

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA EXPERIMENTÁLNÍ FYZIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Sbírka úloh Fyzikální olympiády kategorie C

Vypracoval:	Pavel Čuda
Studijní program:	B0114A110003 Fyzika pro vzdělávání
Studijní obor:	Fyzika pro vydělávání / Matematika pro vzdělávání
Forma studia:	Prezenční
Vedoucí bakalářské práce:	Mgr. Lukáš Richterek, Ph.D.
Termín odevzdání práce:	květen 2022

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou diplomovou práci vypracoval samostatně pod vedením Mgr. Lukáše Richterka, Ph.D. a že jsem použil zdrojů, které cituji a uvádím v seznamu použitých pramenů.

V Olomouci dne 15. května 2022

.....
Pavel Čuda

Poděkování

Rád bych zde poděkoval vedoucímu bakalářské práce Mgr. Lukášovi Richterkovi, Ph.D. za konzultace rady a věnovaný čas během vypracování mé bakalářské práce. Také bych rád poděkoval Kryštofovi Veselému za podporu a cenné poznámky.

Bibliografická identifikace

Jméno a příjmení autora	Pavel Čuda
Název práce	Sbírka úloh Fyzikální olympiády kategorie C
Typ práce	Bakalářská
Pracoviště	Katedra experimentální fyziky
Vedoucí práce	Mgr. Lukáš Richterek, Ph.D.
Rok obhajoby práce	2022
Abstrakt	Cílem této bakalářské práce je vytvořit tematicky členěnou sbírku řešených úloh Fyzikální olympiády kategorie C, použitelnou k přípravě studentů na soutěž. Součástí práce je stručné představení soutěže Fyzikální olympiáda a její historie, kapitola zabývající se přístupem k řešení úloh Fyzikální olympiády, teoretický základ k položkové analýze jednotlivých úloh a analýze vlastností testu jako celku. K výsledkům analýzy byly použity všechny výsledkové listiny ze všech dostupných krajů od 51. až do 62 ročníku. Výsledky analýzy byly použity k uspořádání úloh v rámci jednotlivých tematických celků a k posouzení, zda-li vlastnosti úloh odpovídají námi nastaveným kritériím.
Klíčová slova	strategie řešení, Fyzikální olympiáda, obtížnost úlohy, sbírka úloh
Počet stran	82
Počet příloh	1
Jazyk	český

Bibliographical identification

Autor's first name and surname	Pavel Čuda
Title	Collection of problems of the Physics Olympiad for elementary and lower grammar schools
Type of thesis	Bachelor
Department	Department of Experimental Physics
Supervisor	Mgr. Lukáš Richterek, Ph.D.
The year of presentation	2022
Abstract	The main goal of this bachelor theses is to compile a thematically divided collection of solved tasks from the region rounds of the Physics Olympiad category C, which can be used as a learning text for future participants. Parts of the work are also a brief introduction to the Physics Olympiad and its history, a chapter dealing with an approach to solving Physics Olympiad tasks, theory used in item analysis and overall feature analysis of test. Score sheets from 51st and 62nd Physics Olympiad and from all available regions were used for the analysis. Results of the analysis were used to arrange the order of individual tasks in each thematically divided unit and to assess the prosperities of the tasks based on criteria chosen.
Keywords	Physics Olympiad, difficulty index, approach to problem solving, collection of physics tasks
Number of pages	82
Number of appendices	1
Language	czech

Obsah

Úvod	7
1 Fyzikální olympiáda	8
1.1 Organizace Fyzikální olympiády	8
1.1.1 Kategorie	8
1.1.2 Hodnocení řešení FO	10
1.1.3 Úspěšný řešitel	10
1.1.4 Určování pořadí	10
1.2 Historie Fyzikální olympiády	11
2 Jak řešit úlohy Fyzikální olympiády?	13
2.1 Rozbor konkrétních řešení	15
3 Vlastnosti úloh Fyzikální olympiády	17
3.1 Analýza úloh Fyzikální olympiády	17
3.1.1 Obtížnost úlohy	17
3.1.2 Citlivost úlohy	18
3.1.3 Analýza nenormovaných odpovědí	18
3.2 Analýza soutěžních kol FO jako celku	19
3.2.1 Obtížnost testu	19
3.2.2 Validita testu	19
3.2.3 Reliabilita testu	19
3.3 Výsledky analýzy	19
3.3.1 Obtížnost úlohy	20
3.3.2 Citlivost úlohy	21
3.3.3 Analýza nenormovaných odpovědí	22
3.3.4 Reliabilita jednotlivých ročníků Fyzikální olympiády	23
3.3.5 Závěr analýzy	23
4 Sběrka řešených úloh	25
4.1 Kinematika	25
4.2 Dynamika	31
4.3 Pohyb v homogenním tíhovém poli Země	41
4.4 Mechanická práce a energie	49
4.5 Mechanika tuhého tělesa	53
4.6 Mechanika kapalin a plynů	57
4.7 Vnitřní energie a teplo	62
4.8 Struktura a vlastnosti plynů	70

Úvod

Jako téma své bakalářské práce jsem si zvolil Sbíрку úloh Fyzikální olympiády kategorie C. Téma mě oslovilo nejen z pohledu budoucího učitele fyziky, ale také z pohledu bývalého řešitele Fyzikální olympiády. Pro obě skupiny lidí, sdílející zájem o fyziku, může být spojení vznikajících sbírek řešených úloh z Fyzikální olympiády zdrojem netradičních úloh, se kterými by se v běžné výuce jinak nesetkali a jejichž řešením můžou zdokonalit své schopnosti.

V první kapitole je představena předmětová soutěž Fyzikální olympiáda, její cíle, organizační struktura a pravidla, kterými se řídí. Součástí této kapitoly je také stručný přehled historie této soutěže, která mapuje vývoj od jejího založení, na kterém se výrazně zasloužil prof. RNDr. Rostislav Košťál i olomoucká pobočka Jednoty českých matematiků a fyziků.

Druhou kapitolu tvoří pětice kroků, která nám představuje způsob, jakým přistupovat k řešení náročnějších úloh, které se vyskytují ve Fyzikální olympiádě. Dodržování těchto kroků by nám i řešitelům mělo poskytnout univerzální oporu a posloupnost kroků při řešení nejrůznějších fyzikálních úloh. V závěru druhé kapitoly jsou rozebrána konkrétní řešení jedné a téže úlohy dvěma různými řešiteli, kde se zaměřujeme nejen na chyby v řešení, ale také na možné nesprávné úvahy, které k těmto chybám mohly vést.

Třetí kapitola se zabývá analýzou jednotlivých ročníků i jednotlivých úloh krajských kol Fyzikální olympiády kategorie C. V první části se věnujeme teoretickému základu a seznámení se s jednotlivými pojmy, se kterými v analýze pracujeme. Druhá část obsahuje výsledky analýzy a možné závěry, jež z ní vyplývají.

Čtvrtou kapitolu tvoří sbírka řešených úloh krajských kol Fyzikální olympiády kategorie C od ročníku 51 až 62, tedy pro roky od 2010 až 2021. Příklady jsou členěné tematicky podle učebnic *Fyzika pro gymnázia: molekulová fyzika a termika* [1] a *Fyzika pro gymnázia: mechanika* [2], které se na gymnáziích stále používají. Úlohy v příslušných tematických celcích jsou seřazeny podle obtížnosti na základě výsledkových listin z jednotlivých krajů.

Kapitola 1

Fyzikální olympiáda

Fyzikální olympiáda je jednotná předmětová soutěž z fyziky pro základní a střední školy, která je hned po Matematické olympiádě druhou nejstarší oborovou olympiádou v České republice.

Cílem FO je vyhledávat a rozvíjet talentované žáky v oblasti fyziky, a proto její náplní není jen tvoření fyzikálních úloh a soutěže jako takové, ale také tvorba studijních materiálů pro žáky, zveřejňování jednotného řešení a pořádání přípravných seminářů, přednášek a soustředění.

1.1 Organizace Fyzikální olympiády

Soutěž probíhá pod záštitou Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy České republiky a o její chod se stará Jednota českých matematiků a fyziků (JČFM) společně s Ústřední komisí fyzikální olympiády. FO je členěna do následujících kol a kategorií.

1.1.1 Kategorie

- Kategorie A – je určena pro 4. ročník středních škol
- Kategorie B – je určena pro 3. ročník středních škol
- Kategorie C – je určena pro 2. ročník středních škol
- Kategorie D – je určena pro 1. ročník středních škol
- Kategorie E – je určena pro 9. ročník základních škol
- Kategorie F – je určena pro 8. ročník základních škol
- Kategorie G – je určena pro 7. ročník základních škol, známá též pod názvem Archimediáda

Účast každého žáka je dobrovolná a soutěží v kategorii, která odpovídá jeho studijnímu ročníku. V případě zájmu žáka je možná účast v kategorii určené pro vyšší ročník. Účastník v dané kategorii řeší úlohy příslušné tematickému plánu daného studijního ročníku. Pro kategorie B, C, D se soutěž koná ve školním a krajském kole. Kategorie A má navíc kolo ústřední (celostátní).

Školní kolo FO má především studijní charakter. Tvoří jej 7 tematicky členěných úloh, na které mají žáci za úkol samostatně vypracovat řešení. Jednu ze sedmi úloh tvoří experimentální úloha, která je často zadaná tak, že ji lze měřit nejen ve škole,

ale také doma. Na odevzdání řešení má žák čas několik měsíců. Společně se zadáním úloh vychází sada studijních materiálů, které mohou žákům pomoci při řešení úloh. V každém soutěžním kole pro kategorie A-D vždy jedna úloha navazuje na studijní text stanovený pro danou úlohu v příslušném ročníku.

Krajské kolo FO tvoří 4 úlohy, které žáci řeší samostatně ve vyhrazeném čase 4 hodin. Mezi povolené pomůcky patří matematické, fyzikální, chemické tabulky a neprogramovatelná kalkulačka.

Ústřední kolo FO se skládá z teoretické části, obsahující 4 úlohy, a z části experimentální, kterou tvoří teorie, zadání a jednotlivé části měření. Ústředního kola se účastní většinou okolo 50 nejúspěšnějších řešitelů krajského kola a trvá čtyři dny. První den je oficiální zahájení soutěže. Druhý den probíhá řešení čtyř teoretických úloh, na jejichž vypracování mají účastníci celkem 5 hodin času. Třetí den patří řešení experimentální úlohy a poslední den probíhá slavnostní vyhlášení výsledků. Mezi povolené pomůcky patří matematické, fyzikální, chemické tabulky a neprogramovatelná kalkulačka.

Na základě výsledků ústředního kola a speciálního výběrového soustředění vybírá Ústřední komise FO pěctici řešitelů, která bude reprezentovat Českou republiku v Mezinárodní fyzikální olympiádě.

Soutěžní kola kategorií E, F, G mají následující organizaci.

Školní kolo FO má pro kategorii G (Archimediádu) 5 úloh a z toho jednu experimentální. Kategorie E a F sdílí společné zadání školního kola, které tvoří zpravidla 12 až 18 úloh, z nichž učitel vybere podle probraného učiva 7 úloh, pro které platí, že alespoň jedna z nich je experimentální. Tyto vybrané úlohy pak žáci řeší. Na odevzdání řešení mají žáci čas několik měsíců.

Okresní kolo FO pro žáky soutěžící v kategorii E a F tvoří 4 teoretické úlohy, které žáci řeší samostatně ve vyhrazeném čase 4 hodin. Forma, jakou okresní kolo FO kategorie G probíhá, může být pro jednotlivé okresy různá. Můžeme se proto setkat se situací, kdy se okresního kola účastní nejen jednotlivci, ale také družstva. Soutěžící může kromě řešení fyzikálních úloh čekat také předvedení reálného pokusu.



Obrázek 1.1: Účastník okresního kola kategorie G řešící fyzikální úlohu, Zdroj: <https://kkfoolcz.rajce.idnes.cz>



Obrázek 1.2: Účastník okresního kola kategorie G předvádějící experiment, Zdroj: <https://kkfoolcz.rajce.idnes.cz>

Krajského kola FO se účastní pouze nejúspěšnější účastníci okresního kola kategorie E, kteří zde opět řeší 4 teoretické úlohy ve vyhrazeném čase 4 hodin.

1.1.2 Hodnocení řešení FO

Z každé úlohy lze získat maximálně 10 bodů, s výjimkou experimentální úlohy ústředního kola FO, kde je maximální počet bodů 20. To, kolik bodů žák obdrží, závisí na kvalitě a úplnosti jeho řešení. Plný počet bodů získá řešitel, jestliže úlohu vyřešil bez chyb nebo jehož řešení obsahovalo pouze drobné formální chyby. Počet bodů se snižuje, pokud je řešení neúplné, v řešení se vyskytují závažnější chyby, chybí-li podstatný slovní výklad nebo jestliže z něj není patrný myšlenkový postup pro řešení daného problému. Za úspěšně řešenou úlohu se považuje takové řešení, které je ohodnoceno 5 a více body.

1.1.3 Úspěšný řešitel

Kritéria, podle kterých můžeme označit účastníka za úspěšného řešitele se mohou pro jednotlivá kola a kategorie lišit. Vyjdeme-li z [28], potom platí:

Za úspěšného řešitele školního kola FO považujeme každého, kdo získal v alespoň pěti z celkových sedmi příkladů 5 a více bodů a zároveň se pokusil o řešení experimentální úlohy. Výjimku tvoří školní kolo kategorie G (Archimediády), kde považujeme za úspěšného řešitele každého, kdo získá v nejméně třech z celkových pěti řešených úloh 5 a více bodů.

V okresních a krajských kolech FO je úspěšným řešitelem každý účastník, kterému se podaří celkově dosáhnout alespoň 14 bodů, přičemž musí získat nejméně 5 bodů alespoň ve dvou ze čtyř úloh. Pro kategorii G se mohou kritéria lišit v závislosti na způsobu organizace okresního kola.

Bodová hranice úspěšného řešitele ústředního kola se obvykle určuje tak, že za úspěšného řešitele považujeme každého účastníka, který dosáhl alespoň polovičního počtu bodů z průměrného hodnocení prvních třech soutěžících. Za vítěze pak označujeme každého úspěšného řešitele, který se pohybuje v prvních 18–24 procentech řešitelů s největším počtem bodů.

1.1.4 Určování pořadí

Pořadí, ve kterém se účastník umístí nezáleží pouze na počtu získaných bodů, ale také na skutečnosti, zda-li byl úspěšným řešitelem. Jako první se v tabulce umístí úspěšní řešitelé a až za nimi ostatní účastníci, a tak se může stát, že se žák s nižším počtem bodů umístí v tabulce nad žákem s vyšším počtem bodů. Může nastat případ, kdy se v soutěži umístí více účastníků ve stejném pořadí. V tomto případě postupujeme dvěma způsoby v závislosti na tom, zda-li se v daném kole FO může vyskytovat dělené pořadí. V případě výskytu děleného pořadí k soutěžících se shodným počtem bodů jej píšeme ve formátu „ n . – $(n + k - 1)$.“. Účastník, který se umístil v tabulce za nimi bude na „ $(n + k)$.“ místě, kde n je pořadí, o které se dělí k účastníků.

V případě, že dělené pořadí v tabulce není přípustné (např. v krajských kolech FO) a nastane situace, že více účastníků má stejný počet bodů, počítají se tzv. modifikované body MB. Modifikované body nám zohledňují nejen dosažený počet bodů, ale také z jak obtížných úloh byly body získány. Počet MB získáme podle

$$MB = \sum_{i=1}^N B_i(B_{i,\max} - B'_i),$$

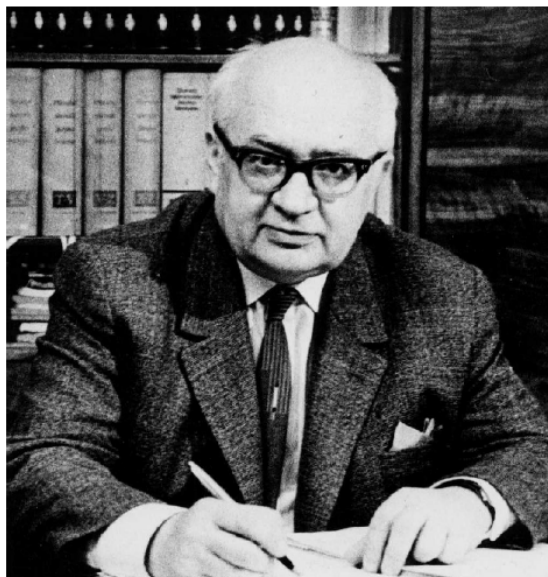
kde N je počet úloh v daném kole, B_i značí bodový zisk soutěžícího z dané úlohy, $B_{i,\max}$ značí maximálně možný bodový zisk za úlohu a B'_i je průměrný bodový zisk z dané úlohy.

Vyšší počet MB znamená lepší pořadí. V případě rovnosti MB pak rozhoduje rok narození účastníka, kdy dostává přednost mladší účastník. Pokud stále není rozhodnuto o pořadí, lze jako poslední kritérium použít los.

1.2 Historie Fyzikální olympiády

Soutěž Fyzikální olympiáda byla založena 1. listopadu 1959 a na jejím zrodu se podílelo mnoho jmen. Jednou z význačných postav spojenou s historií FO je její spoluzakladatel prof. RNDr. Rostislav Košťál z VUT v Brně, se kterým se stručně seznámíme v následujících bodech:

- Spoluzakladatel Československé (1959) a Mezinárodní (1966) Fyzikální Olympiády;
- v roce 1946 vedl a budoval Ústav lékařské fyziky na Univerzitě Palackého v Olomouci;
- ve svých vědeckých pracích se zabýval především studiem kmitů
- rozsáhlá tvorba vysokoškolských učebních textů a studijních textů pro FO;
- z politických důvodů vykonával funkci předsedy ústředního výboru FO až od roku 1966;
- V roce 1993 ocenilo Světové společenství fyziků jeho podíl na MFO velkou medailí (im memoriam).



Obrázek 1.3: prof. RNDr. Rostislav Košťál, Zdroj: Dostupné z: <http://fyzikalniolympiada.cz/dokumenty/kostal.pdf>

První náznaky fyzikálních soutěží se začínaly objevovat v roce 1957, kdy z iniciativy pracovníků Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého uspořádala JČFM v Olomouci soutěž studentů nejvyšších ročníků středních škol v řešení náročných fyzikálních úloh. Následující rok na podzim 1958 už můžeme hovořit o tzv. „nultém ročníku FO“, který se konal ve třech krajích (Olomouckém, Brněnském a Praze). Do soutěže se zapojilo 572 středoškolských žáků a stala se tak cenným zdrojem informací pro budoucí organizaci Fyzikální olympiády o úrovni fyziky na středních školách a o dovednostech žáků. Zkušenosti z nultého ročníku a inspirace z již existující Matematické olympiády dala v roce 1959 vzniknout Fyzikální olympiádě. Soutěž probíhala pod záštitou Ministerstva školství a kultury a o její řízení se staral Ústřední výbor FO se 4letým funkčním obdobím.

V prvním funkčním období byly zavedeny pouze 3 soutěžní kategorie pro střední školy a to A, B a C, které probíhaly v přípravném a krajském kole s tím, že kategorie A měla navíc celostátní kolo. První funkční období mělo za cíl proniknout s touto nově vzniklou soutěží do co možná nejvíce středních škol, přičemž se již historicky prvního ročníku zúčastnilo více jak 3200 žáků středních škol z celého Československa. Historicky prvním předsedou ústředního výboru Fyzikální olympiády (ÚVFO) byl tehdejší

vedoucí katedry teoretické fyziky a astronomie Univerzity Palackého v Olomouci prof. dr. Bedřich Havelka, DrSc.

V druhém funkčním období, započatém 5. ročníkem FO, byla soutěž doplněna o kategorii D, kterou došlo k zapojení základních škol do této soutěže. Kategorie měla za úkol podchytit co největší počet žáků se zájmem o fyziku.

Třetí funkční období je spojeno s rokem 1966, kdy byl prof. RNDr. Rostislav Košťál jmenován předsedou ÚVFO a kdy se zrodila Mezinárodní fyzikální olympiáda, jejíž historicky první ročník se konal ve Varšavě. R. Košťál byl předsedou ÚVFO až do 18. ročníku FO. V těchto ročnících procházela FO svým zlatým obdobím. Studijní okruhy se rozšířily a pro větší objektivitu řešení došlo ke sjednocení oprav úloh. Fyzikální olympiáda se rozrostla do 67 % všech základních a středních škol.

V následujících ročnících se počet účastníků i zapojených škol zvyšoval a v desátém funkčním období došlo k rozšíření o kategorie E (pro 8. ročník základní školy) a F (7. ročník základní školy), která nese název Archimediáda.

Posledním ročníkem, kdy zaznamenala FO rostoucí účast, je 29. ročník v roce 1988, ve kterém se soutěže zúčastnilo 22 487 žáků. Po tomto ročníku se FO ocitla v nelehké politické situaci, ke které se později přidalo rozdělení Československa a s tím spojená náročná ekonomická a administrativní situace. V tomto období došlo k depolitizaci a celkové modernizaci školství, které se zaměřilo na posílení humanizace a národního sebevědomí. Tento směr školství probíhal bohužel na úkor přírodních věd, což vedlo ke snížení počtu vyučovacích hodin fyziky ve školách a s tím klesal i zájem o mimoškolní aktivity spojené s fyzikou, a tím i o FO. Po rozdělení Československa došlo k rozdělení FO, ale i přesto dobíhaly stále některé společné činnosti, jako ústřední kolo FO, společné soustředění na MFO, příprava soutěžních úloh a vydávání literatury. Kvůli obtížné administrativě a lišícími se osnovami fyziky, došlo později ke vzniku dvou úplně samostatných FO České a Slovenské republiky. (FO České republiky a Fyzikálna olympiáda Slovenskej republiky).

Kapitola 2

Jak řešit úlohy Fyzikální olympiády?

V této kapitole si ukážeme, jakých zásad bychom se měli držet při řešení úloh Fyzikální olympiády, které jsou často komplexnější a jejichž postup nemusí být vždy na první pohled patrný. Jednotlivé kroky nejsou pouhým výčtem úkonů, kterých by se měl účastník FO držet, ale nabízí také pohled, jak k takovým úlohám přistupovat. Tyto kroky vychází především z následujících ze studií [3] [12] [17] [26], které se nezabývají pouze strategií řešení fyzikálních úloh, ale zkoumají také, co vše ovlivňuje naše vnímání úlohy a jakých chyb se můžeme dopustit .

V závěru kapitoly si rozebereme dva konkrétní případy úspěšně a neúspěšně řešené úlohy FO62C2-4. Uvedeme si jakých chyb se v nich řešitelé dopustili a co k nim mohlo vést.

Krok č. 1: Výběr úlohy

V momentě, kdy získáme znění úloh a jejich podúkolů, je dobré si zběžně přečíst zadání všech úloh. Jak je parné z tabulky 3.2, úlohy jednotlivých kol nejsou seřazeny od nejlehčí po nejtěžší a při pokusu řešit úlohy chronologicky, bychom se mohli při řešení některé náročnější úlohy zaseknout a ztratit tím drahocenný čas potřebný k řešení ostatních úloh. Tomuto se lze vyhnout předběžným přečtením všech zadání, díky kterému si vytvoříme představu o obtížnosti jednotlivých úloh a ty pak řešíme od nejlehčí po nejnáročnější.

Krok č. 2: Seznámení se s problémem a jeho zápis

Poté, co jsme si vybrali úlohu je důležité si řádně prostudovat její zadání a otázky. Zadání je zpravidla ve formě textu, který bývá v některých případech doplněný o obrázek, kterému bychom měli také věnovat pozornost, protože může obsahovat informace, které mohou ovlivnit způsob, jakým chápeme fyzikální kontext dané úlohy a jak budeme úlohu řešit. Nepozorná četba zadání a otázek je častou příčinou absence informací nezbytných pro řešení úlohy a nesprávných nebo neúplných odpovědí.

Po prostudování zadání, bychom měli mít přehled, co vše o problému víme a co vše se po nás vyžaduje řešit. Je vhodné si vypsát seznam známých a hledaných veličin, jejichž symboly by se v průběhu řešení neměly měnit. Máme-li k dispozici číselné hodnoty veličin, často je vhodné převést je do základních jednotek. U některých úloh může být přínosné vytvořit si příslušné grafy, které nám mohou pomoci objasnit problematiku úlohy a vztahy mezi veličinami.

Krok č. 3: Strategie řešení

Tento krok se týká především kognitivních procesů, pomocí kterých se snažíme zvolit správnou strategii, jak zadanou úlohu řešit. Volba správné strategie není snadná. Užitím některých strategií, můžeme získat řešení jednoduchých úloh, ale pro komplexnější úlohy Fyzikální olympiády jsou nevhodné. Uvedeme si pár příkladů:

- **Hledání vzorce** - Jedná se o nejrozšířenější žakovskou strategii. Zde se místo na fyzikální koncept zaměřujeme především na seznam veličin, které máme zadané a které se po nás vyžadují. Na základě těchto veličin hledáme vzorec, který tyto veličiny obsahuje, a to někdy i bez toho, abychom porozuměli příslušnému fyzikálnímu konceptu. Jako příklad můžeme použít bezhlavé dosazení do vzorce pro výpočet dráhy $s = v_0t + \frac{at^2}{2}$ v případě, kdy zrychlení a není konstantní, ale mění se v čase.
- **Dříve řešená úloha** – Při volbě této strategie řešíme problém tak, že se snažíme vybavit si podobnou úlohu, se kterou jsme se v minulosti setkali společně se vzorci, které vedly k jejímu vyřešení. Neuváženým použitím této analogie sice můžeme získat vzorec, obsahující všechny námi požadované veličiny, ale stejně jako v předešlém případě se může lišit fyzikální koncept současné a dřívější úlohy, a tak může toto řešení vést ke špatnému výsledku.
- **Žádná strategie** – Nastane-li situace, že nepochopíme podstatu problému fyzikální úlohy nebo nenajdeme žádný fyzikální koncept na kterém bychom mohli postavit naše řešení, uchylujeme se k takové strategii, že hledané veličiny zkusíme získat náhodnou kombinací zadaných veličin. V této situaci navíc nebývá neobvyklé, že veličiny chápeme pouze jako symboly, které spolu navzájem nesouvisí nebo vztahy mezi nimi nechápeme.

Pro úspěšnou strategii řešení fyzikální úlohy je nezbytné porozumět problematice fyzikální úlohy a zvolit jeden nebo více fyzikálních konceptů, které vedou k řešení úlohy. Jako příklad si lze uvést, že některé úlohy můžeme řešit současně použitím kinematiky nebo pomocí zákona zachování mechanické energie.

Krok č. 4: Řešení úlohy

Poté, co jsme si v předchozím kroku zvolili, který fyzikální koncept použijeme k řešení zadané úlohy, vyjádříme si jej pomocí příslušných vzorců. Úlohu řešíme nejdřív obecně nebo si ji můžeme úlohu rozložit na systém podúloh, které řešíme jednotlivě. Po dosazení číselných hodnot za veličiny v základním tvaru získáme matematickými úpravami výsledek a formulujeme odpověď na otázku. Při zapisování výsledku dodržujeme pravidla pro správné zaokrouhlování popsané v [14].

Krok č. 5: Kontrola výsledků a odpovědi

V tomto závěrečném kroku provedeme kontrolu, jestli je naše odpověď úplná a opravdu odpovídá na zadanou otázku. Dále zkontrolujeme náš výsledek, jestli jeho číselná hodnota, jednotka i řád dávají smysl. Např. bude-li náš výsledek, že se auto pohybovalo rychlostí $v = 5000 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, lze předpokládat, že jsme se při řešení úlohy dopustili chyby a je na místě řešit úlohu znovu. Žáci využívající nevhodné strategie řešení fyzikální úlohy často nejsou schopni této reflexe.

2.1 Rozbor konkrétních řešení

S ohledem na kroky, které jsme si uvedli, provedeme rozbor úspěšně a neúspěšně řešené úlohy FO62C2-4. Zaměříme se nejen na výskyt chyb, ale také na postup při řešení a na to, co mohlo být příčinou těchto chyb. Obě konkrétní řešení byly získány ze systému Fyzikální olympiády OSMO vyvinutého v době pandemie COVID-19.

Zadání úlohy:

Na kraji střechy se ve výšce $h = 10$ m nad zemí leží míček o hmotnosti $m_2 = 200$ g. Do míčku narazí vodorovně letící střela o hmotnosti $m_1 = 10$ g a pohybující se rychlostí $v_1 = 500$ m · s⁻¹, prorazí ho a pokračuje v letu menší rychlostí. Míček dopadne na zem ve vzdálenosti $x_2 = 25$ m od domu.

- Jaká bude rychlost míčku u_2 a jaká bude rychlost střely u_1 bezprostředně po průletu střelou míčkem?
 - V jaké vzdálenosti x_1 od domu dopadne střela na zem?
 - Jaká část energie střely se přeměnila při proražení míčku na teplo?
 - Do jaké vzdálenosti x_3 by míček dopadl, kdyby v něm střela uvízla?
- Tíhové zrychlení $g = 9,81$ m · s⁻².

