

Univerzita Palackého v Olomouci
Přírodovědecká fakulta
Katedra experimentální fyziky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Fyzika klavíru



Autor:	Olga Vogelová
Studijní program:	B1701 Fyzika
Studijní obor:	1701R003 Fyzika se zaměřením na vzdělávání 1407R006 Chemie pro všeoborové studium
Forma studia:	Prezenční
Vedoucí práce:	Mgr. Lukáš Richterek, Ph.D.
Termín odevzdání práce:	Květen 2017

Prohlašuji, že jsem předloženou diplomovou práci vypracovala samostatně pod vedením Mgr. Lukáše Richterka, Ph. D. a že jsem použila zdrojů, které cituji a uvádím v seznamu použitých zdrojů.

V Olomouci

.....

Poděkování

Ráda bych poděkovala panu Mgr. Lukáši Richterkovi, Ph. D. za odborné vedení, cenné rady, čas a vstřícnost, které mi během zpracování práce věnoval.

Bibliografická identifikace:

Jméno a příjmení autora	Olga Vogelová
Název práce	Fyzika klavíru
Typ práce	Bakalářská
Pracoviště	Katedra experimentální fyziky
Vedoucí práce	Mgr. Lukáš Richterek, Ph.D.
Rok obhajoby práce	2017
Abstrakt	Cílem bakalářské práce je na základě vlastních měření běžně dostupnými a jednoduchými prostředky analyzovat spektrum vybraných tónů pianina, ukázat zastoupení vyšších harmonických frekvencí a vliv pedálů na intenzitu a barvu tónů. Práce obsahuje fyzikální rozbor jednotlivých vlastností tónů a ověření těchto předpokladů pomocí měření.
Klíčová slova	Klavír, vyšší harmonické frekvence, tón, Audacity, pravý pedál, levý pedál, kmitání na struně, výška tónu, barva tónu, intenzita tónu, temperované ladění.
Počet stran	92
Počet příloh	6
Jazyk	Český

Bibliographical identification:

Autor's first name and surname	Olga Vogelová
Title	Physics of the piano
Type of thesis	Bachelor
Department	Department of Experimental Physics
Supervisor	Mgr. Lukáš Richterek, Ph.D.
The year of presentation	2017
Abstract	The aim of this bachelor theses is to analyze the spectrum of tones of a piano, to show the spectrum of harmonic frequencies and the effect pedals on the intensity and the timbre of tones. The study should be based on relatively simple and available measurement tools. This work contains physical analysis of the main properties of the musical tones and verification of this assumption by measurement.
Keywords	Piano, harmonics, tone, frequency, pedals, timbre, pitch and fundamental frequency, musical scale.
Number of pages	92
Number of appendices	6
Language	Czech

Obsah

Obsah	6
Úvod	7
1 Teoretická část	8
1.1 Základní fyzikální veličiny	8
1.2 Výška a barva tónu.....	9
1.3 Hlasitost a intenzita tónu.....	13
1.4 Ladění klavíru	14
2 Realizace experimentu a popis pomůcek	17
2.1 Pomůcky a postup	17
2.2 Fourierova transformace	18
2.3 Konstrukce klavíru a vliv pedálů	21
3 Experimentální část	27
3.1 Rozbor spekter základních tónů pianina, zastoupení vyšších harmonických	27
3.1.1 Analýza spekter tónů A0, A1, A2, A3, A4, A5, A6 a A7	27
3.1.2 Analýza spekter tónů C1, C2, C3, C4, C5, C6, C7 a C8.....	35
3.1.3 Důkaz základních frekvencí u nižších tónů	41
3.2 Analýza dalších tónů pianina	44
3.2.1 Analýza tónů lišících se o půl tónu od tónů měřených v první části.....	45
3.2.2 Analýza vybraných akordů	52
3.3 Vliv pedálů.....	60
3.3.1 Délka tónu.....	60
3.3.2 Vliv pravého pedálu na intenzitu, délku a barvu tónu	62
3.3.3 Vliv levého pedálu na intenzitu a barvu tónu.....	70
3.3.4 Vliv pedálů na intenzitu a barvu akordů	78
Závěr	85
Seznam použitých pramenů	87
Přílohy	89

Úvod

Klavír je velmi komplexní systém, ale i tak na něm lze ukázat některé jednoduché závěry vyplývající ze středoškolského učiva kmitání strun. Tón zahráný na klavíru je charakteristický nejen svojí výškou, ale i dalšími fyzikálními vlastnostmi, které jsou v této práci analyzovány. Jedná se především o barvu tónu a s ní související vyšší harmonické frekvence tónu, délku a intenzitu tónu. Tyto vlastnosti můžeme měřit jednoduchou metodou s běžně dostupnými pomůckami, z nichž mezi nezbytně nutné patří pouze klavír, mikrofon a počítač s open source programem Audacity. Jelikož většina středních škol těmito pomůckami disponuje, může být tento experiment realizován také v hodinách fyziky. Zároveň je to praktický příklad mezipředmětových vztahů fyziky a hudební výchovy, kdy pro hudebníky nezbytné pojmy jako je výška tónu, délka tónu či ladění klavíru můžeme vysvětlit fyzikálními metodami.

Hlavním úkolem předložené práce je na základě vlastního měření analyzovat spektrum vybraných tónů pianina, ukázat zastoupení vyšších harmonických frekvencí a demonstrovat vliv pedálů na barvu, intenzitu a délku tónu.

Nejprve tato práce podává fyzikální vysvětlení popisovaných vlastností tónu – jednotky používané v hudební akustice, výška tónu, barva tónu, přítomnost vyšších harmonických frekvencí, intenzita tónu, apod. První část práce se také zmiňuje o základním temperovaném ladění klavíru. Následující část popisuje experiment a používané pomůcky. Detailněji se tato kapitola zaměřuje na popis jednotlivých částí měřeného pianina a na princip analýzy zvuku programem Audacity. Třetí část už představuje naměřené výsledky – analýzu vyšších harmonických frekvencí, ověření ladění měřeného pianina nebo také porovnání vlivu levého a pravého pedálu na intenzitu a délku tónu.

1 Teoretická část

V této části stručně shrnujeme základní veličiny a pojmy, s nimiž pracujeme při analýze zvuku pianina. Zároveň seznamujeme čtenáře s některými vlastnostmi hudebního tónu a v jednoduchosti popisujeme ladění měřeného pianina.

1.1 Základní fyzikální veličiny

Amplituda a fáze

Amplituda kmitavého pohybu je velikost maximální výchylky částice z její rovnovážné polohy. Tato veličina je vždy kladná a označujeme ji y_m (Halliday a kol. 2013, s. 435). Fáze kmitavého pohybu určuje v každém okamžiku jednoznačně výchylku oscilátoru konající harmonický pohyb (Lepil 2009, s. 17). Máme-li pro výchylku harmonického pohybu částice, která se v počátečním okamžiku nachází v rovnovážné poloze vztah

$$y = y_m \sin(\omega t) \quad (1)$$

pak y_m označuje amplitudu a člen ωt je fáze, která se s časem lineárně mění a tedy i hodnota funkce sinus se v čase mění (Halliday a kol. 2013, s. 435).

Vlnová délka

Vlnová délka je nejmenší vzdálenost, po které se tvar vlny opakuje nebo ji také můžeme definovat jako vzdálenost dvou nejbližších bodů, které kmitají se stejnou fází. Značíme jí λ a měříme ji v metrech. (Lepil 2009, s. 53).

Perioda, úhlová frekvence a frekvence

Máme-li periodicky kmitající částici, která vždy po uplynutí určité doby dospěje do stejné polohy, pak doba, za kterou proběhne jeden kmit (oscilátor dospěje do stejné polohy jako v počátečním čase) nazýváme doba kmitu neboli perioda T .

Pro výpočet doby T platí vztah

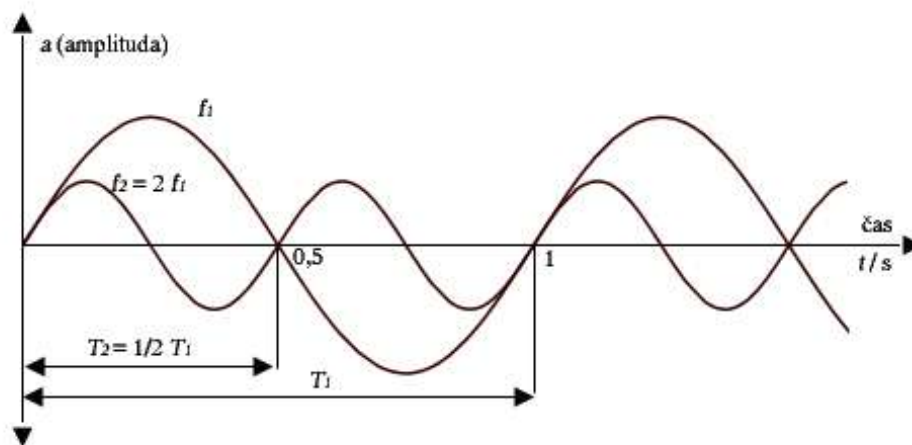
$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (2)$$

kde ω nazýváme úhlová frekvence vlny; její jednotkou je radián za sekundu. V mechanice tuto jednotku označujeme jako úhlovou rychlost.

Frekvence f kmitavého pohybu je definována vztahem

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (3)$$

a vyjadřuje počet kmitů za jednu sekundu. Její jednotkou je hertz (Lepil 2009, s. 13-18).



Obrázek 1: Sinusoida o frekvenci f_1 a f_2 a amplitudách a_1 a a_2 (zpracováno podle Geist 2005, s. 19)

1.2 Výška a barva tónu

Výšku tónu lze jednoznačně fyzikálně určit a to jeho frekvencí. Čím vyšší je frekvence tónu, tím vyšší tento tón vnímáme. Naopak tón, který má malý počet kmitů za sekundu vnímáme jako tón nižší či hlubší. Lze rozlišit absolutní výšku tónu, která je dána právě počtem kmitů za sekundu pro příslušný tón a výšku relativní (Geist 2005, s. 43), která je udávána podílem frekvence daného tónu a frekvence srovnávacího (referenčního) tónu. V hudební akustice je často používán jako referenční tón označovaný jako komorní a' s frekvencí 440 Hz (Lepil 2009, s. 85).

Předpokládejme, že durová hudební stupnice začíná notou C a dále postupuje následovně:

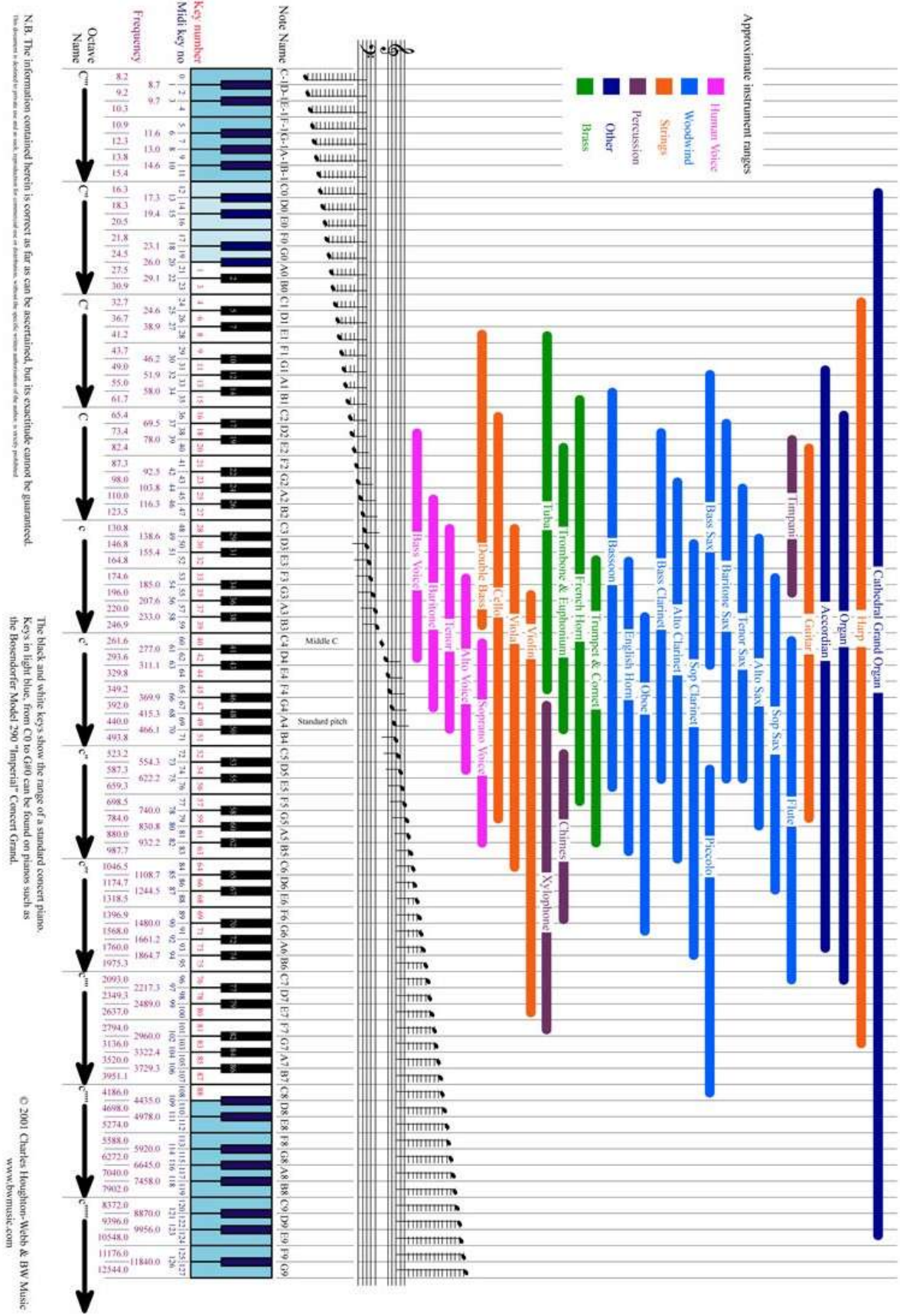
$$C - D - E - F - G - A - H - C .$$

Vidíme, že se dva různé tóny s různými frekvencemi jmenují stejně. V tomto příkladě jde o notu C , která je na začátku stupnice, a notu C , která je na jejím konci a přichází až po 6 dalších jiných notách (Giordano 2010, s. 23). Nota C je v intervalu osmi tónů (Geist 2005, s. 43). Vysvětlení je takové, že základní frekvence noty C (na konci) je dvakrát větší než frekvence noty C na začátku. To znamená, že se liší o jednu oktávu. Zvolíme si například notu c' se základní frekvencí 261,6 Hz, pak frekvence noty c'' na konci oktávy bude

$2 \cdot 261,6 \text{ Hz} = 523,3 \text{ Hz}$. Řekneme-li, že se dvě noty liší o jednu oktávu, máme pak na mysli, že se tyto dvě frekvence liší násobkem dvou (Giordano 2010, s. 24). Tedy

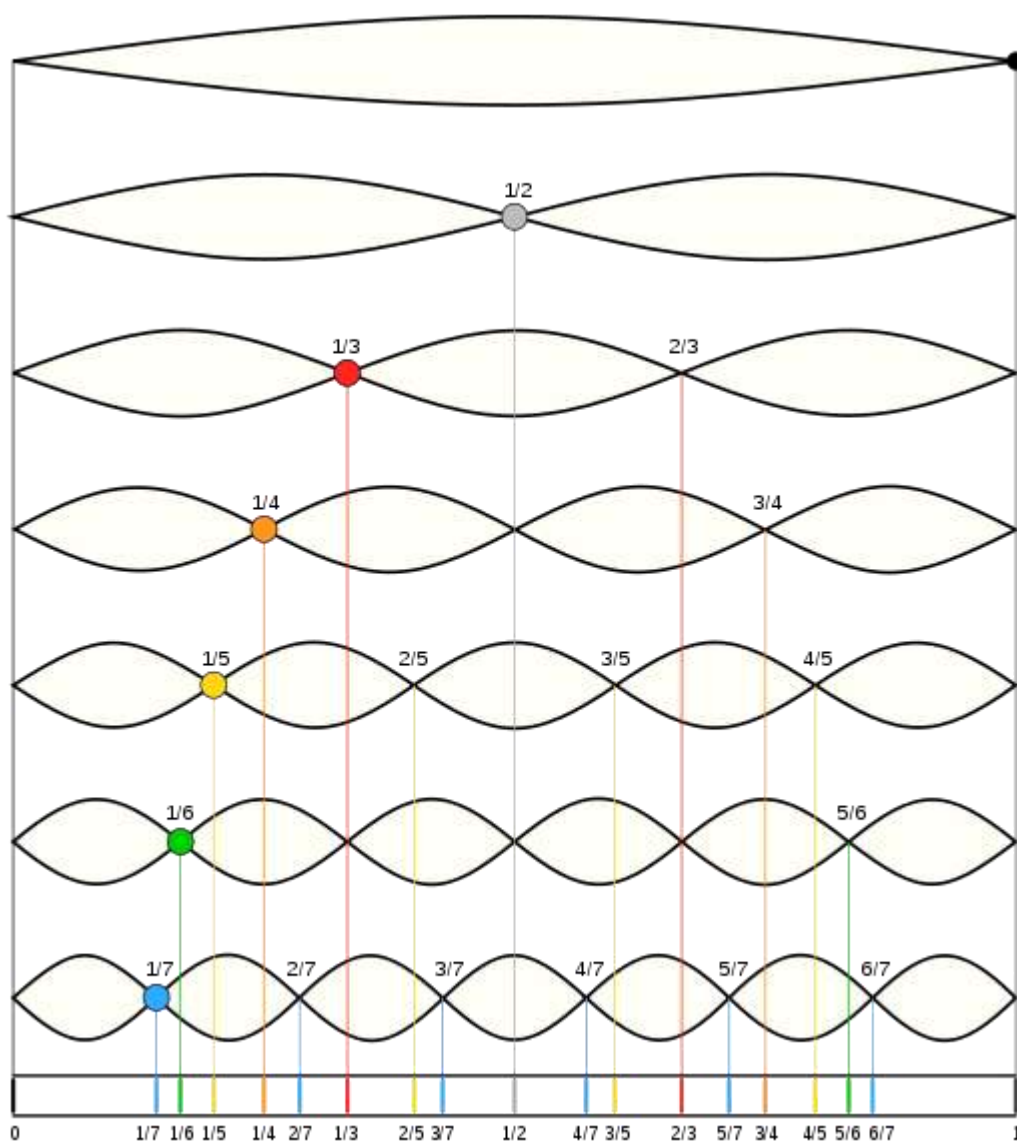
$$\frac{f_2}{f_1} = 2, \quad (4)$$

kde f_2 značí tón s vyšší frekvencí a f_1 tón o oktávu nižší než f_2 , $f_2 > f_1$ (Geist 2005, s. 43). V hudební akustice se používá značení tónů podle názvu oktáv (např. a, a', A'', apod.). Program Audacity, s kterým v této práci pracujeme a pomocí něhož provádíme analýzu tónů, používá rozdílné značení. Toto druhé značení pojmenovává tóny pomocí čísel oktáv (A3, A5, A0, apod.). Označení jednotlivých tónů a převod mezi dvojími značeními znázorňuje následující obrázek:



Obrázek 2: Rozsah různých hudebních nástrojů, frekvence jednotlivých tónů a značení oktáv, zdroj: RangeE, 2017.

Zpravidla není tón složený z jediné frekvence, ale z několika vlnění, jejichž frekvence jsou propojeny jednoduchým vztahem. Hrajeme-li na prázdnou strunu, nechvěje se pouze celá struna, ale chvěje se i ve své polovině, třetině, čtvrtině apod. Ovšem každé další chvění je s menší intenzitou a rozkmit struny je v tomto případě slabší. Nejintenzivnější frekvence chvění je nazývána základním tónem a ten také určuje výšku. Znějí ale také jeho svrchní tóny, kterým se říká vyšší harmonické. První nejintenzivnější frekvence se označuje také jako první harmonická, druhá nejintenzivnější druhá harmonická atd. (Geist 2005, s. 41). Existenci vyšších harmonických si můžeme popsat na následujícím obrázku:



Obrázek 3: Stojaté příčné vlny na struně, zdroj: Harmonique (musique), 2016.

Můžeme vidět, že při rozechvění struna kmitá nejen celá, ale i ve své polovině, třetině atd., vzniká řada půlvln – dvě, tři, čtyři atd. (obr. 3). V kombinaci vztahu (4) a kmitů struny

(obr. 3), můžeme odvodit frekvence vyšších harmonických. Uvažujeme-li opět notu C4 s frekvencí $f_1 = 261,6$ Hz, pak frekvence druhé harmonické je $f_2 = 2f_1$, a frekvence dalších harmonických jsou: $f_3 = 3f_1; f_4 = 4f_1$ atd. Za zmínku také stojí, že frekvence noty o oktávu vyšší, noty C5 je stejná, jako frekvence druhé harmonické noty C4. A také druhá harmonická noty C5 by měla $2 \cdot 523,3$ Hz = 1046,6 Hz, což se rovná frekvenci čtvrté harmonické noty C4 - $4 \cdot 261,6$ Hz = 1046,4 Hz (Giordano 2010, s. 24).

Podle toho, kolik a které z vyšších harmonických souzní se základním tónem, rozeznáváme různou barvu tónu – timbre (Geist 2005, s. 50-51). Ta je určena počtem a amplitudou vyšších harmonických frekvencí, které jsou obsaženy v zahráném tónu. Právě barva tónu a přítomnost různých vyšších harmonických je vlastnost tónu, podle kterého dokážeme sluchem rozlišit, na jakém hudebním nástroji je příslušný tón zahrán (Lepil 2009, s. 86-87). Například přítomnost více vyšších harmonických způsobuje větší ostrost a průraznost tónu. Barvu tónu také ovlivňuje přítomnost sudých nebo lichých vyšších harmonických. Udává se, že sudé vyšší harmonické hudbu ztemňují a změkčují, kdežto liché vyšší harmonické barvu zostřují a zjasňují. Vedle vyšších harmonických ale ovlivňuje barvu tónu i řada dalších faktorů, které už můžou být způsobeny příslušným hudebním nástrojem (mechanika nástroje, jeho tvar, materiál, ze kterého je tvořený). Studium těchto vlivů je však velmi složité a je nad rámec tohoto textu (Geist 2005, s. 50-51).

1.3 Hlasitost a intenzita tónu

Podélné vlny si můžeme představit jako stlačování a rozpínání pružného prostředí. Pro vzduch to například znamená, že dochází k malým změnám atmosférického tlaku, které pak zaznamená bubínek v našem uchu. My tyto změny vnímáme jako hlasitost. Čím jsou změny větší, tím je zvuk hlasitější. Hlasitost zvuku je náš subjektivní vjem a souvisí s citlivostí ucha. Naše ucho je nejcitlivější na zvuky v intervalu 700 Hz až 6 kHz. Z fyzikálního hlediska je šíření zvukového vlnění spojeno s přenosem energie. Akustický výkon P je tím větší, čím větší je část energie ΔE , která je přenesena za dobu Δt od zdroje zvuku do uvažovaného místa

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} . \quad (5)$$

Lépe se ale hlasitost zvuku popisuje veličinou známou jako intenzita zvuku I , která představuje akustický výkon ΔP podélné mechanické vlny, který připadá na jednotku plochy ΔS postavenou kolmo na směr šíření vlny

$$I = \frac{\Delta P}{\Delta S}. \quad (6)$$

Jednotkou intenzity je $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ (Lepil 2009, s. 87-88). Zvuková energie se za běžných podmínek u všesměrového zdroje šíří do všech směrů. Můžeme tedy vztah pro intenzitu zvuku přepsat jako (Geist 2005, s. 48)

$$I = \frac{P}{4\pi r^2}. \quad (7)$$

Z tohoto vztahu je zřejmé, že se intenzita zvuku s rostoucí vzdáleností od zdroje zmenšuje s druhou mocninou této vzdálenosti. Pro práci s intenzitami se zavádí vhodnější logaritmické vyjádření této veličiny, které označujeme jako hladinu akustické intenzity L

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0}, \quad (8)$$

kde hodnota I_0 je tzv. práh slyšení, což je prahová hodnota intenzity srovnávacího tónu nebo také nejtišší zvuk, který lidské ucho ještě registruje a má hodnotu $10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ (Halliday a kol. 2013, s. 473). Jednotkou hladiny akustické intenzity jsou decibely, které se značí jako dB. Zvuky, které mají velký akustický výkon, mohou v uchu vyvolat bolest. Hladinu tohoto zvuku označujeme jako práh bolesti a je velikosti 140 dB. Jednotka 1 dB je přibližně nejmenší rozdíl hladiny, jakou může lidské ucho rozeznat (Bajer 2006, s. 388-389).

1.4 Ladění klavíru

Během starověku a téměř po celý středověk se používalo ladění pythagorejské, které vyhovovalo zejména jednohlasé hudbě. Postupem času začal být čím dál významnější souzvuk tónů, a tedy harmonická výstavba hudby. Kolem roku 1600 se opouští od tzv. církevních tónin a přechází se k tóninám dur a moll. Důležitost nabírá **temperované** ladění, které je uměle vytvořené a jsou v něm stavěny klavíry, harmonia, harmoniky atd. Smyčcové a dechové nástroje hrají podle přirozeného ladění.

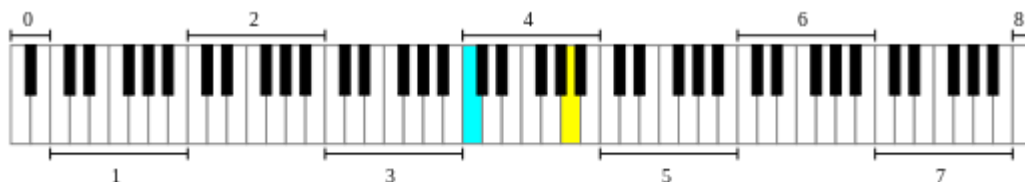
Temperované ladění rovnoměrně rozdělí čistou oktávu do dvanácti (temperovaných) půltónů. Pro základní tón máme frekvenci f , pro tón n nacházející se o půl tónu je frekvence $f \cdot n$. Frekvence tónu ležícího o dva a půl tónu výše od tónu s frekvencí f , je $f n \cdot n$. Frekvence posledního tónu oktávy je dvakrát vyšší než frekvence základního tónu, a proto $f n^{12} = 2$. Velikost temperovaného půltónu je dána vztahem

$$n = \sqrt[12]{2} = 1,059463. \quad (8)$$

Pro temperované ladění je základní tón a' (A4) s frekvencí 440 Hz (Geist 2005, s. 133-135). V následujícím textu se budeme řídit právě tímto způsobem ladění, hodnoty frekvencí jednotlivých tónů na klaviatuře pianina znázorňuje obr. 2 a tabulka 1 doplněna obr. 4.

