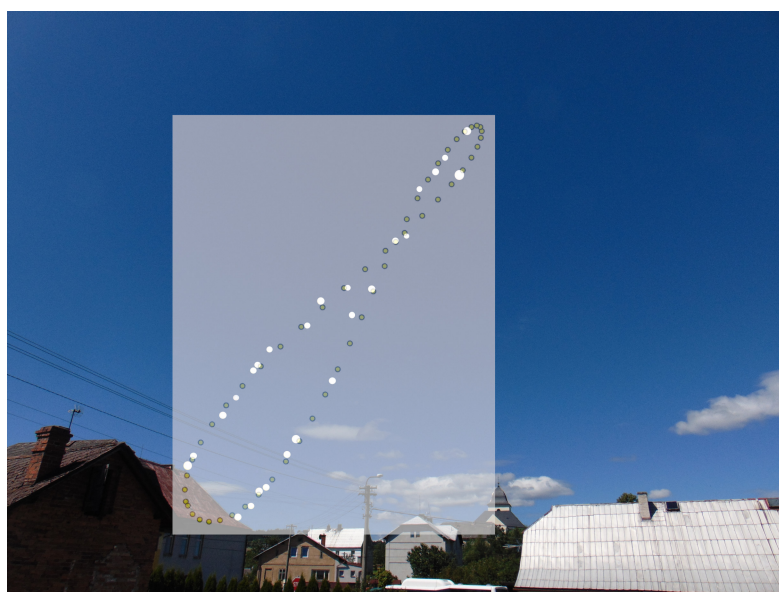


Obrázek 3.4: Srovnání s analemou vytvořenou pomocí Eulerovy metody v čase 9:45 SEČ (10:45 SELČ)

Z obou modelů vidíme, že tvar analem odpovídá pozorování, i když se zde nacházejí jisté odchylky, které byly pravděpodobně způsobené drobnou změnou pozice daného pozorování vůči předchozím pozorováním. Z obrázků 3.4 a 3.6 také vidíme, že model analem, který jsme získali v kapitole 1, popisuje sluneční analemu velice přesně.



Obrázek 3.5: Srovnání s analemou vytvořenou v programu Stellarium v čase 15:15 SEČ (16:15 SELČ)



Obrázek 3.6: Srovnání s analemou vytvořenou pomocí Eulerovy metody v čase 15:15 SEČ (16:15 SELČ)

# Závěr

Cílem práce bylo sestavit analemu Slunce a porovnat výslednou analemu s teoretickými modely.

V první části jsme řešením Keplerovy úlohy zjistili, že vázané trajektorie těles obíhajících kolem Slunce mají obecně tvar elipsy a ze zákona zachování hybnosti jsme tak mohli určit, že rychlost tělesa při oběhu Slunce není konstantní, což má vliv na tvar samotné analem.

Dále jsme zavedli vektory  $\vec{r}_E$  a  $\vec{r}_R$ , které jsme použili k určení polohy pravého Slunce na obloze. Poté řešením pohybové rovnice, určením počátečních podmínek a určením úhlů  $\alpha$  a  $\delta$  jsme vykreslili analemu Slunce.

Po sestavení všech snímků z pozorování v průběhu roku pomocí programu GIMP, jsme získali analemu Slunce ve Velkých Kuněticích v čase 9:45 SEČ (10:45 SELČ) a 15:15 SEČ (16:15 SELČ). Analemy na snímcích nejsou úplné, poněvadž v zimních měsících se Slunce nacházelo za budovami na daných snímcích. Je tedy důležité zvolit si vhodné místo pozorování, tak abychom měli jistotu, že získáme kompletní analemu Slunce. Je tedy výhodné začít s pozorováním v průběhu ledna, kdy je Slunce nejnižší na obloze.

Z porovnání s teoretickými modely jsme viděli, že docházelo k výchytkám polohy Slunce v některých dnech. Ty byly pravděpodobně způsobeny drobnou změnou pozice při pozorování vůči předchozím pozorování a proto po úpravě daného snímku se poloha Slunce lehce vychýlila.