Rozbor úspěšně řešené úlohy

Povšimněme si některých prvků řešení:

$h = 10$ m
 $m_2 = 200$ g
 $m_1 = 10$ g
 $v_1 = 500$ m · s⁻¹
 $x_2 = 25$ m
 $g = 9,81$ m · s⁻²

$x = u_1 t$
 $y = h - \frac{1}{2} g t^2$
 $g = 9,81$ m · s⁻²

$a) u_1, u_2 = ?$
 $h = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$
 $u_2 = \frac{x_2}{t} = \frac{x_2}{\sqrt{\frac{2h}{g}}} = \frac{25}{\sqrt{\frac{2 \cdot 10}{9,81}}} = 18$ m · s⁻¹

$\Delta E_k \neq \Delta E_{k1} + \Delta E_{k2}$
 $p_1 = p_2 \Rightarrow m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \Rightarrow u_1 = \frac{m_1 v_1 - m_2 u_2}{m_1} = \frac{500 \cdot 0,010 - 18 \cdot 0,2}{0,010} = 140$ m · s⁻¹

$x_1 = u_1 t = u_1 \sqrt{\frac{2h}{g}} = 140 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 10}{9,81}} = 200$ m
 Střela dopadne ve vzdálenosti 200 m ků.

$c) \Delta E = \Delta E_{k1} - \Delta E_{k1}' - \Delta E_{k2} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 u_1^2 - \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = 0,5 \cdot 0,010 \cdot 500^2 - 0,5 \cdot 0,010 \cdot 140^2 - 0,5 \cdot 0,2 \cdot 18^2$
 $\Delta E = 1,1$ kJ $\approx 88\% E_{k1}$
 88% energie střely se přeměnila na teplo.

$d) E_{k1} = E_k$
 $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_3^2$
 $v_3 = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{0,01 \cdot 500}{0,01 + 0,2} = 24$ m · s⁻¹
 $x_3 = v_3 t = v_3 \sqrt{\frac{2h}{g}} = 24 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 10}{9,81}} = 34$ m
 míček dopadne ve vzdálenosti 34 m ků.

- + tabulka veličin;
- + nákres situace;
- + výskyt obecných řešení a slovních odpovědí;
- řešitel používá k výpočtům číselných hodnot veličin zaokrouhlené hodnoty;
- + řešitel správně volí fyzikální koncepty vyskytující se v úloze a umí je vyjádřit pomocí příslušných rovnic;
- + řešitel odpovídá přesně na otázky ze zadání;
- + v odpovědi na otázku d) si můžeme povšimnout, že řešitel byl s největší pravděpodobností schopen posoudit nesprávnost výsledku původního řešení, změnit volbu fyzikálního konceptu použitého k řešení problému a správně odpovědět na otázku.

Rozbor neúspěšně řešené úlohy

Povšimněme si dobrých i méně povedených částí řešení:

4

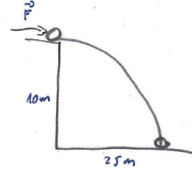
$$h = 10 \text{ m}$$

$$m_2 = 0,2 \text{ kg}$$

$$m_1 = 10 \text{ g} = 0,01 \text{ kg}$$

$$v_1 = 500 \text{ m/s}$$

$$x_2 = 25 \text{ m}$$



$$a) \quad h = \frac{1}{2} g t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10}{9,81}} = 1,4278 \text{ (s)} - \text{doba pádání míčku ze středy}$$

$$s = \frac{1}{2} v t^2$$

$$u_2 = \frac{2s}{t} = \frac{2 \cdot 25}{1,4278} = 35,048 \approx 35 \text{ (ms}^{-1}\text{)} - \text{rychlost míčku po odrazu střely}$$

22E:

$$m_1 \cdot v_1^2 + m_2 \cdot v_2^2 = m_1 \cdot u_1^2 + m_2 \cdot u_2^2$$

$$u_1^2 = \frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 - m_2 u_2^2}{m_1}$$

$$u_1^2 = \frac{0,01 \cdot 500^2 + 0,2 \cdot 0 - 0,2 \cdot 35^2}{0,01} = 22500 \quad u_1 = 474,868$$

Rychlost míčku bude 35 ms^{-1} a rychlost střely $474,868 \text{ ms}^{-1}$

$$b) \quad s = \frac{1}{2} u_1 t \quad s = \frac{1}{2} \cdot 474,868 \cdot 1,4278 = 142,78 \quad s = 339 \text{ m}$$

střela dopadne 339 m od domu.

c) střela ztratila kinetickou E, uk. se přeměnila na teplo:

$$\Delta E = E_{k1} - E_{k2} = \frac{1}{2} \cdot 0,01 \cdot 500^2 - \frac{1}{2} \cdot 0,01 \cdot 474,868^2 = 1250 - 1123,58 = 126,62 \text{ (J)}$$

míček ale část E dostal:

$$E_{\text{míček}} = \frac{1}{2} \cdot 0,2 \cdot 35^2 = 122,5 \text{ (J)} \quad E = (126,62 - 122,5) \text{ J} = 4,12 \text{ J}$$

E přeměněná na teplo je tedy $4,12 \text{ J}$.

4 2. str.

$$d) \quad m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = (m_1 + m_2) u_3^2$$

$$u_3^2 = \frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2}{m_1 + m_2}$$

$$u_3^2 = \frac{0,01 \cdot 500^2 + 0,2 \cdot 0}{0,01 + 0,2} = \frac{2500}{0,21} = 11904,76$$

$$x_3 = \frac{1}{2} u_3 t$$

$$u_3 = 109,1 \text{ ms}^{-1}$$

$$x_3 = \frac{1}{2} \cdot 109,1 \cdot 1,4278 = 77,896 \text{ (m)}$$

Míček by dopadl do vzdálenosti 77,896 m.

+ tabulka veličin

+ nákres situace

+ výskyt obecných řešení a slovních odpovědí

+ Aby řešitel zjistil velikost rychlosti míčku u_2 v odpovědi na otázku a), rozdělil si úkol na vyjádření času dopadu t , který následně použil k výpočtu vzdálenosti x_2

- Nekonzistentnost ve značení s a x_2

- Chyba: Rychlost míčku se řešitel snažil získat pravděpodobně pomocí rovnic $x_2 = \frac{at^2}{2}$ a $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ a kombinací těchto rovnic

získal $x = \frac{1}{2} vt$. Tato kombinace je bohužel nevodná pro rovnoměrný pohyb míčku ve směru letu vystřelené kulky.

- Chyba: Pro zjištění rychlosti u_1 kulky z druhé části odpovědi na otázku a) a vzdálenosti x_3 z odpovědi na otázku d) byl nesprávně použitý namísto zákona zachování hybnosti zákon zachování energie, čemuž mohlo být předejito pozorným přečtením otázky c), ve které upozorňujeme na tepelné ztráty při proražení míčku kulkou.

- Chyba: U odpovědi na otázku c) byly úvahy řešitele správné, nicméně nepozorné přečtení zadání způsobilo, že otázka ze zadání, kde se ptají namísto číselné hodnoty energetické ztráty na to, jakou tvořila část, nebyla zodpovězena.

Kapitola 3

Vlastnosti úloh Fyzikální olympiády

Jednotlivá soutěžní kola Fyzikální olympiády lze vnímat, jako specifický druh testu tvořeného čtyřmi otevřenými úlohami, které pokrývají různá fyzikální témata a liší se pro každou ze sedmi soutěžních kategorií. Protože cílem Fyzikální olympiády je vyhledávat budoucí fyzikální elity, je nutné, aby test i jeho jednotlivé úlohy byly schopny rozlišit výjimečně nadané účastníky s talentem a komplexními znalostmi fyziky od ostatních účastníků. Aby byl test schopný tohoto cíle dosáhnout, je potřeba, aby měl celkově i jeho jednotlivé úlohy jisté vlastnosti, jejichž analýzou se budeme v této kapitole zabývat. Mezi vlastnosti testových úloh, které budeme analyzovat, patří obtížnost úlohy, citlivost úlohy a analýza nenormovaných odpovědí. Z vlastností testu jako celku se seznámíme s validitou a reliabilitou.

3.1 Analýza úloh Fyzikální olympiády

3.1.1 Obtížnost úlohy

Obtížnost úlohy je nejčastěji analyzovaná vlastnost položky didaktického testu, která je velmi dobře zkoumatelná. Lze ji vyjádřit pomocí *hodnoty obtížnosti* Q , nebo pomocí *indexu obtížnosti* P . V této práci se bude vyskytovat pouze *index obtížnosti*, který získáme jako

$$P = \frac{n_s}{n} \cdot 100\%, \quad (3.1)$$

kde n_s je počet testovaných ve skupině, kteří odpověděli v dané úloze správně a n je celkový počet testovaných ve skupině. *Indexu obtížnosti* P nám udává procentuální hodnotu testovaných ve skupině, kteří danou úlohu zodpověděli správně [9].

Protože úlohy ve fyzikální olympiádě jsou otevřené a hodnotí se místo binárního „splnil/nespil“ počtem bodů od 0 do 10, je vhodnější počítat s obecným indexem obtížnosti, který je dán vztahem

$$P = \frac{\bar{x}}{x_m} \cdot 100\%,$$

kde \bar{x} je aritmetický průměr bodů všech testovaných v dané úloze a x_m je maximální možný počet bodů [20].

Podle [9] by index obtížnosti úloh neměl být nižší jak 20 %, kdy je úloha příliš obtížná, ale zároveň by neměl přesahovat hodnotu 80 %, kdy jsou úlohy příliš snadné. Příliš snadné úlohy mohou mít v běžných didaktických testech motivační charakter, avšak jejich přítomnost v FO je nežádoucí, protože nejsou vhodným prostředkem

k dosažení cíle FO (nalezení fyzikálních talentů). Příliš obtížné úlohy mohou být použité k dosažení tohoto cíle, ale jejich nevhodnost spočívá ve velkém množství účastníků, kteří danou otázku nezodpoví, nebo jejím řešením ztratí příliš mnoho času. Jako optimální hodnotu indexu obtížnosti se obvykle uvádí 50 %.

3.1.2 Citlivost úlohy

Citlivost úlohy lze jednoduše vyjádřit jako schopnost úlohy rozlišovat mezi žáky s horšími a lepšími vědomostmi [11]. Vysokou citlivost má taková úloha, kterou řeší s velkým úspěchem žáci, kteří mají celkově lepší vědomosti, zatímco žáci, kteří mají celkově horší vědomosti, v této úloze dosahují špatných výsledků [10].

Citlivost úlohy můžeme získat pomocí několika koeficientů (ULI, Pearsonův korelační, bodově biserální, tetrachorický), které nabývají hodnot od -1 do 1 . V této práci užíváme k určení citlivosti úloh tetrachorický koeficient r , který udává míru korelace mezi dvěma proměnnými, které mohou nabývat pouze dvou hodnot. Chráska [10] popisuje tetrachorický koeficient jako pracnější, ale spolehlivější metodu k určení citlivosti. Pro jeho výpočet je vhodné si sestavit tzv. čtyřpolní tabulku (obr.3.1).

	+	-
L	a	b
H	c	d

Obrázek 3.1

Kde řádek L tvoří „lepší žáci“ a řádek H „horší žáci“. Rozdělování žáků do jednotlivých řádků L nebo H probíhá na základě hodnocení celkového výsledku testu daného žáka. Sloupec + tvoří žáci, kteří úlohu úspěšně vyřešili a sloupec – žáci, kteří úlohu nevyřešili. Hodnotu koeficientu r získáme jako

$$r = \cos \left(180 \frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{bc} + \sqrt{ad}} \right). \quad (3.2)$$

Při dělení žáků do řádků se můžeme omezit na menší část než poloviny (např. nejlepší a nejhorší třetina žáků). Při dělení na polovinu je pro dostatečně citlivou položku požadovaná hodnota alespoň 0,15. Při dělení na menší části jsou požadovány hodnoty vyšší [10].

3.1.3 Analýza nenormovaných odpovědí

Analýza nenormovaných odpovědí se zabývá úlohami, které byly řešeny nesprávně nebo u kterých odpověď chyběla. Nesprávné odpovědi mohou být zapříčiněny chybami, které dělíme na základní (neznalost učiva, nepochopení zadání) a vedlejší (početní a numerické chyby, přehlédnutí podstatných informací v zadání úlohy, chyby zapříčiněné nervozitou/nepozorností). Pokud v úloze převažuje počet vedlejších chyb nad chybami vlastními, je třeba takovou úlohu jako nevyhovující z testu vyloučit [10].

V případě chybějících odpovědí na otevřené úlohy je podle Chrásky vhodné se zaměřit na ty úlohy, ve kterých odpověď vynechalo více jak 30–40 % účastníků. Jako hlavní důvody uvádí nedostatek času, neznalost učiva a nepochopení formulace úlohy [10].

3.2 Analýza soutěžních kol FO jako celku

Soutěžní kola FO považujeme za specifickou formu testu a chceme-li popsat její vlastnosti, pak k tomu můžeme využít nástroje, které se používají k popisu vlastností didaktických testů. Za vlastnosti testu jako celku se nejčastěji uvádí validita a reliabilita, jiné zdroje [9] navíc praktičnost, případně obtížnost [20].

3.2.1 Obtížnost testu

Index obtížnosti testu lze vypočítat jako aritmetický průměr obtížností jeho jednotlivých úloh.

3.2.2 Validita testu

Validita, neboli také platnost testu, nám vypovídá do jaké míry test ověřuje požadované schopnosti, znalosti a dovednosti. Test je tedy dostatečně validní právě tehdy, když se jím zkouší skutečně to, co má být zkoušeno. [9]. Rozlišujeme validitu obsahovou, kritériální, pojmovou, predikční a souběžnou, ale protože jejich určení není otázkou kvantitativního, ale kvalitativního pedagogického zkoumání prováděného odborníky, nebude se v této práci vyskytovat.

3.2.3 Reliabilita testu

Didaktický test má dobrou reliabilitu tehdy, pokud poskytuje spolehlivé a přesné výsledky [9]. Pojem spolehlivost didaktického testu vyjadřuje, že pokud bychom opakovaně testovali stejnou skupinu žáků, výsledky všech opakovaných měření by měly být v zásadě stejné [11]. Míru reliability můžeme získat několika způsoby, například opakovaným zadáním stejného nebo ekvivalentního testu stejným žákům nebo pomocí vhodných koeficientů. Jako příklad si lze uvést Kuder-Richardsonův koeficient, který se používá pro zjištění reliability úloh s dichotomickými odpověďmi, a pomocí tzv. Crombachova alfa, které se v této práci využívá a zkoumá vnitřní konzistenci testu. Je dáno vzorcem

$$\alpha = \frac{k}{k-1} \cdot \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^k s_{x_i}^2}{s_h^2} \right), \quad (3.3)$$

kde k je počet položek v testu, $s_{x_i}^2$ je rozptyl bodů z i -té položky a s_h^2 je rozptyl celkového počtu bodů z testu [20]. Koeficient nabývá hodnot od 0 do 1. Podle Bílka a Jeřábka [11] je od testů obsahující větší počet úloh vyžadována reliabilita alespoň 0,8. Soutěžní kola Fyzikální olympiády ale obsahují menší počet úloh a pro takové testy je dolní hranice reliability 0,6.

3.3 Výsledky analýzy

Při analýze vlastností krajských kol FO kategorie C i jejich jednotlivých úloh jsme vycházeli z výsledkových listin 59. až 62. ročníku fyzikální olympiády. Protože se 61. a 62. ročník Fyzikální olympiády konal online, jsou v pro tyto ročníky dostupné výsledky ze všech krajů. Pro ostatní ročníky je dostupnost výsledkových listin znázorněna v následující tabulce 3.1.

Tabulka 3.1: Tabulka dostupností výsledků



Protože zastoupení krajů ve výsledkových listinách pro jednotlivé ročníky není stejné, nebude vypracována analýza vývoje počtu účastníků FO pro jednotlivé ročníky. V 61. ročníku pracujeme pouze s 3. úlohou, protože v tomto ročníku neprobíhalo klasické členění do kategorií A/B/C/D, ale na A/B,C,D a úlohy 1, 2 a 4 budou zpracovány Markétou Ospálkovou v její bakalářské práci [15].

3.3.1 Obtížnost úlohy

Obtížnost jednotlivých úloh byla vypočtena pomocí *obecného indexu obtížnosti* P (3.1) a obtížnost jednotlivých ročníků jako aritmetický průměr indexů obtížností jejich úloh. Za vyhovující úlohy jsou považovány ty úlohy, jejichž indexy obtížnosti se pohybují v intervalu od 20 do 80 % . Výsledek analýzy obtížnosti je uveden v tabulce 3.2

Tabulka 3.2: Tabulka obtížností úloh

Úloha	P úloh [%]	$p \in [20; 80]\%$	P ročníku [%]	Úloha	P úloh [%]	$p \in [20; 80]\%$	P ročníku [%]	Úloha	P úloh [%]	$p \in [20; 80]\%$	P ročníku [%]
FO51C2-1	62	Green	42	FO55C2-1	42	Green	48	FO59C2-1	48	Green	38
FO51C2-2	22			FO55C2-2	60			FO59C2-2	37		
FO51C2-3	57			FO55C2-3	51			FO59C2-3	49		
FO51C2-4	26			FO55C2-4	39			FO59C2-4	16		
FO52C2-1	51	Green	44	FO56C2-1	47	Green	50	FO60C2-1	40	Green	44
FO52C2-2	51			FO56C2-2	28			FO60C2-2	61		
FO52C2-3	48			FO56C2-3	75			FO60C2-3	30		
FO52C2-4	26			FO56C2-4	51			FO60C2-4	44		
FO53C2-1	44	Green	35	FO57C2-1	30	Green	33	FO61C2-3	64	Green	47
FO53C2-2	11			FO57C2-2	20			FO62C2-1	68		
FO53C2-3	23			FO57C2-3	44			FO62C2-2	39		
FO53C2-4	60			FO57C2-4	37			FO62C2-3	38		
FO54C2-1	42	Green	33	FO58C2-1	43	Green	34	FO62C2-4	50	Green	
FO54C2-2	16			FO58C2-2	17						
FO54C2-3	43			FO58C2-3	30						
FO54C2-4	33			FO58C2-4	47						

Horní hranici indexu obtížnosti nepřekročila žádná z úloh, ale dolní hranici nevyhovují hned 4 úlohy. Konkrétně se jedná o FO53C2-2, FO54C2-2, FO58C2-2, FO59C2-44. Tři z těchto úloh náleží do tematického celu „Dynamika“ a zbývající do „Mechanika tuhého tělesa“. Oba tematické celky mají oproti ostatním tematickým celkům nejnižší průměrné hodnoty indexu obtížnosti, viz tabulka 3.3.

Tabulka 3.3: Tematické členění

Kinematika			Dynamika		
Úloha	<i>P</i> úlohy	<i>P</i> tém. Celku	Úloha	<i>P</i> úlohy	<i>P</i> tém. Celku
FO54C2-1	42%	56%	FO53C2-2	11%	28%
FO53C2-1	44%		FO54C2-2	16%	
FO59C2-1	48%		FO59C2-4	16%	
FO62C2-1	68%		FO51C2-2	22%	
FO56C2-3	75%		FO58C2-3	30%	
			FO55C2-4	39%	
			FO60C2-1	40%	
			FO62C2-4	50%	
Pohyb v homogenním poli			Mechanická práce a energie		
Úloha	<i>P</i> úlohy	<i>P</i> tém. Celku	Úloha	<i>P</i> úlohy	<i>P</i> tém. Celku
FO53C2-3	23%	39%	FO57C2-2	20%	39%
FO56C2-2	28%		FO52C2-4	26%	
FO57C2-1	30%		FO52C2-2	51%	
FO55C2-1	42%		FO55C2-2	60%	
FO58C2-1	43%				
FO60C2-4	44%				
FO51C2-1	62%				
Mechanika tuhého tělesa			Mechanika kapalin a plynů		
Úloha	<i>P</i> úlohy	<i>P</i> tém. Celku	Úloha	<i>P</i> úlohy	<i>P</i> tém. Celku
FO58C2-2	17%	27%	FO57C2-3	44%	49%
FO51C2-4	26%		FO58C2-4	47%	
FO62C2-2	39%		FO56C2-4	51%	
			FO52C2-1	51%	
			FO55C2-3	51%	
Vnitřní energie a teplo			Struktura a vlastnosti plynů		
Úloha	<i>P</i> úlohy	<i>P</i> tém. Celku	Úloha	<i>P</i> úlohy	<i>P</i> tém. Celku
FO62C2-3	38%	51%	FO60C2-3	30%	41%
FO54C2-3	43%		FO54C2-4	33%	
FO52C2-3	48%		FO57C2-4	37%	
FO59C2-3	49%		FO59C2-2	37%	
FO51C2-3	57%		FO56C2-1	47%	
FO60C2-2	61%		FO53C2-4	60%	
FO61C2-3	64%				

Zvýšenou pozornost si zaslouží věnovat také úlohám FO51C2-2, FO57C2-2 a FO55C2-3, jejichž indexy obtížnosti jsou lehce nad spodní hranicí a lze je také považovat za dosti obtížné.

3.3.2 Citlivost úlohy

Hodnoty tetrachorických koeficientů jednotlivých úloh jsou uvedeny v tabulce 3.4.

Všechny hodnoty byly získány pomocí čtyřpolních tabulek, ve kterých probíhalo dělení následovně: Množinu všech „lepších“ žáků (řádek L v čtyřpolní tabulce) tvoří množina všech úspěšných řešitelů daného ročníku FO a množinu všech „horších“ žáků (řádek H v čtyřpolní tabulce) tvoří ostatní řešitelé. Pravidla, podle kterých dělíme řešitele na úspěšné a neúspěšné, se nachází v sekci 1.1.4. Sloupec „+“ tvoří množina všech řešitelů takových, kteří získali v dané úloze $x_i \geq 5$ bodů. Sloupec „-“ tvoří množina všech řešitelů takových, kteří získali v dané úloze $x_i \leq 5$ bodů. Koeficienty všech úloh jsou dostatečně vysoké, abychom mohli bezpečně prohlásit všechny úlohy za citlivé, což znamená, že úspěšní řešitelé Fyzikální olympiády získávali ve všech úlohách

více bodů než ostatní řešitelé. U třech úloh se vyskytuje hodnota tetrachorického koeficientu 1 a to z důvodu, že se v jejich čtyřpolních tabulkách vyskytuje 0 na místě b nebo c, viz obr. 3.1.

Tabulka 3.4: Tabulka citlivostí úloh

Úloha	Citlivost	Úloha	Citlivost	Úloha	Citlivost
FO51C2-1	0,93	FO55C2-1	0,87	FO59C2-1	0,90
FO51C2-2	0,80	FO55C2-2	0,80	FO59C2-2	0,97
FO51C2-3	0,86	FO55C2-3	0,64	FO59C2-3	0,89
FO51C2-4	0,91	FO55C2-4	0,95	FO59C2-4	1,00
FO52C2-1	0,92	FO56C2-1	0,74	FO60C2-1	0,88
FO52C2-2	0,80	FO56C2-2	1,00	FO60C2-2	0,84
FO52C2-3	0,90	FO56C2-3	0,74	FO60C2-3	0,86
FO52C2-4	0,84	FO56C2-4	0,95	FO60C2-4	0,88
FO53C2-1	1,00	FO57C2-1	0,94	FO61C2-3	0,96
FO53C2-2	0,83	FO57C2-2	0,80	FO62C2-1	0,76
FO53C2-3	0,95	FO57C2-3	0,79	FO62C2-2	0,92
FO53C2-4	0,90	FO57C2-4	0,78	FO62C2-3	0,94
FO54C2-1	0,93	FO58C2-1	0,96	FO62C2-4	0,94
FO54C2-2	0,85	FO58C2-2	0,94		
FO54C2-3	0,79	FO58C2-3	0,91		
FO54C2-4	0,81	FO58C2-4	0,85		

3.3.3 Analýza nenormovaných odpovědí

Přestože úlohy Fyzikální olympiády jsou otevřené, nemůžeme bohužel kvůli absenci jednotlivých konkrétních řešení a velkému počtu účastníků provést detailní analýzu nenormovaných odpovědí, která by zahrnovala detailní rozbor chyb, jakých se účastníci při řešení jednotlivých úloh dopouštěli. Rozbor dvou konkrétních řešení se nachází v kapitole 2.1.

Zde si vystačíme s relativní četností vynechaných odpovědí (v tabulce označeno jako „ANO“). Za vynechanou odpověď na úlohu označíme každé řešení, které bylo ohodnoceno 0 body. Za horní hranici relativní četnosti vynechaných odpovědí byla zvolena podle Chrásky hodnota 40 %. Přehled jednotlivých úloh s jejich příslušnými relativními četnostmi výskytu nenormovaných odpovědí je uveden v tabulce 3.5.

Tabulka 3.5: Přehled relativní četnosti nenormovaných odpovědí

Úloha	ANO	ANO ≥ 40%	Úloha	ANO	ANO ≥ 40%	Úloha	ANO	ANO ≥ 40%
FO51C2-1	13%		FO55C2-1	27%		FO59C2-1	26%	
FO51C2-2	37%		FO55C2-2	3%		FO59C2-2	21%	
FO51C2-3	9%		FO55C2-3	10%		FO59C2-3	19%	
FO51C2-4	49%		FO55C2-4	31%		FO59C2-4	51%	
FO52C2-1	24%		FO56C2-1	25%		FO60C2-1	30%	
FO52C2-2	6%		FO56C2-2	32%		FO60C2-2	21%	
FO52C2-3	25%		FO56C2-3	3%		FO60C2-3	34%	
FO52C2-4	37%		FO56C2-4	17%		FO60C2-4	32%	
FO53C2-1	17%		FO57C2-1	27%		FO61C2-3	32%	
FO53C2-2	66%		FO57C2-2	24%		FO62C2-1	1%	
FO53C2-3	34%		FO57C2-3	20%		FO62C2-2	19%	
FO53C2-4	7%		FO57C2-4	13%		FO62C2-3	16%	
FO54C2-1	29%		FO58C2-1	33%		FO62C2-4	21%	
FO54C2-2	44%		FO58C2-2	62%				
FO54C2-3	31%		FO58C2-3	47%				
FO54C2-4	30%		FO58C2-4	8%				

Úlohy, které tomuto kritériu nevyhovují jsou FO51C2-4, FO53C2-2, FO54C2-2, FO58C2-2, FO58C2-3, FO59C2-4.

3.3.4 Reliabilita jednotlivých ročníků Fyzikální olympiády

Hodnoty Crombachovy alfy vypočtené pomocí rovnice (3.3) pro jednotlivé ročníky jsou zaneseny následující tabulce.

Tabulka 3.6: Hodnoty Crombachovy alfy pro jednotlivé ročníky FO

Ročník	α
FO51	0,69
FO52	0,73
FO53	0,64
FO54	0,72
FO55	0,67
FO56	0,67
FO57	0,69
FO58	0,78
FO59	0,79
FO60	0,73
FO61	0,68
FO62	0,62

Všechny soutěžní ročníky dosahují hodnoty Crombachovy alfy $\alpha \geq 0,6$. Lze tedy jednotlivé ročníky FO prohlásit za dostatečně konzistentní.

3.3.5 Závěr analýzy

Výsledek analýzy lze shrnout do tabulky 3.7 chronologicky seřazených úloh a jejich zkoumaných vlastností.

Na základě této analýzy bych označil úlohy FO53C2-2, FO54C2-2, FO58C2-2 a FO59C2-4 za nevyhovující, z důvodu jejich vysoké obtížnosti a velkého výskytu ne-normovaných odpovědí, kdy i u úspěšných řešitelů byla oproti ostatním úlohám nezanedbatelně výraznější četnost bodového hodnocení v intervalu od 0 do 2 bodů. Tyto nevyhovující úlohy tvoří 9% z celkového počtu námi zkoumaných úloh. Z výše uvedených příkladů i z tabulky obtížností pro jednotlivé tematické celky 3.3 je zřejmé, že účastníci soutěže měli největší obtíže při řešení úloh z dynamiky a mechaniky tuhého tělesa. U úloh na téma mechanika tuhého tělesa může být jednou z příčin neúspěšnosti jejich nízká četnost zastoupení v FO a důsledkem toho zanedbání přípravy na toto konkrétní téma. K přípravě je k dispozici na stránkách FO studijní text *Statika tuhého tělesa* [24].

Tabulka 3.7: Souhrn analýzy úloh FO

Úloha	Citlivost	P úloh	ANO	$p \in [20; 80]\%$	ANO $\geq 40\%$
FO51C2-1	0,93	62%	13%		
FO51C2-2	0,80	22%	37%		
FO51C2-3	0,86	57%	9%		
FO51C2-4	0,91	26%	49%		
FO52C2-1	0,92	51%	24%		
FO52C2-2	0,80	51%	6%		
FO52C2-3	0,90	48%	25%		
FO52C2-4	0,84	26%	37%		
FO53C2-1	1	44%	17%		
FO53C2-2	0,83	11%	66%		
FO53C2-3	0,95	23%	34%		
FO53C2-4	0,90	60%	7%		
FO54C2-1	0,93	42%	29%		
FO54C2-2	0,85	16%	44%		
FO54C2-3	0,79	43%	31%		
FO54C2-4	0,81	33%	30%		
FO55C2-1	0,87	42%	27%		
FO55C2-2	0,80	60%	3%		
FO55C2-3	0,64	51%	10%		
FO55C2-4	0,95	39%	31%		
FO56C2-1	0,74	47%	25%		
FO56C2-2	1	28%	32%		
FO56C2-3	0,74	75%	3%		
FO56C2-4	0,95	51%	17%		
FO57C2-1	0,94	30%	27%		
FO57C2-2	0,80	20%	24%		
FO57C2-3	0,79	44%	20%		
FO57C2-4	0,78	37%	13%		
FO58C2-1	0,96	43%	33%		
FO58C2-2	0,94	17%	62%		
FO58C2-3	0,91	30%	47%		
FO58C2-4	0,85	47%	8%		
FO59C2-1	0,90	48%	26%		
FO59C2-2	0,97	37%	21%		
FO59C2-3	0,89	49%	19%		
FO59C2-4	1	16%	51%		
FO60C2-1	0,88	40%	30%		
FO60C2-2	0,84	61%	21%		
FO60C2-3	0,86	30%	34%		
FO60C2-4	0,88	44%	32%		
FO61C2-3	0,96	64%	32%		
FO62C2-1	0,76	68%	1%		
FO62C2-2	0,92	39%	19%		
FO62C2-3	0,94	38%	16%		
FO62C2-4	0,94	50%	21%		

Kapitola 4

Sbírka řešených úloh

Obsahem této kapitoly je tématicky členěná sbírka obsahující 45 řešených úloh z krajských kol FO kategorie C od ročníků 51. až do 62. Zadání i řešení jednotlivých kol jsou dostupné na stránkách Fyzikální olympiády [41], ze kterých byly převzaty. Sbírka byla rozčleněna na osm tematických celků podle středoškolských učebnic *Fyzika pro gymnázia: mechanika* [2] a *Fyzika pro gymnázia: molekulová fyzika a termika* [1] a úlohy v jednotlivých celcích byly řazeny vzestupně od nejjednodušší po nejtěžší podle jejich obtížnosti, která byla zjištěna analýzou výsledkových listin jednotlivých krajů, jejichž dostupnost je znázorněná v tabulce 3.1.