Tabulka 1: Frekvence jednotlivých tónů v hertzech, zdroj: Scientific pitch notation, 2017.

Oktáva	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nota										
C	16,352	32,703	65,406	130,81	261,63	523,25	1046,5	2093,0	4186,0	8372,0
C#	17,324	34,648	69,296	138,59	277,18	554,37	1108,7	2217,5	4434,9	8869,8
D	18,354	36,708	73,416	146,83	293,66	587,33	1174,7	2349,3	4698,6	9397,3
D#	19,445	38,891	77,782	155,56	311,13	622,25	1244,5	2489,0	4978,0	9956,1
E	20,602	41,203	82,407	164,81	329,63	659,26	1318,5	2637,0	5274,0	10548,1
F	21,827	43,654	87,307	174,61	349,23	698,46	1396,9	2793,8	5587,7	11175,3
F#	23,125	46,249	92,499	185,00	369,99	739,99	1480,0	2960,0	5919,9	11839,8
G	24,500	48,999	97,999	196,00	392,00	783,99	1568,0	3136,0	6271,9	12543,9
G#	25,957	51,913	103,83	207,65	415,30	830,61	1661,2	3322,4	6644,9	
A	27,500	55,000	110,00	220,00	440,00	880,00	1760,0	3520,0	7040,0	
A#	29,135	58,270	116,54	233,08	466,16	932,33	1864,7	3729,3	7458,6	
H	30,868	61,735	123,735	246,94	493,88	987,77	1975,5	3951,1	7902,1	



Obrázek 4: Klaviatura pianina se zvýrazněnými oktávami, modře vyznačeno střední C, žlutě A440 Hz, zdroj: Scientific pitch notation, 2017.

Velikost temperovaného půltónu a tím i skutečnost, že je měřené pianino laděno podle temperovaného ladění ověříme v části 3.2.1.

Krom oktávy známe ještě další základní intervaly, zmíníme pouze velké a malé tercie a kvinty. Kvinty jsou definované poměrem $3/2$, velká tercie má poměr frekvencí $5/4$ (Geist 2005, s. 44) a má rozpětí celé dva tóny, malá tercie jeden a půl tónu (Zenkl 1982, s. 90). Ze dvou tercií vznikají kvintakordy – jeden z hlavních druhů akordů. Rozlišujeme durový kvintakord složený z velké a malé terciie. Z malé a velké terciie dostaneme mollový kvintakord. Jednotlivé tóny kvintakordů nazýváme prima (pro spodní tón), terciie (prostřední tón) a kvinta (pro vrchní tón). Durový a mollový kvintakord se liší pouze svojí tercií. Primu a kvintu mají stejnou (Zenkl 1982, s. 96-97). V části 3.2.2 provedeme na základně vlastních výsledků rozbor zvukové stopy několika akordů, ověříme intervaly mezi jednotlivými tóny akordů a analyzujeme jejich vyšší harmonické.

2 Realizace experimentu a popis pomůcek

V této části je uveden postup experimentu a pomůcky potřebné k jeho provedení. Část 2.2 popisuje použitý program k analýze zvuku a vysvětluje Fourierovu transformaci, kterou tento program při analýze tónů provádí. Poslední část je podrobněji zaměřena na klavír jako hudební nástroj.

2.1 Pomůcky a postup

Pro lepší srovnání výsledků jsme se pokusili realizovat pokud možno co nejvíc „standardních úhozů“. Za tímto účelem jsme z určité výšky nad klávesou upustili závaží. Zvuk klavíru byl zaznamenán a analyzován v notebooku.

K realizaci experimentu použijeme tyto pomůcky: závaží, lepicí plastelína, provázek, pravítko, klavír, mikrofon, počítač s program Audacity.

- K experimentu jsme využili kovové závaží o hmotnosti 106 g.
- Na závaží jsme nalepili zespod lepicí plastelínu, aby závaží při dopadu nepoškodilo klávesu, a přivázali jsme na něj provázek.
- Mikrofon byl umístěn vždy na stejné místo do skříně klavíru.
- Poté jsme zapnuli nahrávání v programu Audacity.
- Závaží jsme uchopili za provázek a z výšky 13 cm jsme jej upustili na klávesu.
- Zahraný tón byl zaznamenáván mikrofonem a ukládal se v programu Audacity.
- Pro rozbor vyšších harmonických frekvencí jsme nejprve vybrali stejný časový úsek, který jsme dále analyzovali. V našem měření jsme vždy zvolili interval zvuku dlouhý 1,01 s od začátku signálu. V programu Audacity jsme zvolili záložku „Rozbor“ a poté možnost „Kreslit spektrum“. Program pak vykreslí „Frekvenční analýzu“. Jako parametry pro analýzu jsme v našem měření vždy volili „Velikost 8192“ a vodorovnou osu jsme přepnuli do logaritmického měřítka pomocí volby „osa – Zápis kmitočtu“.
- Pro měření vlivu pedálů na intenzitu a barvu tónů, jsme před upuštěním závaží na klávesu sešlápli pravý nebo levý pedál. Pedál jsme upustili až po ukončení měření.



Obrázek 5: Realizace experimentu

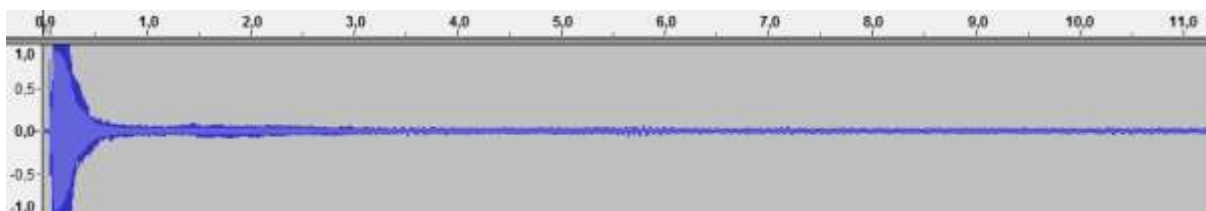
K měření používáme mikrofon typu TRUST MC-1500. Rozsah frekvencí, které dokáže změřit je podle údajů výrobce od 50 Hz až po 16 kHz (elcodis, 2010-2017). Tento typ mikrofonu jsme zvolili, jelikož je běžně dostupný, v praxi se obvykle používá ke komunikaci přes internet.

Program Audacity je volně dostupný na internetu i v českém jazyce. Vybrali jsme jej také proto, že umožňuje jednoduché nahrávání a zpracování zvuku. Další z jeho mnoha funkcí je vykreslení frekvenční charakteristiky.

Pro realizaci experimentu používáme běžně dostupné pomůcky, a nezbytné je pouze pianino, mikrofon a počítač s nainstalovaným, programem Audacity. Experiment lze jednoduše zopakovat i v domácích podmínkách či na střední škole.

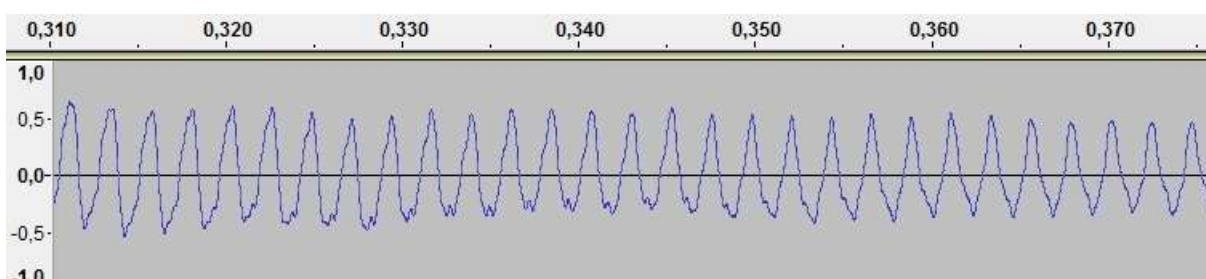
2.2 Fourierova transformace

Během experimentu program Audacity zaznamenává závislost tlaku zvuku (intenzity signálu) v čase. Pro znázornění si analýzu ukážeme na tónu A4.



Obrázek 6: Zvuková stopa tónu A4

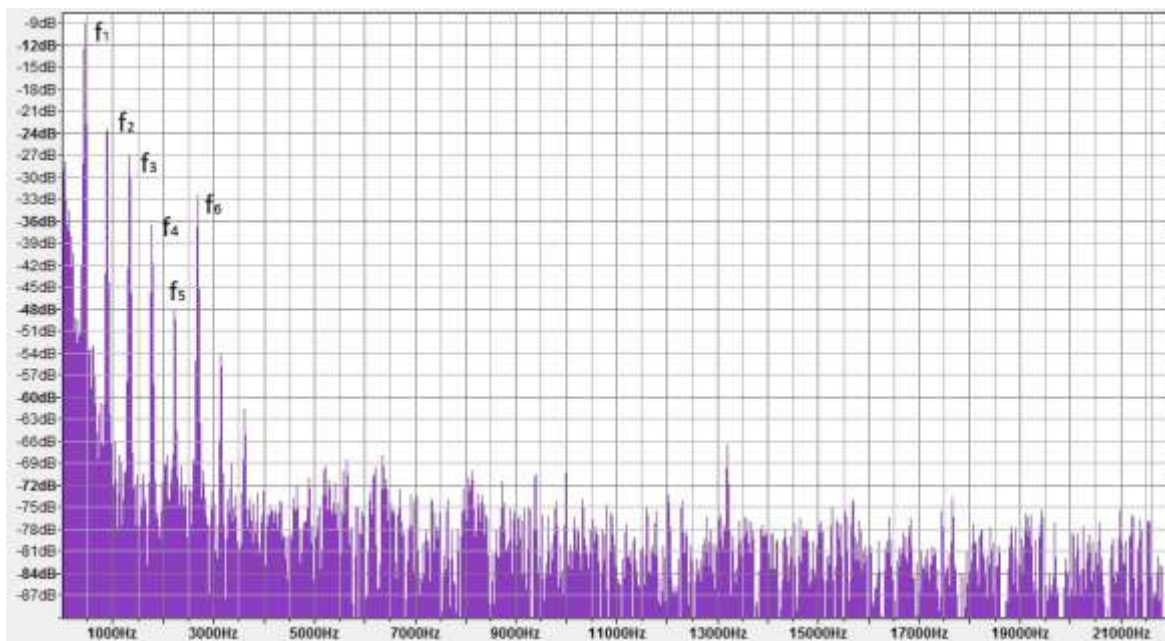
Obr. 6 představuje zaznamenanou zvukovou stopu tónu A4 zahrnanou na měřeném pianinu. Osa x udává čas v sekundách, osa y intenzitu zvukového signálu. Z obr. 6 můžeme zjistit, jak daný tón doznívá v čase. Program Audacity umožňuje tuto zvukovou stopu přiblížit až k jednotlivým oscilacím.



Obrázek 7: Přiblížená zvuková stopa tónu A4

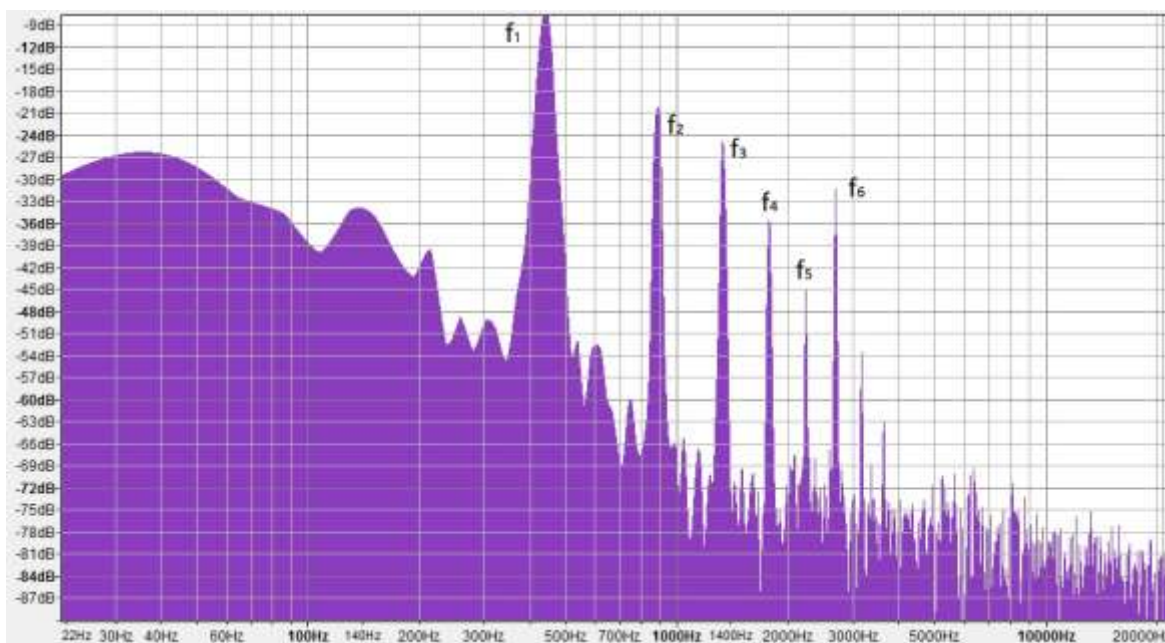
Na obr. 7 můžeme vidět, že zahrnaný tón netvoří jen jedna frekvence – zvuková stopa není jednoduchá sinusoida. Tón tedy musí být složen z několika frekvencí, výsledná zvuková stopa je výsledkem jejich superpozice. Francouzský fyzik a matematik Josef Fourier zavedl tzv. Fourierovu transformaci, díky níž dokážeme zapsat jakýkoliv hudební tón pomocí jediné kombinace frekvencí nebo také absolutních tónů, majících pouze jednu frekvenci (Giordano 2011, s. 13). Anglický fyzik Sir James Jeans ji popsal takto: „(Fourierův) teorém říká, že libovolnou křivku, ať už jsou její vlastnosti jakékoli nebo ať už byla získána jakýmkoli způsobem, lze přesně reprodukovat tím, že složíme dostatečný počet jednoduchých harmonických (tj. sinusových) křivek – stručně řečeno, každou křivku lze postavit, když na sebe naskládáme sinusové vlny” (Halliday a kol., 2013, s 446).

Program Audacity převádí zvukovou stopu Fourierovou transformací pomocí tlačítka “Kreslit spektrum” a výsledek Fourierovy transformace vykreslí ve formě „Frekvenční analýzy”.



Obrázek 8: Lineární spektrum tónu A4

Díky tomuto výstupu můžeme mnohem lépe pochopit zastoupení jednotlivých frekvencí v zahraném tónu. Výstup Fourierovy transformace můžeme ukázat dvěma způsoby, jeden z nich je na obr. 8, kdy vodorovná osa je dána v lineárním měřítku. Na obr. 9 vidíme spektrum stejné zvukové stopy, použijeme ale na vodorovné ose logaritmické měřítko.



Obrázek 9: Logaritmické spektrum tónu A4

Výhoda logaritmického spektra je ta, že píky, které jsou o hodně menší než pík základní frekvence nebo mají nižší frekvenci, jsou na tomto spektru stále dobře rozpoznatelné. Největší pík na spektru (ať už lineárním nebo logaritmickém) představuje základní frekvenci – výšku zahraného tónu. Další píky představují vyšší harmonické frekvence.

Jak jsme již zmínili v části 2. 1, pro analýzu tónu jsme volili „Velikost 8192“. Zde jde o počet vzorků, na který se dělí typická vzorkovací frekvence 44 100 Hz. Při hodnotě 8192 vychází rozlišení frekvence $44100/8192$, tj. asi 5,4 Hz. Pokud se naměřené hodnoty liší od teoretických méně, je to v rámci použitého algoritmu (Plot Spectrum, 2017).

Protože každý program vypočítá Fourierovu analýzu jinak nebo jiným způsobem, vypočítali jsme spektra pro tři vybrané tóny (A3, A4 a C4) v programovacím jazyce Python a v programovacím jazyce GNU Octave. Tato spektra jsou uvedena v příloze (1-6).

2.3 Konstrukce klavíru a vliv pedálů

Mechanika klavíru se skládá z klaviatury, strun, kladívek, dusítek a pedálů (Oling 2004, s. 201). Dalšími důležitými částmi jsou jeho ozvučná deska a skříň klavíru. Struna je napnutá natáčením na kovové kolíčky umístěné v přední části nástroje, odtud je vedena přes kobylku napříč rezonanční deskou až k ocelovým roubíkům, kde je zachycena druhým koncem (Modr 1977, s. 77). Když je klávesa zmáčknuta, dusítko je pozvednuto a kladívko udeří do struny a rozvibruje ji. Vibrace se šíří po struně a přechází na ozvučnou desku přes kobylku. Po úderu se dusítko vrací zpět na strunu. Typický koncertní klavír má 243 strun, jejichž délka se mění od 2 metrů pro nejnižší noty až po 5 cm, pro noty nejvyšší (Fletcher, Rossing 2010, str. 353); 88 kláves a stejný počet tónů. Jeho tónový rozsah je velký, obvykle od A_2 (27,5 Hz) až po a^4/c^5 (3520,0 Hz/ 4186,00 Hz). Nejhlubší tóny klavíru mají velký počet vyšších harmonických, kdežto vyšší tóny jich mají méně. Spektrum klavíru vykazuje šumy, které jsou způsobeny úderem kladívka na struny. Šumy jsou zvláště patrné u vyšších not (Geist 2005, s. 189-190).

Měření jsme provedli na tzv. pianinu. Celkový pohled na měřené pianino je na obr. 11. Pianino je menší podoba koncertního klavíru. Jeho skříň je vysoká asi 125 cm a dlouhá 150 cm. Struny i kladívka jsou umístěny ve svislé poloze, což způsobuje menší pružnost úhozu (Modr 1977, s. 78). Pohled na polohu strun v pianinu je na obr. 11.

Klavír může mít dva nebo tři pedály, které se ovládají chodidly. Pravý pedál slouží zejména k prodlužování délky tónu i po puštění klávesy. Pedál pozvedává všechna dusítka ze strun, takže zvuk neutiší, a i po úderu a po uvolnění klávesy pokračují na struně vibrace.

Změnu pozice dusítek po sešlápnutí pravého pedálu můžeme vidět na obr. 13-16. Zahrané tóny zní delší dobu. Nutno ale podotknout, že na měřeném pianinu nejsou od tónu a'' (A6) dusítka, zde by tedy pravý pedál neměl mít na délku tónu vliv (obr. 12). Levý pedál slouží k utlumení zvuku. U koncertních křídel způsobí, že kladívka udeří pouze na jednu ze tří strun, proto tento typ pedálu nazýváme *una corda*. Ve vertikálních pianech, levý pedál přiblíží kladívka blíže ke strunám (obr. 17, 18), čímž se zkrátí jejich dráha a tím i síla při úderu do struny (Fletcher, Rossing 2010, s. 362). Skladatelé nazývají tuto akci *una corda* a používají ji zejména tam, kde vyžadují jemných dynamických nuancí nebo k efektu tzv. echa (Modr 1977, s. 77). Zahrané tóny bez sešlápnutého pedálu a se sešlápnutým levým pedálem budou stejně dlouhé (Fletcher, Rossing 2010, s. 362). Prostřední pedál se používá nejméně a u některých klavírů se vůbec nevyskytuje, má podobný úkol jako pravý pedál, rozdíl je v tom, že ovládá pouze dusítka, která byla zmáčknuta ve chvíli sešlápnutí pedálu (Fletcher, Rossing 2010, str. 362).



Obrázek 10: Pohled na klaviaturu a pedály měřeného pianina



Obrázek 11: Pohled na polohu strun v pianinu



Obrázek 12: Pohled na struny, u kterých nejsou tlumítka



Obrázek 13: Pohled na kladívka, tlumítka a struny bez sešlápnutého pedálu



Obrázek 14: Pohled na kladívka, tlumítka a struny se sešlápnutým pravým pedálem



Obrázek 15: Pohled na kladívka, tlumítka a struny bez sešlápnutého pedálu



Obrázek 16: Pohled na kladívka, tlumítka a struny se sešlápnutým pravým pedálem



Obrázek 17: Pohled na kladívka, tlumítka a struny bez sešlápnutého pedálu



Obrázek 18: Pohled na kladívka, tlumítka a struny se sešlápnutým levým pedálem

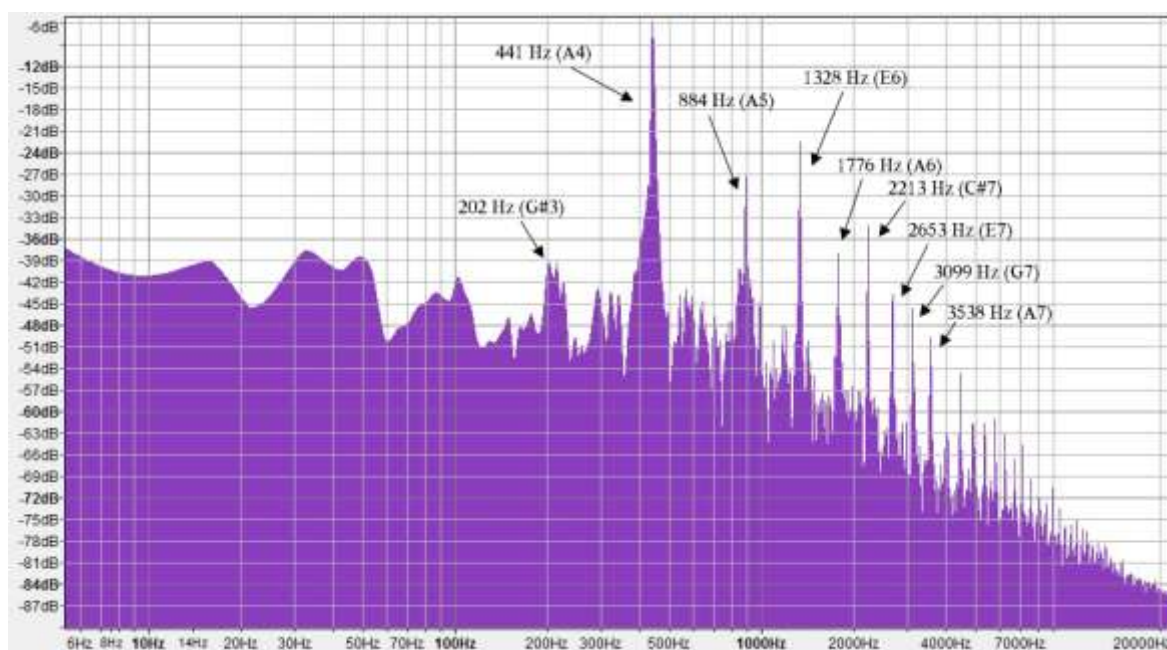
3 Experimentální část

3.1 Rozbor spekter základních tónů pianina, zastoupení vyšších harmonických

Kapitola popisuje logaritmická spektra všech tónů a (A0, A1, A2, A3, A4, A5, A6 a A7) a všech tónů c (C1, C2, C3, C4, C5, C6, C7, C8) na klaviiatuře pianina. Ukážeme přítomnost základní frekvence – tj. výšky tónu a zastoupení vyšších harmonických frekvencí. Na závěr dokážeme přítomnost základní frekvence jinou metodou než pomocí logaritmického spektra.

3.1.1 Analýza spekter tónů A0, A1, A2, A3, A4, A5, A6 a A7

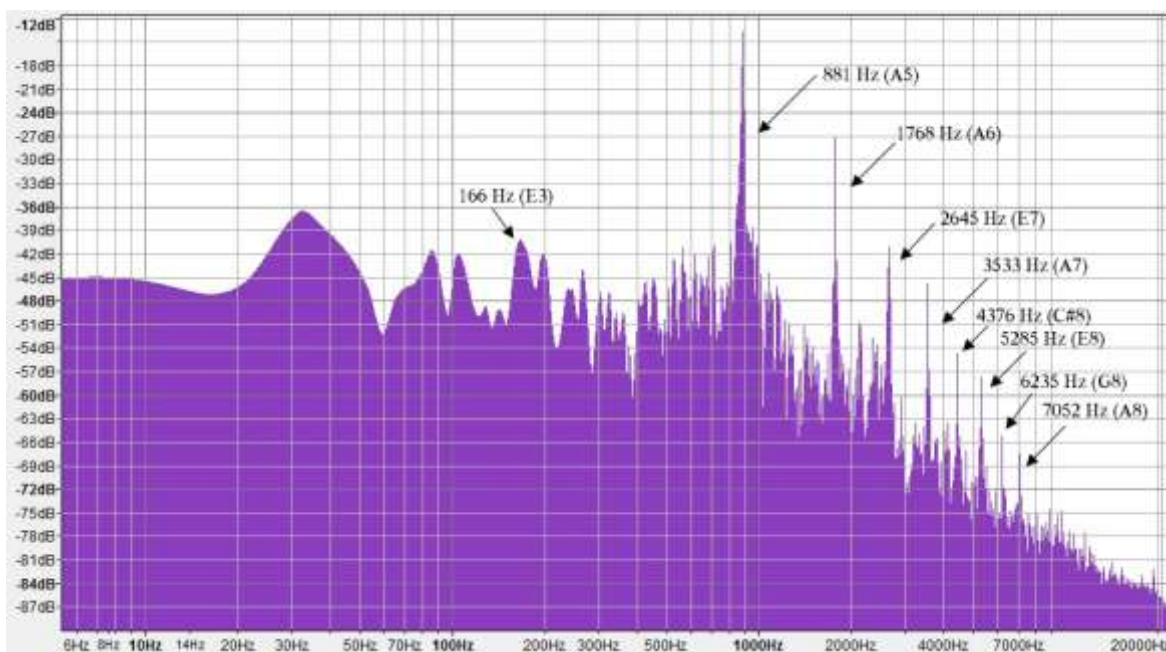
V této části začneme analýzu logaritmických spekter tónů u tónu a' (A4) o základní frekvenci 440 Hz, což je základní tón pro temperované ladění (Geist 2005, s. 133-135). Na tomto tónu si podrobněji vysvětlíme, jak se počítají frekvence vyšších harmonických a jak je rozpoznáme v logaritmickém spektru. Dále budeme pokračovat v popisu spekter vyšších tónů (A5, A6 až A7), následně se vrátíme k analýze nižších tónů (A3, A2, A1 a A0).