Při práci bylo použito běžně dostupné technické vybavení a volně šiřitelných programů. Práce tak může posloužit jako inspirace k praktickým úlohám na středních školách, kde učivo astronomie a astrofyziky, zařazeno na konci 9. ročníků, případně na závěr gymnaziální výuky fyziky bývá redukováno a náměty k samostatnému pozorování mohou být alespoň částečnou náhradou.

# Použité programy

[P1] GIMP. Dostupné z: <https://www.gimp.org/>

[P2] Analemma-script. Brian Tung. Dostupné z: [https://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/m\\_src/analemma/analemma.html](https://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/m_src/analemma/analemma.html)

[P3] Stellarium. Dostupné z: <https://stellarium.org/>

[P4] Image Composite Editor. Dostupné z: <https://www.microsoft.com/en-us/research/product/computational-photography-applications/image-composite-editor/>

## Použité zdroje

- [1] Blending exposures - GIMP. [online]. [cit.2021-5-6]. Dostupné z: [https://www.gimp.org/tutorials/Blending\\_Exposures/](https://www.gimp.org/tutorials/Blending_Exposures/).
- [2] Analema. [online]. [cit.2021-4-13]. Dostupné z: <https://mat.fsv.cvut.cz/solc/wwwpages/analema2/default.html>.
- [3] Adrian E. Feiguin. Kepler's problem. [online]. [cit.2021-5-6]. Dostupné z: <https://web.northeastern.edu/afeiguin/p4840/p131spring04/node19.html>.
- [4] Alejandro Gangui, Cecilia Lastra, and Fernando Karaseur. On times and shadows: The observational analemma. *The Physics Teacher*, **56**:367–369, 2018. DOI: 10.1119/1.5051148.
- [5] Charles H. Holbrow. Build your own analemma. [online], 2013. [cit.2021-4-7]. Dostupné z: <https://arxiv.org/abs/1302.0765>.
- [6] Alejandro Jenkins. The sun's position in the sky. *European Journal of Physics*, **34**:633–652, 2012. DOI: 10.1088/0143-0807/34/3/633.
- [7] Marie Žvaková. Sluneční hodiny na PřF UP v Olomouci. [online]. Olomouc, UP, 2018 [cit.2021-5-11]. Dostupné z: [http://muj.optol.cz/~richterek/lib/exe/fetch.php?media=diplomky:slunecni\\_hodiny\\_pro\\_prf\\_final.pdf](http://muj.optol.cz/~richterek/lib/exe/fetch.php?media=diplomky:slunecni_hodiny_pro_prf_final.pdf).
- [8] Eric W Weisstein. Conic section. MathWorld-A Wolfram Web Resource. [online]. [cit.2021-5-8]. Dostupné z: <https://mathworld.wolfram.com/ConicSection.html>.