4.1 Kinematika

FO56C2-3: Tři kamarádi

Autor: J. Thomas, 75 %

Z místa M jede motocyklista rychlostí $v_1 = 60 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ do místa C . Z místa C do místa M ve stejnou dobu vyjede cyklista rychlostí $v_2 = \frac{v_1}{3}$. Na stejné silnici v jedné třetině vzdálenosti míst M a C , blíže k místu C , se nachází chodec.

- Jakou rychlostí v a jakým směrem musí jít chodec, aby se všichni tři potkali ve stejném místě?
- Chodec se rozhodl jít touto rychlostí opačným směrem. Kde se setká s prvním kamarádem? Ve kterém místě ho dohoní druhý kamarád, bude-li pokračovat v chůzi? Řešte obecně, výsledek uveďte ve tvaru zlomku celkové vzdálenosti míst M a C .
- Jaké budou časy setkání kamarádů v části a) a b), je-li vzdálenost míst M a C $s = 20 \text{ km}$?

Řešení:

- a) Protože $v_1 = 3v_2$ bude místo setkání v $\frac{1}{4}$ vzdálenosti míst M a C , blíže k místu C . Chodec proto musí vyrazit směrem k místu C . Motocyklista a cyklista se setkají za dobu $t = \frac{s}{v_1 + v_2}$. Za tuto dobu musí chodec ujít vzdálenost $\frac{1}{3}s - \frac{1}{4}s = \frac{1}{12}s$ a musí tedy jít rychlostí

$$v = \frac{\frac{1}{12}s}{\frac{s}{v_1 + v_2}} = \frac{v_1 + v_2}{12} = \frac{1}{9}v_1 \doteq 6,7 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

4 body

- b) Chodec a motocyklista se potkají ve vzdálenosti x od bodu M v čase t_1 . Platí:

$$\frac{2}{3}s = (v_1 + v)t_1, v = \frac{1}{9}v_1 \text{ a také } x = v_1 t_1 \Rightarrow x = \frac{3}{5}s.$$

Cyklista dojede chodce ve vzdálenosti y od místa C v čase t_2 . Platí:

$$y = v_2 t_2, v = \frac{1}{3}v_2 \text{ a také } y - \frac{s}{3} = v t_2 \Rightarrow y = \frac{s}{2}.$$

4 body

c) Čas setkání kamarádů podle části a) je

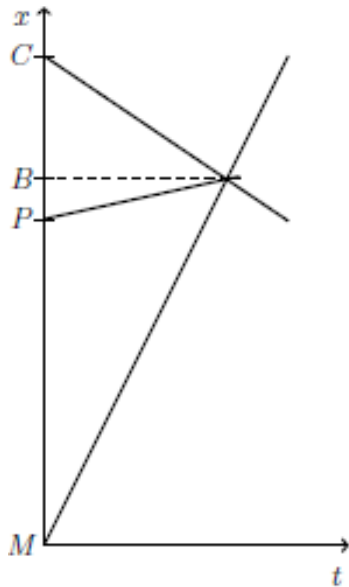
$$t = \frac{s}{v_1 + v_2} = \frac{1}{4}\text{h} = 15 \text{ minut.}$$

Podobně pro část b)

$$t_1 = \frac{2s}{3(v_1 + v)} = \frac{1}{5}\text{h} = 12 \text{ minut,}$$

$$t_2 = \frac{s}{2v_2} = \frac{1}{2}\text{h} = 30 \text{ minut}$$

Grafické řešení části a)



Platí

$$|MP| : |CP| = 2 : 1$$

$$|MB| : |CB| = 3 : 1$$

Odtud

$$|MC| : |BC| = (|MB| + |BC|) : |BC| = 4 : 1$$

$$|MC| : |PC| = (|MC| + |PC|) : |PC| = 3 : 1$$

Dělením rovnic: $|PC| : |BC| = 4 : 3$

Užitím tohoto vztahu:

$$\frac{|BP|}{|BC|} = \frac{|PC| - |BC|}{|BC|} = \frac{1}{3}$$

Rychlosti chodce a cyklisty jsou tedy v poměru

$$1 : 3 \text{ proto } v = \frac{v_2}{3} = 6,7 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

FO62C2-1: Cyklistický výlet

Autor: J. Thomas, 68 %

Tři kamarádi vyrazili na několikadenní cyklistický výlet. Před poslední etapou na ně ale zbyla jen dvě kola. Do cíle jim chybí urazit vzdálenost $s = 45\text{km}$. Pojede-li každý na svém kole, pojede rychlostí $4v$, pojedou-li na jednom kole dva, pojedou rychlostí $3v$, pěšky je zde každý z nich rychlostí $v = 5 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

- Jak dlouho by jim trvala cesta, nechce-li nikdo z nich jít pěšky? Aby byla jízda pro všechny stejně náročná, střídali by se vždy na třetině celkové vzdálenosti tak, aby každý šlapal jednou sám, jednou vezl kamaráda a jednou se sám vezl. O kolik minut později by přijela do cíle dvojice za samostatným cyklistou?
- Jaká bude nejkratší doba cesty, je-li jeden z cyklistů ochoten jít část cesty pěšky a přitom dorazí do cíle všichni současně? V jaké vzdálenosti před cílem cesty musí samostatně jedoucí cyklista kolo zanechat?

Dobu potřebnou na výměnu kol a přesedání zanedbejte. Řešte nejprve obecně, pak pro číselné hodnoty.

Řešení:

- a) Protože samostatně jedoucí cyklista na dvojici vždy ve třetině vzdálenosti čeká, je průměrná rychlost dojíždějící dvojice $3v$ a celková doba cesty

$$t = \frac{s}{3v} = 3 \text{ h.}$$

2 body

Poslední třetinu vzdálenosti urazil samostatně jedoucí cyklista za

$$t_s = \frac{\frac{s}{3}}{4v} = \frac{1}{12} \frac{s}{v} = \frac{3}{4} \text{ h.}$$

zatímco dvojici bude tato část cesty trvat

$$t_d = \frac{\frac{s}{3}}{3v} = \frac{1}{9} \frac{s}{v} = 1 \text{ h.}$$

Samostatně jedoucí cyklista dorazí do cíle o 15 minut dříve.

2 body

- b) Úseky dráhy označíme s_1 a s_2 . Samostatně jedoucí cyklista ujede první úsek za dobu t_1 , druhý úsek ujde za dobu t_3 . Dvojice ujede první úsek za dobu t_2 , druhý úsek za dobu t_4 . Platí:

$$s = s_1 + s_2, s_1 = 4vt_1 = 3vt_2 \Rightarrow \frac{t_2}{t_1} = \frac{3}{4} \quad (4.1)$$

a

$$s_2 = vt_3 = 4vt_4 \Rightarrow \frac{t_3}{t_4} = 4. \quad (4.2)$$

Do cíle dorazí ve stejnou dobu, proto

$$t_1 + t_3 = t_2 + t_4. \quad (4.3)$$

Dosazením za s_1 a s_2 do vztahu pro dráhu

$$s = s_1 + s_2 = 4vt_1 + vt_3. \quad (4.4)$$

Dosazením z (4.1) a (4.2) do rovnice (4.3)

$$t_1 + t_3 = \frac{3}{4}t_1 + \frac{t_3}{4} \Rightarrow t_3 = \frac{4}{9}t_1,$$

dosazením do (4.4)

$$4t_1 + t_3 = \frac{s}{v} = 4t_1 + \frac{4}{9}t_1 = \frac{40}{9}t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{9}{40} \frac{s}{v}.$$

Pak

$$t_3 = \frac{4}{9}t_1 = \frac{1}{10} \frac{s}{v}.$$

Doba cesty samostatného cyklisty (a chodce) a tedy i dvojice cyklistů je

$$t_1 + t_3 = \frac{9}{40} \frac{s}{v} + \frac{1}{10} \frac{s}{v} = \frac{13s}{40v} = \frac{117}{40} \text{ h} = 2 \text{ h } 55 \text{ min } 30 \text{ s.}$$

Do cíle dorazí za 2 h 55,5 minuty.

4 body

Protože

$$s_2 = vt_3 = v \frac{1}{10} \frac{s}{v} = \frac{1}{10} s = 4,5 \text{ km,}$$

musí kolo zanechat 4,5 km před cílem, tedy po ujetí 40,5 km.

2 body

FO59C2-1: Dva vlaky

Autor: J. Thomas, 48 %

Dva vlaky, každý o délce $L = 150$ m. jedou proti sobě po sousedních kolejích na přímé trati. První vlak se pohybuje rovnoměrně zrychleně se zrychlením a , druhý vlak rovnoměrně zpomaleně se zrychlením stejné velikosti. V okamžiku, kdy k sobě dorazí čela vlaků, má první vlak rychlost $v_1 = 20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, druhý vlak rychlost $v_2 = 15 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Místo, kde se mívají koncová světla vlaků je od místa, kde se mívají jejich čela vzdáleno o $l = 25,0$ m. Určete:

- dobu t , po kterou se vlaky mívají,
 - velikost a zrychlení vlaků,
 - rychlosti v'_1 a v'_2 vlaků v okamžiku, kdy se mívají koncová světla.
- Řešte nejprve obecně, pak pro číselné hodnoty.

Řešení:

- a) ,b) Z hlediska soustavy pevně spojené s prvním vlakem se druhý vlak pohybuje rovnoměrným pohybem rychlostí o velikosti $v_1 + v_2$ po dráze $2L$. Hledaná doba je

$$t = \frac{2L}{v_1 + v_2} = 8,6 \text{ s.}$$

2 body

Během míjení ujede první vlak dráhu

$$L = l = v_1 t + \frac{1}{2} a t^2,$$

druhý vlak dráhu

$$L - l = v_2 t - \frac{1}{2} a t^2.$$

Rozdíl dráhy prvního a dráhy druhého vlaku je

$$2l = (v_1 - v_2)t + a t^2 = (v_1 - v_2) \frac{2L}{v_1 + v_2} + a \frac{4L^2}{(v_1 + v_2)^2}.$$

Odstraněním zlomků dostaneme

$$l(v_1 + v_2)^2 = L(v_1^2 - v_2^2) + 2L^2 a.$$

Z rovnice plyne

$$a = \frac{l(v_1 + v_2)^2 - L(v_1^2 - v_2^2)}{2L^2} = 0,097 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

4 body

- c) Pro rychlosti vlaků v okamžiku, kdy se mívají jejich koncová světla platí

$$v'_1 = v_1 + a \cdot t = \frac{v_1 l + v_2(L + l)}{L} = 20,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

2 body

$$v'_2 = v_2 - a \cdot t = \frac{v_1(L - l) - v_2 l}{L} = 14,2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

2 body**FO53C2-1: Puk na ledě**

Autor: J. Thomas, 44 %

Puk se pohybuje po ledě tak, že vzdálenost l urazí za dobu t a následující úsek o stejné délce za dobu $1,5t$. Určete:

- rychlost v_1, v_2 puku na konci prvního a druhého úseku,

- b) délku s třetího úseku, na kterém se puk zastaví, a dobu t_3 pohybu puku na třetím úseku.

Předpokládáme, že povrch ledu je všude stejný. Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty $l = 20$ m, $t = 3,0$ s.

Řešení:

- a) Puk se pohybuje rovnoměrně zpomaleně se stálým zrychlením o velikosti a . Velikost počáteční rychlosti puku označíme v_0 .

Na prvním úseku platí

$$v_1 = v_0 - at, \quad (4.5)$$

$$l = \frac{v_0 + v_1}{2}t. \quad (4.6)$$

Na druhém úseku platí

$$v_2 = v_1 - a \cdot 1,5t, \quad (4.7)$$

$$l = \frac{v_1 + v_2}{2}1,5t. \quad (4.8)$$

3 body

Z rovnic (4.5) a (4.7)

$$a = \frac{v_0 - v_1}{t} = \frac{v_1 - v_2}{1,5t} \Rightarrow v_0 = \frac{5v_1 - 2v_2}{3}.$$

Dosazením do rovnice (4.6)

$$l = \frac{1}{2} \left(\frac{5v_1 - 2v_2}{3} + v_1 \right) t \Rightarrow v_2 = 4v_1 - \frac{3l}{t}. \quad (4.9)$$

Dosazením do rovnice (4.8)

$$l = \frac{1}{2} \left(5v_1 - \frac{3l}{t} \right) 1,5t \Rightarrow v_1 = \frac{13l}{15t}.$$

Dosazením do rovnice (4.9)

$$v_2 = \frac{7l}{15t}. \quad (4.10)$$

Pro dané hodnoty $v_1 = 5,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, $v_2 = 3,1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

4 body

- b) Dobu pohybu puku na 3. úseku určíme s užitím vztahů (4.7), (4.9) a (4.10):

$$t_3 = \frac{v_2}{a} = \frac{v_2}{v_1 - v_2} 1,5t = \frac{\frac{7l}{15t}}{\frac{13l}{15t} - \frac{7l}{15t}} 1,5t = \frac{7}{4}t$$

Délka třetího úseku je

$$s = \frac{1}{2}v_2t_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{7l}{15t} \cdot \frac{7t}{4} = \frac{49l}{120}$$

pro dané hodnoty $t_3 = 5,25$ s, $s = 8,2$ m.

3 body

FO54C2-1: Pohyb po nakloněné rovině

Autor: J. Thomas, 42%

Kulička vržená vzhůru po nakloněné rovině prošla světelnou závorou vzdálenou od místa vrhu $l = 0,45$ m nejprve v čase $t_1 = 1,00$ s a podruhé v čase $t_2 = 2,00$ s.

- a) Jaká byla velikost počáteční rychlosti kuličky v_0 , a jaká byla velikost jejího zrychlení a ? Do jaké vzdálenosti s od místa vrhu kulička vystoupí?

- b) V jakých časech t_3 a t_4 projde kulička stejnou světelnou závorou, bude-li vržena počáteční rychlostí o velikosti $2v_0$? Do jaké vzdálenosti s_1 od místa vrhu teď kulička vystoupí?

Řešte nejprve obecně, pak pro dané hodnoty.

Řešení:

- a) Až do vzdálenosti s se kulička pohybuje rovnoměrně zpomaleně, na zpáteční cestě rovnoměrně zrychleně se zrychlením o stejné velikosti. Platí:

$$l = v_0 t_1 - \frac{1}{2} a t_1^2. \quad (4.11)$$

Doba výstupu do vzdálenosti s je $t_v = \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{v_0}{a}$.

Kulička se pohybuje se zrychlením o velikosti

$$a = \frac{2v_0}{t_1 + t_2}. \quad (4.12)$$

Po dosazení do (4.11) a úpravě

$$l = v_0 t_1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2v_0}{t_1 + t_2} t_1^2 = v_0 \left(t_1 - \frac{t_1^2}{t_1 + t_2} \right) = v_0 \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2},$$

$$v_0 = \frac{l(t_1 + t_2)}{t_1 t_2} = 0,675 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Pro velikost zrychlení pak dostáváme

$$a = \frac{2v_0}{t_1 + t_2} = \frac{2l}{t_1 t_2} = 0,45 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Kulička vystoupí do vzdálenosti

$$s = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{\left[\frac{l(t_1 + t_2)}{t_1 t_2} \right]^2}{\frac{4v_0}{t_1 + t_2}} = \frac{l(t_1 + t_2)^2}{4t_1 t_2} = 0,506 \text{ m}.$$

6 bodů

- b) Zvýší-li se velikost počáteční rychlosti na dvojnásobek, velikost zrychlení se při pohybu po nakloněné rovině nezmění. Pak

$$s_1 = \frac{4v_0^2}{2a} = \frac{l(t_1 + t_2)^2}{t_1 t_2} = 4s = 2,02 \text{ m}.$$

Pro průchod světelnou závorou nyní platí

$$l = 2v_0 t - \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow t = \frac{2v_0 \pm \sqrt{4v_0^2 - 2al}}{a}.$$

Dostáváme dva kořeny, z nichž menší $t_3 = 0,35 \text{ s}$ odpovídá průchodu kuličky závorou při pohybu nahoru, druhý $t_4 = 5,65 \text{ s}$ odpovídá průchodu kuličky při pohybu směrem dolů.

4 body

4.2 Dynamika

FO62C2-4: Prostřelený míček

Autor: J. Thomas, 50 %

Na kraji střechy se ve výšce $h = 10$ m nad zemí leží míček o hmotnosti $m_2 = 200$ g. Do míčku narazí vodorovně letící střela o hmotnosti $m_1 = 10$ g a pohybující se rychlostí $v_1 = 500$ m · s⁻¹, prorazí ho a pokračuje v letu menší rychlostí. Míček dopadne na zem ve vzdálenosti $x_2 = 25$ m od domu.

- Jaká bude rychlost míčku u_2 a jaká bude rychlost střely u_1 bezprostředně po průletu střely míčkem?
- V jaké vzdálenosti x_1 od domu dopadne střela na zem?
- Jaká část energie střely se přeměnila při proražení míčku na teplo?
- Do jaké vzdálenosti x_3 by míček dopadl, kdyby v něm střela uvízla?

Tíhové zrychlení $g = 9,81$ m · s⁻².

Řešení:

- a) ,b) Míček dopadl do vzdálenosti

$$x_2 = u_2 \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow u_2 = x_2 \sqrt{\frac{g}{2h}} = 17,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2 body

Podle zákona zachování hybnosti určíme rychlost střely po průletu míčkem

$$m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_1 = \frac{m_1 v_1 - m_2 u_2}{m_1} = \frac{m_1 v_1 - m_2 x_2 \sqrt{\frac{g}{2h}}}{m_1} = 150 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Střela pak dopadne do vzdálenosti $x_1 = u_1 \sqrt{\frac{2h}{g}} = 214$ m.

3 body

- c) Podle zákona zachování energie

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_1 u_2^2 + Q.$$

Na teplo se přeměnilo

$$p = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 u_1^2 - \frac{1}{2} m_1 u_2^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} = 0,89 = 89 \%$$

kinetické energie střely.

3 body

- d) Podle ZZH bude

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) u \Rightarrow u = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2},$$
$$x_3 = u \sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} \sqrt{\frac{2h}{g}} = 34,0 \text{ m}.$$

2 body

FO60C2-1: Na kluzké silnici

Autor: J. Thomas, 40 %

Součinitel tření mezi asfaltovou silnicí a pneumatikou je za suchého počasí $f_1 = 0,7$.

- a) Jak dlouho potrvá automobilu rozjždění z klidu na cestovní rychlost $v = 72 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ a jakou vzdálenost s na to bude potřebovat?
Dva automobily jedou za sebou cestovní rychlostí v .
- b) Jakou vzdálenost musí udržovat řidič 2. automobilu, nemá-li dojít k havárii, klesne-li vlivem deště součinitel tření na hodnotu $f_2 = 0,3$ v případě, že auto před ním zastaví na místě (např. nárazem do pevné překážky)? Reakční doba řidiče je $t_r = 0,5 \text{ s}$.
- c) Jakou vzdálenost musí řidič udržovat mezi automobily, nemá-li dojít k srážce v případě, že auto před ním začne brzdit s největším možným zrychlením?
- d) Jaká by měla být vzdálenost mezi jedoucimi automobily, nemá-li dojít k srážce v případě, že auto před ním začne brzdit s největším možným zrychlením a první auto má nové pneumatiky, takže součinitel tření mezi koly a vozovkou prvního auta je $f_3 = 0,5$?

Tíhové zrychlení $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Řešení:

- a) Maximální zrychlení automobilu při rozjždění, nemají-li kola prokluzovat, bude $a_1 = f_1 g$. Cestovní rychlosti dosáhne automobil za dobu

$$t = \frac{v}{a_1} = \frac{v}{f_1 g} = 2,9 \text{ s}.$$

Přitom ujede vzdálenost $s = \frac{v^2}{2f_1 g} = 29 \text{ m}$.

2 body

- b) Druhé auto se pohybuje nejprve po reakční dobu rovnoměrně, pak rovnoměrně zpomalně se zrychlením o velikosti $a_2 = f_2 g$ do zastavení. Urazí při tom dráhu

$$s_1 = v \cdot t_r + \frac{v^2}{2a_2} = v \cdot t_r + \frac{v^2}{2f_2 g} = 78 \text{ m}.$$

Nemá-li tedy dojít k nárazu, musí být počáteční vzdálenost mezi vozidly nejméně 78 m.

2 body

- c) Protože při brzdění se obě auta pohybují se stejným zrychlením, musí být minimální vzdálenost mezi auty rovna vzdálenosti, kterou ujede druhý řidič za reakční dobu, tedy $s_2 = v \cdot t_r = 10 \text{ m}$.

2 body

- d) Během reakční doby řidiče ujede automobil před ním dráhu

$$s_{a1} = vt_r - \frac{1}{2} f_3 g t_r^2.$$

Jeho rychlost se přitom zmenší o $\Delta v = at_r = f_3 g t_r$. Dál se první auto pohybuje rovnoměrně zpomalně a do zastavení urazí dráhu

$$s_{a2} = \frac{(v - \Delta v)^2}{2f_3 g} = \frac{(v - at_r)^2}{2f_3 g} = \frac{(v - f_3 g t_r)^2}{2f_3 g}.$$

Nemá-li dojít ke srážce, musí vzdálenost mezi automobily na počátku brzdění být

$$l = s_1 - s_{a1} - s_{a2} = v \cdot t_r + \frac{v^2}{2f_2 g} - vt_r + \frac{1}{2} f_3 g t_r^2 - \frac{(v - f_3 g t_r)^2}{2f_3 g} = \frac{v^2}{2f_2 g} + \frac{1}{2} f_3 g t_r^2 - \frac{(v - f_3 g t_r)^2}{2f_3 g} = 37,2 \text{ m}.$$

4 body

FO55C2-4: Sáňkař na svahu

Autor: J. Thomas, 39%

Sáňkařský svah o délce l má stálý úhel sklonu α . První a třetí třetina svahu jsou pokryté ledem a smykové tření je zde zanedbatelné. Střední část dráhy někdo rovnoměrně posypal, sáňky zde brzdí smykové tření se součinitelem f .

- a) Jakou největší hodnotu f_{\max} může mít součinitel tření, má-li sáňkař projet celým svahem bez odstrkování?
 b) Jak dlouho potrvá jízda, nastane-li tento případ, tj. bude-li f_{\max} ?
 c) Jak dlouho potrvá jízda, bude-li $f = \frac{f_{\max}}{2}$?

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty $l = 60$ m, $\alpha = 15^\circ$. Odpor vzduchu zanedbejte.

Řešení:

- a) Na 2. úseku působí proti pohybu sáňkaře třecí síla o velikosti $F_t = fmg \cos \alpha$. V krajním případě bude rychlost sáňkaře na konci druhého úseku nulová. Podle ZZE se úbytek potenciální energie tíhové spotřebuje na práci při překonání třecí síly na druhém úseku, proto:

$$mg \cdot \frac{2}{3}l \sin \alpha = f_{\max} mg \cos \alpha \cdot \frac{1}{3}l \Rightarrow f_{\max} = 2 \tan \alpha.$$

Číselně vychází $f_{\max} = 0,54$.

2 body

- b) Na prvním i na třetím úseku se sáňkař pohybuje rovnoměrně zrychleně se

$$\text{zrychlením o velikosti } a_1 = g \sin \alpha \text{ po dobu } t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{l}{3}}{a_1}} = \sqrt{\frac{2l}{3g \sin \alpha}}.$$

Na druhém úseku se pohybuje rovnoměrně zpomaleně se zrychlením o velikosti

$$a_2 = g(f_{\max} \cos \alpha - \sin \alpha) = g(2 \tan \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha) = g \sin \alpha = a_1,$$

proto průjezd druhým úsekem bude trvat stejnou dobu jako průjezd prvním i třetím úsekem. Celková doba jízdy sáňkaře tedy bude

$$t = 3t_1 = 3\sqrt{\frac{2l}{3g \sin \alpha}} = \sqrt{\frac{6l}{g \sin \alpha}}.$$

Číselně vychází $t = 11,9$ s.

3 body

- c) Bude-li součinitel smykového tření na druhém úseku $f = \frac{f_{\max}}{2} = \tan \alpha$, bude mít zrychlení sáňkaře na druhém úseku velikost

$$a_2 = g(\sin \alpha - f \cos \alpha) = g(\sin \alpha - \tan \alpha \cdot \cos \alpha) = g(\sin \alpha - \sin \alpha) = 0.$$

Sáňkař se bude pohybovat rovnoměrně rychlostí v_1 , kterou získal na prvním úseku:

$$v_1 = a_1 t_1 = \sqrt{\frac{2lg \sin \alpha}{3}}$$

a doba průjezdu druhým úsekem bude $t_2 = \frac{l}{3v_1} = \sqrt{\frac{l}{6 \sin \alpha}} = \frac{t_1}{2}$. Na třetím úseku se sáňkař pohybuje rovnoměrně zrychleně se zrychlením $a = g \sin \alpha$ a s počáteční rychlostí v_1 . Platí tedy

$$\frac{l}{3} = v_1 t_3 + \frac{1}{2} g \sin \alpha \cdot t_3^2.$$

Řešením této kvadratické rovnice dostaneme

$$t_3 = \frac{-v_1 \pm \sqrt{v_1^2 + \frac{2}{3}lg \sin \alpha}}{g \sin \alpha} = \frac{-\sqrt{\frac{2}{3}lg \sin \alpha} \pm \frac{4}{3}lg \sin \alpha}{g \sin \alpha} = \sqrt{\frac{2l}{3g \sin \alpha}} \cdot (-1 \pm \sqrt{2}).$$

Úloze vyhovuje kořen $t_3 = t_1(\sqrt{2} - 1)$. Celková doba jízdy sáňkaře bude

$$t' = t_1 + \frac{t_1}{2} + t_1(\sqrt{2} - 1) = t_1 \left(\sqrt{2} + \frac{1}{2} \right) = \sqrt{\frac{2l}{3g \sin \alpha}} \left(\sqrt{2} + \frac{1}{2} \right).$$

Číselně vychází $t' = 7,6$ s.

5 bodů

FO58C2-3: Náledí

Autor: J. Thomas, 30 %

Martin jde do školy po cestě, která je kvůli náledí hladká tak, že součinitel tření mezi jeho botami a cestou je $f_1 = 0,10$. Přejde k silnici, která má šířku $L = 10$ m a je téměř dokonale hladká. Martin usoudí, že se musí rozběhnout alespoň rychlostí $v_0 = 4,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, pak že na druhou stranu silnice doklouže. Vráť se proto zpátky a rozběhne se tak, aby měl na kraji silnice rychlost v_0 .

- Do jaké vzdálenosti s od silnice se musí Martin vrátit a jakou nejmenší dobu t_1 bude Martin potřebovat k tomu, aby se vrátil a rozběhem získal rychlost v_0 ?
- Jakou dobu t_2 bude Martinovi trvat klouzání přes silnici, je-li na ní součinitel tření mezi botami a silnicí $f_2 = 0,050$?
- Jakou nejvyšší hodnotu f_3 může mít součinitel tření mezi botami a silnicí, aby Martin při dané počáteční rychlosti doklouzal až na protější okraj silnice?

Řešte nejprve obecně, pak pro dané hodnoty. Tíhové zrychlení $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

Řešení:

- Největší zrychlení, s jakým se Martin může rozbíhat je $a = f_1g$, při snaze o větší zrychlení by mu boty prokluzovaly. Aby získal rychlost v_0 , musí ustoupit do vzdálenosti

$$s = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2gf_1} = 8,2 \text{ m}.$$

Má-li být doba návratu t_n do vzdálenosti s co nejmenší, musí první polovinu této doby zrychlovat se zrychlením a a druhou polovinu se stejným zrychlením zpomalovat. Platí tedy

$$\frac{1}{2}f_1g \frac{t_n^2}{4} = \frac{v_0^2}{2gf_1} \Rightarrow t_n = \frac{v_0\sqrt{2}}{f_1g}.$$

Celková doba návratu a rozbíhání tedy bude minimálně

$$t_1 = t_n + \frac{v_0}{f_1g} = \frac{v_0}{f_1g} (1 + \sqrt{2}) = 9,8 \text{ s}.$$

4 body

- Klouzání napříč přes silnici je rovnoměrně zpomalený pohyb se zrychlením o velikosti f_2g . Pro jeho dráhu platí

$$L = v_0t_2 - \frac{1}{2}f_2gt_2^2.$$

Úloze vyhovuje menší kořen této kvadratické rovnice

$$t_2 = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2f_2gL}}{f_2g} = 3,1 \text{ s}.$$

4 body

c) Martin se na druhém okraji silnice zastaví. Platí tedy

$$L = \frac{v_0^2}{2f_3g} \Rightarrow f_3 = \frac{v_0^2}{2Lg} = 0,081.$$

2 body

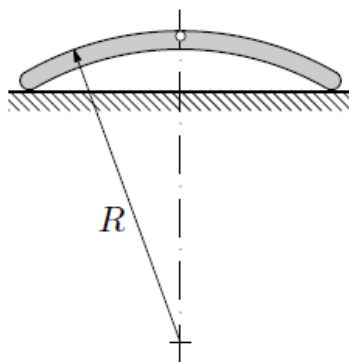
FO51C2-2: Akcelerometr

Autor: P. Šedivý, 22 %

Pro měření zrychlení vlaku použijeme skleněnou trubici zahnutou do kruhového oblouku o vnějším poloměru R , kterou naplníme vodou tak, že vznikne malá bublinka vzduchu. Trubicu umístíme do svislé roviny ve směru pohybu vlaku podle obr 4.1.