Obrázek 19: Logaritmické spektrum tónu A4

Tón a' (A4) má základní frekvenci 440 Hz, což odpovídá i výšce tónu měřeného klavíru. Naměřená hodnota je 441 Hz a odpovídá prvnímu, nejvyššímu a nejsilnějšímu píku na

logaritmickém spektru (obr. 19). Vyšší harmonické frekvence jsou násobky základního tónu s frekvencí 440 Hz. Druhá harmonická by měla mít dvakrát větší frekvenci – 880 Hz; měřením jsme dostali hodnotu 884 Hz. Tato frekvence odpovídá tónu a'' (A5), který je o oktávu vyšší než základní tón. Třetí harmonická by z teoretického výpočtu měla mít hodnotu $440 \text{ Hz} \cdot 3 = 1320 \text{ Hz}$, naměřená hodnota je 1328 Hz. Frekvence třetí harmonické tónu A4 koresponduje s frekvencí tónu o “oktávu a půl”, správněji o oktávu a kvintu vyšší, tedy tónem E6. Teoretická frekvence čtvrté harmonické odpovídá i tónu A6 a má mít hodnotu 1760 Hz. Pátá harmonická má mít frekvenci 2200 Hz, šestá 2640 Hz, sedmá 3080 Hz a osmá 3520 Hz. Teoretické hodnoty frekvencí jednotlivých tónů čerpáme z obr. 2. U vyšších frekvencí jsou už odchylky teoretické a naměřené hodnoty větší, stále ale jejich frekvence náleží odpovídajícím tónům. Můžeme konstatovat, že vyšší harmonické tónu a' (A4) zahrané na piano odpovídají teoretickým hodnotám. Na logaritmickém spektru lze vidět až 8 vyšších harmonických a jejich frekvence na spektru odpovídá vždy největším píkům. Případné odchylky měření od teorie mohou být způsobeny nepřesným laděním klavíru. Na odchylky také mohou mít vliv parametry analýzy Fourierovské transformace, kterým jsme se věnovali v části 2.2. Abychom ověřili, jak velký vliv mají tyto parametry na výpočet jednotlivých vyšších harmonických v programu Audacity, vytvořili jsme spektra tohoto tónu v jazyce Python a v jazyce GNU Octave. Tato spektra jsou uvedena v příloze (2 a 5). V obou těchto spektrech vidíme, že první čtyři vyšší harmonické se liší pouze o 1 Hz od naměřených hodnot programem Audacity. U dalších vyšších harmonických jsou už odchylky od výpočtů provedených programem Audacity větší – frekvence vypočítané pomocí Pythonu a GNU Octave se shodují. I tak ale můžeme měření programem Audacity považovat za dostatečně přesné k našim účelům, protože vypočítané frekvence tímto programem náleží příslušným tónům. Na logaritmickém spektru tónu A4 můžeme ještě pozorovat výrazné a tlusté píky s frekvencí nižší, než je základní frekvence tónu A4 440 Hz. Pro tento tón jsme zvýraznili pík o frekvenci 202 Hz, což odpovídá tónu G#3. Pík o této frekvenci může být způsoben rezonancí klavíru. Naměřené hodnoty s frekvencí menší než 50 Hz nebudeme komentovat, jak jsme zjistili z technických parametrů mikrofonu (část 2.1), je určen pro frekvenční rozsah od 50 Hz.



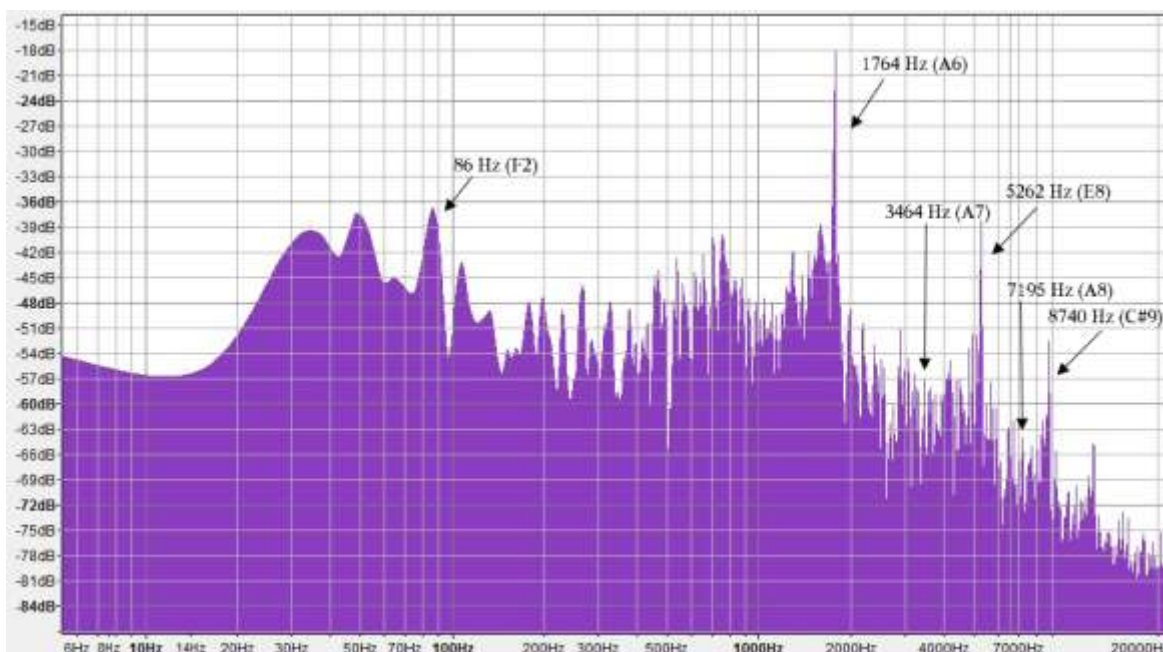
Obrázek 20: Logaritmické spektrum tónu A5

Tón a'' (A5) je o oktávu vyšší než předešlý tón, jak už jsme naznačili v předchozím případě, frekvence základního tónu (A5) by měla být dvakrát vyšší než tónu A4, to znamená 880 Hz. V tomto případě jsme naměřili hodnotu 881 Hz. Naměřené hodnoty čteme z obr. 20.

Kmitočty vyšších harmonických tónu A5 by podle teorie (obr. 2) měly mít hodnoty:

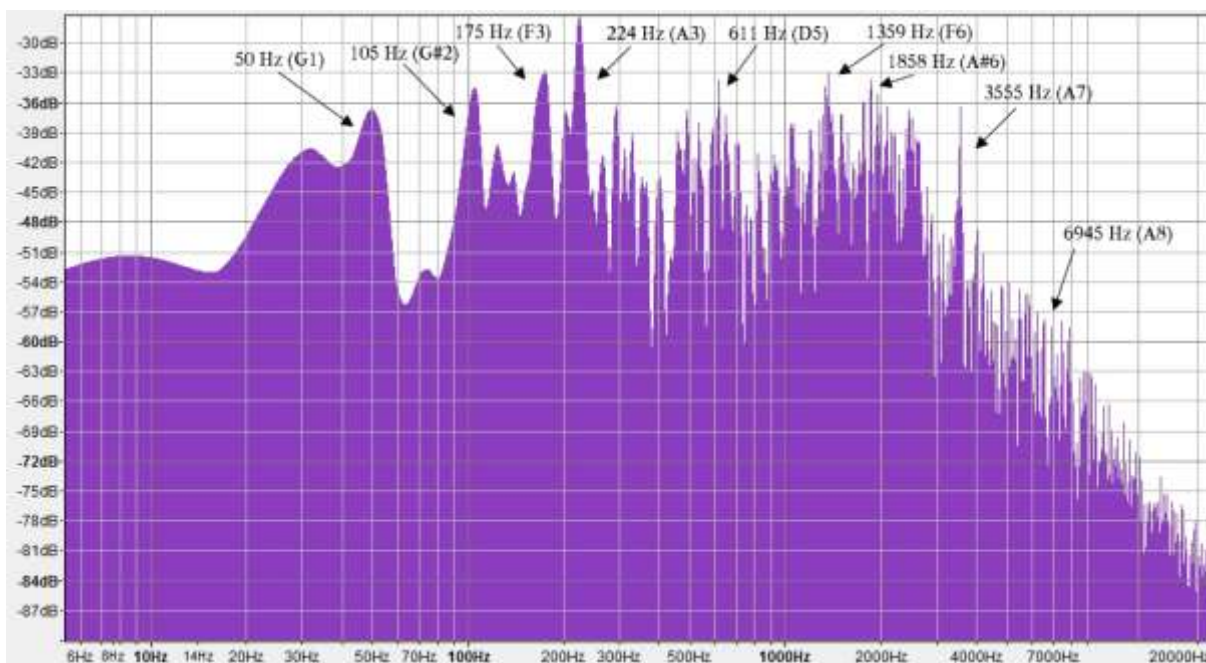
A5	A6	E7	A7	Cis 8	E8	G8	A8
880 Hz	1760 Hz	2640 Hz	3520 Hz	4400 Hz	5280 Hz	6160 Hz	7040 Hz
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.

I zde můžeme pozorovat s rostoucí frekvencí a rostoucím číslem větší nepřesnosti, stále ale jsou hodnoty frekvencí v rozmezí frekvencí odpovídajícím očekávaných tónů. Navíc 6. harmonická, jejíž frekvence náleží notě E8 se liší pouze o 5 Hz od výpočtů. Program ale používá algoritmus, který má rozlišení 5, 4 Hz (část 2.2). Můžeme tedy konstatovat, že naměřená hodnota souhlasí s teorií. U tohoto tónu jsou vyšší harmonické ve spektru dobře rozlišitelné a představují vždy největší a dobře odlišitelný pík. Také u tohoto tónu se rezonance uplatňuje, na spektru je patrný pík s frekvencí 166 Hz. Výskyt těchto frekvencí může souviset s konstrukcí nástroje a jeho rezonancí.



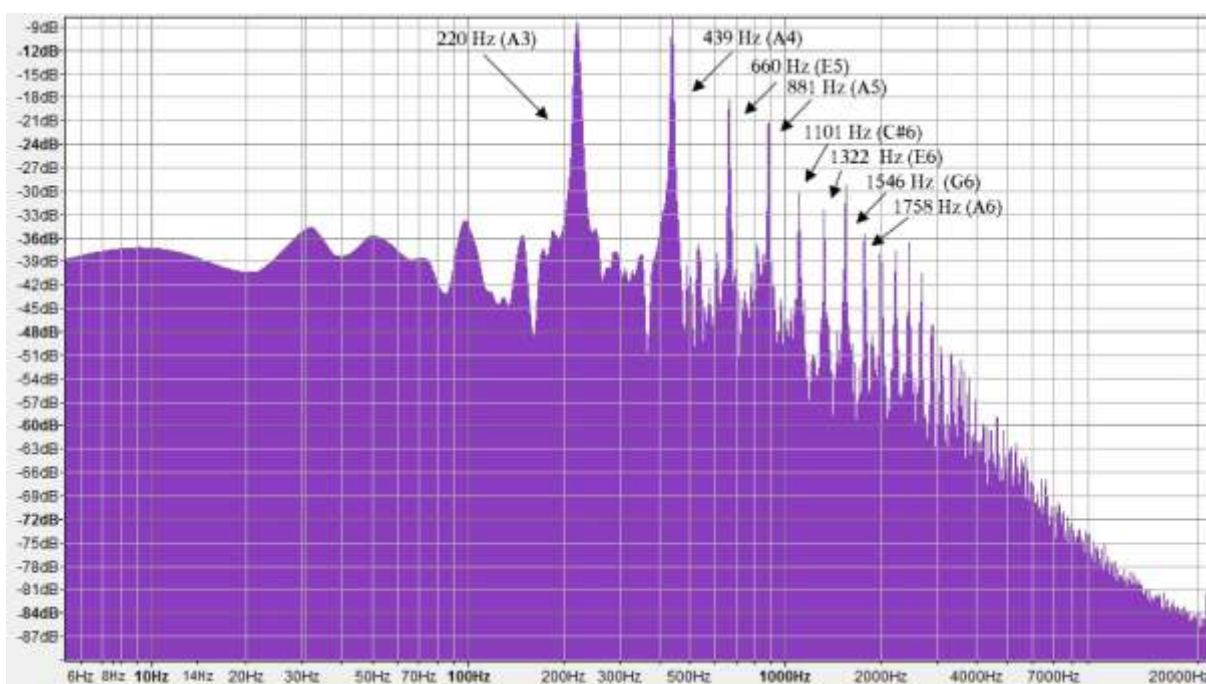
Obrázek 21: Logaritmické spektrum tónu A6

O další oktávu vyšší je tón a''' (A6), frekvence jeho základního tónu je dvakrát vyšší než tónu A5 – 1760 Hz. V logaritmicčém spektru (obr. 21) analyzovaného tónu můžeme základní frekvenci dobře identifikovat. Je to největší a velmi úzký pík. Vyšší harmonické už od pouhého pohledu rozlišit nejdou, ve spektru ale přítomny jsou. Můžeme je najít kurzorem v programu Audacity. Druhá harmonická tónu A6 by měla mít teoretickou frekvenci 3520 Hz, třetí 5280 Hz a čtvrtá harmonická by měla mít dle výpočtu frekvenci 7040 Hz. Teoretické hodnoty frekvencí čerpáme z obr. 2. Mezi naměřenými a teoretickými hodnotami jsou už větší odchylky, stále ale vyšší harmonické náleží frekvencím příslušných tónu. Na logaritmicčém spektru tohoto tónu se nám podařilo vyznačit pouze pět vyšších harmonických, z čehož dvě vyšší harmonické už nemají dobře rozpoznatelný pík, u dvou předchozích tónů jsme jich našli minimálně osm. To může značit, že vyšší tóny nemají tolik vyšších harmonických jako tóny nízké jako je konstatováno i v knize Bohumila Geista (2005, str. 190).



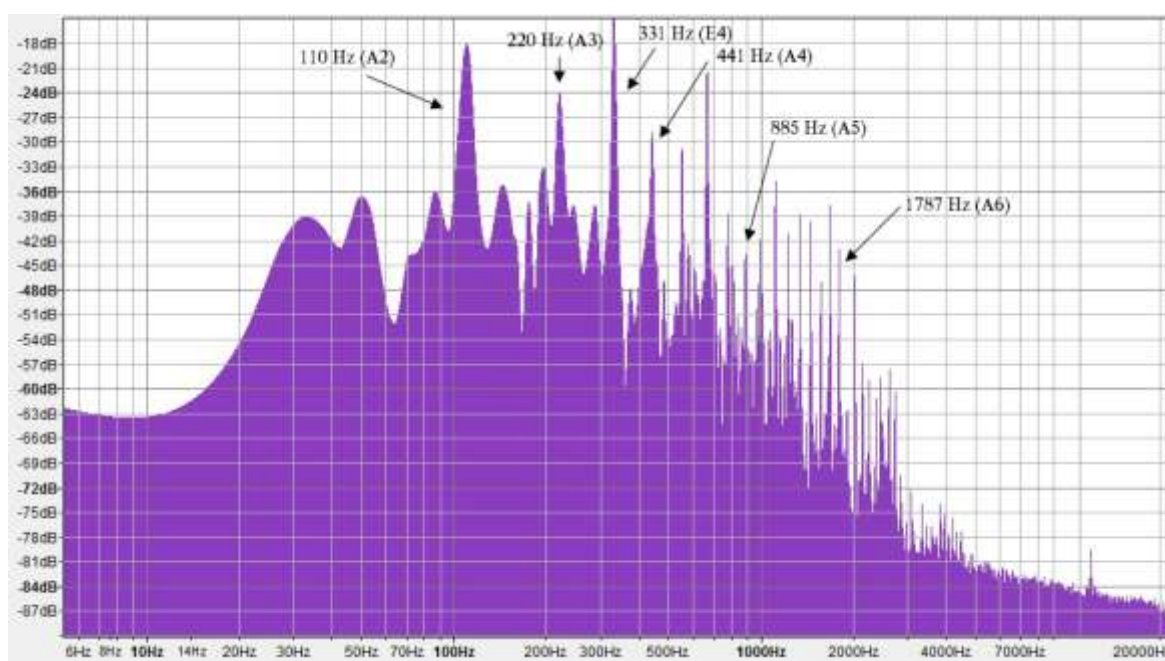
Obrázek 22: Logaritmické spektrum tónu A7

Poslední z tónů *a* na klaviatuře pianina je tón A7, frekvence jeho základního tónu je 3520 Hz. Na logaritmickém spektru (obr. 22) bychom ho už těžko našli pouhým okem. Kursorem ale můžeme identifikovat nejen ho, ale i jeho druhou harmonickou. Pík tónu A7 je opět velmi úzký. V tomto spektru je přítomno několik výrazných píků o frekvenci nižší než 3520 Hz. Ty mohou být způsobeny rezonancí, která může být pro vyšší tóny (a zejména pro tento tón) silnější, rezonance také může vznikat při stisknutí této klávesy.



Obrázek 23: Logaritmické spektrum tónu A3

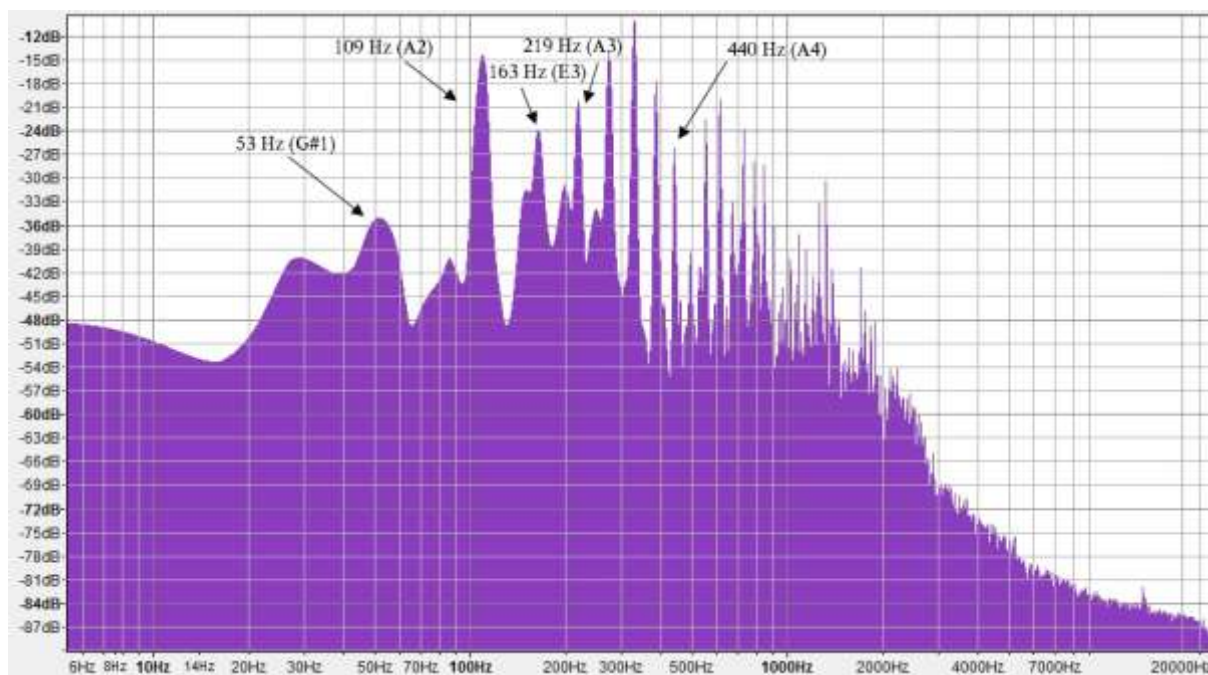
Tón *a* (A3) je o oktávu nižší než první tón analyzovaný v této části. Jeho základní frekvence by měla být poloviční a tedy 220 Hz, což souhlasí i naměřenou hodnotou. Jeho vyšší harmonické frekvence jsou násobky 220. Druhá harmonická by měla mít frekvenci 440 Hz, třetí harmonická 660 Hz, čtvrtá harmonická 880 Hz, pátá 1100 Hz atd. Naměřené logaritmické spektrum (obr. 23) se zdá velmi přesné a je v něm znázorněna i osmá harmonická, která by měla mít hodnotu 1760 Hz. (naměřená hodnota je 1758 Hz). Píky dalších vyšších harmonických jsou ve spektru dobře rozpoznatelné a mohli bychom jich ve spektru identifikovat o mnoho více, než je uvedeno v textu. Pro tento tón jsme provedli výpočet Fourierovy analýzy v jazyce Python a v jazyce GNU Octave (příloha 1 a 4). V tomto případě jsou výpočty všech tří programů shodné a s výjimkou 8. harmonické, se odchylky jednotlivých výpočtů odlišují pouze o ± 2 Hz.



Obrázek 24: Logaritmické spektrum tónu A2

O další oktávu nižší je tón A (A2), frekvence tohoto tónu je 110 Hz. Pík základní frekvence na logaritmickém spektru (obr. 24) není tak úzký jako u vyšších tónů (například A7 či A8). Širší jsou i frekvence vyšších harmonických, a to především druhé harmonické, která má frekvenci 220 Hz a se svojí frekvencí zároveň náleží tónu A3, a frekvence třetí harmonické o frekvenci 330 Hz náležící tónu E4. Čtvrtá harmonická má teoretickou hodnotu 440 Hz, naměřená hodnota je 441 Hz. Můžeme tedy konstatovat, že měření je dostatečně přesné. Do čtvrté harmonické se teoretické a naměřené hodnoty téměř neliší a jejich píky můžeme ve spektru dobře rozlišit. V tomto logaritmickém spektru jsme

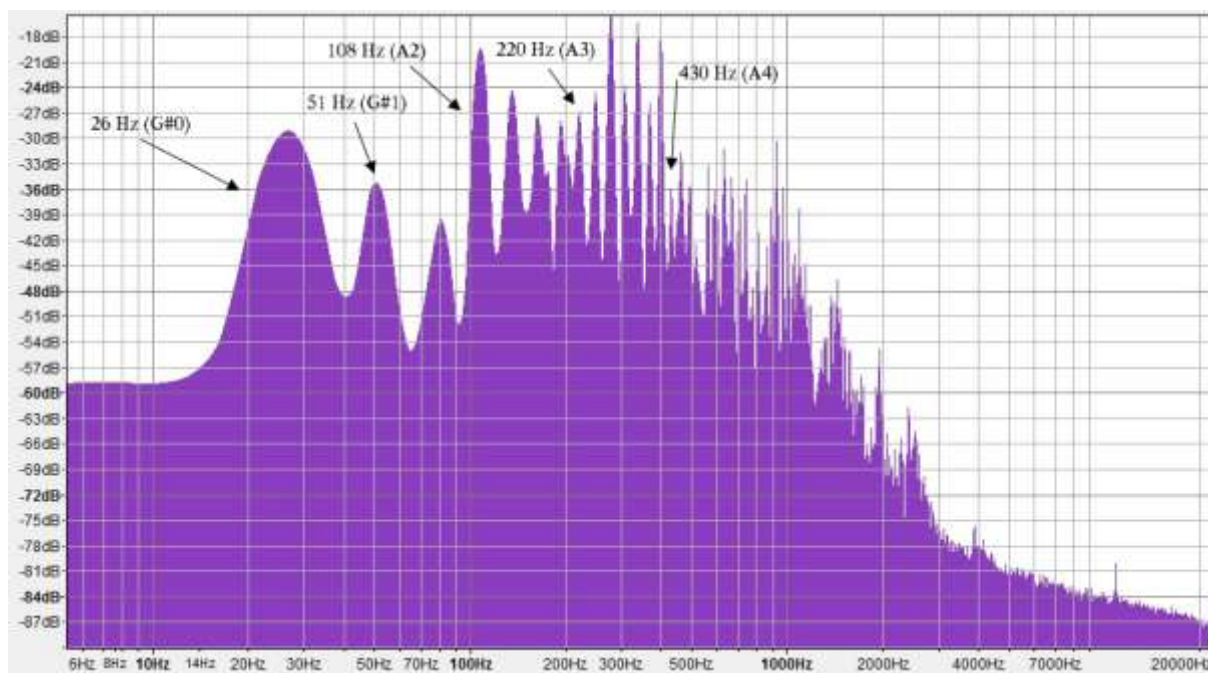
zvýraznili přítomnost dalších vyšších harmonických a to konkrétně osmé harmonické (o teoretické frekvenci 880 Hz) a dokonce i šestnácté vyšší harmonické. Její frekvence má mít dle výpočtu hodnotu 1760 Hz. V tomto logaritmickém spektru vidíme, že tón A2 má více než 16 vyšších harmonických. U obr. 21, na kterém je logaritmické spektrum tónu A6 jsme našli pouze pět vyšších harmonických, nižší tóny tedy opravdu mají větší počet vyšších harmonických než ty vysoké.