# Příloha A

## Výpis skriptu pro vykreslení analemy pomocí Eulerovy metody

V této části je ukázán skript programu Octave, který jsme použili k vytvoření modelu analemy pomocí Eulerovy metody v první kapitole.

```
clear all;
Ms=333054.25;
Mz=1;
kappa=0.0001184;
eps=0.0167;
a=1;
T=1;
t=1/(365*200);
L=(2*pi*Mz*a^2*(1-eps^2)^(1/2))/(T);
vx(1)=0;
vz(1)=0;
vy(1)=-L/(Mz*a*(1-eps));
x(1)=-a*(1-eps);
y(1)=0;
z(1)=0;

for (i=1:(365*200));
    vx(i+1)=vx(i)-t*(kappa*Ms*x(i))/(((x(i))^2+(y(i))^2+(z(i))^2)^(3/2));
    vy(i+1)=vy(i)-t*(kappa*Ms*y(i))/(((x(i))^2+(y(i))^2+(z(i))^2)^(3/2));
    vz(i+1)=vz(i)-t*(kappa*Ms*z(i))/(((x(i))^2+(y(i))^2+(z(i))^2)^(3/2));
    x(i+1)=x(i)+vx(i)*t;
    y(i+1)=y(i)+vy(i)*t;
    z(i+1)=z(i)+vz(i)*t;
endfor

n=0:(365*200);
rmx=cos(n*2*pi/(365*200+200)+pi);
rmy=sin(n*2*pi/(365*200+200)+pi);
rmz=0*n;

c=12.80025092/180;
vxr=vx*cos(-c*pi)+vy*sin(-c*pi);
```

```

vyr=vy*cos(-c*pi)-vx*sin(-c*pi);
vzr=vz;
xr=x*cos(-c*pi)+y*sin(-c*pi);
yr=y*cos(-c*pi)-x*sin(-c*pi);
zr=z;

vxt=vxr*cos(23.4*pi/180)+vzr*sin(23.4*pi/180);
vyt=vyr;
vzt=vzr*cos(23.4*pi/180)-vzr*sin(23.4*pi/180);
xt=xr*cos(23.4*pi/180)+zr*sin(23.4*pi/180);
yt=yr;
zt=zr*cos(23.4*pi/180)-xr*sin(23.4*pi/180);

for(k=1:(365*200));
    delta(k)=asin(-zt(k)/((xt(k))^2+(yt(k))^2+(zt(k))^2)^(1/2));
    alpha(k)=acos((-xt(k)*rmx(k)-yt(k)*rmy(k))/((xt(k))^2+(yt(k))^2)^(1/2));
endfor

x1=x(1:200*11:length(x));
y1=y(1:200*11:length(y));
xr1=xr(1:200*11:length(xr));
yr1=yr(1:200*11:length(yr));

figure(1);
plot(xr1,yr1,'ko','markerfacecolor','y','MarkerSize',2);
axis("equal");

alpha1=alpha(1:200*7:length(alpha));
delta1=delta(1:200*7:length(delta));

figure(2);
plot(alpha1,delta1,'ko','markerfacecolor','y','MarkerSize',8);
axis("equal");
xlabel('\alpha', "fontsize", 20);
ylabel('\delta', "fontsize", 20);
set(gca, "linewidth", 1, "fontsize", 20);

figure(3);
plot(x1,y1,'ko','markerfacecolor','y','MarkerSize',8);
axis("equal");
text(x1(8),y1(8)+0.04,"20.3.", "horizontalalignment", "center", "verticalalignment", "bottom", "fontsize", 12);

figure(4);
plot(alpha1,delta1,'ko','markerfacecolor','y','MarkerSize',4);
axis("equal", "off");
set(gca, "linewidth", 1, "fontsize", 20)

```

## Příloha B

# Výpis skriptu pro vykreslení kuželoseček

Skript programu Octave pro vykreslení kuželoseček zadané rovnicí v polárních souřadnicích a pro různé hodnoty  $K$ .

```
function draha(a,b,c)

color={'r','g','b','m','m','y','k'};
phi=0:0.05:2*pi;
K=a:b:c;
phi0=0;
r=ones(1,numel(phi));
x=ones(1,numel(phi));
y=ones(1,numel(phi));
k=2*6.674*10-11*(5.974*1024)2*1.989*1030;
L=1068/2;
for (s=1:numel(K));
    for (i=1:numel(phi));
        r(i)=(L2/k)/(1+K(s)*cos(phi(i)-phi0));
        x(i)=r(i)*cos(phi(i));
        y(i)=r(i)*sin(phi(i));
    endfor
    plot(x,y,color(s),'DisplayName',[K=',num2str(K(s))]);
    axis([-0.06,0.06,-0.05,0.05],"equal");
    xlabel("x");
    ylabel("y");
    hold on;
endfor
legend('location','northeastoutside');
legend('show');
saveas(figure(1),sprintf('PlotK.jpg'));
```