- a) Na kterou stranu se bublinka vychýlí při rozjezdu vlaku?
 b) Jaké bylo zrychlení vlaku, jestliže oblouk o poloměru R mezi původní a vychýlenou polohou bublinky bude mít délku s ?

Řešte obecně a pak pro hodnoty $R = 40$ cm, $s = 33$ mm.



Obrázek 4.1

Řešení:

- a) Řešení provedeme z hlediska pozorovatele v neinerciální vztažné soustavě spojené s rozjíždějícím se vlakem. Na částice vody v trubici působí kromě tíhové síly $\vec{F}_G = m\vec{g}$ ještě setrvačná síla $\vec{F}_s = -m\vec{a}$. Pro odchylku α jejich výslednice od svislého směru platí

$$\tan \alpha = \frac{F_s}{F_G} = \frac{a}{g}$$

Vztlková síla působící na bublinku má opačný směr a bublinka se přemístí do místa, kde je stěna trubice k ní kolmá. Z obr 4.2 je zřejmé, že se bublinka posune ve směru, kterým je orientováno zrychlení. Při rozjíždění vlaku tedy dopředu.

4 body

- b) Z obr. 4.2 dále plyne pro velikost úhlu α v radiánech

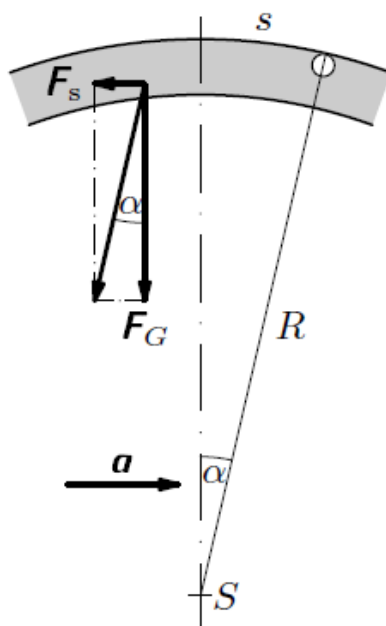
$$\alpha = \frac{s}{R}$$

Pak

$$a = g \tan \alpha = g \tan \frac{s}{R}.$$

Pro dané hodnoty je $\alpha = 0,0825$ rad $\approx 4,73^\circ$, $a = 0,81$ m \cdot s $^{-2}$.

6 bodů



Obrázek 4.2

Poznámka: Protože úhel α je malý, platí $\tan \alpha \approx \alpha$ a k dostatečně přesnému výsledku lze dojít i užitím aproximace

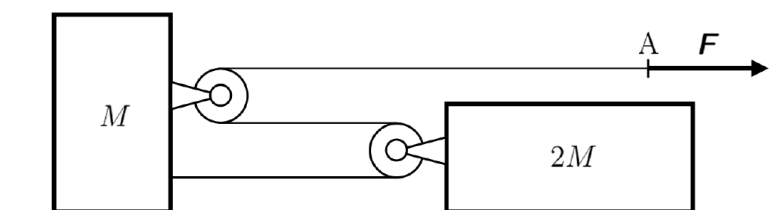
$$\alpha \approx g\alpha = \frac{gs}{R}.$$

FO59C2-4: Dva hranoly

Autor: J. Thomas, 16 %

Dva hranoly o hmotnostech M a $2M$ jsou položeny na hladké vodorovné podložce a navzájem propojeny pomocí dvou malých kladek zanedbatelné hmotnosti lehkou pevnou neroztažitelnou nití, na jejímž konci působí síla \vec{F} (obr. 4.3). Určete:

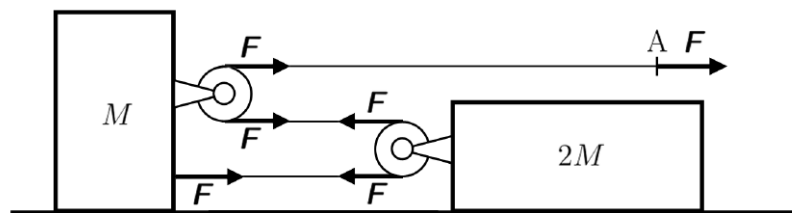
- velikosti sil F_1 a F_2 , které působí na každé těleso,
- velikost a směr zrychlení a_1 a a_2 každého tělesa,
- velikost a zrychlení a bodu A na konci lana, na kterém působí síla \vec{F} .



Obrázek 4.3

Řešení:

- Protože kladky i nit mají zanedbatelnou hmotnost, působí na levé těleso síla o velikosti $3F$, na pravé těleso síla o velikosti $2F$ (obr.4.4).

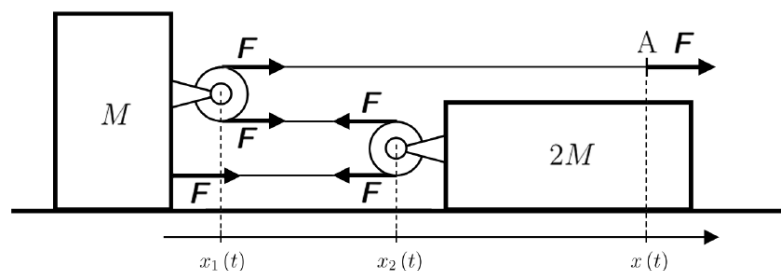


Obrázek 4.4

- b) Zrychlení levého tělesa má směr doprava a velikost $a_1 = \frac{3F}{M}$, zrychlení pravého tělesa má směr doleva a velikost $a_2 = \frac{2F}{2M} = \frac{F}{M}$.

2body

- c) Označme si souřadnici osy levé kladky v určitý čas t jako $x_1(t)$, souřadnici osy pravé kladky $x_2(t)$ a souřadnici na konci nitě $x_3(t)$. Označme si délku nitě l , poloměry kladek r a vzdálenost osy levé kladky od levého tělesa jako x_0 .



Obrázek 4.5

Protože nit je neroztažitelná, můžeme její délku vyjádřit jako

$$l = x(t) - x_1(t) + \pi r + \pi r + x_2(t) - x_1(t) + x_2(t) - x_1(t) + x_0$$

Odtud

$$x(t) = 3x_1(t) - 2x_2(t) + l - 2\pi r - x_0 \quad (4.13)$$

Stejný vztah bude platit i v blízkém čase $t + \Delta t$,

$$x(t + \Delta t) = 3x_1(t + \Delta t) - 2x_2(t + \Delta t) + l - 2\pi r - x_0 \quad (4.14)$$

Odečtením rovnic (4.13) a (4.14) dostaneme vztah mezi posunutími těles Δx_1 a Δx_2 a posunutím konce nitě Δx :

$$\Delta x = 3\Delta x_1 - 2\Delta x_2.$$

Dělením tohoto vztahu časovým intervalem Δt dostaneme vztah mezi okamžitými velikostmi rychlostí konce nitě:

$$v = 3v_1 + 2v_2.$$

Analogicky dostaneme vztah mezi velikostmi zrychlení

$$a = 3a_1 + 2a_2.$$

Bod A na konci nitě se tedy bude pohybovat se zrychlením

$$a = 3a_1 + 2a_2 = 3\frac{3F}{M} + 2\frac{F}{M} = \frac{11F}{M}.$$

6 bodů

Řešení užitím zákona zachování energie

Za čas t vykoná síla o velikosti F působící za konec lana po dráze Δx práci, která je rovna výsledné kinetické energii soustavy:

$$F\Delta x = \frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}2Mv_2^2.$$

Pohyb konce lana a pohyb jednotlivých kvádrů je rovnoměrně zrychlený s příslušnými zrychleními:

$$F \cdot \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}Ma_1^2t^2 + Ma_2^2t^2.$$

S využitím výsledku b) dostaneme

$$F \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}M \left(\frac{3F}{M}\right)^2 + M \left(\frac{F}{M}\right)^2.$$

Z rovnice plyne

$$a = 11\frac{F}{M}.$$

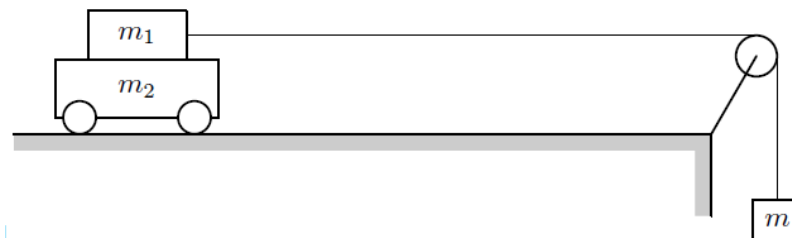
FO54C2-2: Vozík s hranolkem

Autor: J. Thomas, 16 %

Na dlouhém vodorovném stole je vozík o hmotnosti m_2 , na kterém leží hranolek o hmotnosti m_1 . K hranolku je lehkou nití přes kladku připojeno závaží o hmotnosti m (obr. 4.6). Valivý odpor mezi vozíkem a stolem je zanedbatelný, stejně jako hmotnost kladky a nití.

- Jaká musí být minimální hodnota f_{\min} součinitele smykového tření mezi vozíkem a hranolkem, má-li se hranolek pohybovat společně s vozíkem se stejným zrychlením? Určete velikost a tohoto zrychlení a velikost F síly napínající nit.
- Jaká bude velikost a_1 zrychlení hranolku a velikost a_2 zrychlení vozíku, bude-li součinitel smykového tření mezi hranolkem a vozíkem $f_1 < f_{\min}$? Jaká bude v tomto případě velikost F_1 síly napínající nit?

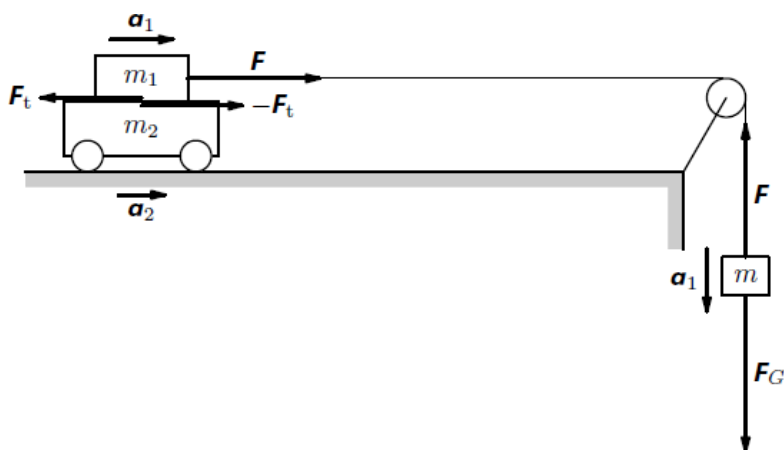
Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty: $m_1 = 100$ g, $m_2 = 250$ g, $m = 50$ g, $f_1 = 0,25$.



Obrázek 4.6

Řešení:

Vydeme z obr. 4.7, ve kterém jsou vyznačeny všechny síly působící v soustavě, které mají pohybový účinek. Na závaží působí tíhová síla a tahová síla nití, na hranolek tahová síla nití a třecí síla od vozíku, na vozík třecí síla od hranolku.



Obrázek 4.7

- a) Pohybuje-li se vozík současně s hranolkem, je $a_1 = a_2 = a$ a platí soustava pohybových rovnic

$$F_G - F = ma, \quad (4.15)$$

$$F - F_t = m_1 a, \quad (4.16)$$

$$F_t = m_2 a. \quad (4.17)$$

Řešením soustavy dostaneme

$$a = \frac{F_G}{m + m_1 + m_2} = \frac{m}{m + m_1 + m_2} g,$$

$$F = mg - ma = mg \frac{m_1 + m_2}{m + m_1 + m_2},$$

$$F_t = m_2 a = mg \frac{m_2}{m + m_1 + m_2}.$$

Musí být ovšem splněna podmínka

$$F_t \leq f m_1 g \Rightarrow f \geq \frac{F_t}{m_1 g} = \frac{m m_2}{m_1 (m + m_1 + m_2)} = f_{\min}.$$

Číselně vychází $f_{\min} = 0,31$, $a = 1,23 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $F = 0,43 \text{ N}$.

4 body

- b) Pokud je $f < f_{\min}$, hranolek se smýká po vozíku a třecí síla má velikost $F_t = f_1 m_1 g$. Vozík se pohybuje s menším zrychlením než hranolek a platí soustava pohybových rovnic

$$mg - F_1 = ma_1, \quad (4.18)$$

$$F_1 - f_1 m_1 g = m_1 a_1, \quad (4.19)$$

$$f_1 m_1 g = m_2 a_2. \quad (4.20)$$

Z rovnice (4.20) určíme zrychlení vozíku $a_2 = \frac{f_1 m_1}{m_2} g$,

z rovnic (4.18) a (4.19) určíme zrychlení hranolku a závaží $a_1 = \frac{m - f_1 m_1}{m + m_1} g$. Pro velikost síly napínající nit platí

$$F_1 = mg - ma_1 = mg \left(1 - \frac{m - f_1 m_1}{m + m_1} \right) = mg \frac{m_1 (1 + f_1)}{m + m_1}.$$

Číselně vychází $a_1 = 1,64 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $a_2 = 0,98 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $F_1 = 0,41 \text{ N}$.

4 body

FO53C2-2: Spojené nádoby

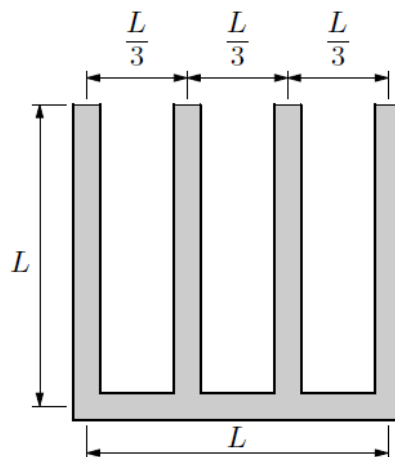
Autor: J. Thomas, 11 %

Spojené nádoby jsou vytvořeny z jedné vodorovné a čtyř svislých trubic o stejné délce L a stejném průřezu. Průměr trubic je malý v porovnání s jejich délkou (obr. 4.8). Nádoby byly po okraj naplněny vodou a uvedeny do zrychleného pohybu vpravo.

a) Jaké hodnoty dosáhlo zrychlení, jestliže z nádob vytekly $3/20$ celkového objemu vody? Jaké byly v tomto okamžiku výšky hladin v jednotlivých svislých trubicích?

b) Při opakovaném pokusu byly nádoby opět naplněny po okraj a znovu uvedeny do zrychleného pohybu vpravo. Jaké bylo zrychlení spojených nádob v okamžiku, kdy hladina v pravé krajní trubicí poklesla do výšky $0,75L$ Jaká část celkového objemu vody vytekla?

Kapilární jevy zanedbejte.



Obrázek 4.8

- Řešení:**
- a) Úlohu budeme řešit ve vztažné soustavě spojené s pohybujícími se spojenými nádobami. Na částici kapaliny o hmotnosti m působí tíhová síla $\vec{F}_G = m\vec{g}$ a setrvačná síla $\vec{F}_s = -m\vec{a}$. Rovina hladin v trubicích zaujme polohu kolmou k výslednici těchto sil a pro její sklon α platí

$$\tan \alpha = \frac{F_s}{F_G} = \frac{a}{g}.$$

3 body

Část vody vyteče z levé trubice, v ostatních trubicích dojde k poklesu hladiny vody (obr. 4.9). Označme h hloubku, do které klesne hladina v druhé trubicí. Ve třetí trubicí klesne hladina do hloubky $2h$ a ve čtvrté do hloubky $3h$. Protože vytekly $3/20$ celkového objemu, platí

$$\frac{6h}{5L} = \frac{3}{20} \Rightarrow h = \frac{1}{8}L.$$

Hladina ve druhé trubicí byla tedy ve výšce $\frac{7}{8}L$, ve třetí trubicí ve výšce $\frac{3}{4}L$ a a ve čtvrté trubicí ve výšce $\frac{5}{8}L$.

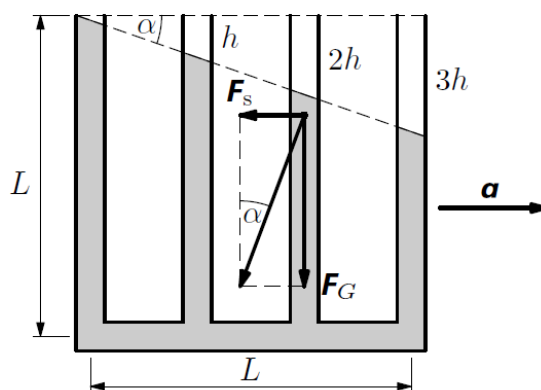
2 body

Z rovnosti $\tan \alpha = \frac{a}{g} = \frac{3h}{L} = \frac{3}{8}$ plyne $a = \frac{3}{8}g$.

2 body

- b) Při druhém pokusu platí $3h = \frac{L}{4}$. Pak $a = \frac{3h}{L}g = \frac{g}{4}$. Ze spojených nádob vyteklo $\frac{6h}{L} = \frac{1}{10}$ celkového objemu.

3 body



Obrázek 4.9

4.3 Pohyb v homogenním tíhovém poli Země

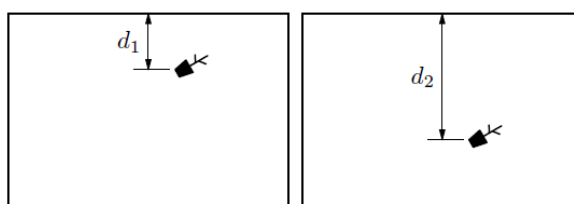
FO51C2-1: Pád květináče

Autor: J. Jírů, 62%

Květináč, který někdo nedopatřením shodil při čištění okna, padal volným pádem v těsné blízkosti okna níže položeného bytu, kde kdosi právě točil domácí video. Květináč byl zachycen pouze na dvou po sobě následujících snímcích. Na jednom se nacházel ve vzdálenosti $d_1 = 40$ cm a na druhém ve vzdálenosti $d_2 = 95$ cm od horního okraje okna (obr. 4.10). Snímková frekvence kamery je 25 snímků za sekundu. Určete:

- výšku h_1 nad horním okrajem okna, ze které květináč padal,
- velikost v_1 rychlosti květináče v okamžiku, kdy byl pořízen první snímek,
- velikost v_2 rychlosti květináče při dopadu na chodník, který je v hloubce $h_2 = 22$ m pod horním okrajem okna.

Odpor vzduchu a rozměry květináče zanedbejte.



Obrázek 4.10

Řešení:

- Označme t_1 dobu, která uplynula od začátku pádu do vzniku prvního snímku a s_1 dráhu květináče v čase t_1 . Dále označme $T = 0,04$ s periodu se kterou pracuje kamera a $d = d_2 - d_1 = 0,55$ m vzdálenost obou poloh květináče zachycených kamerou. Platí

$$s_1 = h_1 + d_1 = \frac{1}{2}gt_1^2, \quad h_1 + d_2 = \frac{1}{2}g(t_1 + T)^2.$$

Odečtením obou rovnic dostaneme

$$d = gt_1T + \frac{1}{2}gT^2, \quad t_1 = \frac{d - \frac{1}{2}gT^2}{gT} = \frac{d}{gT} - \frac{T}{2} = 1,38 \text{ s.}$$

Květináč padal z výšky

$$h_1 = s_1 - d_1 = \frac{1}{2}gt_1^2 - d_1 = 9,36 \text{ m} - 0,40 \text{ m} \doteq 9,0 \text{ m}.$$

5 bodů

b) Rychlost květináče měla v čase t_1 velikost

$$v_1 = gt_1 = \frac{d}{T} - \frac{gT}{2} = 13,55 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2 body

c) Velikost v_2 rychlosti květináče při dopadu na chodník můžeme určit užitím zákona zachování energie:

$$mg(h_1 + h_2) = \frac{1}{2}mv_2^2 \rightarrow v_2 = \sqrt{2g(h_1 + h_2)} = 24,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

3 body

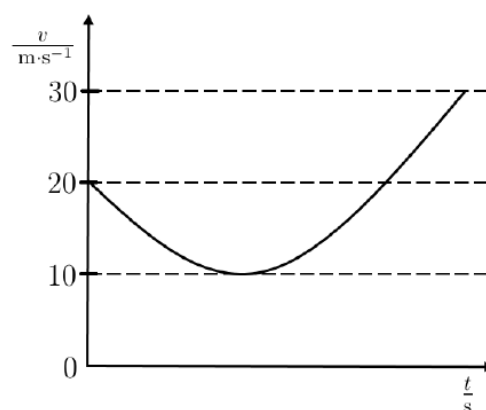
FO60C2-4: Hod kamenem

Autor: J. Thomas, 44 %

Na grafu je závislost velikosti rychlosti kamene vrženého se střechy, která je ve výšce h nad vodorovným povrchem země pod úhlem α na času od okamžiku jeho odhození, do jeho dopadu na zem.

Určete:

- pod jakým úhlem α byl kámen vržen,
- výšku h , ze které byl vržen,
- vzdálenost d místa dopadu od domu a dobu letu kamene t .



Tíhové zrychlení $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Odpor vzduchu zanedbáme.

Řešení:

Z grafu odečteme počáteční rychlost: $v_0 = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

a) Nejmenší rychlost má kámen v horním bodě trajektorie. Tato rychlost je rovna vodorovné složce počáteční rychlosti $v_x = v_0 \cos \alpha$, tedy

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{v_0} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ.$$

3 body

b) Označme rychlost dopadu kamene u . Z grafu odečteme její velikost $u = 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Podle zákona zachování energie

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh = \frac{1}{2}mu^2,$$

odkud vyjádříme hledanou výšku

$$h = \frac{u^2 - v_0^2}{2g} = 25,5 \text{ m}.$$

3 body

c) Pro okamžitou výšku, ve které se kámen nachází, platí

$$y = h + v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2.$$

V místě dopadu je tato výška rovna nule. Dostáváme kvadratickou rovnici:

$$\frac{1}{2}gt^2 - v_0t \sin \alpha - h = 0.$$

Po číselném dosazení $4,9 \{t\}^2 - 10 \{t\} \sqrt{3} - 25,5 = 0$. Úloze vyhovuje kladný kořen

$$t = \frac{10\sqrt{3} + \sqrt{300 + 4 \cdot 4,9 \cdot 25,5}}{9,8} \text{ s} = 4,7 \text{ s}.$$

Kámen dopadne do vzdálenosti $d = v_0t \cos \alpha = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 4,7 \text{ s} \cdot 0,5 = 47 \text{ m}$.

4 body

FO58C2-1: Vrh koulí

Autor: J. Thomas, 43 %

Koule opouští ruku vrhače ve výšce $h = 2,0 \text{ m}$ nad okrajem kruhu počáteční rychlostí $v_0 = 14,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ pod úhlem $\alpha = 40^\circ$ vzhledem k vodorovné rovině.

- Kdy se bude koule nacházet ve výšce $H = 4,5 \text{ m}$?
- Do jaké vzdálenosti koule doletí?
- Určete velikost a směr rychlosti dopadu koule.

Odpor vzduchu zanedbejte. Tíhové zrychlení $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Řešte nejprve obecně, pak pro číselné hodnoty.

Řešení:

- Pro výšku, ve které se nachází koule nad zemí, platí:

$$y = h + v_0t \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2, \quad (4.21)$$

a pro její vzdálenost od okraje kruhu pak:

$$x = v_0t \cos \alpha. \quad (4.22)$$

Dosazením do rovnice (4.21) za $y = H$ kvadratickou rovnicí

$$\frac{1}{2}gt^2 - v_0t \sin \alpha + (H - h) = 0$$

s kořeny $t_{1,2} = \frac{v_0 \sin \alpha \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha - 2g(H - h)}}{g}$, číselně $t_1 = 1,49 \text{ s}$ a $t_2 = 0,34 \text{ s}$.

Druhý kořen platí při stoupání koule, první při jejím klesání.

4 body

- Z rovnice (4.22) vyjádříme čas $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$ a dosadíme do rovnice (4.21). Položíme-li $y = 0$, dostaneme kvadratickou rovnici s neznámou x :

$$y = h + \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} = 0$$

s kořeny $x_{1,2} = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha \left(\tan \alpha \pm \sqrt{\tan^2 \alpha + \frac{2gh}{v_0^2 \cos^2 \alpha}} \right)}{g}$. Číselně vyhovuje kladný kořen $x = 21,8 \text{ m}$.

3 body

- Velikost rychlosti dopadu určíme ze zákona zachování energie:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

odtud $v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$, číselně $v = 15,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Se svislým směrem bude tato rychlost svírat úhel β , pro který platí

$$\sin \beta = \frac{v_0 \cos \alpha}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}} \Rightarrow \beta = 44,4^\circ.$$

3 body

FO55C2-1: Baseball

Autor: J. Jírů, 42 %

Při baseballu odpálil pálkař míč rychlostí o velikosti $v_0 = 35 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a polař jej zachytil ve vzdálenosti $L = 90 \text{ m}$ od pálkaře ve stejné výšce, v jaké byl odpálen.

- Určete elevační úhel α odpalu.
- Určete dobu T letu míče.
- Určete maximální výšku H míče.
- Určete délku vrhu L' , jestliže pálkař trefí elevační úhel $\alpha' = 45^\circ$ při stejné velikosti v_0 počáteční rychlosti.

Odpor vzduchu zanedbejte.

Řešení:

- Z kinematických zákonů šikmého vrhu

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad (4.23)$$

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 \quad (4.24)$$

vyloučením času získáme rovnici

$$y = x \tan \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2.$$

Položením $x = L$, $y = 0$ dostaneme $\tan \alpha = \frac{gL}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}$. Užitím vztahů mezi goniometrickými funkcemi

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

dostaneme

$$L = \frac{v_0^2}{g} 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha, \quad \sin 2\alpha = \frac{gL}{v_0^2}. \quad (4.25)$$

Číselně vychází $\sin 2\alpha = 0,72073$, což vede k dvěma řešením $\alpha_1 = 23^\circ$, $\alpha_2 = 67^\circ$

4 body

- Užitím rovnice (4.23) a položením $x = L$, $t = T$ dostaneme

$$T = \frac{L}{v_0 \cos \alpha} = \frac{\frac{v_0^2}{g} 2 \sin \alpha \cos \alpha}{v_0 \cos \alpha} = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Úhlům α_1 , α_2 odpovídají doby letu $T_1 = 2,8 \text{ s}$, $T_2 = 6,6 \text{ s}$.

2 body

- Maximální výšku získáme dosazením $t = \frac{T}{2} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$, $y = H$ do rovnice (4.24) :

$$H = v_0 \frac{T}{2} \sin \alpha - \frac{1}{2} g \left(\frac{T}{2} \right)^2 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Číselné dosazení opět vede na dvě řešení $H_1 = 9,6 \text{ m}$, $H_2 = 53 \text{ m}$.

2 body

d) Položením $\alpha = \alpha' = 45^\circ$ v rovnici (4.25) dostaneme

$$L' = \frac{v_0^2 \sin 90^\circ}{g} = \frac{v_0^2}{g} = 125 \text{ m}.$$

2 body

FO57C2-1: Střelba z malorážky

Autor: J. Thomas, 30 %

Sportovní malorážka má hmotnost $m_1 = 7,4 \text{ kg}$ a hlaveň dlouhou $s_1 = 670 \text{ mm}$. Těžiště malorážky leží v ose hlavně. Střely mají hmotnost $m_2 = 5,3 \text{ g}$, průměr $d = 5,6 \text{ mm}$ a tvar zaobleného válce. Díky rýhování hlavně se střela během pohybu v hlavní otočí $3 \times$ kolem své osy a hlaveň opouští rychlostí $v = 270 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Terč je ve vzdálenosti $s = 50 \text{ m}$ a jeho střed leží na stejné vodorovné přímce jako ústí hlavně. Odpor vzduchu zanedbejte. Určete:

- velikost síly F , jakou puška působí na rameno střelce při zpětném rázu,
- vzdálenost Δh , o kterou mine střelec střed terče, bude-li mířit přesně vodorovným směrem,
- náměrný úhel α , pod kterým musí být hlaveň nakloněna, aby střelec zasáhl střed terče (ústí hlavně zůstává ve stejné vodorovné rovině, jako střed terče),
- poměr kinetické energie posuvného a kinetické energie rotačního pohybu střely v okamžiku, kdy střela opouští hlaveň. Moment setrvačnosti střely vzhledem k její rotační ose je $J = 0,43 \text{ mr}^2$.

Počáteční rychlost střely byla měřena balistickým kyvadlem tak, že z pušky bylo zblízka vystřeleno vodorovným směrem do krabice s pískem o hmotnosti $M = 1,50 \text{ kg}$, zavěšené na vláknech délky $l = 3,5 \text{ m}$. Střela v krabici zůstane.

e) O jaký úhel φ se kyvadlo odchýlilo od svislého směru?

Řešení:

a) Střela se bude pohybovat v hlavní po dobu $t = \frac{2s_1}{v}$. Síla, která pohyb způsobila,

$$F = \frac{m_2 v}{t} = \frac{m_2 v^2}{2s_1} = 290 \text{ N},$$

má podle zákona akce a reakce stejnou velikost, ale opačný směr než síla, která působí na rameno střelce.