Obrázek 25: Logaritmické spektrum tónu A1

Frekvence tónu A' (A1) je 55 Hz, na logaritmickém spektru (obr. 25) vytvořeném programem Audacity pík o této frekvenci není. Neznamena to ovšem, že naše měření nebylo správné nebo že měřené piano není dobře naladěno. Přítomnost základní frekvence tónu A1 si ukážeme v další části (3.1.3). Příčinou, proč není v logaritmickém spektru ukázána tato frekvence, může být rozmezí frekvencí, které mikrofon měří. Údaje mikrofonu uvádí, že minimální frekvence, kterou mikrofon změřil je 50 Hz (elcodis, 2010-2017). Záznam tónu s nízkými frekvencemi může proto být zkreslený a je možné, že tyto frekvence pak mohou být ve výsledném spektru potlačeny. Na logaritmickém spektru ale můžeme najít vyšší harmonické měřeného tónu A1. Druhá harmonická má teoretickou hodnotu 110 Hz, naměřená hodnota je 109 Hz, tato frekvence náleží i tónu A2. Třetí harmonická má teoretickou hodnotu 165 Hz. Naměřená hodnota je 163 Hz a přísluší tónu E3. Čtvrtá harmonická má frekvenci 220 Hz, naměřená hodnota je 219 Hz a přísluší tónu o dvě oktávy vyššímu než je frekvence základního tónu. Na spektru je ukázána i přítomnost

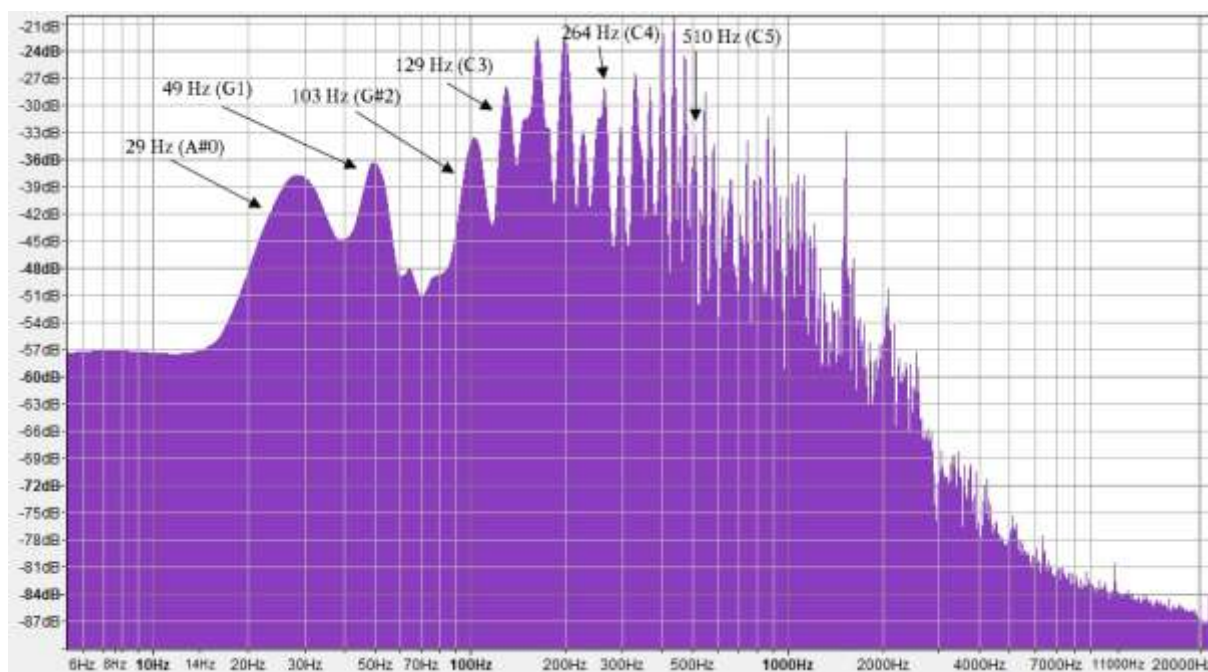
osmé harmonické o frekvenci 440 Hz (teoretická i naměřená hodnota). I po osmé vyšší harmonické můžeme vidět píky mnoha dalších vyšších harmonických měřeného tónu.



Obrázek 26: Logaritmické spektrum tónu A0

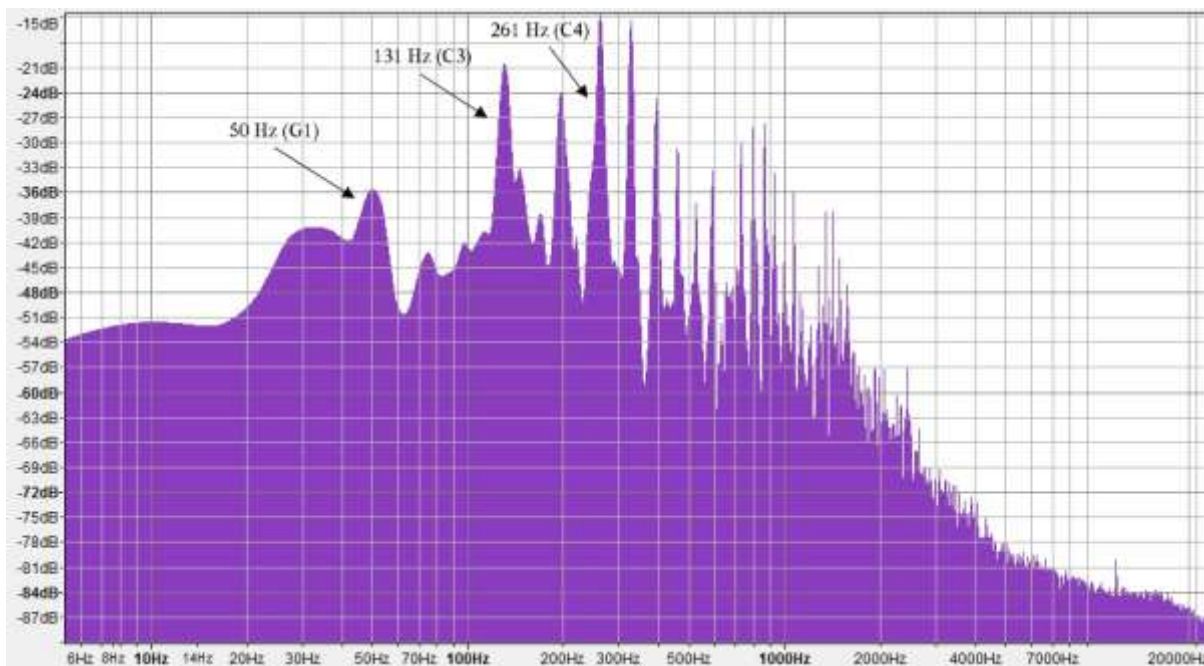
Nejnižší tón na klaviiatúře klavíru je tón A'' (A0), frekvence tohoto tónu je 27,5 Hz. Limitní frekvence, kterou lidské ucho slyší je 20 Hz, výšku tónů (základní frekvenci) ale vnímáme a umíme porovnat až od 30 Hz (Giordano 2011, str. 118). Jak jsme již zmínili u předchozího tónu, podle technických parametrů, mikrofon rozlišuje rozsah až od 50 Hz, proto není základní frekvence tónu A0 ukázána v logaritmicném spektru (obr. 26). Přítomnost základní frekvence tohoto tónu opět ukážeme v další části jiným způsobem. V logaritmicném spektru je dobře patrná čtvrtá vyšší harmonická tónu A0, jejíž frekvence náleží tónu A2 (stejně jako v předchozím případě). Dále jsme vyznačili přítomnost 8. harmonické mající frekvenci 220 Hz a přítomnost 16. harmonické s teoretickou frekvencí 440 Hz. Zvýrazněné píky o frekvenci nižší než 50 Hz (resp. 51 Hz) nenáleží zahránému tónu. Protože tyto frekvence nepatří do rozmezí frekvencí mikrofonu, nemůžeme s jistotou říct, proč vznikají.

3.1.2 Analýza spekter tónů C1, C2, C3, C4, C5, C6, C7 a C8



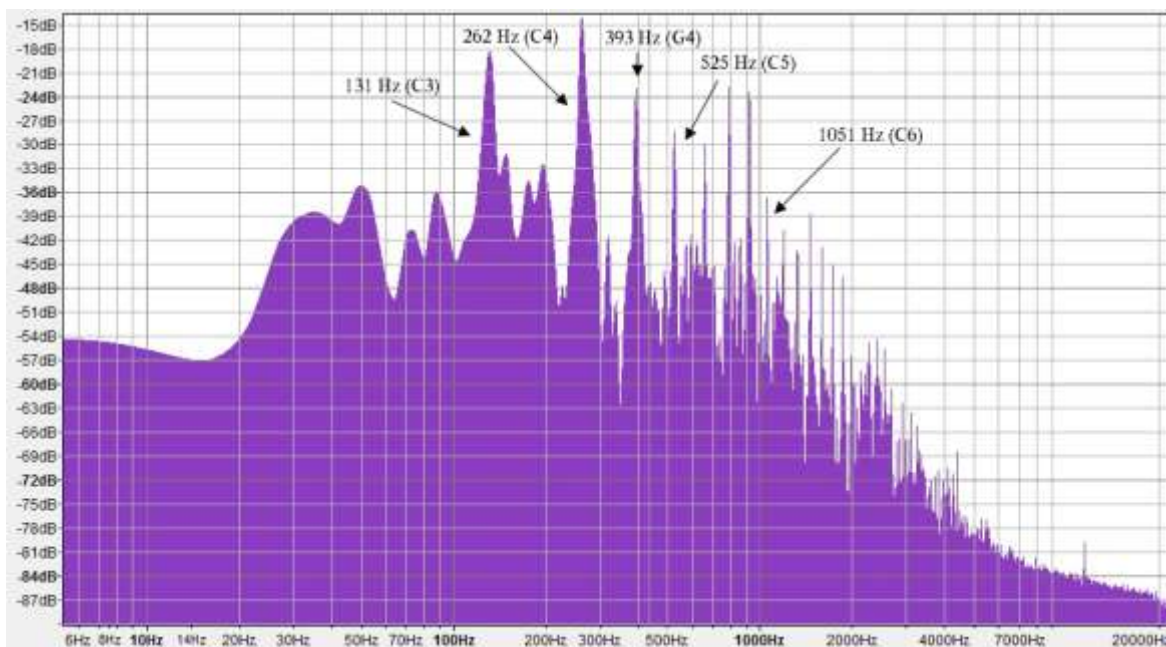
Obrázek 27: Logaritmické spektrum tónu C1

Základní frekvencí tónu C1 je 32,7 Hz (obr. 2). Jako v předešlém případě na logaritmickém spektru (obr. 27) takto nízký tón není. Píky, které mají frekvenci nižší, než 50 Hz opět nezohledňujeme, protože nejsou v měřitelném rozmezí mikrofonu. Přítomnost základní frekvence tónu C1 si ukážeme v další části jiným způsobem. Ve spektru jsme kurzorem našli čtvrtou harmonickou tónu C1 o frekvenci 130 Hz náležící tónu C3. Na logaritmickém spektru jsou vyznačeny ty vyšší harmonické, které náleží do rozmezí frekvencí tónů C. Na tomto obrázku (obr. 27) ale vidíme velký počet dalších vyšších harmonických, to odpovídá předpokladu, že nižší tóny mají velký počet vyšších harmonických.



Obrázek 28: Logaritmické spektrum tónu C2

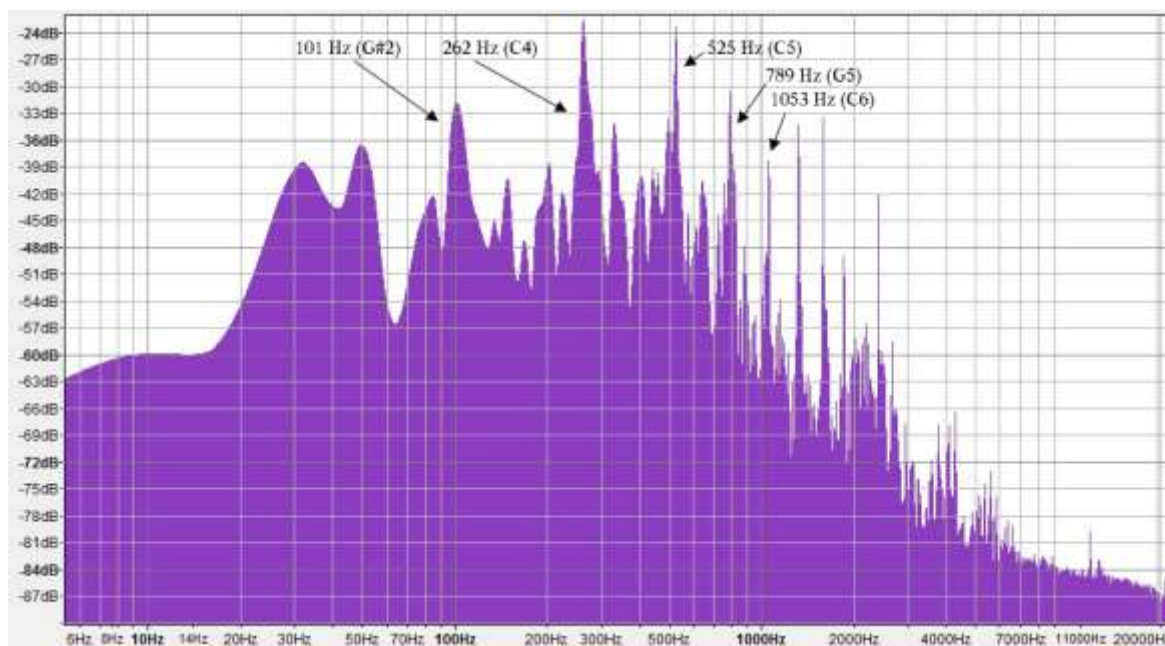
Tón C2 má základní frekvenci 65,4 Hz (obr. 2). Pík o této frekvenci v tomto spektru (obr. 28) není. Důvodem může být opět mikrofon. Ve spektru je znázorněna druhá a třetí harmonická tónu C2 o teoretické hodnotě 130,8 Hz a 261,6 Hz.



Obrázek 29: Logaritmické spektrum tónu C3

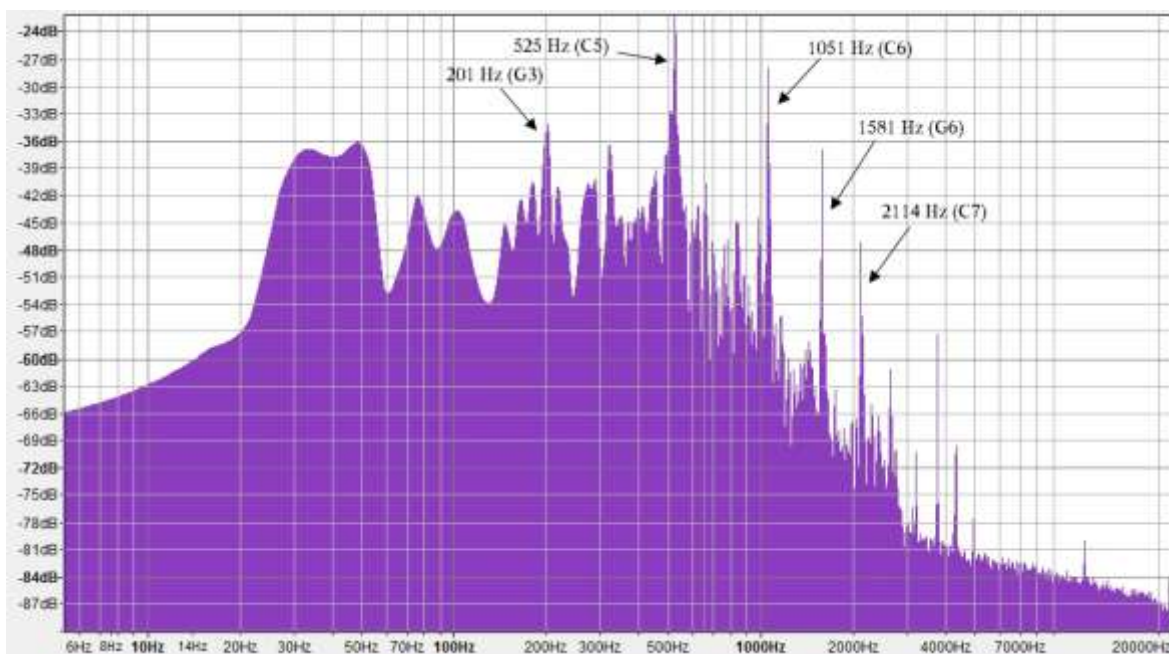
Tón C3 má teoretickou hodnotu 130,8 Hz, naměřená hodnota je 131 Hz. Dalším výrazným píkem ve spektru (obr. 29) je jeho druhá harmonická o teoretické frekvenci 261,6 Hz

odpovídající notě C4. Třetí harmonická má mít 392 Hz a tím zároveň patří do rozmezí frekvencí odpovídající tónu G4. Pátá harmonická má výpočtem určenou hodnotu frekvence 523,2 Hz, tato frekvence náleží tónu C5. Na spektru je znázorněna i osmá harmonická tónu C3 o teoretické frekvenci 1046,5 Hz. Naměřené a teoretické hodnoty se příliš nemění, naměřená frekvence vždy náleží do rozmezí frekvence pro příslušné tóny. Měření můžeme považovat za dostatečně přesné.



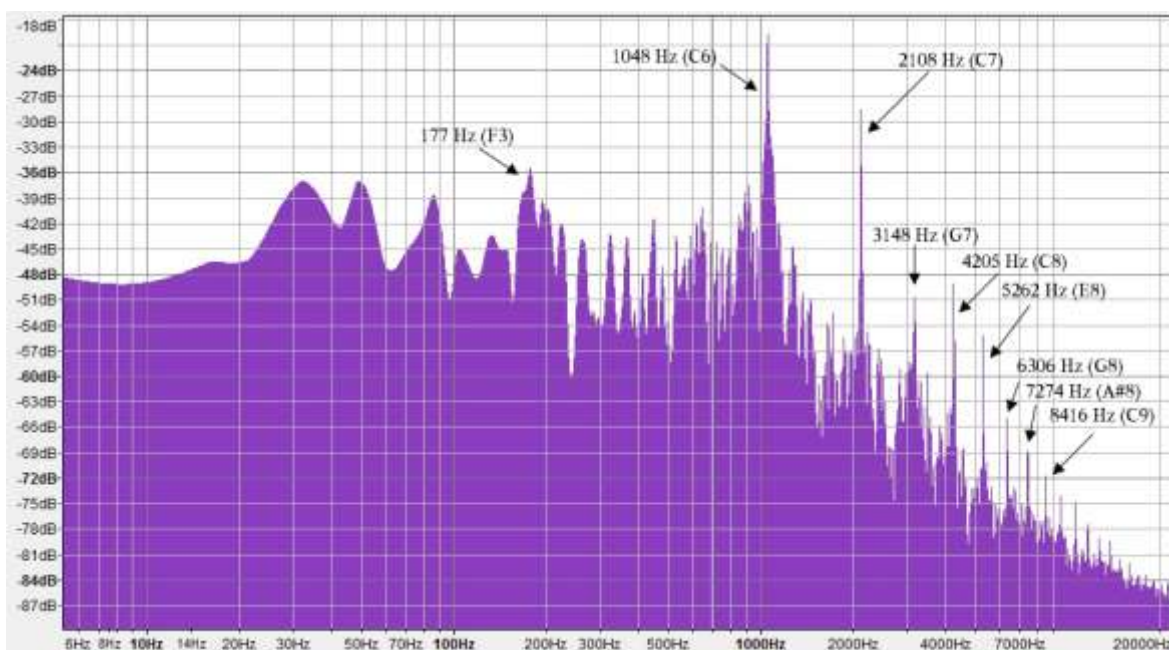
Obrázek 30: Logaritmické spektrum tónu C4

Tón C4 má základní frekvenci 261,6 Hz, což odpovídá i největšímu píku v logaritmicčém spektru měřeného tónu (obr. 30). Dále jsou označeny druhá, třetí a čtvrtá vyšší harmonická o teoretických frekvencích (obr. 2) 523,2 Hz; 784,8 Hz a 1046,4 Hz. I zde naměřená data odpovídají teorii. Ve spektru můžeme pozorovat výrazný pík o frekvenci 101 Hz patřící resonanci. Pro tento tón jsme provedli výpočet v jazyce Python a GNU Octave, vypočtená spektra jsou uvedena v příloze (3 a 6). Na logaritmicčém spektru tónu C4 (obr. 30) jsou ukázány čtyři vyšší harmonické. Jejich frekvence odpovídají vypočteným frekvencím v jazyce Pythonu a v jazyce GNU Octave. Ověřili jsme tedy správnost výpočtů, které provádí program Audacity a můžeme konstatovat, že přesnost výpočtů je dostatečná k těmto měřením.



Obrázek 31: Logaritmické spektrum tónu C5

Nejvyšší pík na tomto spektru (obr. 31) představuje základní frekvenci nebo také výšku tónu C5. Jeho teoretická hodnota by měla být 523,2 Hz. Vyšší harmonické tohoto tónu by dle výpočtu měly mít hodnoty kmitočtů: 1046 Hz pro druhou harmonickou náležící tónu C6, 1569,9 Hz pro třetí harmonickou náležící tónu G6 a pro čtvrtou harmonickou 2093,2 Hz. I u tohoto tónu se resonance uplatňuje.



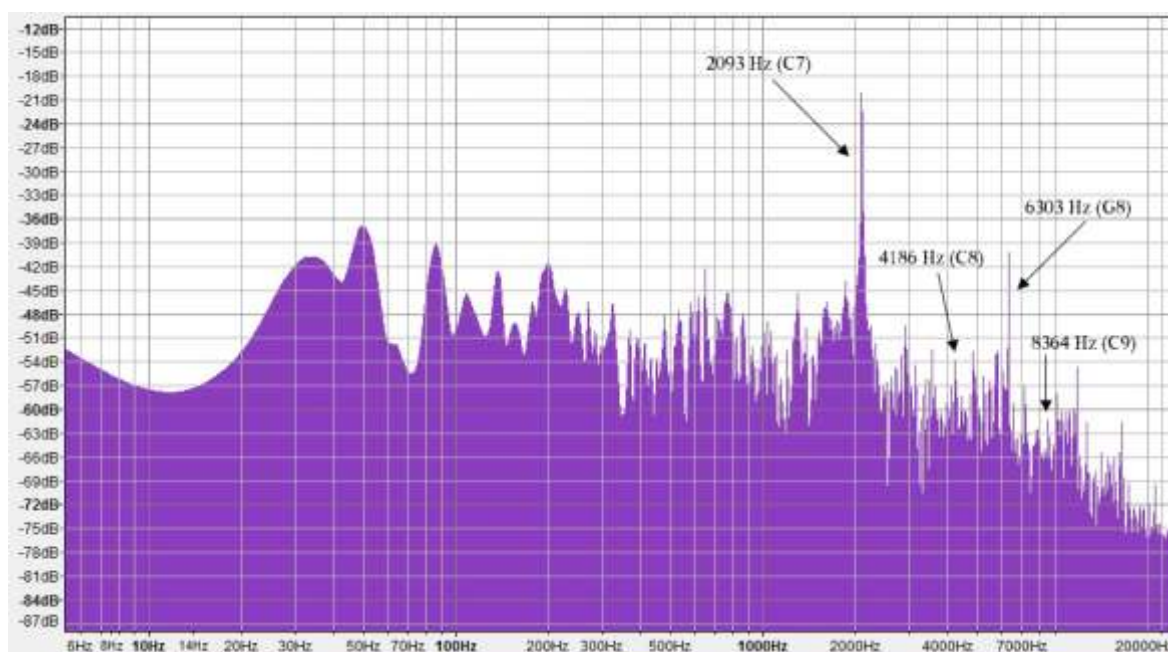
Obrázek 32: Logaritmické spektrum tónu C6

O oktávu vyšší než předešlý tón C5, je to tón C6 o teoretické frekvenci 1046,5 Hz.

Kmitočty jeho harmonických být podle teorie (obr. 2) měly mít hodnoty:

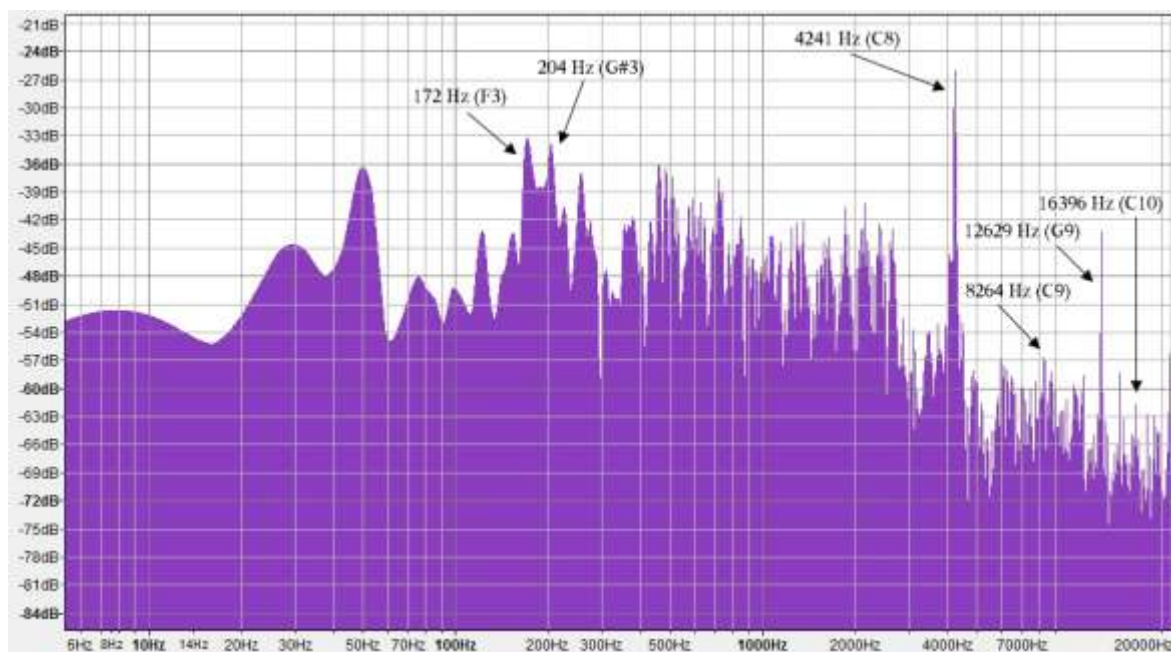
C6	C7	G7	C8	E 8	G8	A#8	C9
1046,5 Hz	2093 Hz	3139,5 Hz	4186 Hz	5232,5 Hz	6279 Hz	7325,5 Hz	8372 Hz
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.

Naměřené frekvence vyšších harmonických neodpovídají úplně přesně teoretickým hodnotám. Měření můžeme ale i tak považovat za dostatečně správné, jelikož naměřené frekvence vždy odpovídají rozmezí frekvencí tónů, které patří příslušným vyšším harmonickým.



Obrázek 33: Logaritmické spektrum tónu C7

Tón C7 má základní frekvenci 2093 Hz (obr. 2). Tento pík můžeme na spektru (obr. 33) dobře poznat, vyšší harmonické jsme ale museli hledat s pomocí kurzoru v programu Audacity. Druhá harmonická frekvence tónu C8 má teoretickou hodnotu 4186 Hz, třetí harmonická 6279 Hz a poslední vyznačená, v pořadí čtvrtá harmonická 8372 Hz. V porovnání s nižšími tóny (obr. 27, 28) je na logaritmickém spektru tónu C7 méně vyšších harmonických měřeného tónu než na logaritmických spektrech nižších tónů.



Obrázek 34: Logaritmické spektrum tónu C8

Nejvyšší tón na klaviatuře pianina je tón C8 s frekvencí 4186 Hz. Hodnota této frekvence je blízko horní hranici 5 000 Hz frekvencí toho, co může lidské ucho rozlišit (Giordano 2010, str. 118). Na tomto spektru (obr. 34) je pík s touto frekvencí dobře rozpoznatelný. Další vyšší harmonické tohoto tónu mají výpočtem určenou hodnotu 8372 Hz, 12558 Hz a pro čtvrtou harmonickou 16744 Hz. Odchytky mezi naměřenými a teoretickými (obr. 2) hodnotami jsou u vyšších harmonických větší, stále ale patří do rozmezí frekvencí očekávaných tónů. U tohoto spektra je silná rezonance, to jsme viděli i u tónu A7 (obr. 22). Můžeme konstatovat, že rezonance se nachází u většiny měřených tónů, může být způsobena například rezonancí klavíru. U naměřených logaritmických spekter pozorujeme, že rezonance je nejsilnější u vyšších tónů.

Výpočty základních frekvencí a vyšších harmonických frekvencí realizované programem Audacity můžeme v porovnání s výpočty v programovatelném jazyce Python a GNU Octave považovat za dostatečně přesné. Výsledky měření – hodnoty vyšších harmonických frekvencí, souhlasí s teoretickými předpoklady, které jsme provedli v části 1.2. Analýzou vyšších harmonických frekvencí měřených tónů jsme zjistili, že nižší tóny mají větší počet vyšších harmonických frekvencí v porovnání s vyššími tóny.

3.1.3 Důkaz základních frekvencí u nižších tónů

V logaritmických spektrech jsme u nižších tónů pianina (obr. 25, 26, 27, 28) nepozorovali pík se základní frekvencí tónu. Nyní si ukážeme, že základní frekvence je v tónu přítomna i přes potlačení nižších frekvencí mikrofonem. Jako vzor zde použijeme tón C5, jehož frekvence je 523,3 Hz. V tomto případě nevykresluje logaritmické spektrum, ale použijeme zvukovou stopu, kterou přiblížíme tak, abychom mohli pracovat s jednotlivými periodami.



Obrázek 35: Přiblížená zvuková stopa tónu C5 pro výpočet frekvence

Ve zvukové stopě se pokusíme najít periodu a změříme čas pro několik takových period. Na obr. 35 jsme změřili dobu dvaceti period, měřená část představuje zvýrazněný úsek. Doba deseti period je

$$20 T = 0,038 \text{ s}$$

Doba jedné periody pak je

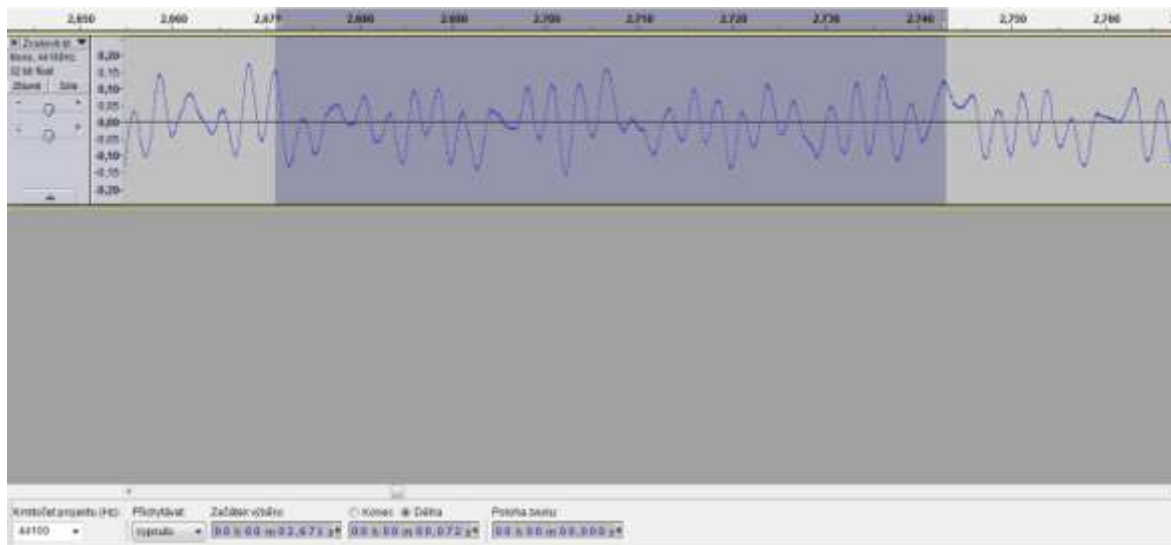
$$T = 0,0019 \text{ s}$$

A frekvence měřeného tónu C5 je

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,0019} = 526,3 \text{ Hz}$$

Teoretická hodnota frekvence tónu C5 je 523,3 Hz (obr. 2). Výpočtem určená hodnota 526,3 Hz náleží do rozmezí frekvencí tohoto tónu. Obě hodnoty – naměřená i vypočtená se liší jen velmi málo, proto můžeme tuto metodu určení základní frekvence za správnou a dostatečně přesnou.

Dále si ukážeme přítomnost základní frekvence u těch not, u kterých nebyla základní frekvence přítomna v logaritmickém spektru měřeného tónu.



Obrázek 36: Přibližná zvuková stopa tónu A0 pro výpočet frekvence

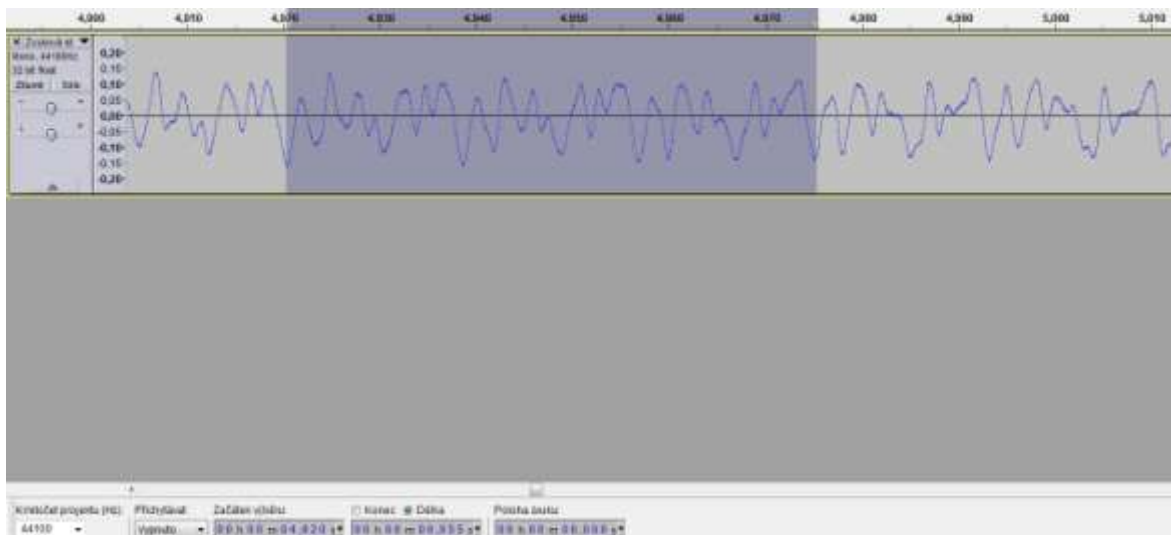
U nízkých frekvencí už není tak jednoduché přesně rozpoznat periodu jako tomu bylo u tónu C5, jehož zvuková stopa (obr. 36) připomínala sinusoidu. Pro tón A0 se nám podařilo změřit dobu pouze pro dvě periody

$$2T = 0,072 \text{ s}$$

$$T = 0,036 \text{ s}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,036} = 27,78 \text{ Hz}$$

Správná hodnota základní frekvence je 27,5 Hz. Výpočtem jsme dostali hodnotu 27,78 Hz. Tato hodnota náleží do rozmezí frekvencí tónu A0 a od teoretické hodnoty (obr. 2) se liší jen málo. Podle logaritmického spektra tohoto tónu (obr. 26) se zdálo, že tato frekvence není obsažena v zahráném tónu. Konstatovali jsme, že nepřítomnost píku této první harmonické je způsobena rozmezím frekvencí, které je mikrofon schopen změřit. Nyní však můžeme konstatovat, že základní frekvence (výška tónu) určena výpočtem o hodnotě 27,78 Hz je v zahráném tónu přítomna.



Obrázek 37: Přibližná zvuková stopa tónu A1 pro výpočet frekvence

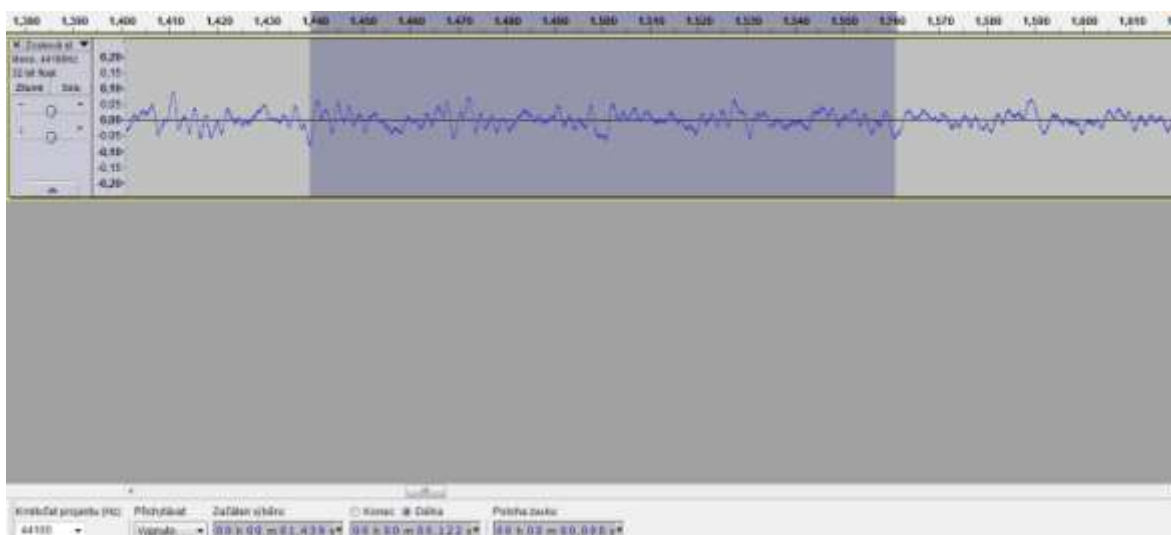
Pro tento tón jsme změřili tři periody

$$3T = 0,055 \text{ s}$$

$$T = 0,018 \text{ s}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,018} = 54,64 \text{ Hz}$$

Teoretická hodnota základní frekvence tónu A1 je 55,0 Hz (obr. 2). Opět se nám tedy podařilo prokázat, že základní frekvence je v zahraném přítomna, i když není její pík znázorněn v logaritmickém spektru (obr. 25).



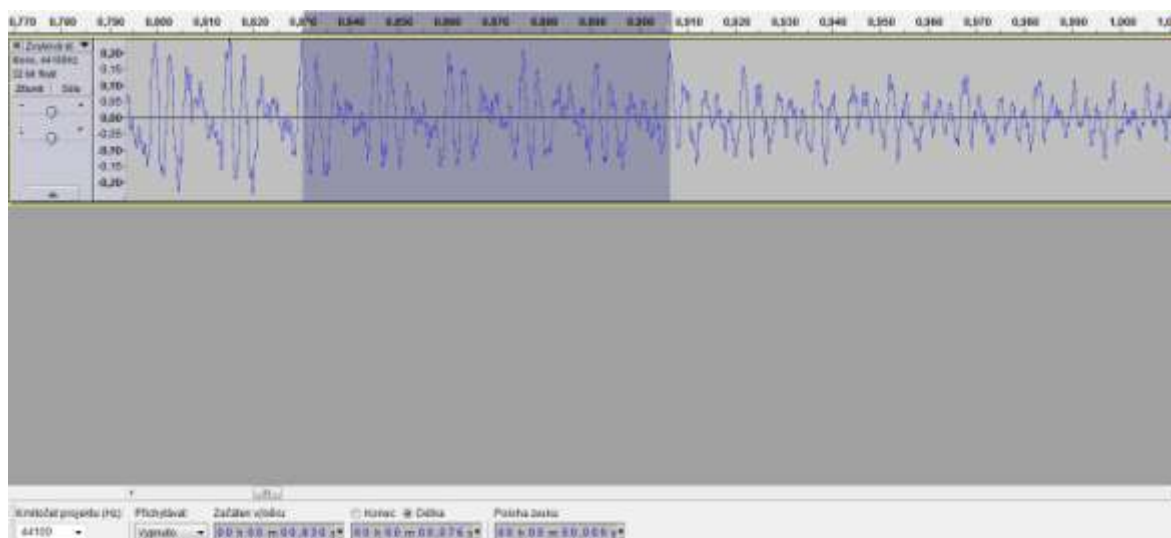
Obrázek 38: Přibližná zvuková stopa tónu C1 pro výpočet frekvence

$$4T = 0,122 \text{ s}$$

$$T = 0,031 \text{ s}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,031} = 32,79 \text{ Hz}$$

Pro tón C1 je správná hodnota frekvence 32,7 Hz. I zde se teoretická frekvence (obr. 2) a naměřená frekvence liší velmi málo, a tak jsme prokázali přítomnost této frekvence v zahraném tónu C1.



Obrázek 39: Přibližná zvuková stopa tónu C2 pro výpočet frekvence

$$5 T = 0,076 \text{ s}$$

$$T = 0,015 \text{ s}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,015} = 65,79 \text{ Hz}$$

Správná hodnota frekvence tohoto tónu je 65,4 Hz (obr. 2). I zde se vypočtená a teoretická hodnota příliš neliší. Proto můžeme konstatovat, že jsme tímto měřením dokázali výšky, a tedy základní frekvence nižších tónů, které se na logaritmických spektrech nezobrazovaly.

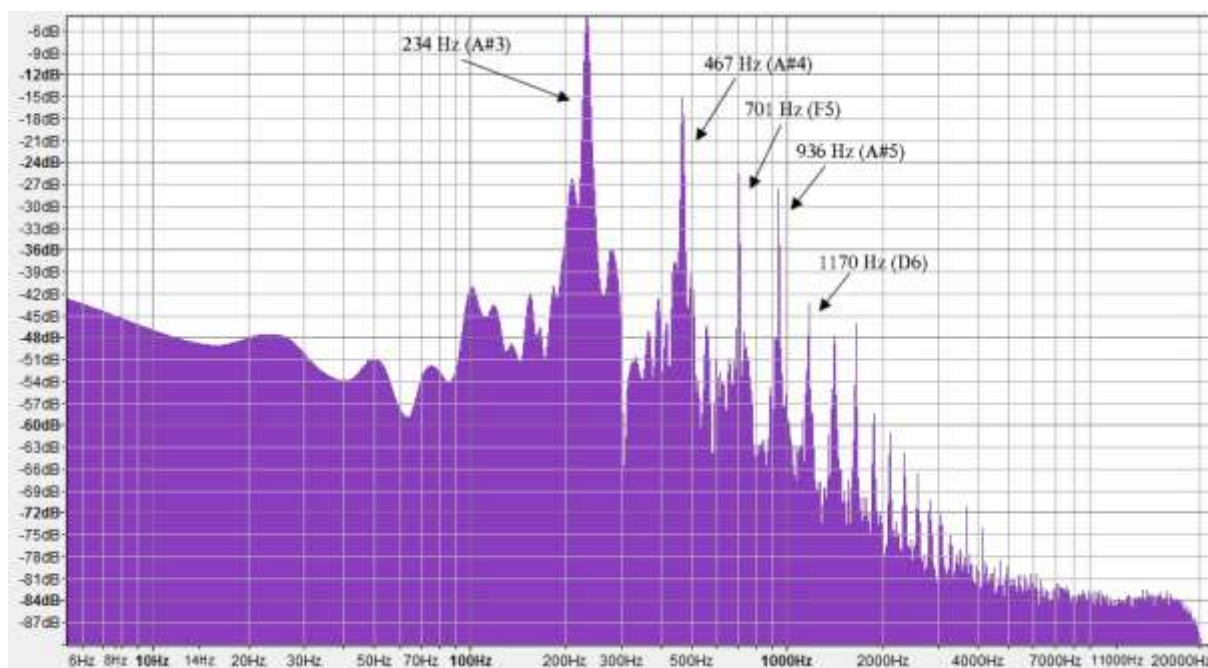
3.2 Analýza dalších tónů pianina

Tato část analyzuje logaritmické spektrum tónů lišících se o půl tónu od tónů měřených v předešlé části a analýzou akordů. V předešlé části jsme již ověřili velikost intervalu 12-ti

půl tónů, nazvaného oktáva. Nyní se zaměříme na velikost temperovaného půltónu a dalších intervalů (velká a malá tercie, kvinta).

3.2.1 Analýza tónů lišících se o půl tónu od tónů měřených v první části

Již v části 1.4 definujeme temperovaný půl tón, na příkladů tónů A#3, A#4, G#3, G#4, C#4, C#5, H2 a H4 jeho velikost ověříme a porovnáme s naměřenými hodnotami a s hodnotami uvedenými v obr. 2. Při analýze tónů popisujeme i jejich vyšší harmonické a vztah mezi vyššími harmonickými tónů lišících se o půl tónu.



Obrázek 40: Logaritmičké spektrum tónu A#3

Tón A3 má základní frekvenci 220 Hz, o půl tónu vyšší je tón A#3 (čteme ais) se základní frekvencí 233 Hz (obr. 2). Velikost temperovaného půltónu je 1,059463 (část 1.4). Podle temperovaného ladění můžeme tuto frekvenci vypočítat jako

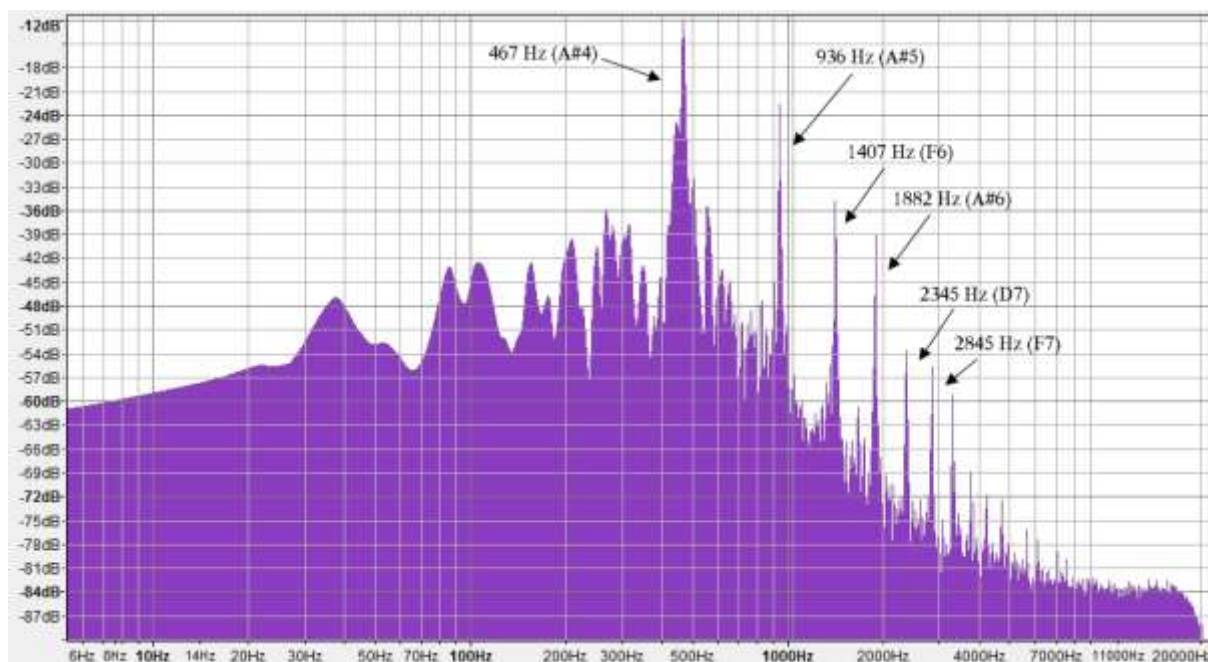
$$f(A\#3) = f(A3) \cdot 1,059463 = 220 \cdot 1,059463 = 233,08186 \text{ Hz}$$

což odpovídá i naměřené hodnotě 234 Hz. Na logaritmičkém spektru (obr. 40) jde o největší a nejvyšší pík. Teoretickou hodnotu frekvence jeho vyšších harmonických můžeme vypočítat stejným způsobem jako v části 3.1. Druhá harmonická frekvence tónu A#3 je dvakrát větší než první, tj. tj. $233 \cdot 2 = 466 \text{ Hz}$.

Frekvence náleží tónu o oktávu vyššímu – tónu A#4, stejně tak, jako druhá harmonická frekvence tónu A3 odpovídá tónu A4. I zde by frekvence měla být shodná s hodnotou

$$f(A\#4) = f(A4) \cdot 1,059463 = 440 \cdot 1,059463 = 466,16372 \text{ Hz.}$$

Vypočtená frekvence odpovídá té naměřené (obr. 40) 467 Hz. Třetí harmonická má teoretickou frekvenci 699 Hz. Výpočtem, jako v předchozím případě, jsme určili hodnotu této frekvence dle temperovaného ladění 699,2 Hz. Naměřená frekvence je 701 Hz a téměř odpovídá teoretické, náleží do rozmezí frekvencí tónu F5. Třetí harmonická tónu A3 odpovídá tónu E5. Tón F je o půl tónu vyšší než tón E a tedy i třetí harmonická frekvence tónů A3 a A#3, které se odlišují půltónem, se liší o půl tónu. Čtvrtá harmonická má teoretickou hodnotu 932 Hz a přísluší tak tónu A#5, který je o dvě oktávy vyšší než základní tón. Zde je vypočtená hodnota 932,3274 Hz. Na logaritmickém spektru (obr. 40) je vyznačena i pátá harmonická tónu A#3 s teoretickou frekvencí 1165 Hz náležící tónu D6. Teoretické a naměřené hodnoty frekvence se shodují. Na tomto příkladu jsme ověřili, že temperované ladění, a tedy velikost temperovaného půltónu, je shodná s hodnotami uvedenými na obr. 2 a že odpovídá naměřeným hodnotám frekvencí vyšších harmonických. Potvrdili jsme také, že tón A#3 je o půl tónu vyšší než tón A3, a i všechny vyšší harmonické tónu A#3 jsou o půl tónu vyšší než frekvence vyšších harmonických tónu A3 (jejich frekvence náleží do rozmezí frekvencí tónu o půl tónu vyššího).



Obrázek 41: Logaritmické spektrum tónu A#4

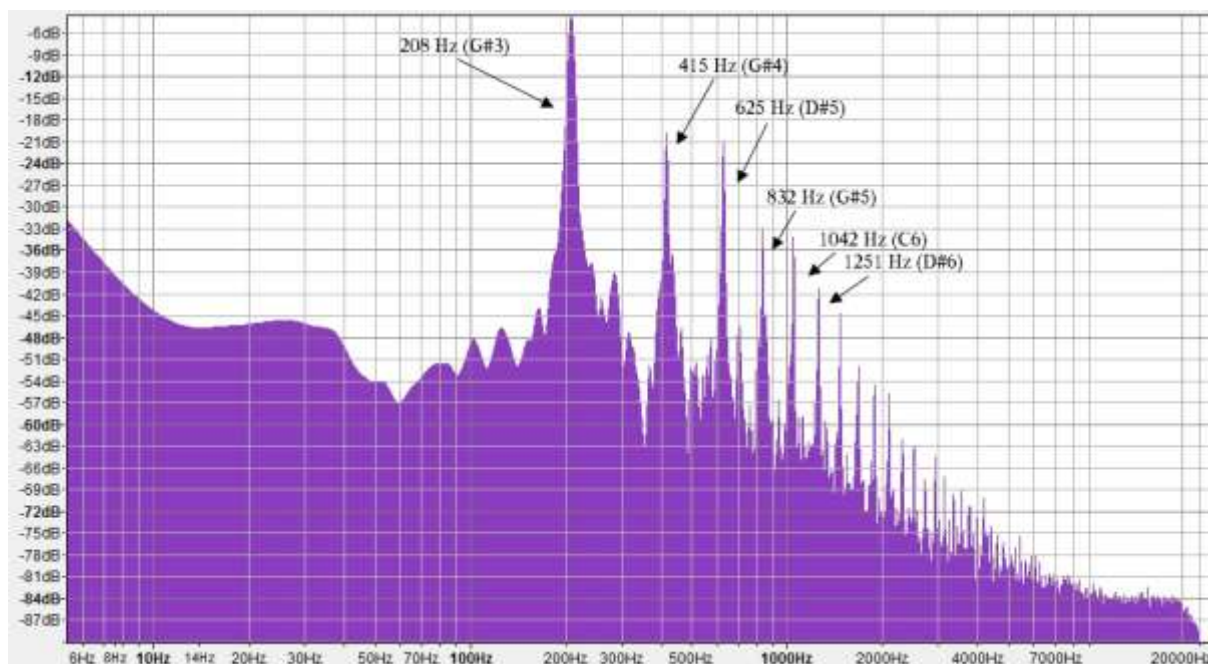
O půl tónu vyšší než tón A4, je tón A#4. Jeho základní frekvence je 466,1 Hz. V předchozím případě (pro tón A#3, obr. 40) jsme již provedli výpočet frekvence tónu A#4 dle temperovaného ladění. Vypočtená hodnota je 466,16372 Hz. Na logaritmickém spektru

(obr. 41) představuje tuto frekvenci nejvyšší a nejvýraznější pík, jehož frekvence určená měřením je 467 Hz. Další vyšší harmonické frekvence by podle teorie měly mít hodnoty:

Tabulka 2: Přehled vyšších harmonických tónu A#4

Tóny	A#4	A#5	F6	A#6	D7	F7
Číslo vyšších harmonických	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Teoretické frekvence	466,1 Hz	932,2 Hz	1398,3 Hz	1854,4 Hz	2330,5 Hz	2796,6 Hz
Naměřené frekvence	467 Hz	936 Hz	1407 Hz	1882 Hz	2345 Hz	2845 Hz

Mezi naměřenými a teoretickými hodnotami páté a šesté harmonické už vznikají větší odchylky. Stále ale naměřené frekvence náležejí odpovídajícím tónům. Na příkladě tohoto tónu můžeme vidět, že teoretické frekvence, naměřené frekvence i frekvence zjištěné výpočtem podle velikosti temperovaného půltónu se shodují a můžeme tedy měření považovat za správné. Tím jsme také ověřili, že měřené pianino je laděno právě temperovaným laděním, jako jsme již předpokládali. I pro další tóny naměřené v této části uvedeme, jak bychom postupovali při výpočtu jejich frekvence podle temperovaného ladění.