Poznámka: Úlohu můžeme řešit i tak, že ze ZZH nejprve určíme rychlost pušky

$$v_1 = \frac{m_2 v}{m_1} \text{ a pak dosadíme do vztahu pro sílu } F = \frac{m_1 v_1}{t} = \frac{m_2 v}{t} = \frac{m_2 v^2}{2s_1}.$$

2 body

b) Pohyb střely je vodorovný vrh s počáteční rychlostí v . Platí tedy $\Delta h = \frac{1}{2} g t^2$, kde

$$t_1 = \frac{s}{v}, \text{ takže } \Delta h = \frac{g s^2}{2v^2} = 17 \text{ cm}.$$

2 body

c) Tentokrát jde o vrh šikmý vzhůru. Pro délku vrhu platí:

$$s = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{sg}{v^2} = 0,00673 \Rightarrow \alpha = 0,19^\circ.$$

2 body

Poznámka: Lze rovněž použít aproximaci

$$\alpha = \arctan \frac{\Delta h}{s} = 0,19^\circ.$$

- d) Kinetická energie posuvného pohybu střely je $E_{k1} = \frac{1}{2}m_2v^2 (= 193 \text{ J})$. Střela v hlavni vykonala rovnoměrně zrychleným otáčivým pohybem 3 otáčky, její průměrná úhlová rychlost při pohybu v hlavni byla $\omega_p \frac{6\pi}{t}$. Konečná úhlová rychlost při opuštění hlavně pak $\omega \frac{12\pi}{t}$, kde $t = \frac{2s_1}{v}$. Moment setrvačnosti střely $J = 0,43m_2 \frac{d^2}{4}$. Postupným dosazením do vztahu pro kinetickou energii rotačního pohybu a úpravou dostaneme

$$E_{k2} = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{3,87\pi^2 d^2 m_2 v^2}{2s_1^2}.$$

Poměr energií $\frac{E_{k1}}{E_{k2}} = \frac{s_1^2}{3,87d^2\pi^2} \doteq 370.$ **2 body**

- e) Ze zákona zachování hybnosti $m_2v = (m_2 + M)u$ a ze zákona zachování mechanické energie $\frac{1}{2}(m_2 + M)u^2 = (m_2 + M)l(1 - \cos \varphi)g$ vyjádříme

$$\cos \varphi = 1 - \frac{(m_2v)^2}{2lg(m_2 + M)^2} = 0,9868 \Rightarrow \varphi = 9,3^\circ.$$

2 body

FO56C2-2: Mladý vandal

Autor: J. Thomas, 28 %

Chlapci vadí, že na protějším domě přímo proti jeho balkónu je jasně svítící výbojka, která osvětluje celou stěnu domu, ve kterém bydlí. Rozhodne se proto, že výbojku zasáhne kamenem hozeným ze svého balkónu pod úhlem $\alpha = 35^\circ$. Místo odhodu leží v úrovni zdi chlapcova domu a ve stejné vodorovné i svislé rovině jako výbojka. Vzdálenost zdi chlapcova domu (a tedy i místa odhodu) od výbojky je $L = 12,0 \text{ m}$.

- Určete velikost počáteční rychlosti v_0 , kterou musí chlapec hodit kámen, aby výbojku zasáhl, a dobu T letu kamene.
- Dokažte, že stín vržený kamenem od výbojky na zeď chlapcova domu se během letu kamene pohybuje stálou rychlostí a určete její velikost v_s .
- Určete velikost počáteční rychlosti v_{01} , kterou by musel chlapec hodit kámen, kdyby výbojka ležela ve výšce $d = 2,0 \text{ m}$ nad výše uvažovanou polohou, pokud bude házet pod stejným elevačním úhlem.

Řešte nejprve obecně, pa pro dané číselné hodnoty. Odporové síly proti pohybu zanedbejte. Tíhové zrychlení $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Řešení:

- a) Zvolme soustavu souřadnic s počátkem v místě vrhu (obr. 4.11). Z rovnic

$$x = v_0 t \cos \alpha \tag{4.26}$$

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2 \tag{4.27}$$

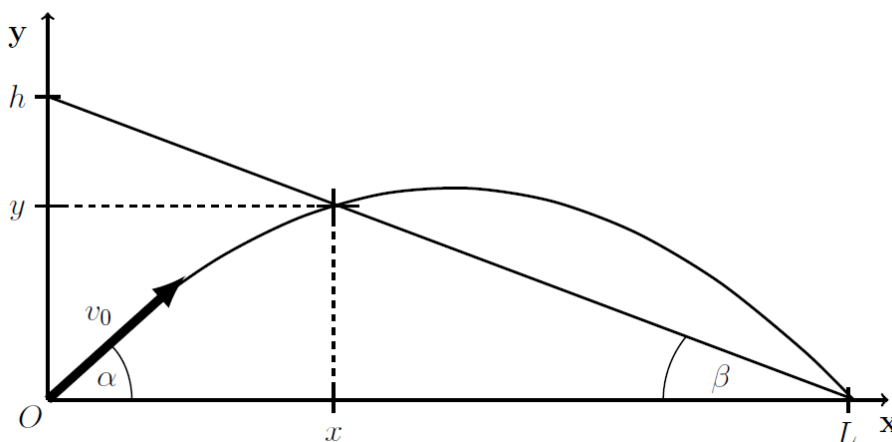
položením $x = L, y = 0$ dostaneme

$$L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{gL}{\sin 2\alpha}} \doteq 11,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Kámen pak letí dobu

$$T = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{L}{v_0 \cos \alpha} = \sqrt{\frac{2L \tan \alpha}{g}} \doteq 1,3 \text{ s.}$$

4 body



Obrázek 4.11

- b) Označme β výškový úhel kamene, resp. jeho stínu, vzhledem k lampě (obr. 4.11). Výška stínu kamene nad místem odhodu závisí na čase. Dosazením souřadnic určených rovnicemi (4.26) a (4.27) a odvozeného vztahu

$$\begin{aligned} h(t) = L \tan \beta &= L \frac{y}{L-x} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \frac{v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2}{\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} - v_0 t \cos \alpha} = \\ &= v_0 t \sin \alpha \frac{2v_0 \sin \alpha - gt}{2v_0 \sin \alpha - gt} = v_0 t \sin \alpha. \end{aligned}$$

Výška velikosti stínu je přímo úměrná času, stín kamene se tedy pohybuje rovnoměrně rychlostí o velikosti

$$v_s = v_0 \sin \alpha = \sin \alpha \sqrt{\frac{gL}{\sin 2\alpha}} = \sqrt{\frac{gL \tan \alpha}{2}} \doteq 6,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

4 body

- c) V rovnicích (4.26) a (4.27) šikmého vrhu položíme $x = L$, $y = d$. Po vyloučení času dostáváme vztah $d = L \tan \alpha - \frac{gL^2}{2v_{01}^2 \cos^2 \alpha}$, ze kterého vyjádříme v_{01} :

$$v_{01} = \frac{L}{\cos \alpha} \sqrt{\frac{g}{2(L \tan \alpha - d)}} \doteq 12,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2 body

FO53C2-3: Šikmý vrh

Autor: J. Thomas, 23%

Těleso je vrženo šikmo vzhůru počáteční rychlostí \vec{v}_0 pod úhlem α .

- Určete souřadnice bodů trajektorie tělesa, v nichž je jeho kinetická energie rovna potenciální energii tíhové vzhledem k vodorovné rovině procházející místem vrhu.
- Určete velikost a směr rychlosti tělesa v těchto bodech.

Odpor vzduchu proti pohybu tělesa zanedbejte. Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty: $v_0 = 15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $\alpha = 60^\circ$.

Řešení:

Pro souřadnice polohového vektoru a vektoru okamžité rychlosti platí kinematické zákony

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2, \quad (4.28)$$

$$v_x = v_0 \cos \alpha, \quad v_y = v_0 \sin \alpha - g t. \quad (4.29)$$

Vyloučením času t z (4.28) dostaneme neparametrickou rovnici trajektorie

$$y = x \tan \alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (4.30)$$

a) V hledaných bodech má platit

$$mgy = \frac{1}{2} m v^2. \quad (4.31)$$

Ze zákona zachování mechanické energie plyne

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v^2 + mgy = 2mgy \Rightarrow y = \frac{v_0^2}{4g}.$$

Dosazením do (4.30) dostaneme kvadratickou rovnici

$$\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 - x \tan \alpha + \frac{v_0^2}{4g} = 0$$

s kořeny

$$x_{1,2} = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} \left(\tan \alpha \pm \sqrt{\tan^2 \alpha - \frac{1}{2 \cos^2 \alpha}} \right).$$

Rovnice má řešení, když

$$\tan^2 \alpha - \frac{1}{2 \cos^2 \alpha} \geq 0 \Rightarrow \sin \alpha \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha \geq 45^\circ,$$

což je pro dané hodnoty splněno.

Číselně vychází $x_1 = 4,2 \text{ m}$, $x_2 = 15,7 \text{ m}$, $y = 5,7 \text{ m}$.

5 bodů

b) Z (4.31) a ze zákona zachování mechanické energie pro hledané body dále plyne

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v^2 + mgy = m v^2 \Rightarrow v = \frac{v_0}{\sqrt{2}}.$$

Pro odchylku β okamžité rychlosti od vodorovného směru platí

$$\cos \beta = \frac{v_x}{v} = \frac{v_0 \cos \alpha}{\frac{v_0}{\sqrt{2}}} = \cos \alpha \cdot \sqrt{2}.$$

Pro dané hodnoty vychází $v = 10,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $\cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

V bodě $[x_1, y]$ na vzestupné části trajektorie $\beta = 45^\circ$, v bodě $[x_2, y]$ na sestupné části trajektorie $\beta = -45^\circ$.

5 bodů

4.4 Mechanická práce a energie

FO55C2-2: Dva vagóny

Autor: J. Jírů, 60 %

Po přímých vodorovných kolejích jedou za sebou dva vagóny, oba mají stejnou kinetickou energii. První má velikost rychlosti $v_1 = 2,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, druhý o hmotnosti $m_2 = 20t$ má velikost rychlosti $v_2 = 3,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Při srážce se vagóny automaticky spojí.

- Určete hmotnost m_1 prvního vagónu.
- Určete velikost rychlosti v soupravy po srážce.
- Určete poměr $\frac{E'_k}{E_k}$, kde E'_k je kinetická energie soupravy po srážce a E_k je součet kinetických energií obou vagónů před srážkou.

Řešte nejprve obecně, pak pro dané hodnoty.

Řešení:

- a) Z rovnosti kinetických energií $\frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_2v_2^2$ dostaneme

$$m_1 = m_2 \frac{v_2^2}{v_1^2} = 45t. \quad (4.32)$$

2 body

- b) Ze zákona zachování hybnosti $m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v$ dostaneme

$$v = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}.$$

Dosazením vztahu (4.32) dostaneme

$$v = \frac{m_2 \frac{v_2^2}{v_1^2} \cdot v_1 + m_2v_2}{m_2 \frac{v_2^2}{v_1^2} + m_2} = \frac{v_1 + v_2}{v_1^2 + v_2^2} v_1v_2 = 3,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (4.33)$$

3 body

- c) Poměr kinetických energií vagónů po srážce a před srážkou je

$$\frac{E'_k}{E_k} = \frac{\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2}{2 \cdot \frac{1}{2}m_2v_2^2} = \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2m_2v_2^2}.$$

Užitím vztahů (4.32) a (4.33) dostaneme

$$\frac{E'_k}{E_k} = \frac{(m_2 \frac{v_2^2}{v_1^2} + m_2) \frac{(v_1 + v_2)^2}{(v_1^2 + v_2^2)^2} v_1^2 v_2^2}{2m_2v_2^2} = \frac{(v_1 + v_2)^2}{2(v_1^2 + v_2^2)} = \frac{25}{26} = 0,96.$$

5 bodů

FO52C2-2: Souběžná jízda

Autor: J. Jírů, 51 %

Dva automobily, každý o hmotnosti $m = 1200 \text{ kg}$ se pohybují rovnoměrným pohybem vedle sebe rychlostí o velikosti $v_0 = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Ve stejném okamžiku začnou zrychlovat tak, že v čase $t_1 = 8,0 \text{ s}$ od počátku zrychlování dosáhnou oba rychlosti o velikosti $v_1 = 28 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Přitom první automobil zrychloval s konstantním zrychlením, druhý s konstantním výkonem.

- a) Určete u prvního automobilu uraženou dráhu s , minimální výkon P_{\min} a maximální výkon P_{\max} během zrychlování.
- b) Určete u druhého automobilu výkon P během zrychlování, velikost a'_0 počátečního zrychlení a velikost a'_1 konečného zrychlení.
- c) Na základě předchozích výpočtů rozhodněte, který automobil urazil během zrychlování delší dráhu.

Úlohy a) a b) řešte nejprve obecně, pak pro dané hodnoty.

Řešení:

- a) Z rovnic $a = \frac{v_1 - v_0}{t_1}$, $s = v_0 t_1 + \frac{1}{2} a t_1^2$ dostaneme $s = \frac{v_1 + v_0}{2} t_1 = 152 \text{ m}$.
Výkon při rovnoměrně zrychleném pohybu je $P = Fv$ přímo úměrný rychlosti, kde $F = ma = m \frac{v_1 - v_0}{t_1}$ je konstantní tahová síla. Dosazením dostaneme

$$P_{\min} = Fv_0 = m \frac{v_1 - v_0}{t_1} v_0 = 27,0 \text{ kW},$$

$$P_{\max} = Fv_1 = m \frac{v_1 - v_0}{t_1} v_1 = 75,6 \text{ kW},$$

4 body

- b) Z rovnice $P t_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$ dostaneme výkon druhého automobilu $P = \frac{m(v_1^2 - v_0^2)}{2t_1} = 51,3 \text{ kW}$. Zrychlení a' druhého automobilu není konstantní. Zpočátku je větší a na konci časového intervalu menší než zrychlení a prvního automobilu. Platí

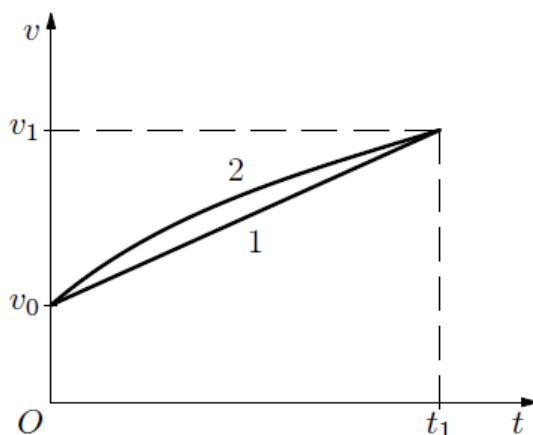
$$P = Fv = ma'v = \frac{m(v_1^2 - v_0^2)}{2t_1} \Rightarrow a' = \frac{(v_1^2 - v_0^2)}{2t_1 v}.$$

$$\text{Na počátku je } a'_0 = \frac{(v_1^2 - v_0^2)}{2t_1 v_0} = \frac{v_1 - v_0}{t_1} \cdot \frac{v_1 + v_0}{2v_0} = 1,9a = 4,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2},$$

$$\text{na konci je } a'_1 = \frac{(v_1^2 - v_0^2)}{2t_1 v_1} = \frac{v_1 - v_0}{t_1} \cdot \frac{v_1 + v_0}{2v_1} = 0,68a = 1,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

4 body

- c) Z grafu rychlosti (obr. 4.12) je zřejmé, že dráha uražená druhým automobilem v daném časovém intervalu je větší.



Obrázek 4.12

2 body

Poznámka: Dráhu druhého automobilu lze vypočítat integrálním počtem:

$$s = \int_0^{t_1} \sqrt{v_0^2 + \frac{(v_1^2 - v_0^2)}{t_1} t} dt = 163 \text{ m.}$$

FO52C2-4: Koule na nakloněné rovině

Autor: M. Jarešová, 26 %

Po nakloněné rovině o sklonu $\alpha = 30^\circ$ a výšce $h = 1,00 \text{ m}$ spustíme současně dvě koule, jednu plnou a druhou dutou, tenkostěnnou (obr. 4.13). Obě koule mají stejnou hmotnost m , jsou z homogenního materiálu a pohybují se po nakloněné rovině valivým pohybem bez smyku. Určete:

- poměr kinetických energií plné a duté koule při dosažení spodního konce nakloněné roviny,
- poměr velikostí rychlostí plné a duté koule při dosažení spodního konce nakloněné roviny a tyto velikosti rychlostí,
- poměr velikostí zrychlení obou koulí v průběhu pohybu,
- jakou počáteční rychlost bychom museli při startu udělit "pomalejší" kouli, aby obě koule dosáhly dolního konce nakloněné roviny za stejnou dobu.

Moment setrvačnosti plné koule je $J_{01} = \frac{2}{5}mr^2$, moment setrvačnosti tenkostěnné koule je $J_{02} = \frac{2}{3}mr^2$. Valivý odpor ani odpor prostředí neuvažujte.



Obrázek 4.13

Řešení:

- Na začátku pohybu mají obě koule nulovou kinetickou a stejně velkou polohovou energii. Ze zákona o zachování mechanické energie vyplývá, že obě koule musí mít po dosažení spodního konce také stejnou energii kinetickou. Poměr kinetických energií koulí na konci nakloněné roviny je tudíž roven jedné. **1 bod**
- Kinetická energie plné koule je dána vztahem

$$E_{k1} = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}J_{01}\omega^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}mr^2 \cdot \frac{v_1^2}{r^2} = \frac{7}{10}mv_1^2.$$

Kinetická energie tenkostěnné koule je dána vztahem

$$E_{k2} = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}J_{02}\omega^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}mr^2 \cdot \frac{v_2^2}{r^2} = \frac{5}{6}mv_2^2.$$

Z rovnosti $E_{k1} = E_{k2}$ dostaneme $\frac{7}{10}mv_1^2 = \frac{5}{6}mv_2^2$, z čehož $\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{25}{21}}$. Z výše

uvedených vztahů v části a) také vyplývá $v_1 = \sqrt{\frac{10}{7}gh} = 3,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$,

$$v_2 = \sqrt{\frac{6}{5}gh} = 3,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

3 body

c) Obě koule musí při svém pohybu urazit dráhu $s = \frac{h}{\sin \alpha} = \frac{v_1^2}{2a_1} = \frac{v_2^2}{2a_2}$. Z rovnosti

$$\frac{v_1^2}{2a_1} = \frac{v_2^2}{2a_2} \text{ dostaneme } \frac{a_1}{a_2} = \frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{\frac{10}{7}gh}{\frac{6}{5}gh} = \frac{25}{21}. \text{ Z rovnosti } \frac{h}{\sin \alpha} = \frac{v_1^2}{2a_1} \text{ dostaneme}$$

$$a_1 = \frac{v_1^2 \sin \alpha}{2h} = \frac{\frac{10}{7}gh \sin \alpha}{2h} = \frac{5}{7}g \sin \alpha = 3,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}. \text{ Analogicky z rovnosti } \frac{h}{\sin \alpha} =$$

$$\frac{v_2^2}{2a_2} \text{ dostaneme } a_2 = \frac{v_2^2 \sin \alpha}{2h} = \frac{\frac{6}{5}gh \sin \alpha}{2h} = \frac{3}{5}g \sin \alpha = 2,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

Poznámka

K týmž výsledkům je možno dospět také užitím vztahu $a = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{J_0}{mr^2}}$ postupným

dosazením za momenty setrvačnosti.

d) Pro dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu 1. koule s nulovou počáteční rychlostí platí vztah $s = \frac{1}{2}at^2$, z čehož $t = \sqrt{\frac{2s}{a_1}}$. Aby obě koule dorazily na spodní konec nakloněné roviny současně, musíme druhé kouli udělit počáteční rychlost o velikosti v_{02} . Platí $s = v_{02}t + \frac{1}{2}a_2t^2$. Po dosazení za t dostaneme $s = v_{02} \cdot \sqrt{\frac{2s}{a_1}} + \frac{1}{2}a_2 \cdot \frac{2s}{a_1}$, z čehož

$$s - \frac{a_2}{a_1}s = v_{02} \cdot \sqrt{\frac{2s}{a_1}}.$$

Postupným dosazením za a_1 , a_2 , a $s = \frac{h}{\sin \alpha}$ dostaneme

$$v_{02} = \frac{4}{25} \sqrt{\frac{5}{14}} hg = 0,30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

3 body

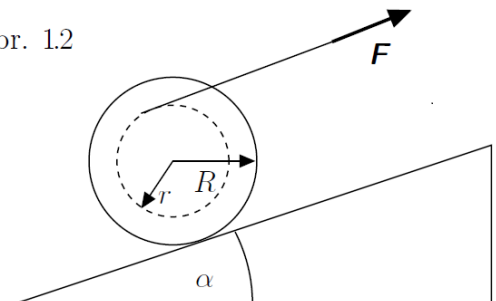
FO57C2-2: Dělník a cívka

Autor: J. Thomas, 20%

Dělník táhne cívku s kabelem rovnoměrným pohybem do mírného svahu s úhlem sklonu $\alpha = 10^\circ$ tak, že se kabel současně odvíjí (obr. 1.2). Hmotnost cívky je $m = 150 \text{ kg}$, její vnější poloměr $R = 70 \text{ cm}$, vnitřní poloměr $r = 40 \text{ cm}$, považujeme za stálý. Jedno otočení celé cívky trvá dobu $t = 5,0 \text{ s}$. Určete:

- velikost rychlosti dělníka v ,
- velikost potřebné síly F ,
- jeho okamžitý užitečný výkon P .

Obr. 1.2



Řešení:

a) S otočením cívky se také odvine část kabelu. Za dobu t dělník urazí dráhu

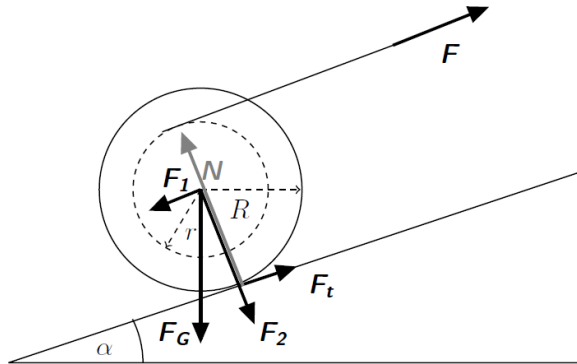
$$s = 2\pi R + 2\pi r$$

a jde tedy rychlostí

$$v = \frac{2\pi(R+r)}{t} = 1,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

3 body

- b) Protože se dělník pohybuje rovnoměrným pohybem, musí být síly i momenty všech sil v rovnováze. Na cívku působí tíhová síla se složkami o velikosti $F_1 = mg \sin \alpha$, která má opačný směr než síla \vec{F} , síla o velikosti $F_2 = mg \cos \alpha$, která je kolmá k nakloněné rovině. V bodě dotyku cívky s nakloněnou rovinou pak působí reakce nakloněné roviny \vec{N} , která má opačný směr než složka \vec{F}_2 , a síla tření \vec{F}_t , viz obr. (4.14).



Obrázek 4.14

Cívka se otáčí kolem bodu dotyku s nakloněnou rovinou, podle momentové věty tedy musí platit

$$mg \sin \alpha \cdot R = F \cdot (R + r) \Rightarrow F = \frac{mgR \sin \alpha}{R + r} = 160 \text{ N}.$$

4 body

- c) Okamžitý výkon dělníka je

$$P = F \cdot v = \frac{m g r \sin \alpha}{R + r} \cdot \frac{2\pi(R+r)}{t} = \frac{2\pi m g R \sin \alpha}{t} \doteq 220 \text{ W}.$$

3 body

4.5 Mechanika tuhého tělesa

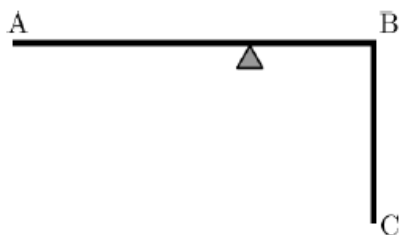
FO62C2-2: Lomený nosník

Autor: J. Thomas, 39%

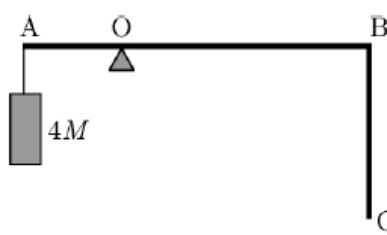
Stejnorodý nosník ABC o celkové délce $L = 12 \text{ m}$ a hmotnosti M má tvar písmene L o délce ramen v poměru 2:1 (obr. 4.15). Určete:

- V jaké vzdálenosti x od bodu A musíme nosník podepřít, aby byl v rovnováze?
- Jaká musí být hmotnost závaží m_1 , které zavěsíme v bodě A, aby byl nosník, podepřený v polovině vzdálenosti AB v rovnováze?
- Nosník podepřeme v bodě O, který je ve čtvrtině vzdálenosti AB, blíže k bodu A (obr.4.16). V bodě A zavěsíme těleso o hmotnosti $m_2 = 4M$. Jakou nejmenší silou \vec{F} , která působí v bodě C, udržíme nosník v rovnováze?

Řešte nejprve obecně, pak pro zadané hodnoty.



Obrázek 4.15



Obrázek 4.16

Řešení:

- a) Nosník musíme podepřít nad jeho těžištěm. Těžiště nosníku leží na svislé přímce, která je od bodu A ve vzdálenosti

$$x = \frac{\frac{2}{3}M \cdot \frac{L}{3} + \frac{1}{3}M \cdot \frac{2L}{3}}{M} = \frac{4}{9}L = \frac{16}{3} \text{ m} = 5,3 \text{ m.}$$

3 body

- b) Podepřeme-li nosník uprostřed vzdálenosti AB, bude se těžiště jeho pravé části nacházet ve vzdálenosti x_2 od osy otáčení. Platí

$$x_2 = \frac{\frac{1}{3}M \cdot \frac{L}{6} + \frac{1}{3}M \cdot \frac{L}{3}}{\frac{2}{3}M} = \frac{L}{4} = 3 \text{ m.}$$

Těžiště jeho levé části je ve vzdálenosti $x_1 = \frac{L}{6} = 2 \text{ m}$ od osy otáčení. Z momentové věty plyne

$$m_1 \frac{L}{3} + \frac{1}{3}Mx_1 = \frac{2}{3}Mx_2,$$

odtud $m_1 = \frac{1}{3}M$.

Jednodušší řešení: Na pravé straně části nosníku AB je břemenem jeho část o hmotnosti $\frac{1}{3}M$, na levé straně nosníku musí být zavěšeno břemeno stejné hmotnosti.

3 body

- c) Moment sil, působících na levé straně nosníku má nyní velikost

$$M_L = 4Mg \frac{L}{6} + \frac{Mg}{6} \frac{L}{12} = \frac{49}{72}MgL.$$

Moment tíhových sil na pravé straně Aby byla velikost síly F minimální, musí být maximální její vzdálenost od osy otáčení. Vzdálenost bodu C od osy otáčení je

$$\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{3}\right)^2} = \frac{L}{6}\sqrt{13}.$$

Moment síly \vec{F} vzhledem k ose otáčení bude

$$M_P = F \frac{L}{6} \sqrt{13}.$$

Z rovnosti momentů

$$F \frac{L}{6} \sqrt{13} = \frac{49}{72}MgL - \frac{21}{72}MgL = \frac{7}{18}MgL \Rightarrow F = \frac{7}{3\sqrt{13}}Mg = 0,65 Mg.$$

Tato síla působí kolmo na úsečku OC, svírá tedy se svislým směrem úhel α , pro který platí

$$\tan \alpha = \frac{\frac{L}{3}}{\frac{L}{2}} = \frac{2}{3}, \alpha = 34^\circ.$$

4 body

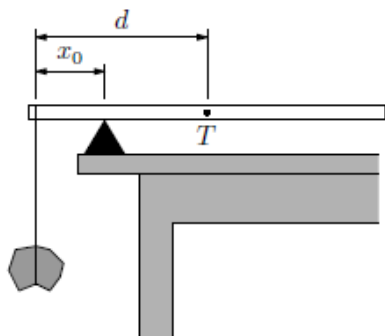
FO51C2-4: Měření hustoty

Autor: J. Thomas, 26 %

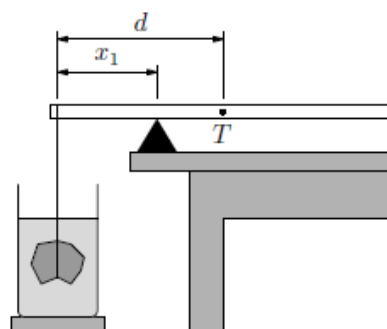
Homogenní těleso, jehož hustotu jsme chtěli změřit, jsme zavěsili na konec tyče obdélníkového průřezu do vzdálenosti d od těžiště, jehož polohu jsme experimentálně určili a vyznačili. Na kraj stolu jsme umístili břít, tyč se zavěšeným tělesem jsme na něj položili tak, aby byla vyvážená, a změřili jsme vzdálenost x_0 břitu od bodu závěsu (obr. 4.17). Pak jsme pod závěs umístili nádobu s kapalinou o známé hustotě ρ_1 tak, aby těleso bylo celé ponořeno a tyč jsme posunuli, aby byla opět v rovnováze. Vzdálenost bodu závěsu od břitu jsme museli zvětšit na x_1 (obr. 4.18).

- a) Určete hustotu ρ tělesa.
 b) Určete vzdálenost x_2 bodu závěsu od břitu, při které nastane rovnováha, když kapalinu v nádobě nahradíme jinou kapalinou o známé hustotě ρ_2 .