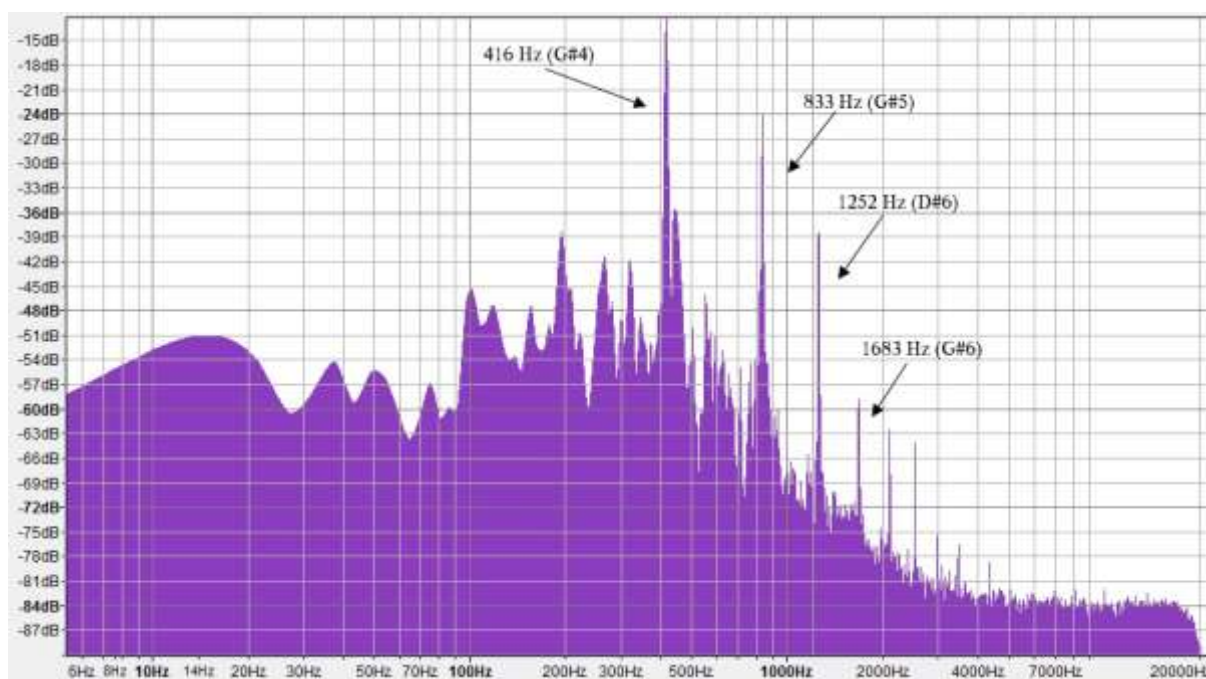


Obrázek 42: Logaritmické spektrum tónu G#3

O půl tónu nižší, než již zmíněný tón A3 je tón G#3 (čteme gis) o základní frekvenci 207,6 Hz (obr. 2). Jak jsme již řekli v teoretické části (1.4) velikost temperovaného půltónu je 1,059463. Podle temperovaného ladění by tedy frekvence tónu G#3 měla být

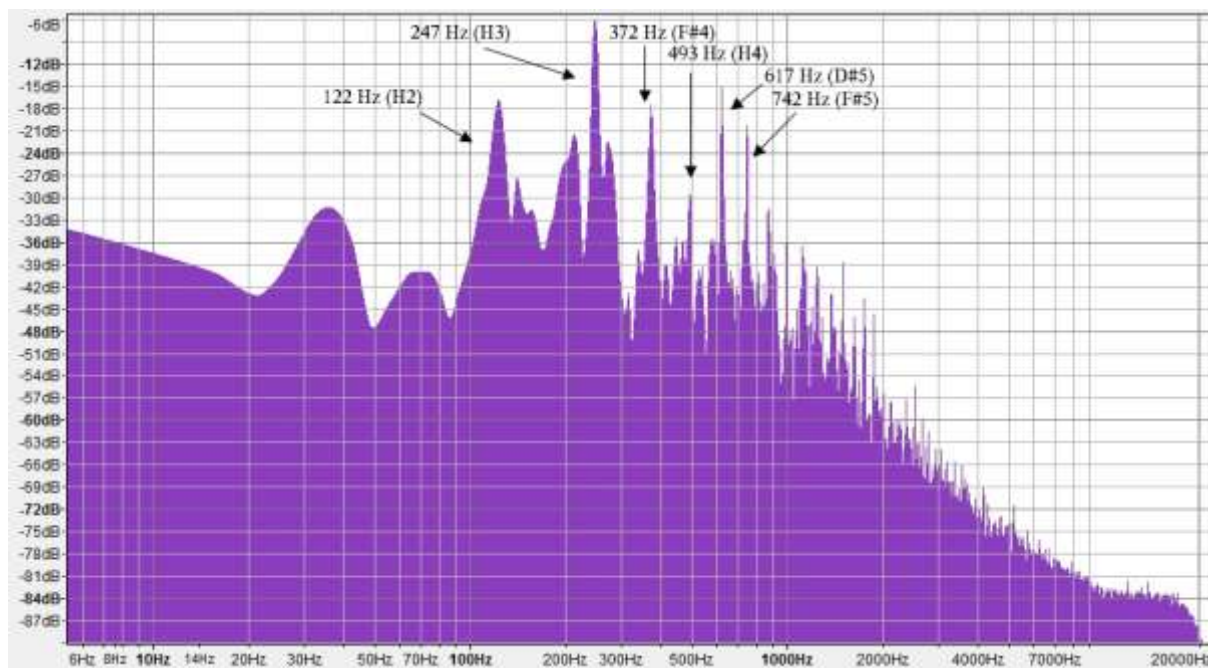
$$f(G\#3) = \frac{f(A3)}{1,059463} = \frac{220}{1,059463} = 207,6524 \text{ Hz}$$

tato hodnota odpovídá jak teoretické frekvenci 207,6 Hz tak naměřené frekvenci (obr. 42) 208 Hz. Na logaritmickém spektru je tento pík opět dobře rozpoznatelný. Jeho druhá harmonická frekvence má mít podle teorie (obr. 2) hodnotu 415,2 Hz a odpovídá tónu o oktávu vyššímu G#4. Tento tón je také o půl tónu nižší než druhá harmonická tónu A3. Vypočtená hodnota podle temperovaného půltónu je 415,3047 Hz. Výpočet jsme provedli analogicky jako pro první harmonickou frekvenci tónu G#3. Třetí harmonická má teoretickou hodnotu 622,8 Hz, naměřená hodnota je 625 Hz a náleží do rozmezí frekvencí pro tón D#5. Třetí harmonická tónu A3 odpovídá tónu E5. Opět se tyto tóny liší o půl tónu, konkrétně tón D#5 je o půl tónu nižší než tón E5. Čtvrtá harmonická má frekvenci 830,4 Hz, což odpovídá i naměřené hodnotě a náleží tónu G#5 (tónu o dvě oktávy vyššímu, než je základní tón). Pátá harmonická má mít frekvenci 1038 Hz a zároveň patřit tónu C6. Šestá harmonická má teoretickou frekvenci 1245,6 Hz a náleží do rozmezí frekvencí tónu D#6. I zde se naměřené a teoretické hodnoty vyšších harmonických shodují a odpovídají temperovanému ladění. Všechny vyšší harmonické frekvence tónu G#3 jsou o půl tónu nižší než vyšší harmonické frekvence tónu A3.



Obrázek 43: Logaritmické spektrum tónu G#4

O oktávu vyšší je tón G#4. I tento tón je o půl tónu nižší než tón A4 analyzovaný v části 3.1.1. (obr. 19). Jeho výška je 415,3 Hz, naměřená hodnota je 416 Hz a na logaritmickém spektru představuje nejvyšší pík. Druhá harmonická frekvence tohoto tónu má 830,6 Hz a svou frekvencí zároveň náleží tónu G#5. Třetí vyšší harmonická má mít frekvenci 1245,9 Hz a patří tónu D#6. Na logaritmickém spektru je ještě vyznačená čtvrtá harmonická s teoretickou frekvencí 1661,2 Hz. Tato hodnota se už od naměřené hodnoty (1683 Hz) trochu liší, stále ale tato hodnota náleží do rozmezí frekvencí tónu G#6.



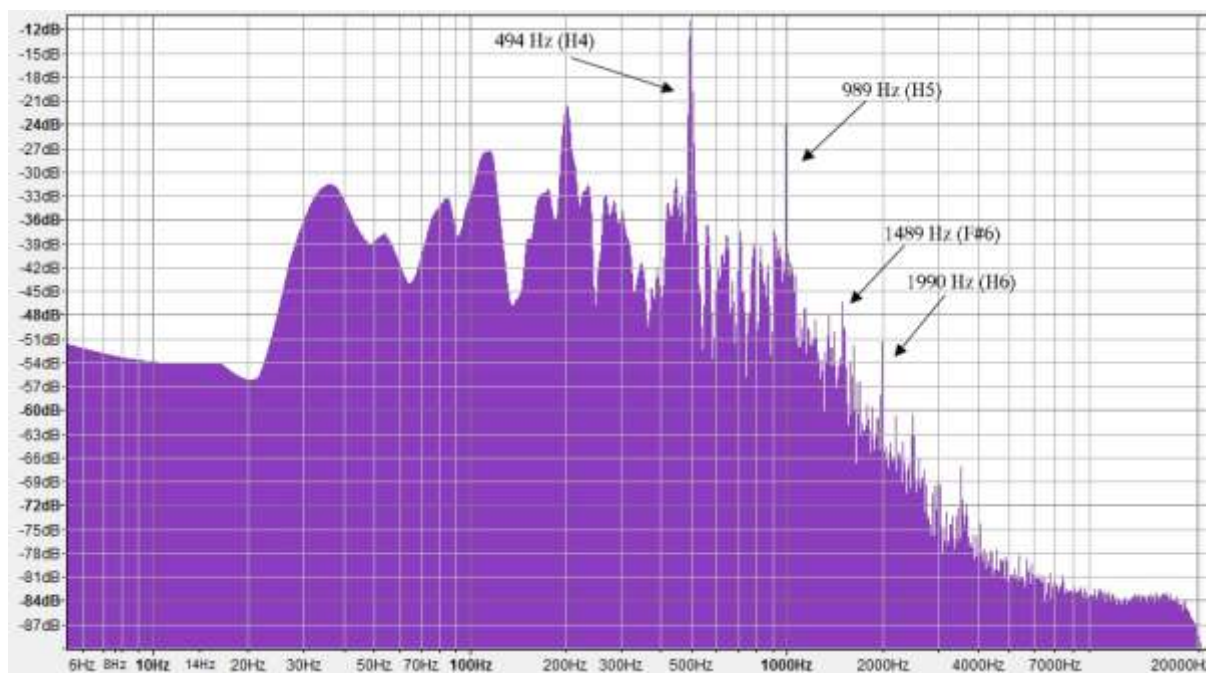
Obrázek 44: Logaritmické spektrum tónu H2

Základní frekvencí tónu C3 je 130,8 Hz, o půl tónu nižší je tón H2 (na rozmezí tónu H a C se mění číslo oktávy). Základní frekvence tohoto tónu je dle teorie (obr. 2) 123,5 Hz. Hodnotu jeho frekvence můžeme určit, tak jako v předchozích případech, výpočtem podle velikosti temperovaného půltónu

$$f(H2) = \frac{f(C3)}{1,059463} = \frac{130,8}{1,059463} = 123,4588 \text{ Hz}.$$

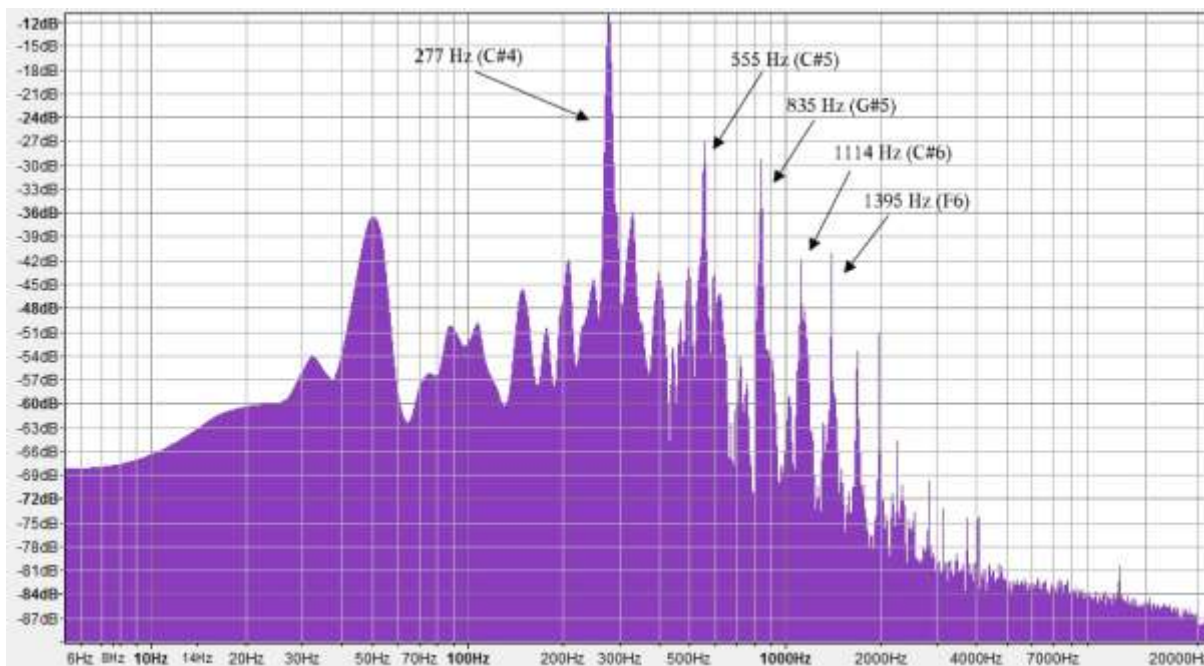
Stejným výpočtem bychom postupovali i při výpočtu dalších vyšších harmonických frekvencí tohoto tónu. Druhá harmonická tónu H2 má frekvenci dvakrát vyšší a to 247 Hz, což odpovídá i naměřené hodnotě. Tón odpovídající této frekvenci je o oktávu vyšší než základní tón, značíme ho H3. I tento tón je o půl tónu nižší, než je druhá harmonická tónu C3. Třetí harmonická tónu H2 má teoretickou frekvenci 370,5 Hz a náleží do rozmezí frekvencí tónu F#4. Třetí harmonická frekvence tónu C3 je tón G4. Tón G je o půl tónu

vyšší než F#. Jednotlivé vyšší harmonické se tedy liší o půl tónu stejně, jako tomu je u základní frekvence. Čtvrtá harmonická tónu H2 má frekvenci 494 Hz a tím odpovídá i tónu H4. Dále je na logaritmickém spektru tónu H2 (obr. 44) zvýrazněna ještě pátá a šestá vyšší harmonická, které mají teoretickou hodnotu frekvence 617,5 Hz (tato frekvence zároveň odpovídá tónu D#5) a 741 Hz, což odpovídá tónu F#5. Naměřené a teoretické hodnoty se liší pouze minimálně a měření můžeme považovat za dostatečně přesné.



Obrázek 45: Logaritmické spektrum tónu H4

I tón H4 je o půl tónu nižší než tón C5. Výška tónu H4 je 493,8 Hz (obr. 2), to odpovídá i naměřené hodnotě 494 Hz, která na logaritmickém spektru (obr. 45) opět představuje nejvyšší pík. Druhá vyšší harmonická odpovídá svojí teoretickou frekvencí 987,6 Hz tónu H5, který je taktéž o půl tónu nižší než tón C6 představující druhou harmonickou frekvenci tónu C5. Třetí vyšší harmonická má teoretickou hodnotu frekvence 1481,4 Hz a tím odpovídá tónu F#6. Čtvrtá vyšší harmonická má pak hodnotu 1975,2 Hz a odpovídá tónu H6. Protože pík třetí a čtvrté harmonické není na spektru dobře rozpoznatelný, museli jsme ho na logaritmickém spektru najít kurzorem. Jejich frekvence ale odpovídají rozmezí frekvencí příslušných tónů.

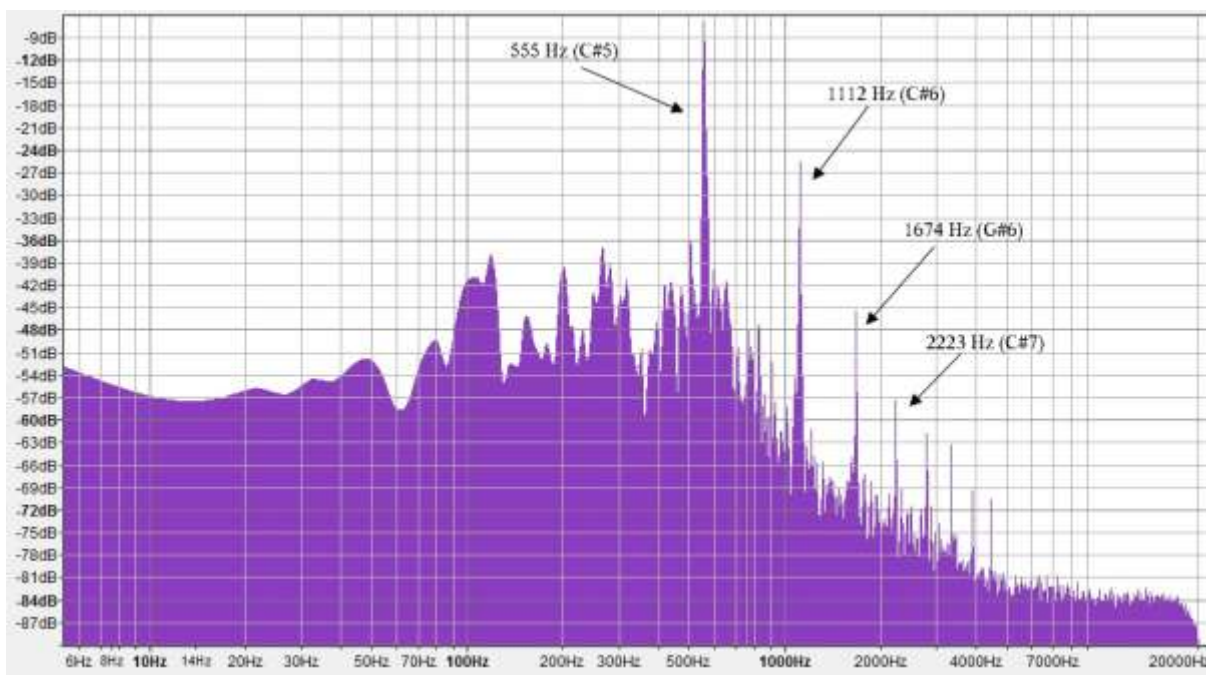


Obrázek 46: Logaritmičké spektrum tónu C#4

O půl tónu vyšší než tón C4 je C#4 (čteme cis). Základní frekvence tohoto tónu je 277 Hz, tuto frekvenci jsme také získali měřením. Výpočtem podle temperovaného půltónu by měla mít frekvence tohoto tónu hodnotu

$$f(C\#4) = f(C4) \cdot 1,059463 = 261,6 \cdot 1,059463 = 277,155521 \text{ Hz.}$$

Stejným postupem bychom vypočítali i další vyšší harmonické. Druhá harmonická má teoretickou hodnotu 554 Hz (obr. 2), tato frekvence odpovídá tónu C#5, který, jak už tomu jeho pojmenování naznačuje, je o půl tónu vyšší než tón C5, tón C5 odpovídá svojí hodnotou frekvence druhé harmonické tónu C4. Třetí vyšší harmonická měřeného tónu má hodnotu 831 Hz, tato frekvence odpovídá tónu G#5. Třetí vyšší harmonická tónu C4 je tón G5, a i zde se třetí vyšší harmonické tónu C4 a C#4 liší o půl tónu. Naměřená hodnota čtvrté harmonické tónu C#4 je 1114 Hz, teoretická je 1108 Hz, obě tyto hodnoty spadají do rozmezí frekvencí odpovídající tónu C#6. V pořadí pátá vyšší harmonická má dle teorie hodnotu 1385 Hz a odpovídá tónu F6.



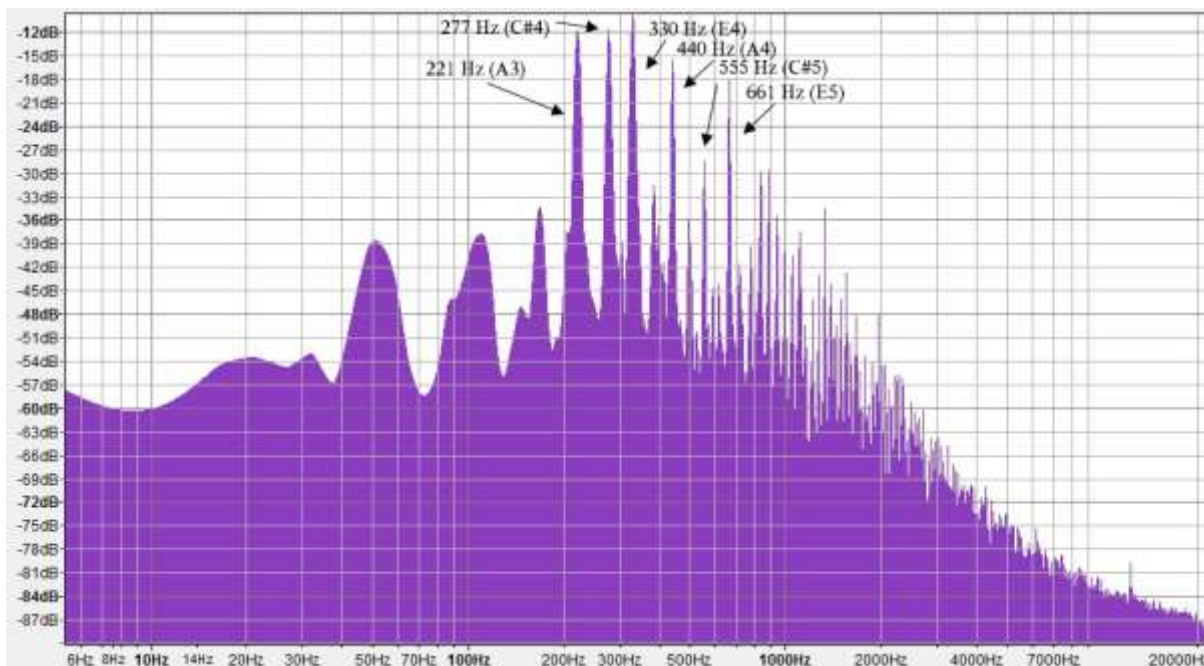
Obrázek 47: Logaritmické spektrum tónu C#5

O oktávu vyšší než předchozí tón je tón C#5, jeho výška je 554,3 Hz. Této frekvenci odpovídá i největší pík na logaritmickém spektru (obr. 47). Druhý největší pík představuje druhou harmonickou frekvenci tónu C#5 o teoretické frekvenci 1108,6 Hz, což odpovídá i tónu C#6. Třetí harmonická má mít hodnotu 1662,9 Hz. Naměřená hodnota je 1674 Hz, stále ale patří do rozmezí frekvencí, které odpovídají tónu G#6. Poslední vyznačenou vyšší harmonickou na logaritmickém spektru je v pořadí čtvrtá harmonická s frekvencí dle teorie 2217,2 Hz a zároveň patří tónu C#7.

Můžeme tedy konstatovat, stejně jako v předchozích případech, že vyšší harmonické tónu C#5 jsou vždy o půl tónu vyšší než vyšší harmonické tónu C5, přičemž tón C#5 je také o půl tónu vyšší než tón C5.

3.2.2 Analýza vybraných akordů

V části 1.4 jsme již řekli, jak se liší durový akord od mollového. Nyní ověříme poměry frekvencí mezi jednotlivými tóny akordu (kvinty, velké a malé tercie) a opět analyzujeme vyšší harmonické frekvence.



Obrázek 48: Logaritmičké spektrum akordu a (A3) dur

Akord a dur obsahuje noty A, C# a E. V tomto případě jsme akord začínali tónem A3 o teoretické frekvenci 220 Hz. Tercie tohoto akordu náleží tónu o dva tóny vyššímu, než je tón A3 – tónu C#4 s frekvencí 277 Hz. Interval těchto tónů je nazýván velká tercie (část 1.4) a jejich poměr by měl být 5/4. Kvinta náleží tónu E4 s teoretickou frekvencí 329,8 Hz. Poměr těchto dvou tónů by měl být 3/2.

$$f(E4) = \frac{3 \cdot f(A3)}{2} = \frac{3 \cdot 220}{2} = 330 \text{ Hz}$$

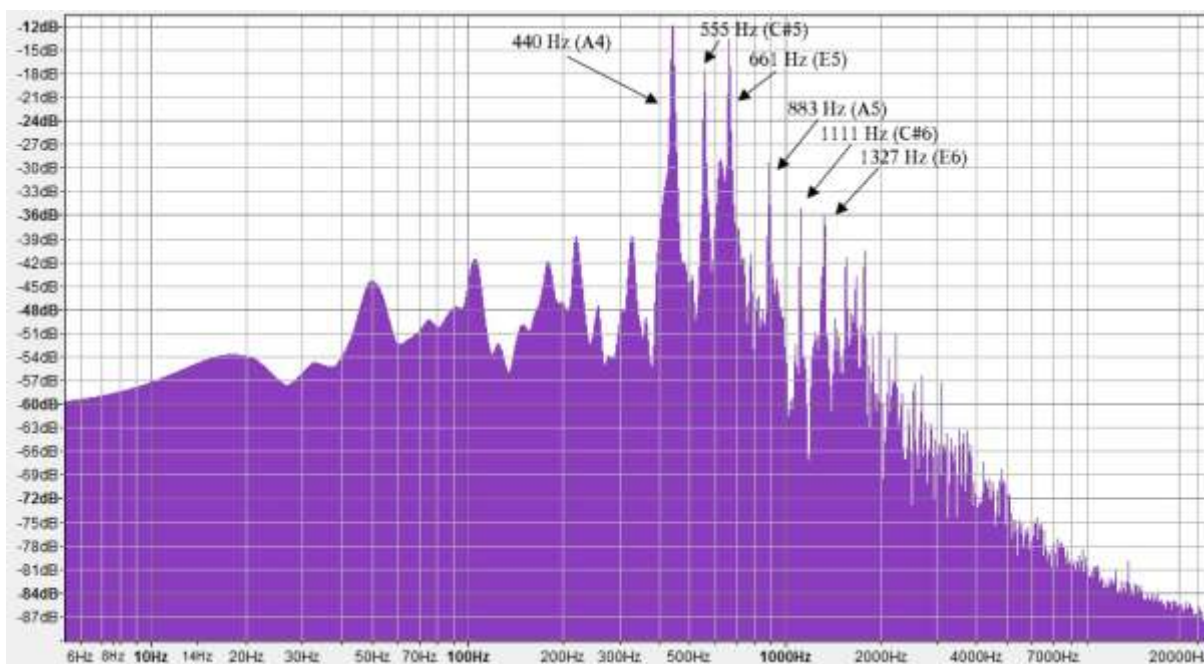
Naměřená frekvence tohoto tónu je také 330 Hz. Teoretické frekvence čerpáme z obr. 2. Pro určování vyšších harmonických pokračujeme jako v předchozích příkladech. Druhá harmonická tónu A3 má frekvenci dvakrát větší než jeho základní frekvence, tedy je to 440 Hz a tím náleží tónu A4, druhá harmonická tónu C#4 má frekvenci 554,3 Hz a patří tónu C#5 a druhá harmonická tónu E4 má frekvenci 659,3 Hz a náleží tónu E5. Značení dalších vyšších harmonických na logaritmičkém spektru by už bylo nepřehledné, proto jejich přítomnost popíšeme písemně v tomto textu. Třetí vyšší harmonická tónu A3 má teoretickou frekvenci 660 Hz čímž spadá do rozmezí frekvencí tónu E5 a shoduje se zároveň s druhou harmonickou tónu E4. Čtvrtá harmonická tónu A3 má pak hodnotu 880 Hz, naměřená hodnota je 883 Hz a patří tónu A5. Tón C#4 má třetí harmonickou o frekvenci 831 Hz, měřením jsme dostali 833 Hz, tato frekvence patří tónu G#5. Čtvrtá harmonická tónu C#4 má frekvenci 1108 Hz a patří tónu C#6, naměřená hodnota v tomto případě je 1105 Hz. A nakonec tón E4, který má hodnotu třetí harmonické frekvence

989,4 Hz, přičemž tato frekvence zároveň patří tónu H5 a čtvrté harmonické 1319,2 Hz náležící také tónu E6. Měřením jsme pro třetí harmonickou dostali hodnotu 993 Hz a pro čtvrtou 1328 Hz. Píky vyšších harmonických akordu A3 dur na obr. 48 popíšeme ještě pomocí tabulky 3.

Tabulka 3: Přehled vyšších harmonických akordu A3 dur

Pík (obr. 48)	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Tón	A3	C#4	E4	A4	C#5	E5	G#5	A5	H5	C#6
Harmonická (tónu)	1. (A3)	1. (C#4)	1. (E4)	2. (A3)	2. (C#4)	2. (E4), 3. (A3)	3. (C#4)	4. (A3)	3. (E4)	4. (C#4)

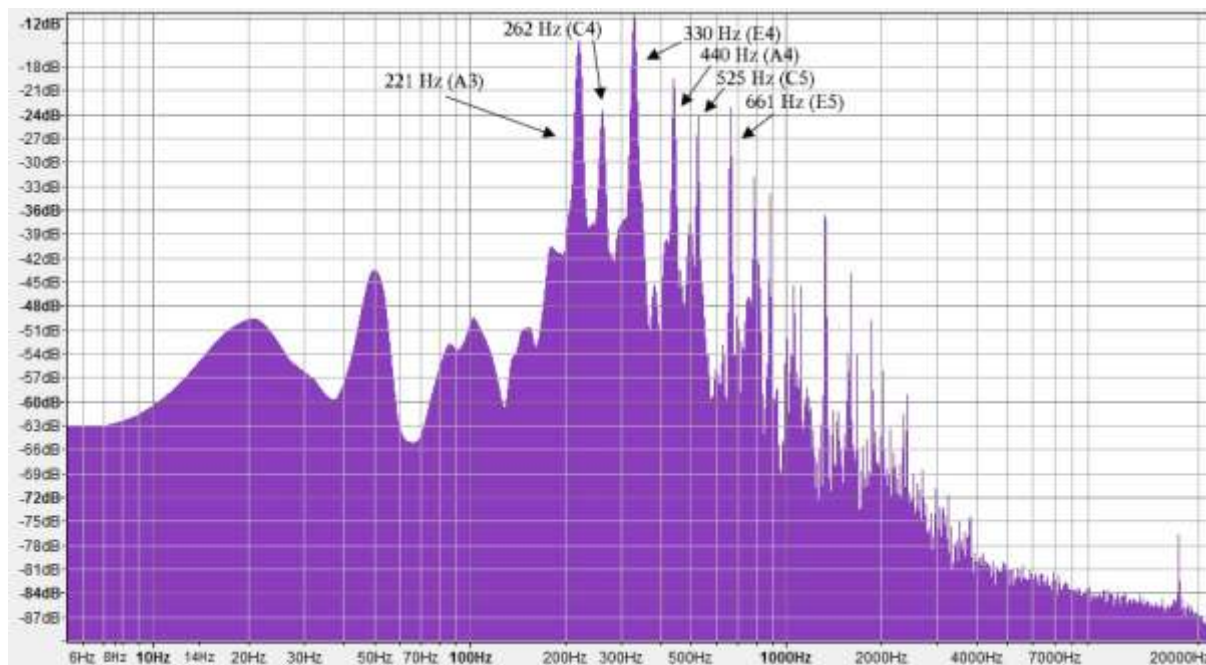
V prvním řádku tabulky 3 je uveden pík z obr. 48, každý pík má frekvenci náležící do rozmezí frekvencí určitého tónu, který je v druhém řádku tabulky. V třetím řádku je napsáno, kterému zahrnému tónu tato vyšší harmonická patří (uvedeno v závorce) a kolikátá to je jeho vyšší harmonická.



Obrázek 49: Logaritmické spektrum akordu a' (A4) dur

Logaritmické spektru tohoto akordu (obr. 49) by mělo být analogické s předešlým spektrem, jediný rozdíl je v tom, že jsme zde akord začali od tónu A4, to je o oktávu výše než v předešlém případě (zahrané tóny tedy mají frekvenci dvakrát větší). Základní frekvencí tónu A4 je 440 Hz, tónu C#5 554,3 Hz a tónu E5 je 659,4 Hz. Tyto hodnoty by měly dodržovat poměry frekvencí pro velkou tercii a kvintu stejně jako u obr. 48. Na

logaritmickém spektru jsou znázorněny ještě druhé vyšší harmonické, jejichž frekvence vždy náleží tomu tónu, který je o oktávu vyšší, než je jeho základní tón. Teoretická hodnota druhé harmonické tónu A4 je 880 Hz, tónu C#5 je 1108,6 Hz a tónu E5 je 1318,8 Hz. Posloupnost dalších vyšších harmonických je stejná jako v předchozím případě.



Obrázek 50: Logaritmické spektrum akordu a (A3) moll

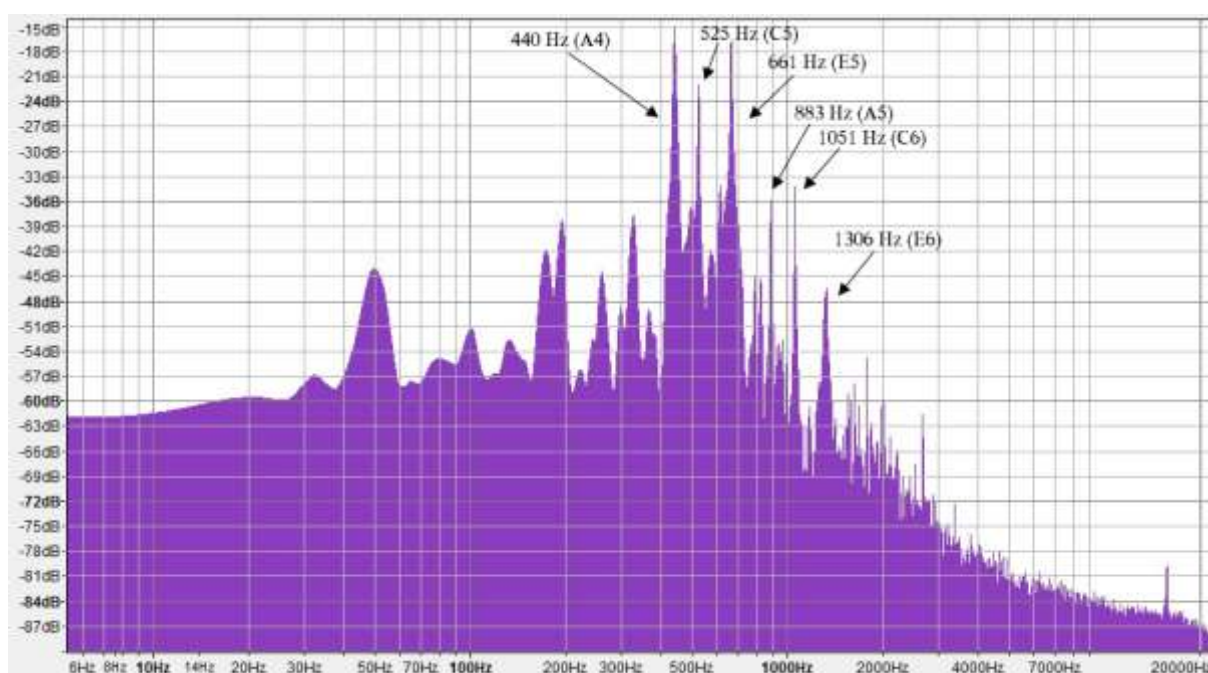
Akordy dur a moll se liší zmenšenou tercií (část 1.4). Prima a kvinta zůstávají stejné, rozdílnou frekvenci má pouze terciie, která je od prvního tónu akordu vzdálena tón a půl. Akord a moll tedy obsahuje noty A, C a E. Tón C je o půl tónů nižší než tón C#, který byl přítomný v akordu a dur studovaný v předešlých příkladech. Tento akord jsme začínali tónem A3 o teoretické frekvenci 220 Hz, dále následoval tón C4 o teoretické frekvenci 261,6 Hz a tón E4 o frekvenci 329,8 Hz. Prima i kvinta mají tedy stejnou frekvenci jako na obr. 48. Poměr frekvencí mezi tónem C (tercií) a E (kvintou) by měl být 5/4, protože se jedná o velkou tercii. Teoretická hodnota (obr. 2) je 329,8 Hz, naměřená je 330 Hz. Druhá harmonická tónu A3 má teoretickou frekvenci 440 Hz, tónu C4 má frekvenci 523,2 Hz a tónu E4 659,3 Hz. Každá z těchto frekvencí náleží vždy tomu tónu, který je o oktávu vyšší než tón základní. Třetí harmonická frekvence tónu A3 má teoretickou hodnotu 660 Hz a tím i náleží tónu E5, tato frekvence je zároveň druhou harmonickou frekvencí tónu E4. Čtvrtá harmonická tónu A3 má hodnotu 880 Hz a náleží tónu A5. Experimentálně určena hodnota frekvence čtvrté harmonické tónu A3 je 884 Hz. Třetí harmonická tónu C4 má teoretickou hodnotu 784,8 Hz (naměřená hodnota je 787 Hz) a náleží tónu G5, čtvrtá

harmonická frekvence má hodnotu 1046,4 Hz, měřením jsme dosáhli hodnoty 1051 Hz, obě tyto frekvence náleží do rozmezí frekvencí tónů C6. A nakonec tón E4 má třetí harmonickou frekvenci 989,4 Hz, náležící tónu H5 a čtvrtou harmonickou frekvenci 1319,2 Hz, která svou hodnotou patří tónu C6. Experimentálně určené frekvence jsou pro třetí harmonickou 993 Hz a pro čtvrtou harmonickou 1316 Hz.

Tabulka 4: Přehled vyšších harmonických akordu A3 moll

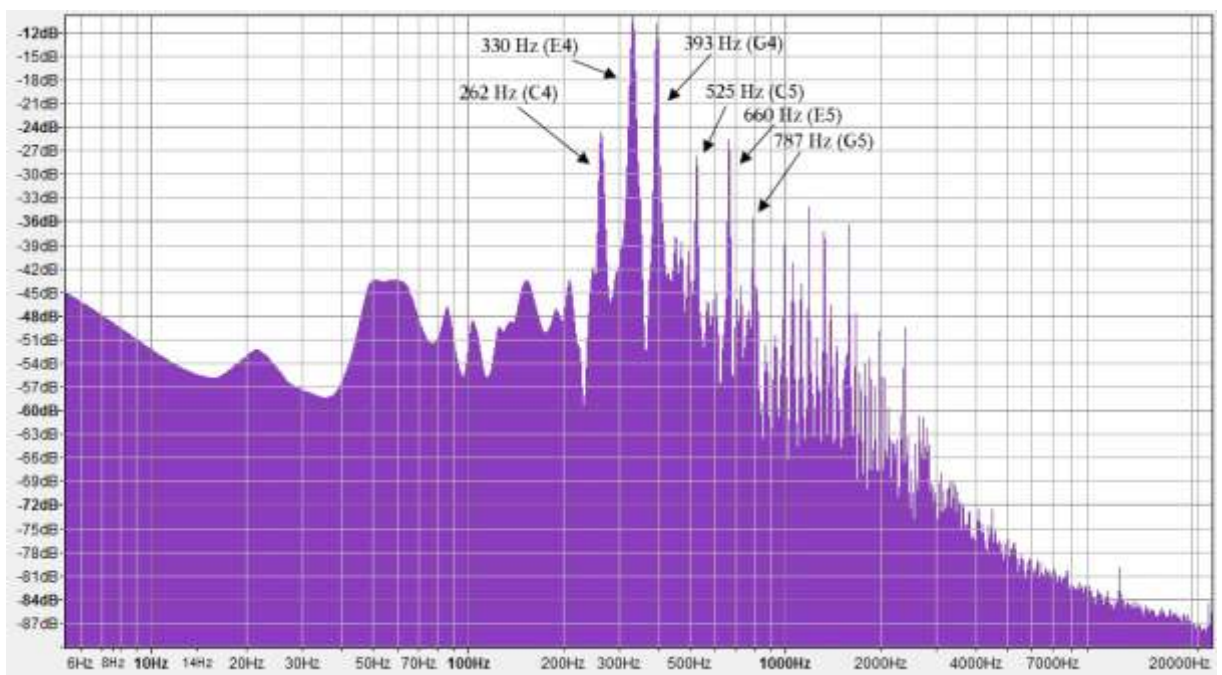
Pík (obr. 50)	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Tón	A3	C4	E4	A4	C5	E5	G5	A5	H5	C6
Harmonická (tónu)	1. (A3)	1. (C4)	1. (E4)	2. (A3)	2. (C4)	2. (E4), 3. (A3)	3. (C4)	4. (A3)	3. (E4)	4. (C4)

Vyšší harmonické akordu a moll se od toho durového liší pouze ve vyšších harmonických tónu C, kdy v mollovém akordu je C zatímco v durovém akordu C#. Všechny zmíněné vyšší harmonické frekvence vždy zapadají do rozmezí frekvencí, které odpovídají danému tónu. Nejen že můžeme tedy považovat měření za dostatečně přesné, můžeme i konstatovat, že zahrání více tónů na jednu, nemění zastoupení vyšších harmonických. A pro každý tón je zastoupení jeho vyšších harmonických stejné, jako by tento tón byl zahrán samostatně.



Obrázek 51: Logaritické spektrum akordu a' (A4) moll

Zastoupení vyšších harmonických v akordu a' moll, je obdobný jako v předchozím případě. Základními frekvencemi zde jsou tóny A4, C5 a E5 s frekvencemi 440 Hz, 523,2 Hz a 659,3 Hz. Píky náležící těmto frekvencím na logaritmickém spektru jsou vždy ty nejvyšší. Druhá harmonická frekvence tónu A4 má teoretickou hodnotu 880 Hz a náleží tónu A5, druhá harmonická tónu C5 má frekvenci 1046,5 Hz – náleží tónu C6 a druhá harmonická tónu E5 má frekvenci 1318,5 Hz a patří do rozmezí tónu E6. Tyto vyšší harmonické jsou na spektru ještě dobře rozlišitelné, ostatní už od pohledu nespátříme a museli bychom si v jejich identifikaci pomoci kurzorem.



Obrázek 52: Logaritmické spektrum akordu c' (C4) dur

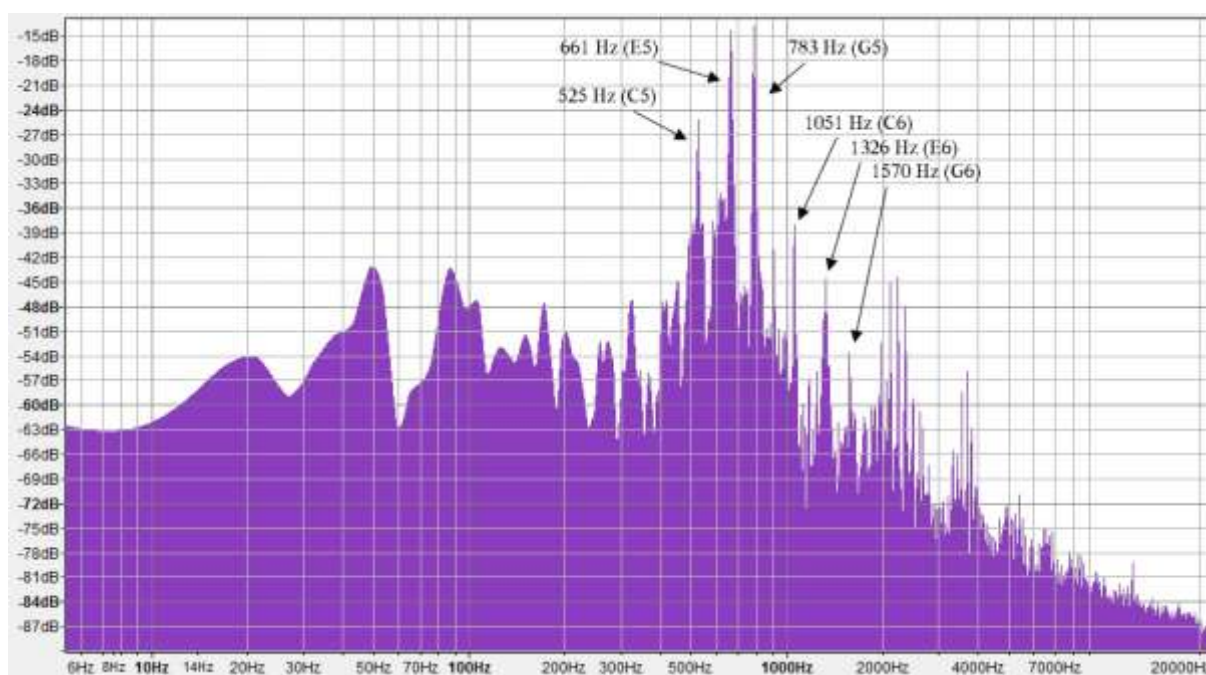
Akord C dur zahrnuje tóny C, E a G. Nyní si popíšeme příklad, kdy začínáme u tónu C4 s teoretickou frekvencí 261,6 Hz a dalšími tóny tvořící tento akord je tón E4 s frekvencí 329,8 Hz a tón G4 s teoretickou frekvencí 392 Hz. Druhé harmonické těchto tónů mají opět frekvenci dvakrát větší a přísluší tónům o oktávu vyšším. Mají tedy frekvence 523,3 Hz a patří tónu C5, 659,6 Hz tato frekvence náleží tónu E5 a 784 Hz patří tónu G5. Další vyšší harmonické sice nejsou vyznačené na logaritmickém spektru, ale i přesto si je popíšeme. Třetí vyšší harmonická frekvence tónu C4 má teoretickou hodnotu 784 Hz a náleží tónu G5, tento tón je zároveň druhou vyšší harmonickou tónu G4 a je vyznačen na logaritmickém spektru. Čtvrtá harmonická frekvence tónu C4 koresponduje se základní frekvencí tónu C6 a má teoretickou hodnotu 1046,5 Hz, naměřená hodnota je 1053 Hz.

Třetí vyšší harmonická tónu E4 má teoretickou frekvenci 989,4 Hz a spadá do rozmezí frekvencí tónu H5, který má dle obr. 2 základní frekvenci 987,7 Hz. Měřením jsme dostali frekvenci 993 Hz. Čtvrtá harmonická má teoretickou frekvenci tónu E4 1319,2 Hz a experimentálně určenou frekvenci 1327 Hz. Tyto frekvence spadají do rozmezí frekvencí tónu E6. Poslední tón akordu, tón G4 má teoretickou frekvenci třetí harmonické 1174,7 Hz, spadající do rozmezí frekvencí tónu D6 a čtvrtou harmonickou o frekvenci 1568 Hz, tato frekvence se rovná základní frekvenci tónu G6. Naměřené hodnoty jsou pro třetí harmonickou frekvenci 1182 Hz a pro čtvrtou harmonickou frekvenci 1547 Hz.

Tabulka 5: Přehled vyšších harmonických akordu C4 dur

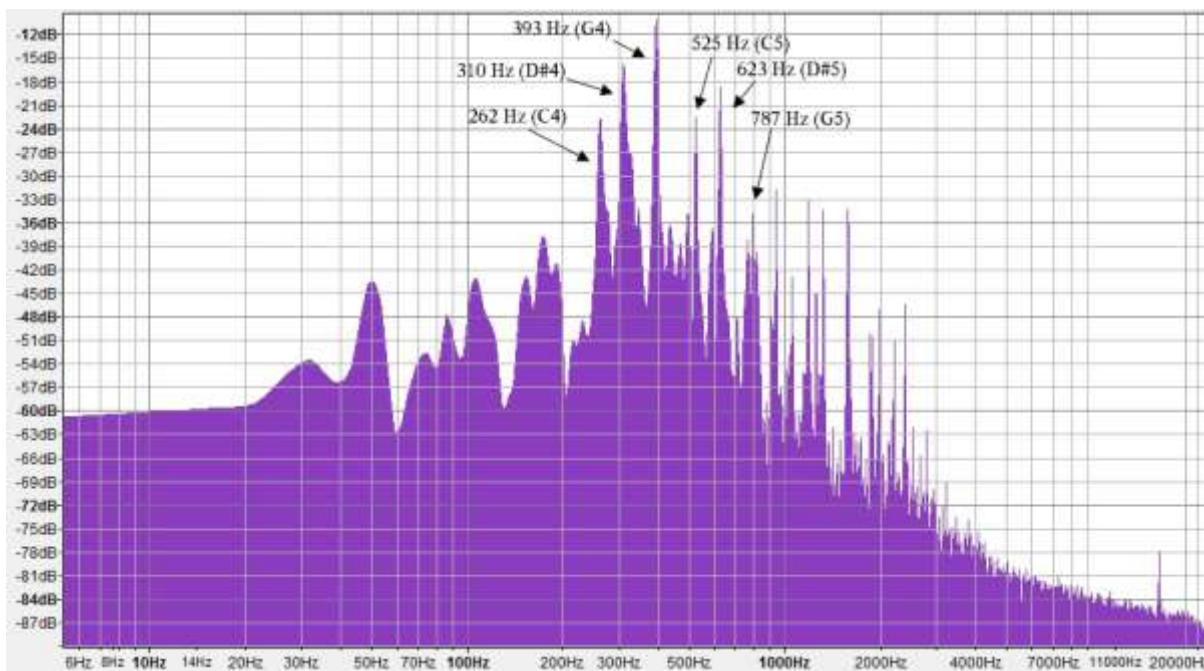
Pík (obr. 54)	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Tón	C4	E4	G4	C5	E5	G5	H5	C6	D6	E6
Harmonická (tónu)	1. (C4)	1. (E4)	1. (G4)	2. (C4)	2. (E4)	2. (G4), 3. (C4)	3. (E4)	4. (C4)	3. (G4)	4. (E4)

I zde můžeme konstatovat, že naměřené hodnoty s teoretickými se shodují a jejich frekvence vždy spadá do rozmezí frekvencí příslušného tónu. Počet a frekvence vyšších harmonických jednotlivého tónu tedy není ovlivněn, je-li zahrán tento tón zároveň s jinými tóny.



Obrázek 55: Logaritmické spektrum akordu c'' (C5) dur

Akord C5 dur začíná od tónu C5 a je posunutý o oktávu výš než předešlý akord. Základní frekvence tohoto tónu je 523, 2 Hz, naměřená hodnota je 525 Hz, frekvence tónu E5 je 659,3 Hz (naměřená hodnota je 661 Hz) a základní hodnota tónu G5 je 784 Hz. Experimentálně určená frekvence tónu G5 má 783 Hz. Píky těchto frekvencí opět patří k nejvyšším píkům na spektru, přičemž nejmenší pík z těchto tří patří tónu C5. Zastoupení vyšších harmonických těchto tónů bude obdobné jako v předešlém případě, kdy jsme studovali akord C dur začínající od tónu C4. Na tomto spektru jsme vyznačili druhé vyšší harmonické zahranych tónů, a to s teoretickými hodnotami pro tón C5 1046,5 Hz (tato frekvence také náleží tónu C6); pro tón E5 1318,5 Hz (náleží tónu E6) a druhá vyšší harmonická tónu G5 má teoretickou frekvenci 1568 Hz a patří do rozmezí tónu G6.



Obrázek 56: Logaritmické spektrum akordu c' (C4) moll

Poslední studovaný akord je c moll. V tomto případě začíná od tónu C4 a pokračuje tóny D#4 a G4. Od durového akordu se liší prostřední tónem, který je v durovém akordu o půl tónu vyšší než v mollovém. Základní frekvence tónu C4 je 261,6 Hz (obr. 2), tónu D#4 je 311,1 Hz a tónu G4 392 Hz. Druhé harmonické frekvence mají teoretické hodnoty 523,2 Hz; 622,2 Hz a 784 Hz a patří vždy do rozmezí frekvencí tónu o oktávu vyššího, než je základní tón. Na tomto spektru jsou výrazné i další vyšší harmonické. Třetí harmonická frekvence tónu C4 má teoretickou frekvenci 784,8 Hz a patří tedy do rozmezí tónu G5, stejně jako druhá harmonická tónu G4. Čtvrtá harmonická tónu C4 má frekvenci dle teorie

1046,4 Hz, experimentálně určená hodnota je 1051 Hz a svými frekvencemi patří do rozmezí pro tón C6. Třetí harmonická tónu D#4 má frekvenci 933,3 Hz a náleží do rozmezí pro tón A#5, který má základní frekvenci 932,2 Hz. Experimentem jsme naměřili hodnotu této frekvence 936 Hz. Čtvrtá harmonická tónu D#4 má teoretickou hodnotu 1244,4 Hz a náleží tónu D#6. Naměřená frekvence je 1250 Hz. A třetí harmonická tónu G4 náleží tónu E4 má teoretickou frekvenci 1176 Hz a náleží do rozmezí frekvencí tónu D6 se základní frekvencí 1174,7 Hz. Čtvrtá harmonická má frekvenci 1568 Hz a odpovídá frekvenci tónu G6. Naměřené hodnoty těchto vyšších harmonických jsou 1182 Hz a 1580 Hz.