Řešte obecně a pak pro hodnoty $d = 490$ mm, $x_0 = 222$ mm, $x_1 = 283$ mm, $\rho_1 = 998$ kg · m⁻³, $\rho_2 = 820$ kg · m⁻³.



Obrázek 4.17



Obrázek 4.18

- a) Označme m hmotnost tělesa a M hmotnost tyče. Z momentové věty plyne

$$mgx_0 = Mg(d - x_0),$$

$$(mg - V\rho_1g)x_1 = mg \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho}\right) x_1 = Mg(d - x_1).$$

Vydělením obou rovnic dostaneme

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho}\right) \frac{x_1}{x_0} &= \frac{d - x_1}{d - x_1}, \\ \frac{\rho_1}{\rho} &= 1 - \frac{x_0(d - x_1)}{x_1(d - x_1)} = \frac{d(x_1 - x_0)}{x_1(d - x_0)}, \\ \rho &= \rho_1 \frac{x_1(d - x_0)}{d(x_1 - x_0)}. \end{aligned}$$

Pro dané hodnoty $\rho = 2530 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

5 bodů

b) Pokud bychom úkol a) řešili s kapalinou o hustotě ρ_2 , dostali bychom vztah

$$\rho = \rho_2 \frac{x_2(d - x_0)}{d(x_2 - x_0)}.$$

Porovnáním obou výsledků dostaneme

$$\begin{aligned} \rho_2 x_2(x_1 - x_0) &= \rho_1 x_1(x_2 - x_0), \\ x_2 &= \frac{\rho_1 x_1 x_0}{\rho_1 x_1 + \rho_2 x_0 - \rho_2 x_1}. \end{aligned}$$

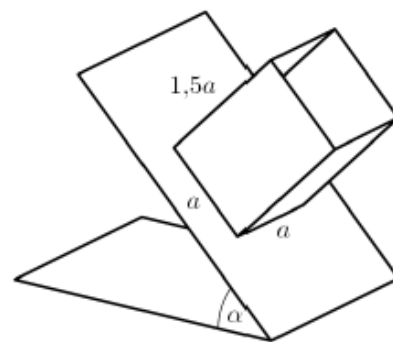
Pro dané hodnoty $x_2 = 270 \text{ mm}$.

5 bodů

FO58C2-2: Stabilita nádoby

Autor: J. Thomas, 17%

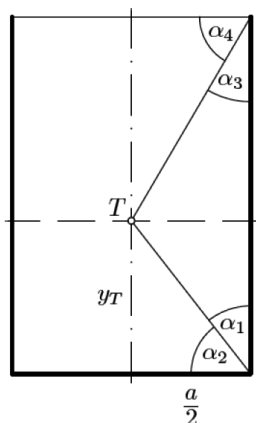
Nádoba z tvrdého plechu má tvar hranolu se dnem tvaru čtverce o straně a , boční stěny mají výšku $1,5a$. Nádobu postavíme na nakloněnou rovinu tak, že hrany nádoby jsou rovnoběžné se spádnicí, nebo k ní kolmé, a úhel sklonu nakloněné roviny α zvětšujeme. Součinitel statického tření mezi nakloněnou rovinou a plechem je $f = 1,3$. Určete, při jakém úhlu sklonu nakloněné roviny se stojící nebo ležící nádoba skácí, když:



Obrázek 4.19

- Nádoba stojí na dnu tvaru čtverce (obr. 4.19),
- nádoba leží na boku se dnem blíže k dolnímu konci nakloněné roviny,
- nádoba stojí tak, že dno tvaru čtverce je nahoře,
- nádoba leží na boku se dnem blíže k hornímu konci nakloněné roviny.

Řešení:



Obrázek 4.20

Nejprve najdeme polohu těžiště nádoby (obr. 4.20). Těžiště bude ležet na ose nádoby procházející středem jejího dna ve výšce

$$y_T = \frac{4 \cdot 1,5a^2 \cdot 0,75a}{a^2 + 4 \cdot 1,5a^2} = \frac{9}{14}a.$$

Nádoba se skácí poté, co spojnice těžiště se středem hrany kácení projde svislou polohou (obr. 4.21).

5 bodů

a) Nádoba stojí na základně tvaru čtverce. Pak

$$\tan \alpha_1 = \frac{0,5a}{y_T} = \frac{7}{9} \doteq 0,78, \quad \alpha_1 \doteq 38^\circ.$$

b) Nádoba leží na boku se dnem blíže k dolnímu konci nakloněné roviny. Pak

$$\tan \alpha_2 = \frac{y_T}{0,5a} = \frac{9}{7} \doteq 1,29, \quad \alpha_2 \doteq 52^\circ.$$

c) Nádoba stojí tak, že dno tvaru čtverce je nahoře. Pak

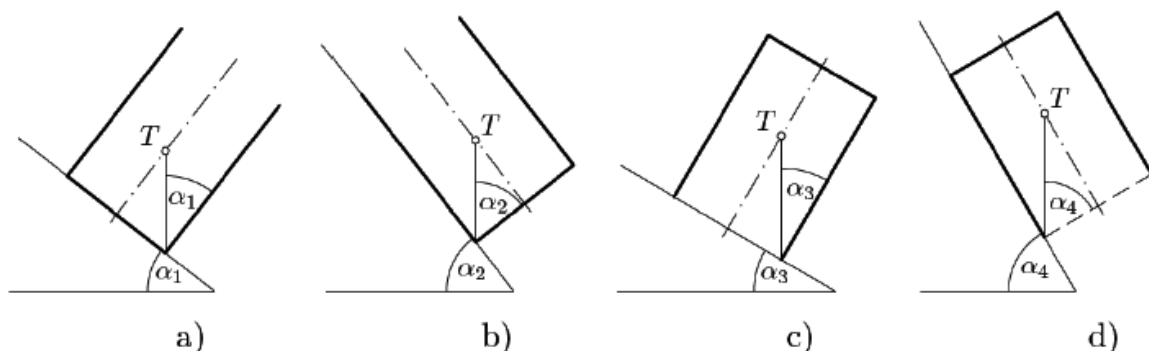
$$\tan \alpha_3 = \frac{0,5a}{1,5a - y_T} = \frac{7}{12} \doteq 0,58, \quad \alpha_3 \doteq 30^\circ.$$

d) Nádoba leží na boku se dnem blíže k hornímu konci nakloněné roviny. Pak

$$\tan \alpha_4 = \frac{1,5a - y_T}{0,5a} = \frac{12}{7} \doteq 1,71, \quad \alpha_4 \doteq 60^\circ.$$

Tento případ ale nemůže nastat, protože $\tan \alpha > f$. Nádoba bude po nakloněné rovině klouzat a nemůže se skácet.

5 bodů



Obrázek 4.21

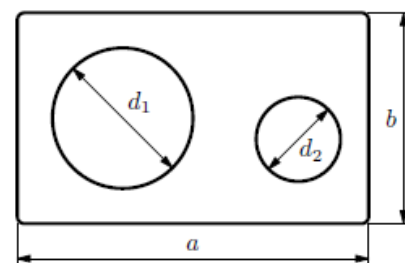
4.6 Mechanika kapalin a plynů

FO55C2-3: Sprchový kout

Autor: J. Thomas, 51 %

Vana sprchového koutu má rozměry $a = 1,00$ m, $b = 60$ cm a hloubku k přepadovému otvoru $c = 10$ cm. Ve vaně leží umyvadlo o vnějším průměru $d_1 = 40$ cm s prádlem o celkové hmotnosti $m = 5,0$ kg a výšce větší než c , vedle něj stojí kbelík o vnějším průměru $d_2 = 24$ cm ve kterém je $V_2 = 121$ vody. Do vany s uzavřeným výtokovým otvorem napustíme $V_1 = 15$ litrů vody.

- Do jaké výšky h_1 sahá voda ve vaně s umyvadlem a kbelíkem?
- Kbelík zvedneme a jeho obsah vylijeme do vany. Do jaké výšky h_2 bude sahat voda ve vaně s umyvadlem?
- Kolik vody můžeme ještě připustit do vany, než bude voda sahat k přepadovému otvoru?



Obrázek 4.22

Umyvadlo i kbelík považujte za pravidelná tělesa tvaru válce. Hustota vody je $\rho = 1000$ kg \cdot m⁻³.

Řešení:

- a) Předpokládejme, že tíhová síla působící na umyvadlo je větší, než síla vztlačová, proto umyvadlo zůstává ležet na dně i po napuštění objemu vody o objemu V_1 .
Volná plocha dna vany je

$$S = ab - \frac{\pi d_1^2}{4} - \frac{\pi d_2^2}{4} = 0,43 \text{ m}^2.$$

Voda bude sahat do výšky $h_1 = \frac{V_1}{S} = \frac{0,015}{0,43} \text{ m} = 3,5 \text{ cm}$.

Nyní zjistíme, jestli umyvadlo s prádlem zůstane po přilítí vody na dně vany. Porovnáme velikost tíhové síly $F_G = mg = 49 \text{ N}$ a vztlačové síly

$$F_{vz} = \frac{\pi d_1^2}{4} h_1 \rho g = 43 < F_G.$$

Umyvadlo tedy zůstane ležet na dně vany a náš předpoklad byl oprávněný.

4 body

- b) Po přelití vody o objemu V_2 z kbelíku do vany bude umyvadlo s prádlem plovat na hladině, jak se přesvědčíme výpočtem. Označme hloubku ponoru umyvadla y . Podle Archimédova zákona platí:

$$mg = \frac{\pi d_1^2}{4} y \rho g \Rightarrow y = \frac{4m}{\pi d_1^2 \rho} = 0,040 \text{ m} = 4,0 \text{ cm}.$$

Objem ponořené části umyvadla je $V_3 = \frac{\pi d_1^2}{4} y = \frac{m}{\rho} = 0,0050 \text{ m}^3 = 5,0 \text{ l}$.

Voda ve vaně sahá do výšky

$$h_2 = \frac{V_1 + V_2 + V_3}{ab} = \frac{0,032}{0,60} \text{ m} = 0,053 \text{ m} = 5,3 \text{ cm}.$$

Protože je $h_2 > y$, bude umyvadlo s prádlem plovat na hladině.

5 bodů

- c) Do vany můžeme ještě připustit vodu o objemu

$$V_4 = ab(c - h_2) = 0,028 \text{ m}^3 = 28 \text{ l}.$$

1 bod

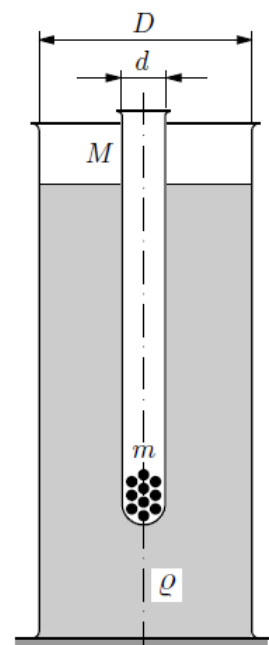
FO52C2-1: Zkumavka ve vodě

Autor: M. Jarešová, 51 %

Do zkumavky o vnitřním objemu $V_0 = 25 \text{ ml}$, hmotnosti $M = 13 \text{ g}$ a vnějším průměru $d = 16 \text{ mm}$ bylo vloženo 15 stejných olověných kuliček o celkové hmotnosti $m = 9 \text{ g}$. Zkumavku s kuličkami jsme pak vložili do kádinky o vnitřním průměru $D = 9 \text{ cm}$ naplněné vodou (obr.4.23). Poté jsme začali velmi pomalu a opatrně přidávat do zkumavky další stejné kuličky tak, aby se zkumavka nerozkmitala. Po vložení dalších 12 kuliček byla zkumavka téměř celá ponořená ve vodě (ale žádná voda do ní dovnitř nenatekla). Hustota vody je $\rho = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Určete

- použitím výše uvedených údajů hustotu ρ_s skla zkumavky a objem V_s skla, ze kterého je zkumavka vyrobena,
- změnu výšky Δh hladiny vody v kádince po přidání 12 kuliček do zkumavky,
- kolik kuliček N by muselo být celkem ve zkumavce, aby byla ponořena $\frac{4}{5}$ svého objemu.

Při řešení úlohy b) považujte zkumavku za válec.



Obrázek 4.23

Řešení:

a) Podle Archimédova zákona platí pro téměř ponořenou zkumavku

$$F_{vz} = V\rho g = (V_s + V_0)\rho g = F_G = (M + m_1)g,$$

kde $m_1 = m + \Delta m = \left(1 + \frac{12}{15}\right)m = \frac{27}{15}m = \frac{9}{5}m$ je hmotnost všech kuliček ve zkumavce. Pak

$$V_s \frac{M + m_1}{\rho} - V_0 = \frac{M + \frac{9}{5}m}{\rho} - V_0 = \frac{5M + 9m - 5V_0\rho}{5\rho} = \frac{M}{\rho_s},$$

$$\rho_s = \frac{5M\rho}{5M + 9m - 5V_0\rho}.$$

Pro dané hodnoty:

$$\rho_s = \frac{5 \cdot 0,013 \cdot 1000}{5 \cdot 0,013 + 9 \cdot 0,009 - 5 \cdot 25 \cdot 10^{-6} \cdot 1000} \text{kg} \cdot \text{m}^{-3} = 3100 \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

$$V_s = \frac{5 \cdot 0,013 + 9 \cdot 0,009 - 5 \cdot 25 \cdot 10^{-6} \cdot 1000}{5 \cdot 1000} \text{m}^3 = 4,2 \text{cm}^3$$

4 body

b) Po ponoření zkumavky s 15 kuličkami do kádinky stoupla hladina vody v kádince do výšky h_1 , kterou určíme ze vztahu

$$F_{vz1} \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} h_1 \rho g = F_{G1} = (M + m)g.$$

$$\text{Z toho } h_1 = \frac{4(M + m)}{\pi(D^2 - d^2)\rho}.$$

Po přidání dalších 12 kuliček o celkové hmotnosti Δm stoupla hladina vody v kádince do výšky h_2 oproti stavu, kdy byla zkumavka celá nad vodou. Obdobně jako v předchozím případě platí $h_2 = \frac{4(M + m + \Delta m)}{\pi(D^2 - d^2)\rho}$. Hladina vody v kádince tedy po přidání 12 kuliček tedy stoupla o

$$\Delta h = h_2 - h_1 = \frac{4\Delta m}{\pi(D^2 - d^2)\rho} = \frac{16m}{5\pi(D^2 - d^2)\rho}.$$

$$\text{Pro dané hodnoty je } \Delta h = \frac{16 \cdot 0,009}{5\pi \cdot (0,09^2 - 0,016^2) \cdot 1000} \text{m} = 1,2 \text{mm}.$$

3 body

c) Označme m_2 hmotnost kuliček, které musí být ve zkumavce, aby byla ponořena $\frac{4}{5}$ svého objemu. Pak

$$\frac{4}{5}(M + m_1) = \frac{4}{5} \left(M + \frac{9}{5}m \right) = M + m_2 = M + N \cdot \frac{m}{15},$$

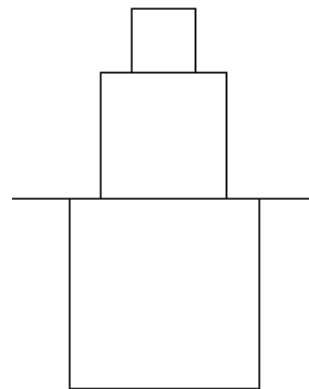
$$\text{z čehož } N = \frac{108m - 15M}{5m} = \frac{108 \cdot 9 - 15 \cdot 13}{5 \cdot 9} = 17.$$

3 body

FO56C2-4: Tři krychle

Autor: J. Thomas, 51 %

Tři krychle o hranách a , $2a$ a $3a$ jsou položeny na sebe na hladinu vody tak, aby měly společnou osu, procházející středy jejich stěn (obr. 4.24). Vodní hladina je právě na úrovni horní stěny spodní krychle. Určete:



Obrázek 4.24

- Určete hustotu materiálu ρ , z něhož jsou všechny krychle zhotoveny.
- Určete hloubku ponoru, odebereme-li horní krychli.
- Určete hloubku ponoru, odebereme-li spodní krychli a horní dvě ponecháme ve stejné poloze.
- Určete ve všech případech polohu těžiště soustavy a zvažte, zda hrozí nebo nehrozí jejich překlolení.

Hustota vody $\rho_v = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, tíhové zrychlení $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Řešení:

- Vyjdeme z rovnosti vztlakové a tíhové síly:

$$27a^3 \rho_v g = 36a^3 \rho g \Rightarrow \rho = \frac{3}{4} \rho_v = 750 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

2 body

- Spodní a prostřední krychle budou nyní ponořeny do hloubky x a podle Archimédova zákona platí:

$$x \cdot 9a^2 \rho_v = 35a^3 \rho = \frac{105}{4} a^3 \rho_v \Rightarrow x = \frac{35}{12} a \doteq 2,92a.$$

Bude tedy částečně ponořena jen spodní část krychle.

2 body

- Horní a prostřední krychle se ponoří do hloubky y a podle Archimédova zákona platí:

$$y \cdot 4a^2 \rho_v = 9a^3 \rho = \frac{27}{4} a^3 \rho_v \Rightarrow y = \frac{27}{16} a \doteq 1,69a.$$

Bude tedy ponořena jen prostřední krychle.

2 body

- Těžiště soustavy všech tří krychlí je od spodní stěny největší krychle ve vzdálenosti

$$y_T = \frac{1,5a \cdot 27a^3 + 4a \cdot 8a^3 + 5,5a \cdot a^3}{36a^3} = \frac{39}{18} a \doteq 2,17a > \frac{3}{2} a = 1,5a.$$

Působíště vztlakové síly, které je v těžišti vodního tělesa, nahrazujícího potopenou část krychle, je pod těžištěm soustavy krychlí.

Těžiště soustavy spodní a prostřední krychle je od spodní stěny největší krychle ve vzdálenosti

$$y_{T1} = \frac{1,5a \cdot 27a^3 + 4a \cdot 8a^3}{35a^3} = \frac{29}{14} a \doteq 2,07a > \frac{35}{24} a \doteq 1,46a.$$

Těžiště soustavy horní a prostřední krychle je od spodní stěny prostřední krychle ve vzdálenosti

$$y_{T2} = \frac{a \cdot 8a^3 + 2,5a \cdot a^3}{9a^3} = \frac{21}{18} a \doteq 1,17a > \frac{27}{32} a \doteq 0,846a.$$

3 body

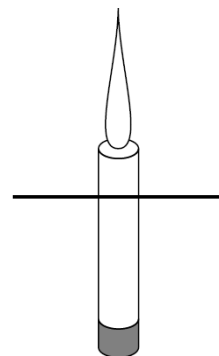
Ve všech případech leží těžiště soustavy nad působíštěm vztlakové síly. O stabilitě soustavy rozhoduje poloha metacentra M – bodu, ve kterém protíná nositelka vztlakové síly při vychýlení soustavy o malý úhel osu soustavy. Při vychýlení soustavy hrozí též sklouznutí horní krychle.

1 bod

FO58C2-4: Svíčka na vodě

Autor: J. Thomas, 47%

K parafínové svíčce o hmotnosti $m_1 = 112,2 \text{ g}$ hustotě $\rho_1 = 0,89 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ a průměru $d = 47,2 \text{ mm}$ je zdola přilepena hliníková destička tvaru válce o stejném průměru, hmotnosti $m_2 = 10,5 \text{ g}$ a hustotě $\rho_2 = 2,700 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$. Svíčku postavíme na vodu a zapálíme. Víme, že každou hodinu se zmenší hmotnost svíčky o $5,0 \text{ g}$. Hustota vody $\rho_v = 1,000 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$.



Obrázek 4.25

- Jaká je hloubka ponoru svíčky h při jejím zapálení?
- Jaká byla na počátku délka parafínové části svíčky h_1 a jaká je výška hliníkové destičky h_2 ?
- Za jak dlouho bude voda sahat k hornímu okraji svíčky?
- Podrobně popište stav soustavy po 15 hodinách.

Řešte obecně, pak pro dané číselné hodnoty.

Řešení:

- a) Z rovnosti vztlakové a tíhové síly

$$\pi \frac{d^2}{4} h \rho_v g = (m_1 + m_2)g \Rightarrow h = \frac{4(m_1 + m_2)}{\pi d^2 \rho_v} = 7,01 \text{ cm.}$$

2 body

- b) Výška parafínové části svíčky: $h_1 = \frac{4m_1}{\pi d^2 \rho_1} = 7,20 \text{ cm,}$

$$\text{výška hliníkového válečku: } h_2 = \frac{4m_2}{\pi d^2 \rho_2} = 0,22 \text{ cm.}$$

2 body

- c) Z rovnosti vztlakové a tíhové síly v okamžiku, kdy hladina vody sahá k okraji svíčky

$$\pi \frac{d^2}{4} (h_s + h_2) \rho_v g = \pi \frac{d^2}{4} (h_s \rho_1 + h_2 \rho_2) g$$

určíme současnou výšku parafínové části svíčky

$$h_s = h_2 \frac{\rho_2 - \rho_v}{\rho_v - \rho_1} = \frac{4m_2}{\pi d^2 \rho_2} \cdot \frac{\rho_2 - \rho_v}{\rho_v - \rho_1} = 3,4 \text{ cm.}$$

Hmotnost parafínové části tedy bude

$$m_s = \pi \frac{d^2}{4} h_s \rho_1 = \pi \frac{d^2}{4} \rho_1 h_2 \frac{\rho_2 - \rho_v}{\rho_v - \rho_1} = \pi \frac{d^2}{4} \rho_1 \frac{4m_2}{\pi d^2 \rho_2} \cdot \frac{\rho_2 - \rho_v}{\rho_v - \rho_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} m_2 \cdot \frac{\rho_2 - \rho_v}{\rho_v - \rho_1} = 53,5 \text{ g.}$$

Uhořelo tedy $112,2 \text{ g} - 53,5 \text{ g} = 58,7 \text{ g}$ parafínu. Proces hoření trval $11,7 \text{ h}$.

3 body

- d) Protože voda parafín ochlazuje, začne svíčka vyhořívát zevnitř. Přitom se bude zmenšovat její tíha a hladina vody bude sahat stále k hornímu okraji svíčky. Po 15 hodinách zbude ještě $m_3 = 112,2 \text{ g} - 75 \text{ g} - 37,2 \text{ g}$ parafínu. Označme výšku parafínové části svíčky h_3 .

Z rovnosti vztlakové a tíhové síly $\pi \frac{d^2}{4} (h_3 + h_2) \rho_v g = (m_2 + m_3)g$ vyjádříme

$$h_3 = \frac{4(m_2 + m_3)}{\pi d^2 \rho_v} - h_2 = \frac{4(m_2 + m_3)}{\pi d^2 \rho_v} - \frac{4m_2}{\pi d^2 \rho_2} = 2,50 \text{ cm.}$$

Svíčka tedy bude stále hořet a její plamen bude schován uvnitř její parafínové části.

3 body

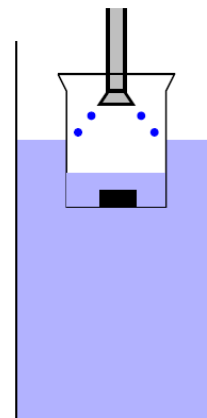
FO57C2-3: Potápění kádinky

Autor: J. Thomas, 44 %

V nádobě tvaru válce o vnitřním průměru $D = 10,0$ cm je nalita voda do výšky $h_1 = 20,0$ cm. Do nádoby s vodou vložíme závažím zatíženou kádinku o vnějším průměru $d = 6,0$ cm a o celkové hmotnosti $m = 150$ g.

- Do jaké hloubky h_2 se ponoří kádinka a do jaké výšky h_3 bude sahat voda ve válcové nádobě? Hustota vody $\rho_v = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.
- Do kádinky budeme ze zanedbatelné výšky pomocí rozprašovače přidávat každou sekundou $\Delta m = 10,0$ g vody (obr. 4.26). Jakou rychlostí v se bude kádinka pohybovat vzhledem ke dnu nádoby?
- Jakou dobu t bude trvat, než se kádinka zcela potopí, je-li její výška $h_4 = 10,0$ cm?

Řešte nejprve obecně, pak pro zadané hodnoty.



Obrázek 4.26

Řešení:

- a) Podle Archimédova zákona

$$mg = \pi \frac{d^2}{4} h_2 \rho_v g \Rightarrow h_2 = \frac{4m}{\pi \rho_v d^2} = 5,3 \text{ cm.}$$

2 body

Objem vody v nádobě se nezměnil. Proto

$$\frac{\pi D^2 h_1}{4} = \frac{\pi D^2 h_3}{4} - \frac{\pi d^2 h_2}{4} \Rightarrow h_3 = h_1 + \frac{d^2}{D^2} \cdot h_2 = h_1 + \frac{4m}{\pi D^2 \rho_v} = 21,9 \text{ cm.}$$

3 body

- b) Přidáním vody o hmotnosti Δm se kádinka ponoří hlouběji o $\Delta h = \frac{4\Delta m}{\pi \rho_v d^2}$ a ke dnu se přiblíží o

$$\Delta s = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{\pi D^2} \Delta h = \frac{(D^2 - d^2)}{D^2} \cdot \frac{4\Delta m}{\pi \rho_v d^2}.$$

Kádinka se bude pohybovat rychlostí

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{4(D^2 - d^2)}{D^2 \pi \rho_v d^2} \frac{\Delta m}{\Delta t} = 2,3 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}.$$

3 body

- c) Kádinka se potopí, bude-li $h_2 = h_4$. Pak musí přitéci $\Delta m_1 = \pi \frac{d^2}{4} h_4 \rho_v - m = 130$ g vody. Kádinka se tedy potopí za

$$t = \frac{\Delta m_1}{\Delta m} = \frac{\pi d^2 h_4 \rho_v - 4m}{4\Delta m} = 13 \text{ s.}$$

2 body**4.7 Vnitřní energie a teplo****FO61C2-3: Kalorimetr**

Autor: J. Tesař, 64 %

Ve válcové kalorimetrické nádobě o poloměru $r = 5,0$ cm je voda o hmotnosti $m_1 = 500$ g, ve které plave led o hmotnosti $m_2 = 5,0$ g. Soustava je v rovnovážném stavu. Do nádoby ponoříme měděný váleček o hmotnosti $m_3 = 100$ g a teplotě $t_3 = 50$ °C.

- a) Jaká bude výsledná teplota vody?
 b) O jakou výšku stoupne její hladina 1. ponořením válečku, 2. roztátím ledu? V obou případech 1. i 2. doložte svá tvrzení příslušnými výpočty.

Teplné ztráty zanedbejte, nepřihlížejte ani k závislosti hustoty a měrné tepelné kapacity na teplotě. Měrné skupenské teplo tání ledu je $l_t = 330 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$, měrná tepelná kapacita vody je $c_1 = 4200 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, měrná tepelná kapacita mědi je $c_3 = 383 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, hustota mědi je $\rho_3 = 8900 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Řešení:

- a) Označme Q_1 teplo, které přijme voda, Q_2 teplo, které přijme led a Q_3 teplo, které vydá váleček; výsledná teplota vody je t .

Podle zákona zachování energie je množství tepla Q_3 , které předá váleček vodě a ledu, rovno množství tepla, které přijme voda Q_1 a led Q_2 (zanedbáme-li tepelné ztráty vzniklé ohřátím kalorimetru a vyzářením). Proto platí rovnice

$$Q_3 = Q_1 + Q_2. \quad (4.34)$$

Označíme-li výslednou teplotu t , potom teplo, které vydá váleček při ochlazení, je

$$Q_3 = m_3 c_3 (t_3 - t).$$

Teplo, které spotřebuje voda, aby se ohřála na teplotu t , je

$$Q_1 = c_1 m_1 t,$$

neboť voda, v níž plave led, má teplotu 0°C . Teplo, které přijme led, se spotřebuje jednak na roztátí ledu (není-li ledu příliš mnoho), jednak na ohřátí vody vzniklé táním ledu z 0°C na výslednou teplotu t ; proto

$$Q_2 = m_2 l + c_1 m_2 t.$$

Dosazením za Q_1 , Q_2 , Q_3 do rovnice (4.34) získáme kalorimetrickou rovnici

$$c_3 m_3 (t_3 - t) = m_2 l + c_1 (m_1 + m_2) t,$$

z níž určíme neznámou

$$t = \frac{m_3 c_3 t_3 - m_2 l}{(m_1 + m_2) c_1 + m_3 c_3}. \quad (4.35)$$

Pro dané hodnoty: $t = \frac{0,1 \cdot 383 \cdot 50 - 0,005 \cdot 330 \cdot 10^3}{(0,5 + 0,005) \cdot 4200 + 0,1 \cdot 383} 0^\circ\text{C} = 0,12^\circ\text{C}$. **4 body**

- b) 1. Po ponoření válečku stoupne hladina vody v kalorimetru o objem vody vytlačené válečkem. Objem měděného válečku je

$$V = \frac{m_3}{\rho_3}. \quad (4.36)$$

Vytlačená voda zaujme podle nádoby tvar válce, jehož výška je h , takže

$$V = \pi r^2 h. \quad (4.37)$$

Porovnáním (4.36) a (4.37) dostáváme pro h rovnici

$$\frac{m_3}{\rho_3} = \pi r^2 h;$$

odtud

$$h = \frac{m_3}{\pi r^2 \rho_3}. \quad (4.38)$$

Pro dané hodnoty: $h = \frac{0,1}{\pi \cdot 0,05^2 \cdot 8,9 \cdot 10^3} \text{ m} = 0,14 \text{ cm}$.

3 body

2. Označme ρ_2 hustotu vody, V objem ponořené části ledu a V'_2 objem roztátého ledu. Led o hmotnosti m_2 má po roztátí objem

$$V'_2 = \frac{m_2}{\rho_2}.$$

Z Archimédova zákona

$$m_2 g = \rho_2 V g$$

dostaneme

$$V = \frac{m_2}{\rho_2}.$$

Z porovnávání plyne $V'_2 = V$, tedy úroveň hladiny vody se nezmění.

3 body

FO59C2-2: Tavení kovů

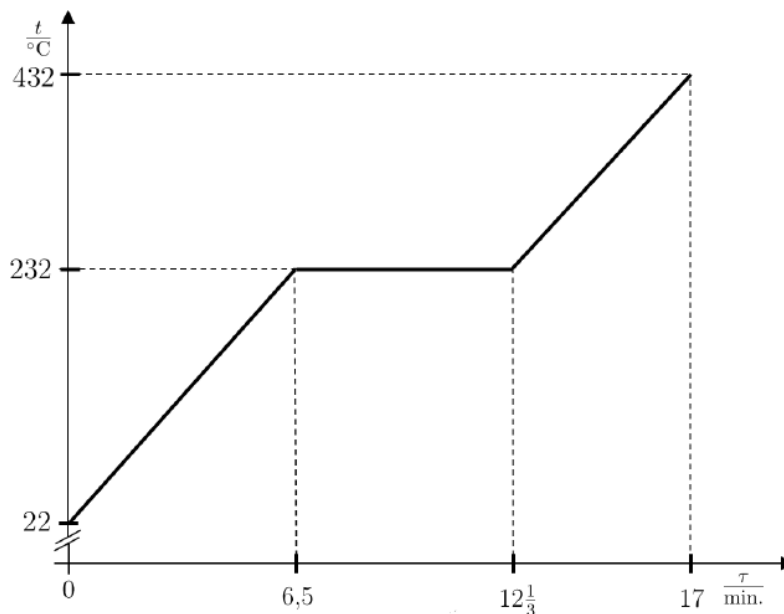
Autor: J. Thomas, 61 %

Vojta prováděl v laboratoři měření závislosti teploty vzorku kovu o hmotnosti $m = 500 \text{ g}$ na čase. Výsledná závislost je v grafu na obrázku 4.27. Zahřívání provádí v zařízení, jehož tepelný výkon se dá přepínačem měnit. Měření začal při tepelném výkonu $p_1 = 60 \text{ W}$, ale během měření změnil tepelný výkon na P_2 . Měrná tepelná kapacita kovu v kapalném stavu je $c_k = 260 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, jeho skupenské teplo tání je $l_t = 60 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Určete:

- Měrnou tepelnou kapacitu c_p kovu v pevném stavu,
- tepelný výkon P_2 zařízení po přepnutí,
- v jakém čase τ od prvního zapnutí zařízení došlo k jeho přepnutí?

Řešte nejprve obecně, pak pro zadané hodnoty.



Obrázek 4.27

Řešení:

- a) Označme dobu zahřívání pevného kovu $\tau_1 = 6,5$ min a teplo k tomu potřebné Q_1 . Pevný kov se ohřál o $\Delta t_1 = 210^\circ\text{C}$. Pak pro tepelný výkon zařízení platí

$$P_1 = \frac{Q_1}{\tau_1} = \frac{mc_p\Delta t_1}{\tau_1} \Rightarrow c_p \frac{P_1\tau_1}{m\Delta t_1} = 233 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}.$$

3 body

- b) Označme dobu zahřívání kapalného kovu $\tau_2 = 4,67$ min a teplo k tomu potřebné Q_2 . Kapalný kov se ohřál o $\Delta t_2 = 200^\circ\text{C}$.

Pak pro tepelný výkon zařízení platí

$$P_2 = \frac{Q_2}{\tau_2} = \frac{mc_k\Delta t_2}{\tau_2} = 92 \text{ W}.$$

2 body

- c) Protože při zahřívání pevného kovu, ani při zahřívání kovu kapalného, nenastal na křivce žádný zlom, došlo ke změně tepelného výkonu zařízení během fázové přeměny.

1 bod

Označíme-li teplo dodané během fázové změny při výkonu P_1 jako Q_{11} a teplo dodané během fázové změny při výkonu P_2 jako Q_{22} , pak jejich součet je roven skupenskému teple tání

$$Q_{11} + Q_{22} = ml_t \quad (4.39)$$

a zahřívání bude trvat po dobu $\tau_{12} = 5,83$ minuty, pak

$$\frac{Q_{11}}{P_1} + \frac{Q_{22}}{P_2} = \tau_{12}. \quad (4.40)$$

Z rovnice (4.39)

$$Q_{22} = ml_t - Q_{11}$$

a dosadíme do rovnice (4.40)

$$\frac{Q_{11}}{P_1} + \frac{ml_t - Q_{11}}{P_2} = \tau_{12}.$$

Odtud vyjádříme

$$Q_{11} = \frac{\tau_{12}P_1 \frac{mc_k\Delta t_2}{\tau_2} - ml_t P_1}{\frac{mc_k\Delta t_2}{\tau_2} - P_1} = \frac{P_1(\tau_{12}mc_k\Delta t_2 - ml_t\tau_2)}{mc_k\Delta t_2 - P_1\tau_2} = 4,6 \text{ kJ}.$$

Doba tání při výkonu P_1 tedy bude

$$\tau_{11} \frac{Q_{11}}{P_1} = \frac{(\tau_{12}mc_k\Delta t_2 - ml_t\tau_2)}{mc_k\Delta t_2 - P_1\tau_2} = 76 \text{ s}.$$

K přepnutí na vyšší výkon tedy došlo za dobu $\tau = \tau_1 + \tau_{11} = 7$ min. 46 s od počátku měření.

4 body**FO51C2-3: Přelévání**

Autor: P. Šedivý, 57%

V jednom kalorimetru je nalita voda o hmotnosti $M = 1,00$ kg a teplotě $t_1 = 40^\circ\text{C}$, ve druhém voda o stejné hmotnosti $M = 1,00$ kg, ale nižší teplotě $t_2 = 20^\circ\text{C}$. Z teplejšího kalorimetru přelijeme vodu o hmotnosti $m = 0,100$ kg do chladnějšího a zamícháme. Potom stejné množství vody přelijeme z chladnějšího kalorimetru do teplejšího a zamícháme.

- a) Jak se změní rozdíl teplot mezi oběma kalorimetry?
 b) Kolikrát bychom museli zopakovat předchozí úkony, aby se rozdíl teplot mezi oběma kalorimetry zmenšil pod hodnotu $\Delta t = 1^\circ\text{C}$?

Ztráty tepla a tepelnou kapacitu kalorimetrů zanedbejte. Úlohu řešte nejprve obecně a pak pro dané hodnoty.

Řešení:

- a) Teplotu t'_2 chladnějšího kalorimetru po přilítí vody z teplejšího kalorimetru a zamíchání určíme z kalorimetrické rovnice:

$$m(t_1 - t'_2) = M(t'_2 - t_2) \Rightarrow t'_2 = \frac{Mt_2 + mt_1}{M + m}.$$

Podobně určíme teplotu t'_1 teplejšího kalorimetru po přilítí vody z chladnějšího kalorimetru:

$$\begin{aligned} (M - m)(t_1 - t'_1) &= m(t'_1 - t'_2) = mt'_1 - \frac{Mmt_2 + m^2t_1}{M + m}, \\ Mt'_1 &= (M - m)t_1 + \frac{Mmt_2 + m^2t_1}{M + m} = \frac{M^2t_1 + Mmt_2}{M + m}, \\ t'_1 &= \frac{Mt_1 + mt_2}{M + m}. \end{aligned}$$

Rozdíl teplot se zmenší na

$$t'_1 - t'_2 = \frac{M(t_1 - t_2) - m(t_1 - t_2)}{M + m} = (t_1 - t_2) \frac{M - m}{M + m} = 16^\circ\text{C},$$

tedy na 82 % původní hodnoty.

5 bodů

- b) Při prvním přelítí vody o hmotnosti m tam a zpět se teplotní rozdíl mezi kalorimetry zmenšil $t'_1 - t'_2 = (t_1 - t_2) \cdot k$, kde $k = \frac{M - m}{M + m} = 0,8\bar{1}$.

Při vícenásobném opakování procedury se teplotní rozdíl zmenší na

$$\begin{aligned} t''_1 - t''_2 &= (t'_1 - t'_2) \cdot k = (t_1 - t_2) \cdot k^2, \\ t'''_1 - t'''_2 &= (t''_1 - t''_2) \cdot k = (t_1 - t_2) \cdot k^3, \end{aligned}$$

atd. Má-li se po n tém přelítí vody o hmotnosti m tam a zpět teplotní rozdíl zmenšit pod Δt , musí platit

$$\begin{aligned} (t_1 - t_2) \cdot k^n < \Delta t &\Rightarrow n \cdot \ln k < \ln \frac{\Delta t}{t_1 - t_2}, \\ n > \frac{\ln \frac{\Delta t}{t_1 - t_2}}{\ln k} &= 15. \end{aligned}$$

Proceduru musíme zopakovat 15krát.

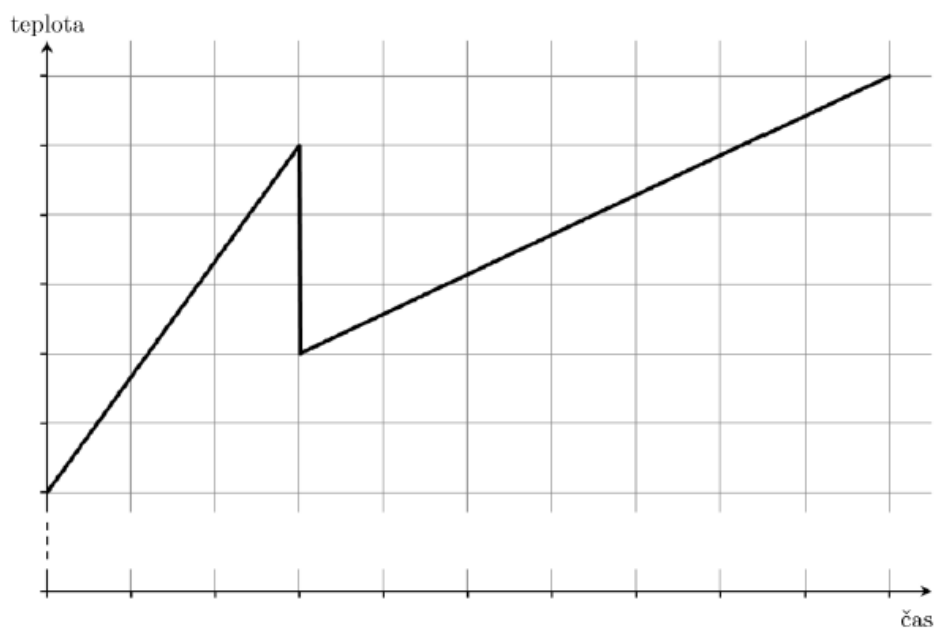
5 bodů

FO59C2-3: Ohřev vody

Autor: J. Jírů, 49%

Do varné konvice nalijeme vodu o hmotnosti m_1 a konvici zapneme. Po jisté době přilijeme další vodu. Voda v konvici tak přijímá teplo se stálým výkonem, závislost teploty vody v konvici na čase udává graf. Tepelnou kapacitu konvice a tepelné ztráty neuvažujte.

- a) Určete hmotnost m_2 přilíté vody
 b) Určete počáteční teplotu t_0 přilíté vody, jestliže v grafu zobrazená minimální teplota je $t_{\min} = 21^\circ\text{C}$ v grafu zobrazená maximální teplota je $t_{\max} = 75^\circ\text{C}$.



Obrázek 4.28

Řešení:

- a) Označme $\Delta\tau$ jednotkový časový interval a Δt jednotkový teplotní interval. Pak pro stálý tepelný výkon přijímaný vodou v první a druhé fázi ohřevu platí

$$P = \frac{m_1 c \cdot 5\Delta t}{3\Delta\tau} = \frac{(m_1 + m_2)c \cdot 4\Delta t}{7\Delta\tau}.$$

2 body

Úpravou dostaneme poměr

$$\frac{m_1 + m_2}{m_1} = \frac{35}{12},$$

z něhož plyne

$$m_2 = \frac{23}{12}m_1.$$

2 body

- b) Z grafu plyne, že teplota vody v konvici bezprostředně před dolitím je

$$t_1 = t_{\min} + \frac{5}{6}(t_{\max} - t_{\min}) = 66^\circ\text{C}.$$

a teplota vody v konvici bezprostředně po dolití

$$t_2 = t_{\min} + \frac{2}{6}(t_{\max} - t_{\min}) = 39^\circ\text{C}.$$

2 body

Tepelnou výměnu během smíchání teplejší vody s přilitou chladnější vodou popisuje kalorimetrická rovnice

$$m_1 c(t_1 - t_2) = m_2 c(t_2 - t_0),$$

z níž plyne

$$t_0 = \frac{m_1 t_2 + m_2 t_2 - m_1 t_1}{m_2} = t_2 - \frac{m_1}{m_2}(t_1 - t_2) = 25^\circ\text{C}.$$

FO52C2-3: Topné tělísko

Autor: P. Šedivý, 48 %

Do termosky o tepelné kapacitě K , ve které se nachází led o hmotnosti m a teplotě t_1 vložíme topné tělísko a připojíme je ke zdroji o napětí U . Jaký musí být odpor R tělíska, aby za dobu τ led roztál a teplota uvnitř termosky stoupla na t_2 ?

Řešte pro hodnoty: $K = 80 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$, $m = 0,85 \text{ kg}$, $t_1 = -8^\circ\text{C}$, $t_2 = 25^\circ\text{C}$, $U = 30 \text{ V}$, $\tau = 45 \text{ min}$. Měrné tepelné kapacity ledu a vody jsou $c_1 = 2100 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ a $c_2 = 4200 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, měrné skupenské teplo tání ledu je $l_t = 322 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$. Pro dané hodnoty sestrojte graf závislosti teploty na čase během celého děje. Tepelnou kapacitu tělíska a tepelnou výměnu s okolím zanedbejte.

Řešení:

Elektrická práce topné spirály $W_{el} = \frac{U^2 \tau}{R}$ se spotřebuje na teplo potřebné k ohřátí ledu na teplotu tání $t_t = 0^\circ\text{C}$

$$Q_1 = (K + mc_1)(t_t - t_1) = 1,492 \cdot 10^4 \text{ J},$$

skupenské teplo tání ledu $L_t = ml_t = 2,822 \cdot 10^5 \text{ J}$ a teplo potřebné k ohřátí vody na výslednou teplotu

$$Q_2 = (K + mc_2)(t_2 - t_t) = 9,125 \cdot 10^4 \text{ J}.$$

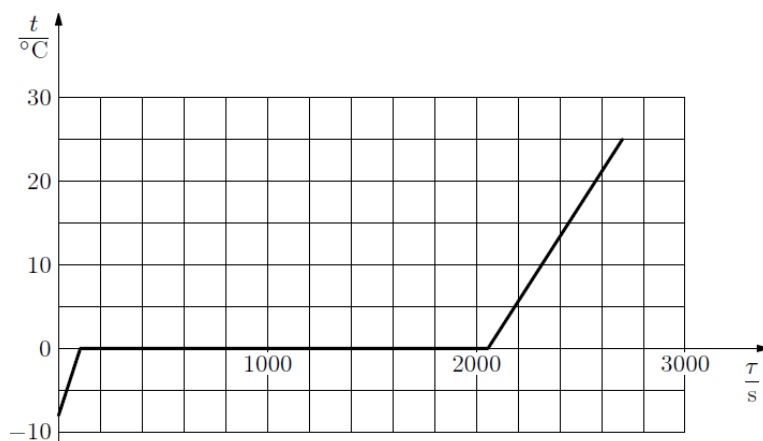
Příkon topného tělíska je $P = \frac{Q_1 + L_t + Q_2}{\tau} = 143,84 \text{ W} \doteq 140 \text{ W}$ 4 body

a odpor tělíska $R = \frac{U^2}{P} \doteq 6,3 \Omega$. 2 body

Doby trvání jednotlivých částí děje jsou

$\tau_1 = \frac{Q_1}{P} \doteq 100 \text{ s}$, $\tau_2 = \frac{L_t}{P} \doteq 2000 \text{ s}$, $\tau_3 = \frac{Q_2}{P} \doteq 630 \text{ s}$. 2 body

Časový průběh celého děje zobrazuje graf na obr.4.29 2 body



Obrázek 4.29

FO54C2-3: Tři kalorimetry

Autor: J. Thomas, 43 %

Ve třech stejných kalorimetrech je stejné množství oleje téže teploty t . Když do prvního kalorimetru vložíme zahřátý kovový váleček, teplota lázně se po ustálení zvýší o $\Delta t_1 = 20^\circ\text{C}$. Když váleček přeneseme z prvního do druhého kalorimetru, zvýší se v něm teplota oleje o $\Delta t_2 = 5^\circ\text{C}$. Váleček přeneseme z druhého do třetího kalorimetru.

- a) O jakou hodnotu Δt_3 se zvýší teplota oleje ve třetím kalorimetru?
 b) O jakou hodnotu $\Delta t'_2$ a o jakou hodnotu $\Delta t'_3$ se zvýší teplota ve druhém a třetím kalorimetru, bude-li ve druhém kalorimetru polovina a ve třetím kalorimetru čtvrtina hmotnosti oleje v porovnání s prvním kalorimetrem?

Ztráty tepla do okolí a tepelnou kapacitu kalorimetru zanedbáme.

Řešení:

- a) Označíme m_1 hmotnost válečku m_2 hmotnost oleje, c_1 měrnou tepelnou kapacitu materiálu válečku a c_2 měrnou tepelnou kapacitu oleje. Bude-li počáteční teplota oleje t , pak se teplota v prvním kalorimetru po vložení válečku ustálí na hodnotě $t + \Delta t_1$. Při vložení válečku do druhého kalorimetru se teplota ustálí na hodnotě $t + \Delta t_2$. Platí kalorimetrická rovnice

$$m_1 c_1 [(t + \Delta t_1) - (t + \Delta t_2)] = m_1 c_1 (\Delta t_1 - \Delta t_2) = m_2 c_2 \Delta t_2. \quad (4.41)$$

Po vložení válečku do třetího kalorimetru se teplota lázně ustálí na hodnotě $t + \Delta t_3$. Platí kalorimetrická rovnice

$$m_1 c_1 [(t + \Delta t_2) - (t + \Delta t_3)] = m_1 c_1 (\Delta t_2 - \Delta t_3) = m_2 c_2 \Delta t_3. \quad (4.42)$$

Ze vztahů (4.41) a (4.42) vyjádříme $\Delta t_3 = \frac{(\Delta t_2)^2}{\Delta t_1} = 1,25^\circ\text{C}$.

5 bodů

- b) Při přenesení válečku do druhého kalorimetru teď platí

$$m_1 c_1 [(t + \Delta t_1) - (t + \Delta t'_2)] = m_1 c_1 (\Delta t_1 - \Delta t'_2) = \frac{m_2 c_2 \Delta t'_2}{2}. \quad (4.43)$$

Ze vztahů (4.41) a (4.43):

$$\frac{m_1 c_1}{m_2 c_2} = \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1 - \Delta t_2} = \frac{\Delta t'_2}{2(\Delta t_1 - \Delta t'_2)} \Rightarrow \Delta t'_2 = \frac{2\Delta t_1 \Delta t_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = 8^\circ\text{C}.$$

Přeneseme-li váleček do třetího kalorimetru, platí po ustálení teploty

$$m_1 c_1 [(t + \Delta t'_2) - (t + \Delta t'_3)] = m_1 c_1 (\Delta t'_2 - \Delta t'_3) = \frac{m_2 c_2 \Delta t'_3}{4}. \quad (4.44)$$

Ze vztahů (4.41) a (4.44): $\frac{m_1 c_1}{m_2 c_2} = \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1 - \Delta t_2} = \frac{\Delta t'_3}{4(\Delta t'_2 - \Delta t'_3)}$,

$$\Delta t'_3 = \frac{4\Delta t_2 \Delta t'_2}{3\Delta t_2 + \Delta t_1} = \frac{8(\Delta t_2)^2 \Delta t_1}{(3\Delta t_2 + \Delta t_1)(\Delta t_1 + \Delta t_2)} = 4,6^\circ\text{C}.$$

5 bodů**FO62C2-3: Kalorimetr, voda a led**

Autor: J. Thomas, 38 %

V kalorimetru je $m_1 = 200$ g vody o teplotě $t_1 = 50^\circ\text{C}$. Do kalorimetru byl přidán led o teplotě $t_2 = -20^\circ\text{C}$.

- a) Kolik ledu bylo do kalorimetru přidáno, je-li výsledná teplota v kalorimetru $t_0 = 0^\circ\text{C}$?

- b) Jaký bude stav soustavy v kalorimetru, jestliže do něj ještě vložíme ocelové závaží o hmotnosti $m_3 = 1,00 \text{ kg}$, zahřáté na teplotu $t_3 = 100 \text{ °C}$? Jak tento stav závisí na množství v části a) přidaného ledu?

Tepelnou kapacitu kalorimetru a tepelné ztráty do okolí zanedbejte. Měrná tepelná kapacita vody je $c_1 = 4,20 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, měrná tepelná kapacita ledu $c_2 = 2,10 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, měrná tepelná kapacita oceli $c_3 = 450 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, měrné skupenské teplo tání ledu $l_t = 330 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Řešení:

- a) Je-li výsledná teplota v kalorimetru 0 °C musí být přidáno nejméně tolik ledu (m_{\min}), aby se voda ochladila na 0 °C a všechnen led přitom roztál a nejvíce (m_{\max}) tolik ledu, aby se voda ochladila na 0 °C a ztuhla na led. V prvním případě bude platit:

$$m_{\min}c_2(t_0 - t_2) + m_{\min}l_t = m_1c_1(t_1 - t_0) \Rightarrow m_{\min} = \frac{m_1c_1(t_1 - t_0)}{c_2(t_0 - t_2) + l_t} = 0,11 \text{ kg.}$$

2 body

V druhém případě bude platit:

$$m_{\max}c_2(t_0 - t_2) = m_1c_1(t_1 - t_0) + m_1l_t \Rightarrow m_{\max} = \frac{m_1c_1(t_1 - t_0) + m_1l_t}{c_2(t_0 - t_2)} = 2,57 \text{ kg.}$$

Do kalorimetru tedy mohlo být přidáno od 0,11 kg do 2,57 kg ledu.

2 body

- b) Pokud byla v kalorimetru pouze voda o teplotě $t_0 = 0 \text{ °C}$, bylo jí $m_1 + m_{\min} = 0,31 \text{ kg}$. Přidáním závaží se voda ohřeje na teplotu

$$t = \frac{(m_1 + m_{\min})c_1t_0 + m_3c_3t_3}{(m_1 + m_{\min})c_1 + m_3c_3} = \frac{1,0 \cdot 450 \cdot 100}{0,313 \cdot 4200 + 1,0 \cdot 450} \text{ °C} = 25,50 \text{ °C.}$$

2 body

- c) Pokud je v soustavě i led, může ho přidáním zahřátého závaží roztát nejvýše $m = \frac{m_3c_3t_3}{l_t} = 0,14 \text{ kg}$. V soustavě pak bude 0,25 kg vody a zbytek bude tvořit led o teplotě 0 °C .

Pokud bylo do kalorimetru přidáno od 0,11 kg do 2,57 kg ledu, bude po přidání závaží v kalorimetru pouze voda s teplotou v intervalu $t \in (0 \text{ °C}; 25,50 \text{ °C})$.

2 body

Pokud bylo do kalorimetru přidáno více než 2,57 kg ledu, zůstane i po přidání závaží v soustavě směs ledu a vody o teplotě 0 °C .

2 body

4.8 Struktura a vlastnosti plynů

FO53C2-4: Plnění ocelové bomby kyslíkem

Autor: M. Jarešová, 60 %

V ocelové bombě o objemu 20 litrů je uzavřen kyslík o hmotnosti 4,23 kg pod tlakem 15 MPa.

- a) Určete teplotu kyslíku v bombě, pokud bychom považovali kyslík za ideální plyn, pro který platí stavová rovnice ideálního plynu.
- b) Určete teplotu kyslíku podle van der Waalovy stavové rovnice s koeficienty $a = 0,138 \text{ m}^6 \cdot \text{Pa} \cdot \text{mol}^{-2}$, $b = 32 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$.

c) V jakém skupenství se nachází kyslík stlačený v ocelové bombě?

Řešte nejprve obecně, pak pro dané hodnoty. Uvažujte, že ocelová bomba má stálý vnitřní objem, který se po naplnění kyslíkem nemění. Všechny vypočtené teploty vyjádřete ve stupních Celsia.

Van der Waalsova stavová rovnice pro n molů plynu má tvar

$$\left(p + n^2 \frac{a}{V^2}\right) (V - nb) = nRT.$$

Kritická teplota van der Waalsova plynu je dána vztahem

$$T_k = \frac{8}{27} \frac{a}{Rb}.$$

Řešení:

a) Použijeme stavovou rovnici ideálního plynu ve tvaru

$$pV = \frac{m}{M_m} RT_1,$$

z níž vyjádříme

$$T_1 = \frac{M_m p V}{m R}.$$

Po dosazení dostaneme

$$T_1 = \frac{32 \cdot 10^{-3} \cdot 15 \cdot 10^6 \cdot 20 \cdot 10^{-3}}{4,23 \cdot 8,31} \text{K} = 273 \text{K},$$

a tedy $t_1 = 0^\circ\text{C}$.

3 body

b) Do van der Waalsovy rovnice pro n molů dosadíme za $n = \frac{m}{M_m}$. Dostaneme

$$\left(p + \frac{m^2}{M_m^2} \frac{a}{V^2}\right) \left(V - \frac{m}{M_m} b\right) = nRT_2,$$

z čehož

$$T_2 = \frac{\left(p + \frac{m^2}{M_m^2} \frac{a}{V^2}\right) \left(V - \frac{m}{M_m} b\right)}{\frac{m}{M_m} R}.$$

Po dosazení dostaneme

$$T_2 = \frac{\left[15 \cdot 10^6 + \frac{4,23^2}{(32 \cdot 10^{-3})^2} \frac{0,138}{(20 \cdot 10^{-3})^2}\right] \left(20 \cdot 10^{-3} - \frac{4,23 \cdot 32 \cdot 10^{-6}}{32 \cdot 10^{-3}}\right)}{\frac{4,23}{32 \cdot 10^{-3}} \cdot 8,31} \text{K},$$

tedy $T_2 = 302 \text{K}$, potom $t_2 = 29^\circ\text{C}$.

5 bodů

c) Kritická teplota kyslíku v bombě je

$$T_k = \frac{8}{27} \frac{a}{Rb} = \frac{8}{27} \frac{0,138}{8,31 \cdot 32 \cdot 10^{-6}} \text{K} = 154 \text{K},$$

pak $t_k = -119^\circ\text{C}$.

Vzhledem k tomu, že $t_2 > t_k$, nachází se kyslík v bombě v plynném stavu.

2 body

FO56C2-1: Vzduch v ocelové láhvi

Autor: J. Jírů, 47%

Ocelovou láhev s vnitřním objemem $V_1 = 3,50 \text{ dm}^3$ naplníme horkým vzduchem a ventil láhve uzavřeme. Poté naměříme, že vzduch má při tlaku $p_1 = 1,30 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ teplotu $t_1 = 96^\circ\text{C}$. Láhve ponoříme do bazénu s vodou o teplotě $t_2 = 25^\circ\text{C}$ tak, že se ventil nachází v hloubce $h = 153 \text{ cm}$ pod hladinou (láhev samotná je umístěna pod vodou vertikálně ventilem vzhůru). Po ochlazení vzduchu v láhvi na teplotu v bazénu ventil otevřeme.

- Určete hmotnost m vzduchu v láhvi.
- Určete tlak p_2 vzduchu v láhvi těsně před otevřením ventilu.
- Po otevření ventilu buď část vzduchu z láhve unikne, nebo se do láhve dostane určité množství vody. Nastane-li první situace, určete po dosažení rovnovážného stavu objem vzniklé vody.

Atmosférický tlak $p_a = 1,02 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, hustota vody $\rho = 998 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, relativní molekulová hmotnost vzduchu $M_r = 29,0$, molární plynová konstanta $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, tíhové zrychlení $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Zanedbejte teplotní roztažnost láhve.

Řešení:

- Molární hmotnost vzduchu je $M_m = 29,0 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$. Vzduch v láhvi má počáteční termodynamickou teplotu $T_1 = 369 \text{ K}$. Ze stavové rovnice

$$p_1 V_1 = \frac{m}{M_m} R T_1$$

plyne

$$m = \frac{p_1 V_1 M_m}{R T_1} \doteq 4,30 \text{ g.}$$

3 body

- Termodynamická teplota vody v bazénu je $T_2 = 298 \text{ K}$. Vzduch v láhvi se izochoricky ochladí na tuto teplotu, jeho tlak klesne na hodnotu

$$p_2 = \frac{T_2}{T_1} p_1 = \frac{298}{369} p_1 \doteq 105 \text{ kPa.}$$

2 body

- Celkový tlak vody v místě ventilu je

$$p_3 = p_a + h \rho g \doteq 117 \text{ kPa.}$$

2 body

Jelikož $p_3 > p_2$, vznikne dovnitř láhve voda. Stlačený vzduch zaujme při nezměněné teplotě objem

$$V_3 = \frac{p_2}{p_3} V_1 \doteq 3,14 \text{ dm}^3.$$

2 body

Voda tak zaplní objem $\Delta V = V_1 - V_3 \doteq 0,36 \text{ dm}^3$.

1 bod**FO57C2-4: Kruhový děj s ideálním plynem**

Autor: R. Horáková, 37%

Dvouatomový ideální plyn o látkovém množství n , počáteční teplotě T_1 a objemu V_1 prošel následujícím kruhovým dějem:

- 2: Při izobarické expanzi se původní objem zdvojnásobil.

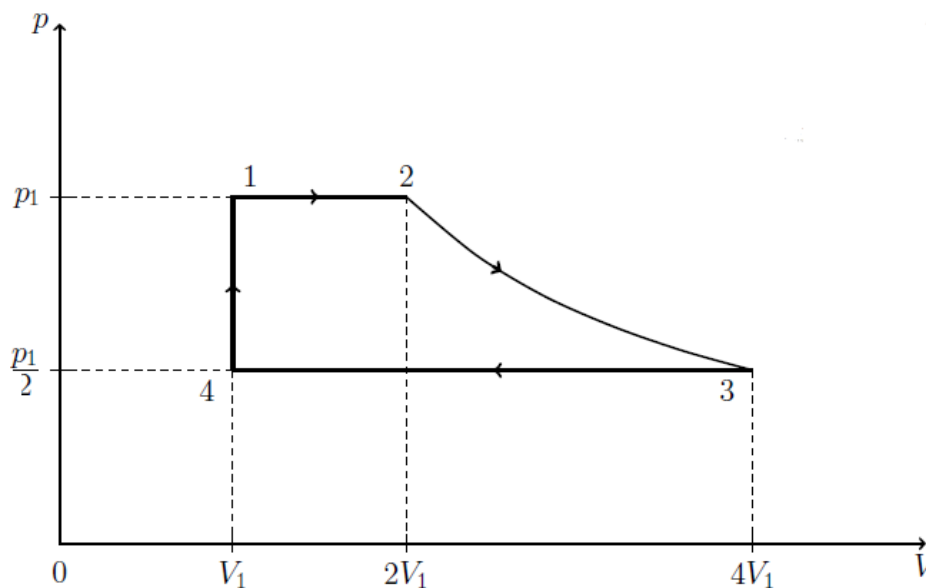
- 2 – 3: Při izotermické expanzi klesl tlak na polovinu původní hodnoty.
 3 – 4: Izobarickou kompresí se objem plynu snížil na původní hodnotu V_1 .
 4 – 1: Izochorickým dějem se plyn vrátil do původního stavu.

- a) Nakreslete děj do pV diagramu.
 b) Určete hodnotu počátečního tlaku p_1 a maximální a minimální teploty T_{\max} a T_{\min} během kruhového děje.
 c) Vypočtete účinnost η_1 tohoto kruhového děje.
 d) Vypočtete účinnost η_2 téhož kruhového děje v případě, že plyn je ideální a jednoatomový.
 e) Účinnosti η_1 a η_2 porovnejte a výsledek fyzikálně zdůvodněte.

Řešte obecně, potom pro hodnoty: $n = 1,00$ mol, $T_1 = 300$ K, $V_1 = 1,00$ dm³. Molární tepelné kapacity jsou pro dvouatomový plyn $C_p = \frac{7R}{2}$, $C_V = \frac{5R}{2}$, pro jednoatomový plyn $C_p = \frac{5R}{2}$, $C_V = \frac{3R}{2}$, práci plynu při izotermickém ději vypočteme ze vztahu: $W' = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$, $R = 8,31$ J · K⁻¹ · mol⁻¹.

Řešení:

a)



Obrázek 4.30

1 bod

- b) Stav 1: $p_1 = \frac{nRT_1}{V_1} = 2,49$ MPa, ve stavu 2 bude teplota stejná jako ve stavu 3 a je to teplota maximální: $T_2 = T_{\max} = 2T_1 = 600$ K, minimální teplotu bude mít plyn ve stavu 4: $T_4 = T_{\min} = \frac{T_3}{4} = \frac{T_1}{2} = 150$ K.

2 body

- c) Účinnost $\eta_1 = \frac{W'}{Q}$, kde W' je práce vykonaná během kruhového děje a Q je celkové dodané teplo. Práce je dána součtem práce, kterou plyn vykoná při

izobarické a izotermické expanzi, od této práce odečteme práci, kterou vykonají vnější síly při izobarické kompresi:

$$W' = p_1 V_1 + 2nRT_1 \ln 2 - \frac{p_1}{2} 3V_1,$$

po dosazení ze stavové rovnice dostaneme vztah

$$W' = nRT_1 + 2nRT_1 \ln 2 - 1,5nRT_1 = nRT_1(2 \ln 2 - 0,5) = 2,21 \text{ kJ.}$$

1 bod

Teplu se dodává při izobarické expanzi, při izotermické expanzi a při izochorickém zvýšení tlaku:

$$Q = nC_p(T_2 - T_1) + 2nRT_1 \ln 2 + nC_V(T_1 - T_4) = \frac{7nRT_1}{2} + 2nRT_1 \ln 2 + \frac{5nRT_1}{4} = nRT_1(4,75 + 2 \ln 2) = 15,3 \text{ kJ.}$$

2 body

$$\eta_1 \frac{W'}{Q} = \frac{2 \ln 2 - 0,5}{2 \ln 2 + 4,75} = 0,144, \quad \eta_1 = 14,4 \%$$

1 bod

- d) Práce vykonaná během kruhového děje nezávisí na tom, zda se jedná o jednoatomový nebo dvouatomový plyn. Vypočítáme teplo, které bude dodáno jednoatomovému plynu:

$$Q = nC_p(T_2 - T_1) + 2nRT_1 \ln 2 + nC_V(T_1 - T_4) = \frac{5nRT_1}{2} + 2nRT_1 \ln 2 + \frac{3nRT_1}{4} = nRT_1(3,25 + 2 \ln 2) = 11,6 \text{ kJ.}$$

1 bod

$$\eta_2 \frac{W'}{Q} = \frac{2 \ln 2 - 0,5}{2 \ln 2 + 3,25} = 0,191, \quad \eta_1 = 19,1 \%$$

1 bod

- e) Účinnost je větší u jednoatomového plynu – u dvouatomového plynu se část dodaného tepla spotřebuje na rotační energii molekul. (Dvouatomový plyn spotřebuje na stejnou změnu teploty více tepla než jednoatomový plyn – vnitřní energie dvouatomového plynu se skládá z posuvného i rotačního pohybu molekul.)

1 bod

FO59C2-2: Bermudský trojúhelník

Autor: J. Thomas, 37 %

Podle jedné z teorií, které se pokoušejí vysvětlit záhadné mizení lodí v určité oblasti Atlantického oceánu, jde o náhlý vývěr metanu, způsobený pohybem zemské kury na mořském dně. Metan smíchaný s mořskou vodou pak způsobí prudké snížení vztlakové síly, která na loď působí.

Loď má výtlak (hmotnost lodi s nákladem i s posádkou) $m = 15300 \text{ tun}$. Hustota mořské vody $\rho_v = 1,02 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$, teplota vody u hladiny $t_0 = 27^\circ\text{C}$, atmosférický tlak $p_0 = 0,10 \text{ MPa}$, hustota metanu za této teploty je $\rho_{m0} = 0,68 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Na dně oceánu v hloubce $h = 6,00 \text{ km}$ je teplota $t_1 = 4^\circ\text{C}$.

- Jaký je objem V ponořené části lodi?
- Jaký objem metanu V_{m0} musí obsahovat mořská voda u hladiny, aby vztlaková síla klesla na polovinu? Kolik objemových procent metanu je v tomto případě obsaženo v mořské vodě? Zdůvodněte výpočtem.

- c) Jaký byl objem tohoto množství metanu V_m při jeho úniku v hloubce h ?
 d) Závisí výsledky částí b) a c) na druhu uvolněného plynu?

Řešte nejprve obecně, pak pro zadané hodnoty. Tíhové zrychlení $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Řešení:

- a) Podle Archimédova zákona je hmotnost lodi rovna hmotnosti vytlačené vody. V mořské vodě tedy

$$V = \frac{m}{\rho_v} = 1,5 \cdot 10^4 \text{ m}^3.$$

2 body

- b) Klesne-li vztlaková síla na polovinu

$$\rho_v V_v g + \rho_{m0} V_{m0} g = 0,5 m g$$

a také

$$V_v + V_{m0} = V \Rightarrow V_v = V - V_{m0}.$$

a po úpravě

$$V_{m0} = \frac{0,5m}{\rho_v - \rho_{m0}} = 7,5 \cdot 10^3 \text{ m}^3.$$

Podíl $\frac{V_{m0}}{V} = \frac{0,5\rho_v}{\rho_v - \rho_{m0}} = 0,50$; voda tedy obsahuje 50 objemových procent metanu.

4 body

- c) Podle stavové rovnice

$$\frac{p_0 V_{m0}}{T_0} = \frac{(p_0 + h\rho_v g) V_m}{T_1},$$

$$V_m = \frac{p_0 V_{m0} T_1}{(p_0 + h\rho_v g) T_0} = \frac{0,5 m p_0 T_1}{(\rho_v - \rho_{m0})(p_0 + h\rho_v g) T_0} = 12 \text{ m}^3.$$

3 body

- d) Vzhledem k tomu, že hustota plynu je v porovnání s hustotou vody zanedbatelná, na druhu plynu nezáleží. Vzhledem k velikosti hydrostatického tlaku to však musí být plyn s dostatečně nízkou kritickou teplotou. Nemůže tedy jít například o oxid uhličitý.

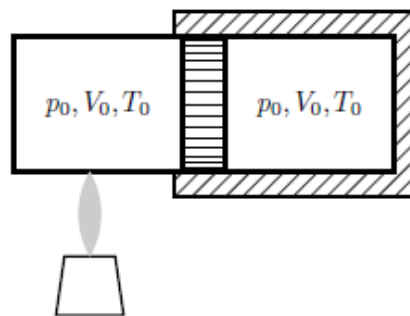
1 bod

FO54C2-4: Uzavřený válec s pístem

Autor: J. Jírů, 33%

Ve válcové nádobě se může volně pohybovat píst. V počátečním stavu rozděljuje píst nádobu na dva stejné objemy, v nichž se nachází dvouatomový ideální plyn (obr. 4.31). Plyn v každé části nádoby má objem V_0 , tlak p_0 a teplotu T_0 . Pravá část nádoby je tepelně izolována od okolí, stejně tak píst nepropouští teplo. Levou část nádoby zahřejeme tak, že se objem plynu v pravé části nádoby zmenší na polovinu.

- a) Určete po zahřátí tlak p_1 plynu v levé části nádoby a tlak p_2 plynu v pravé části nádoby.
 b) Určete po zahřátí teplotu T_1 plynu v levé části nádoby a teplotu T_2 plynu v pravé části nádoby.
 c) Určete teplo Q_1 dodané plynu v levé části nádoby.



Obrázek 4.31

Ideální plyn s dvouatomovými molekulami má vnitřní energii $U = \frac{5}{2}nRT$ a Poissonovu konstantu $\kappa = \frac{7}{5}$.

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty $p_0 = 1,00 \cdot 10^5$ Pa, $V_0 = 2,00 \cdot 10^{-3}$ m³, $T_0 = 293$ K.

Řešení:

- a) Píst se ustálí po vyrovnání tlaků, proto $p_1 = p_2$. V pravé části nádoby proběhl adiabatický děj, pro nějž platí:

$$p_0 V_0^\kappa = p_2 \left(\frac{V_0}{2}\right)^\kappa.$$

Z rovnice a z podmínky rovnosti tlaků plyne

$$p_1 = p_2 = 2^\kappa p_0 = 2,64 p_0 = 2,64 \cdot 10^5 \text{ Pa.}$$

2 body

- b) V levé části nádoby užitím stavové rovnice dostaneme

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{2^\kappa p_0 \frac{3}{2} V_0}{T_1} \Rightarrow T_1 = 3 \cdot 2^{\kappa-1} \cdot T_0 = 3,96 T_0 = 1160 \text{ K.}$$

V pravé části nádoby užitím stavové rovnice dostaneme

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{2^\kappa p_0 \frac{1}{2} V_0}{T_2} \Rightarrow T_2 = 2^{\kappa-1} \cdot T_0 = 1,32 T_0 = 387 \text{ K.}$$

4 body

- c) Plyn v pravé části nádoby nepřijímá ani neodevzdává teplo, proto přijatá práce je rovna přírůstku jeho vnitřní energie:

$$W_2 = \Delta U_2 = \frac{5}{2} p_2 V_2 - \frac{5}{2} p_0 V_0 = \frac{5}{2} \left(2^\kappa p_0 \cdot \frac{V_0}{2} - p_0 V_0 \right) = \frac{5}{2} p_0 V_0 (2^{\kappa-1} - 1).$$

Plyn v levé části nádoby stejně velkou práci vykoná, tedy $W'_1 = W_2$. Přírůstek vnitřní energie plynu v levé části nádoby je

$$\Delta U_1 = \frac{5}{2} p_1 V_1 - \frac{5}{2} p_0 V_0 = \frac{5}{2} \left(2^\kappa p_0 \cdot \frac{3V_0}{2} - p_0 V_0 \right) = \frac{5}{2} p_0 V_0 (3 \cdot 2^{\kappa-1} - 1).$$

Plyn v levé části nádoby přijme teplo

$$Q_1 = W'_1 + \Delta U_1 = \frac{5}{2} p_0 V_0 (2^{\kappa-1} - 1) + \frac{5}{2} p_0 V_0 (3 \cdot 2^{\kappa-1} - 1) = 5 p_0 V_0 (2^\kappa - 1) = 8,20 p_0 V_0 = 1,64 \text{ kJ.}$$

FO60C2-3: Voda a argon

Autor: J. Thomas, 30 %

Do vertikální tepelně izolované válcové nádoby s hladkými stěnami, shora uzavřené tepelně izolovaným pístem o ploše $S = 4,0 \text{ dm}^2$, byla dána voda o teplotě $T_0 = 273 \text{ K}$ a $n = 0,5$ molu argonu o teplotě $T = 200 \text{ K}$. Po delší době se uvnitř nádoby teplota ustálila na teplotě T_0 . Určete:

- změnu objemu ΔV argonu při jeho zahřátí,
- hmotnost m vody, která se přemění v led,
- výšku h , o kterou se zvedne píst po vytvoření rovnováhy.

Nad pístem je stálý atmosférický tlak $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$. Hustota vody $\rho = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, hustota ledu $\rho_l = 920 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, měrné skupenské teplo tání ledu $l_t = 332 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Molární plynová konstanta $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

Řešte nejprve obecně, pak pro zadané hodnoty. Tlak vodních par, tepelnou kapacitu nádoby a pístu a rozpustnost argonu ve vodě zanedbejte.

Řešení:

- Argon se zahřeje a podle stavové rovnice zvětší svůj objem o

$$\Delta V = \frac{nR(T_0 - T)}{p_0} = 3 \text{ l.}$$

3 body

- Teplo na ohřátí argonu dodává voda, která se přitom mění v led. Molekuly argonu jsou jednoatomové. Při izobarickém ději platí

$$\Delta Q = ml_t = \frac{3}{2}nR(T_0 - T) + p_0\Delta V = \frac{5}{2}nR(T_0 - T) \Rightarrow m = \frac{5nR(T_0 - T)}{2l_t} = 2,3 \text{ g.}$$

3 body

- Při tuhnutí vody se její objem zvětší o

$$\Delta V_1 = \frac{m}{\rho_l} - \frac{m}{\rho} = m \frac{\rho - \rho_l}{\rho\rho_l} = \frac{5nR(T_0 - T)(\rho - \rho_l)}{2l_t\rho\rho_l} = 2,0 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3 = 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ l.}$$

Poloha pístu se změní o

$$h = \frac{\Delta V + \Delta V_1}{S} = \frac{nR(T_0 - T)}{p_0S} + \frac{5nR(T_0 - T)(\rho - \rho_l)}{2l_t\rho\rho_lS} = 7,6 \text{ cm.}$$

Změna polohy pístu způsobená ztuhnutím vody na led je zanedbatelná. 4 body

Závěr

Cílem bakalářské práce bylo vytvořit tematicky členěnou sbírku řešených úloh FO společně s jejich analýzou. Sbíрка byla rozčleněna na osm tematických celků podle středoškolských učebnic *Fyzika pro gymnázia: mechanika* [2] a *Fyzika pro gymnázia: molekulová fyzika a termika* [1] a obsahuje 45 úloh. Úlohy v jednotlivých celcích byly řazeny vzestupně od nejjednodušší po nejtěžší podle jejich obtížnosti, která byla zjištěna v rámci analýzy úloh Fyzikální olympiády.

Mimo obtížnosti jednotlivých úloh jsme se zaměřili také na jejich citlivost a v rámci analýzy nenormovaných odpovědí jsme zjišťovali četnost výskytu řešení úloh ohodnocených 0 body. Podrobnému rozboru dvou konkrétních řešení jedné a téže úlohy jsme se věnovali v závěru druhé kapitoly, kde jsme ukázali, jakým způsobem dva různě úspěšní účastníci přistupovali k řešení téže úlohy, případně jakých chyb se dopustili a které miskoncepty mohly k těmto chybám vést. Na základě výsledků provedené analýzy a podmínek převzatých z [10], které jsou přehledně zaneseny v tabulce 3.7 jsem vyhodnotil čtyři úlohy z celkových 45 jako nevyhovující. Všechny čtyři úlohy měly příliš nízký index obtížnosti P i příliš vysokou relativní četnost výskytu nenormovaných odpovědí. Za zmínku jistě stojí, že tři z těchto úloh patří do stejného tematického celku, a to konkrétně dynamiky.

Výsledky analýzy citlivostí jednotlivých úloh i reliability jednotlivých ročníků FO byly v souladu s námi kladenými požadavky. Z toho můžeme usoudit, že jednotlivé ročníky FO jsou dostatečně konzistentní a jejich úlohy jsou schopné rozlišovat lepší žáky od horších, což jsou nepostradatelné vlastnosti k dosažení cíle Fyzikální olympiády, kterým je hledání talentovaných žáků.

Součástí práce je mimo sbírku řešených příkladů a její analýzy také teoretický základ, k analýze nezbytný, kapitola věnující se přístupu k řešení náročných úloh vyskytujících se ve Fyzikální olympiádě a do práce byla také vložena kapitola seznamující čtenáře se soutěží Fyzikální olympiáda, její organizací a historií.

Práce je součástí série bakalářských prací věnovaných FO, jejichž cílem je jednak shrnout úlohy za vybrané časové období (pravidelné ročenky od roku 1993 nevycházejí) a také poskytnout materiál pro přípravu seminářů pro řešitele FO pořádaných na Přírodovědecké fakultě Univerzity Palackého v Olomouci. Věřím, že sbírka najde uplatnění nejen jako doplnění studijních textů FO a příprava pro budoucí účastníky Fyzikální olympiády, ale také jako zdroj nevšedních úloh pro učitele pracující s talentovanými žáky nebo vedoucí fyzikální semináře.

Literatura

- [1] BARTUŠKA, Karel a Emanuel SVOBODA. *Fyzika pro gymnázia: molekulová fyzika a termika*. 4. vydání. Praha: Prometheus, 2001. ISBN 80-719-6200-7.
- [2] BEDNAŘÍK, Milan a Miroslava ŠIROKÁ. *Fyzika pro gymnázia: mechanika*. 3., přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2000. ISBN 80-719-6176-0.
- [3] ÇALIŞKAN, Serap, Gamze Sezgin SELÇUK a Mustafa EROL. The Effects of Problem Solving Instruction on Physics Achievement, Problem Solving Performance and Strategy Use. *Latin-American Journal of Physics Education*. [online]. 2008, 2008, **2**(3), 16 [cit. 2022-04-26]. ISSN 1870-9095. Dostupné z: <https://www.researchgate.net/publication/26568523>.
- [4] DE COCK, Mieke. Representation use and strategy choice in physics problem solving. *Physical Review Special Topics - Physics Education Research* [online]. 2012, **8**(2) [cit. 2022-04-26]. ISSN 1554-9178. Dostupné z: doi:10.1103/PhysRevSTPER.8.020117.
- [5] DING, Lin, Ruth CHABAY, Bruce SHERWOOD a Robert BEICHNER. Evaluating an electricity and magnetism assessment tool: Brief electricity and magnetism assessment. *Physical Review Special Topics - Physics Education Research* [online]. 2006, **2**(1) [cit. 2022-04-26]. ISSN 1554-9178. Dostupné z: doi:10.1103/PhysRevSTPER.2.010105.
- [6] GAVORA, Peter. *Úvod do pedagogického výzkumu*. 4., rozš. vyd. Bratislava: Vydavateľstvo UK, 2008. ISBN 978-80-7375-544-7.
- [7] GAVORA, Peter. *Úvod do pedagogického výzkumu*. Brno: Paido, 2000. Edice pedagogické literatury. ISBN 80-859-3179-6.
- [8] HALIM, A. An Analysis of Students' Skill in Applying the Problem Solving Strategy to the Physics Problem Settlement in Facing Aec as Global Competition. *Jurnal Pendidikan IPA Indonesia* [online]. 2016, 2016, **5**(1), 5 [cit. 2022-04-26]. Dostupné z: doi:10.15294/jpii.v5i1.5782.
- [9] CHRÁSKA, Miroslav. *Metody pedagogického výzkumu: základy kvantitativního výzkumu*. Praha: Grada, 2007. Pedagogika (Grada). ISBN 978-80-247-1369-4.
- [10] CHRÁSKA, Miroslav. *Didaktické testy: příručka pro učitele a studenty učitelství*. Brno: Paido, 1999. Edice pedagogické literatury. ISBN 80-859-3168-0.
- [11] JEŘÁBEK, Ondřej a Martin BÍLEK. *Teorie a praxe tvorby didaktických testů* [online]. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2010 [cit. 2022-04-26]. ISBN 978-80-244-2494-1.

- [12] LOPEZ-JIMENEZ, P. A., G. M. GIL-DUQUE a Y. A. GARCES-GÁ³MEZ. Real Problem Solving as a Teaching Strategy for Physics Education: Case Study. *Jurnal Pendidikan IPA Indonesia* [online]. 2021, **10**(1), 15-23 [cit. 2022-04-26]. ISSN 2089-4392. Dostupné z: doi:10.15294/jpii.v10i1.25669.
- [13] MESIC, Vanes a Hasnija MURATOVIC. Identifying predictors of physics item difficulty: A linear regression approach. *Physical Review Special Topics - Physics Education Research* [online]. 2011, **7**(1) [cit. 2022-04-26]. ISSN 1554-9178. Dostupné z: doi:10.1103/PhysRevSTPER.7.010110.
- [14] MICHALCOVÁ, Jana. *Analýza vlastností souboru úloh vybraných ročníků Fyzikální olympiády*. Olomouc, 2020. Bakalářská práce. Univerzita Palackého v Olomouci.
- [15] OSPÁLKOVÁ, Markéta. *Sbírka úloh Fyzikální olympiády kategorie D*. Olomouc, 2022. Bakalářská práce. Univerzita Palackého v Olomouci.
- [16] ŘEPKOVÁ, Jitka. *Souhrn příkladů pro soutěže Fyzikální olympiády*. Liberec, 1997. Bakalářská práce. Technická univerzita v Liberci.
- [17] SNĚTINOVÁ, Marie. *Students- Difficulties in Solving Physics Problems* [online]. In: . [cit. 2022-04-26]. ISBN 978-80-7378-226-9. Dostupné z: https://www.mff.cuni.cz/veda/konference/wds/proc/pdf12/WDS12_317_f12_Snetinova.pdf.
- [18] ŠLITROVÁ, Tereza. *Doplňující úlohy ze středoškolské fyziky*. Olomouc, 2021. Bakalářská práce. Univerzita Palackého v Olomouci.
- [19] TEODORESCU, Raluca E., Cornelius BENNHOLD, Gerald FELDMAN a Larry MEDSKER. New approach to analyzing physics problems: A Taxonomy of Introductory Physics Problems. *Physical Review Special Topics - Physics Education Research* [online]. 2013, **9**(1), 20 [cit. 2022-04-26]. ISSN 1554-9178. Dostupné z: doi:10.1103/PhysRevSTPER.9.010103.
- [20] VAFKOVÁ, Lada. *Položková analýza v systému Statistica* [online]. Brno, 2015 [cit. 2022-04-29]. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/t350m/Plny_text_BP.pdf. Bakalářská práce Přírodovědecká fakulta. Masarykova Univerzita.
- [21] VNUKOVÁ, Petra. *Didaktický test ako nástroj kontroly žiakov vo vyučovaní fyziky* [online]. 2011, Bratislava [cit. 2022-04-26]. Dostupné z: https://fmph.uniba.sk/fileadmin/fmfi/studium/ukazky_zaverecných_prac/Vnukova_dp.pdf. Diplomová práce. Univerzita Komenského v Bratislavě.
- [22] VOLF, Ivo. Současný stav a některé problémy fyzikální olympiády. In: *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie* [online]. 41. JČMF, 1996, s. 162-166 [cit. 2022-04-27]. ISSN 0032-2423. Dostupné z: https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/137762/PokrokyMFA_41-1996-3_7.pdf.
- [23] VOLF, Ivo a Daniel KULVALEC. *Čtyřicet let fyzikální olympiády* [online]. Hradec Králové, 2005 [cit. 2022-04-27]. Dostupné z: <http://fyzikalniolympiada.cz/dokumenty/40letF0.pdf>.
- [24] VYBÍRAL, Bohumil. *Studijní text: Statika tuhého tělesa* [online], 2014. [cit. 2022-04-29]. Dostupné z: <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/statika.pdf>.

- [25] VYBÍRAL, Bohumil. Ohlédnutí se za padesáti lety Fyzikální olympiády. In: *Nové metody propagace přírodních věd mezi mládeží*. Olomouc: UP Olomouc, 2008, s. 4. ISBN 978-80-244-2127-8.
- [26] WALSH, Laura N., Robert G. HOWARD a Brian BOWE. Phenomenographic study of students- problem solving approaches in physics. *Physical Review Special Topics - Physics Education Research* [online]. 2007, **3**(2) [cit. 2022-04-26]. ISSN 1554-9178. Dostupné z: doi:10.1103./PhysRevSTPER.3.020108
- [27] *Organizační řád Fyzikální Olympiády* [online]. [cit. 2022-04-27]. Dostupné z: <http://fyzikalniolympiada.cz/dokumenty/organizacni-rad-fo.pdf>.
- [28] *Pravidla pro určování pořadí Fyzikální Olympiády* [online]. 2014 [cit. 2022-04-27]. Dostupné z: <http://fyzikalniolympiada.cz/dokumenty/pravidla-pro-urcovani-poradi.pdf>.
- [29] *Historie a současnost Fyzikální Olympiády* [online]. [cit. 2022-04-27]. Dostupné z: <http://fyzikalniolympiada.cz/co-je-fo>.
- [30] *Výsledky krajských kol FO* [online]. Praha [cit. 2022-04-29]. Dostupné z: <http://praha.fyzikalniolympiada.cz/vysledky/>.
- [31] *Výsledky krajských kol FO* [online]. Jihočeský kraj [cit. 2022-04-29]. Dostupné z: <http://www.pf.jcu.cz/structure/departments/kaft/pro-verejnost/fyzikalni-olympiada/fyzikalni-olympiada-vysledkove-listiny/>.
- [32] *Výsledky krajských kol FO* [online]. Jihomoravský kraj [cit. 2022-04-29]. Dostupné z: https://www.jaroska.cz/fo/53/abcd/krajske_kolo; <http://www.jmskoly.cz/souteze/kolo/28982/>.
- [33] *Výsledky krajských kol FO* [online]. Karlovarský kraj [cit. 2022-04-29]. Dostupné z: <http://kvary.fyzikalniolympiada.cz/vysledky/>.
- [34] *Výsledky krajských kol FO* [online]. Vysočina [cit. 2022-04-29]. Dostupné z: <http://vysocina.fyzikalniolympiada.cz/vysledky/>.
- [35] *Výsledky krajských kol FO* [online]. Liberecký kraj [cit. 2022-04-29]. Dostupné z: <https://fo.randovka.cz/domovsk%C3%A1-str%C3%A1nka/rozklikn%C4%9Bte-archiv-p%C5%99edchoz%C3%ADch-ro%C4%8Dn%C3%ADk%C5%AF/59-ro%C4%8Dn%C3%ADk>.
- [36] *Výsledky krajských kol FO* [online]. Olomoucký kraj [cit. 2022-04-29]. Dostupné z: <http://fo.upol.cz/archivkk.html>.
- [37] *Výsledky krajských kol FO* [online]. Pardubický kraj [cit. 2022-04-29]. Dostupné z: <https://souteze.ccvpardubice.cz/soutez/284/>; http://old.gypce.cz/files/podweb.php?foTue,_29_May_2007_11__41__32_GMT; <https://www.gypce.cz/fyzikalni-olympiada-pardubickeho-kraje-2/vysledkove-listiny/>.
- [38] *Výsledky krajských kol FO* [online]. Plzeňský kraj [cit. 2022-04-29]. Dostupné z: <https://kof.zcu.cz/fo/>.

- [39] *Výsledky krajských kol FO* [online]. Ústecký kraj [cit. 2022-04-29]. Dostupné z: <http://physics.ujep.cz/~fo/vysledky.html>.
- [40] *Výsledky krajských kol FO* [online]. Zlínský kraj [cit. 2022-04-29]. Dostupné z: <https://www.guh.cz/fyzikalni-olympiada/>.
- [41] *Archiv zadání a řešení krajských kol FO* [online]. [cit. 2022-04-29]. Dostupné z: <http://fyzikalniolympiada.cz/archiv/zadani-a-reseni>.
- [42] *Výsledky 61. ročníku FO* [online]. [cit. 2022-04-29]. Dostupné z: <http://fyzikalniolympiada.cz/archiv/61/vysledky-krajskeho-kola>.