Tabulka 6: Přehled vyšších harmonických tónu C4 moll

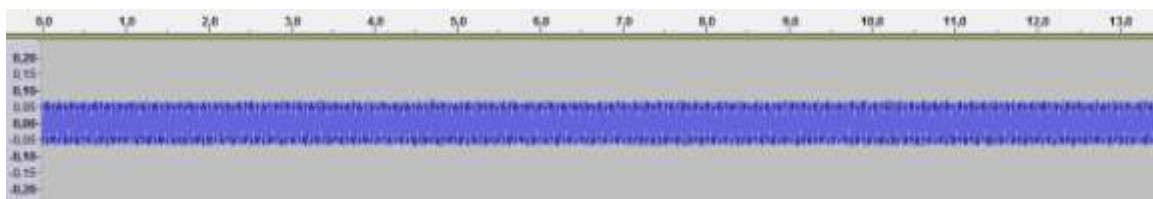
Pík (obr. 56)	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Tón	C4	D#4	G4	C5	D#5	G5	A#5	C6	D6	D#6
Harmonická (tónu)	1. (C4)	1. (D#4)	1. (G4)	2. (C4)	2. (D#4)	2. (G4), 3. (C4)	3. (D#4)	4. (C4)	3. (G4)	4. (D#4)

I zde můžeme konstatovat, že se frekvence ani počet vyšších harmonických jednoho tónu nezmění, když zahrajeme více tónů zároveň.

3.3 Vliv pedálů

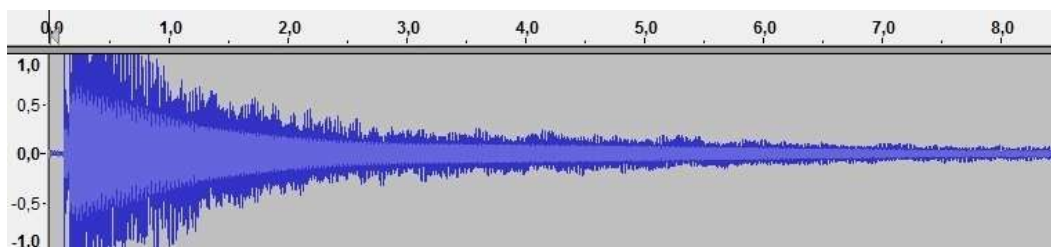
3.3.1 Délka tónu

Nejprve si ukážeme rozdíl délky tónu mezi nízkými tóny na klaviatuře pianina a vysokými tóny. Zvukové stopy jednotlivých tónů udávají závislost amplitudy intenzity tónu kanálu zvukové karty (na svislé ose) na čase (na vodorovné ose) v sekundách. V této práci budeme považovat konec tónu v místě, kde jeho amplituda klesne na úroveň šumu v pozadí.

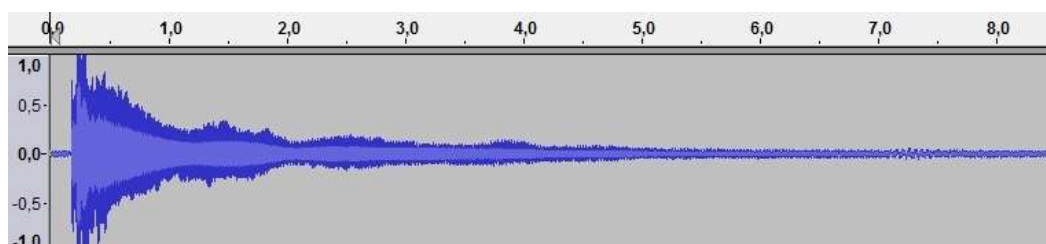


Obrázek 57: Zvuková stopa zaznamenávající šumy v pozadí

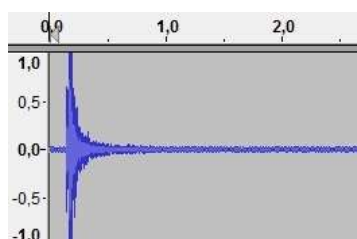
Amplituda šumu v pozadí odpovídá přibližně hodnotě 0,05. Utlumený tón tedy uvažujeme po poklesu amplitudy pod tuto hodnotu.



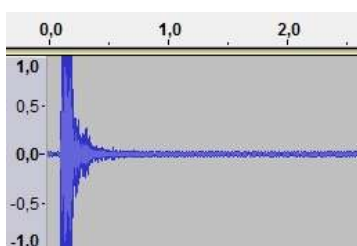
Obrázek 57: Zvuková stopa tónu A1 o základní frekvenci 55 Hz



Obrázek 58: Zvuková stopa tónu C3 o základní frekvenci 130,8 Hz



Obrázek 59: Zvuková stopa tónu A7 o základní frekvenci 3520 Hz



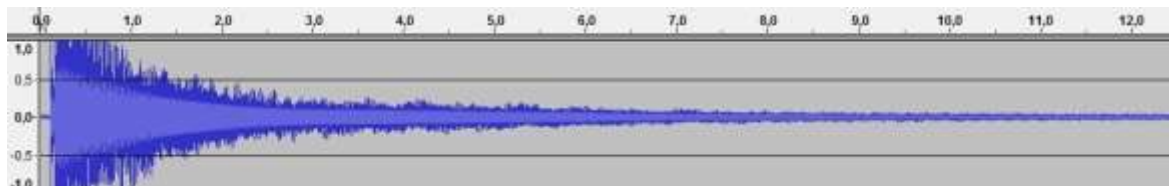
Obrázek 60: Zvuková stopa tónu C8 o základní frekvenci 4186 Hz

Z těchto naměřených zvukových stop můžeme pozorovat, že nízké tóny trvají více než několik sekund, zatímco vysoké tóny doznívají už po několika desetínách sekundy. Intenzita nízkých tónů také klesá mnohem pomaleji než intenzita vysokých tónů. To může být způsobeno rychlostí, jakou struny předávají svoji energii ozvučné desce (Giordano 2011, s. 105).

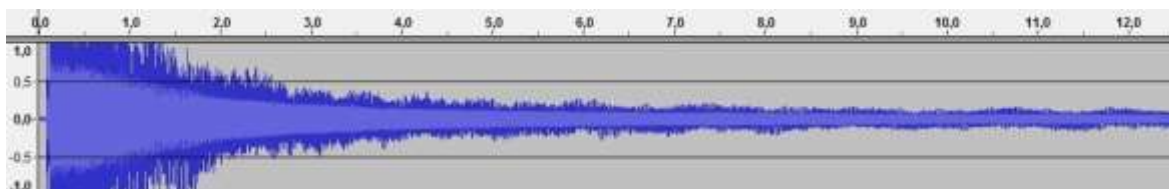
3.3.2 Vliv pravého pedálu na intenzitu, délku a barvu tónu

Vliv pravého pedálu na intenzitu a délku tónu

Jak jsme se už zmínili v části 2.3, pravý pedál prodlužuje délku tónu. Tuto skutečnost ukážeme na několika příkladech.

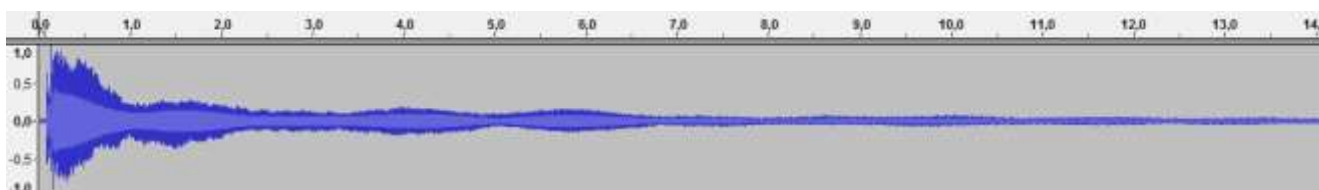


Obrázek 61: Zvuková stopa tónu A1

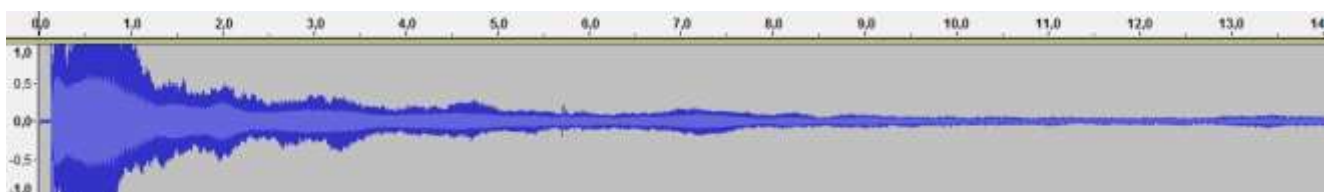


Obrázek 62: Zvuková stopa tónu A1 se sešlápnutým pravým pedálem

Tón A1 patří k hlubším tónům a jeho délka je v porovnání s vyššími tóny mnohem větší. Amplituda tónu A1 klesne na polovinu po méně než 2 s doby signálu. Jestliže při hře tohoto tónu je sešlápnutý pravý pedál, délka tónu by se měla zvětšit nezávisle na době stisknutí klávesy (Modr 1977, str. 77). V našem experimentu jsme vždy spustili kovové závaží na klávesu a měřili délku tónu, klávesu jsme během experimentu již nepouštěli. Zvukový signál tónu A1 se zmáčknutým pravým pedálem (obr. 62) je už od pouhého pohledu na záznam delší a silnější než u zvukového signálu bez pedálu (obr. 61). Zvuková amplituda signálu se zmáčknutým pravým pedálem klesne na polovinu až po asi 2,5 s od stisknutí klávesy. Jelikož je tón silnější a hlasitější po delší dobu než v prvním případě, můžeme konstatovat, že i jeho amplituda je po uplynutí stejné doby od stisknutí klávesy větší.

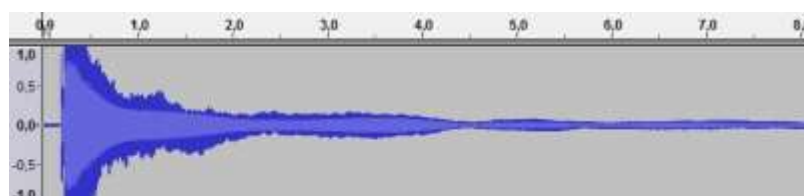


Obrázek 63: Zvuková stopa tónu A2

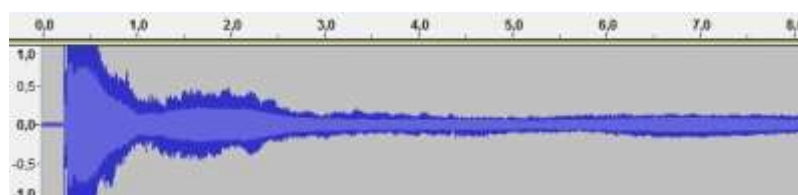


Obrázek 64: Zvuková stopa tónu A2 se sešlápnutým pravým pedálem

U tónu A2 neklesá intenzita tónu exponenciálně či lineárně ale vznikají rázy. Již na první pohled můžeme vidět, že intenzita tónu A2 se zmáčknutým pravým pedálem (obr. 64) je větší, než když pravý pedál zmáčknutý není (obr. 63). Rozdíl je markantní zejména první sekundu, kdy je amplituda signálu na obr. 64 velmi silná a na obr. 63 téměř ani nedosahuje horní hranice stupnice.

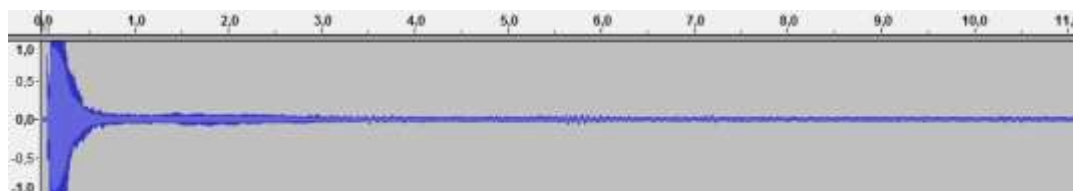


Obrázek 65: Zvuková stopa tónu A3

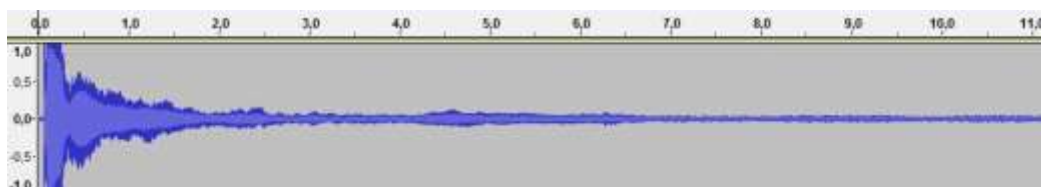


Obrázek 66: Zvuková stopa tónu A3 se sešlápnutým pravým pedálem

U tónu A3 také vznikají rázy. V případě, kdy je zmáčknutý pravý pedál je intenzita tónu poměrně velká i během znění tónu a slyšíme ho ještě asi po osmi sekundách. Bez pravého pedálu se tón utlumí rychleji.

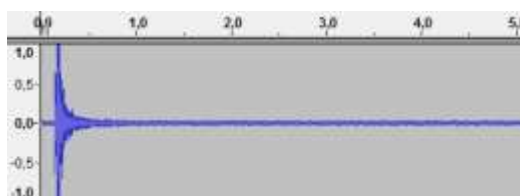


Obrázek 67: Zvuková stopa tónu A4

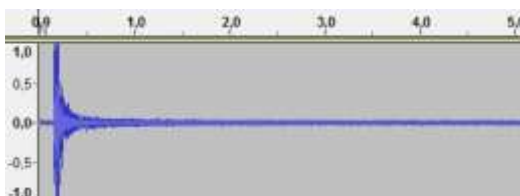


Obrázek 68: Zvuková stopa tónu A4 se sešlápnutým pravým pedálem

U tónu A4 je rozdíl mezi délkou tónu zahrnou bez pedálu a s pravým pedálem nejvýznamnější. V prvním případě tón odezní už asi po 1 s od zahrání a nevznikají ani výrazné rázy. Se zmáčknutým pravým pedálem nejen že vznikají rázy, ale k největšímu útlumu dochází asi až po 2 s od zahrání tónu. To souhlasí s teoretickým předpokladem, že sešlápnutý pravý pedál prodlužuje délku tónu.

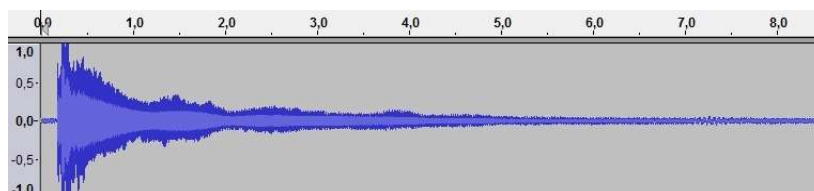


Obrázek 69: Zvuková stopa tónu A7

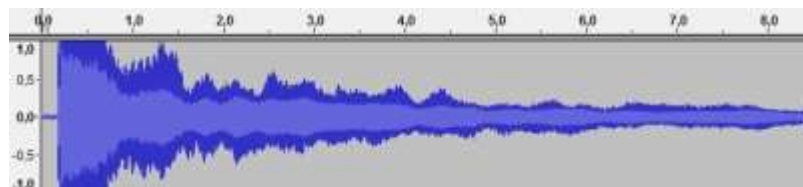


Obrázek 70: Zvuková stopa tónu A7 se sešlápnutým pravým pedálem

Tón A7 patří k vyšším tónům na klavíru. Jak jsme se zmínili již v části popisující mechaniku klavíru (2.3), tón A6 a vyšší nemají tlumítka a pravý pedál by zde neměl mít vliv. Zvukové stopy tónu A7 (obr. 69 a 70) tento předpoklad potvrzují, nevidíme zřetelné rozdíly mezi délkou zvukové stopy bez zmáčknutého pedálu a se zmáčknutým pravým pedálem. V tomto případě končí zvuková stopa po přibližně stejné době kratší než jedna sekunda. Pravý pedál tedy neovlivňuje délku a intenzitu tónů s vyšší frekvencí.

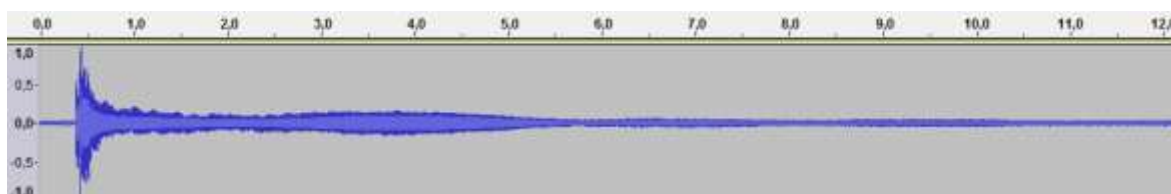


Obrázek 71: Zvuková stopa tónu C3

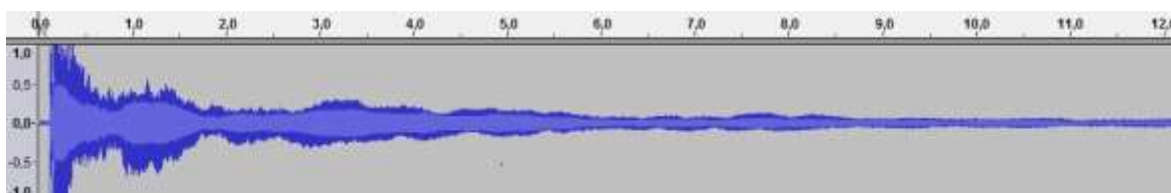


Obrázek 72: Zvuková stopa tónu C3 se sešlápnutým pravým pedálem

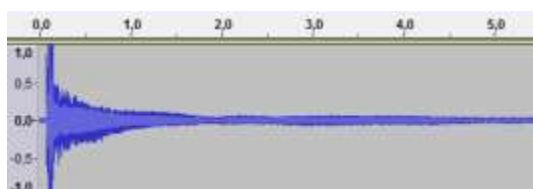
Efekt pravého pedálu si můžeme ověřit i u tónů C. Rozdíl v obou zvukových stopách (obr. 71, 72) je zřejmý na první pohled. K největšímu útlumu tónu C3 zahráného bez pedálu dochází během první sekundy, máme-li sešlápnutý pravý pedál, amplituda je na svém maximu ještě asi po 1 s od zmáčknutí klávesy. V případě sešlápnutého pravého pedálu tón C3 neodezní ani po 10-ti s.



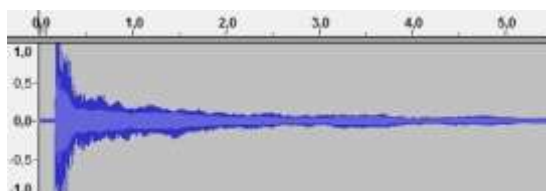
Obrázek 73: Zvuková stopa tónu C4



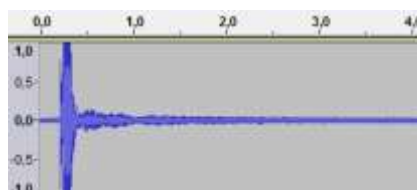
Obrázek 74: Zvuková stopa tónu C4 se sešlápnutým pravým pedálem



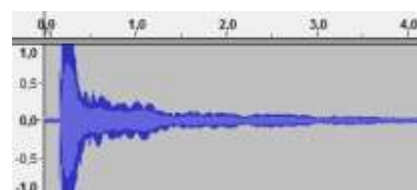
Obrázek 75: Zvuková stopa tónu C5



Obrázek 76: Zvuková stopa tónu C5 se sešlápnutým pravým pedálem



Obrázek 77: Zvuková stopa tónu C6

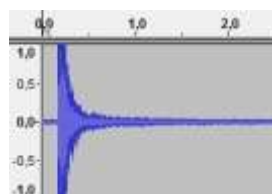


Obrázek 78: Zvuková stopa tónu C6 se sešlápnutým pravým pedálem

Také u tónů C4, C5 a C6 se potvrzuje, že sešlápnutý pravý pedál prodlužuje délku tónů. Můžeme zde také pozorovat, že intenzita tónu je při sešlápnutí pravého pedálu výraznější během celé doby znění tónu.



Obrázek 79: Zvuková stopa tónu C8



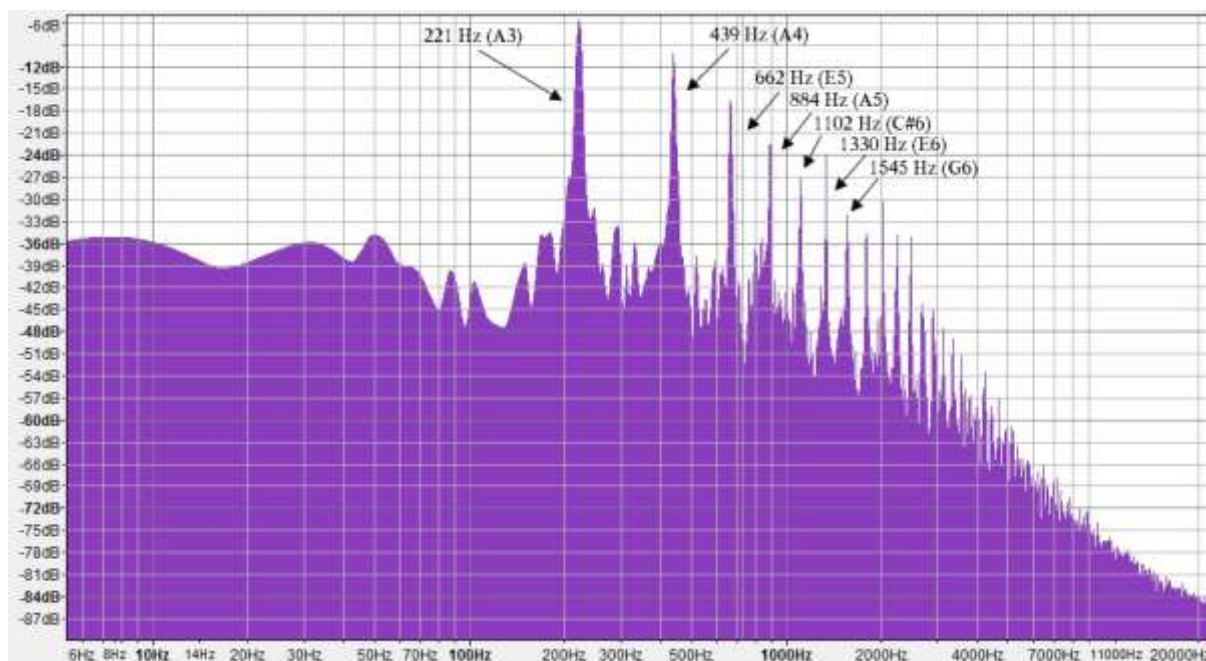
Obrázek 80: Zvuková stopa tónu C8 se sešlápnutým pravým pedálem

Tón C8 je nejvyšší tón na klavíru pianina i tento tón tedy nemá tlumítka (část 2.3). Délka tónu zahráného bez pedálu a se sešlápnutým pedálem by měla být stejná. Na znázorněných zvukových stopách tohoto tónu (obr. 79 a 80) nevidíme podstatný rozdíl v délce či intenzitě tónů. V obou případech tón odezní po několika desetínách sekundy.

Můžeme proto konstatovat (jako v případě tónu A7 – obr. 69, 70), že pravý pedál nemá vliv u nejvyšších tónů pianina.

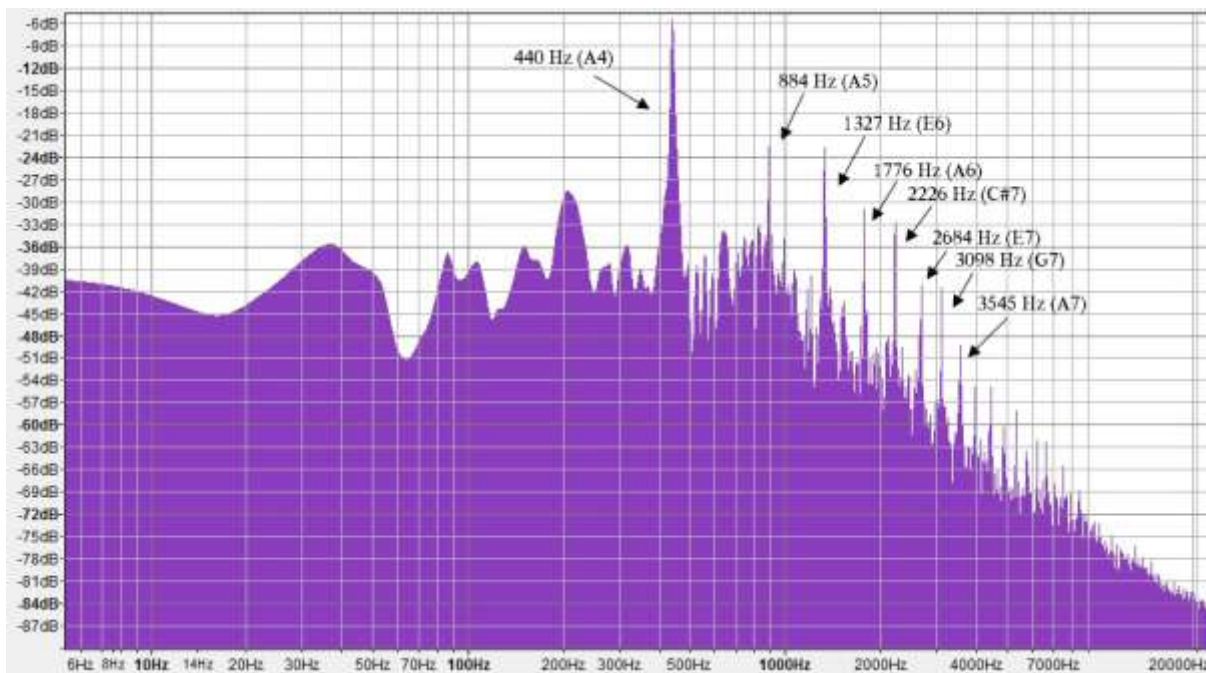
Vliv pravého pedálu na barvu tónu

Pravý pedál by měl měnit pouze délku zvukového signálu, neměl by však ovlivňovat barvu tónu, tj. jeho výšku a frekvence jeho vyšších harmonických.



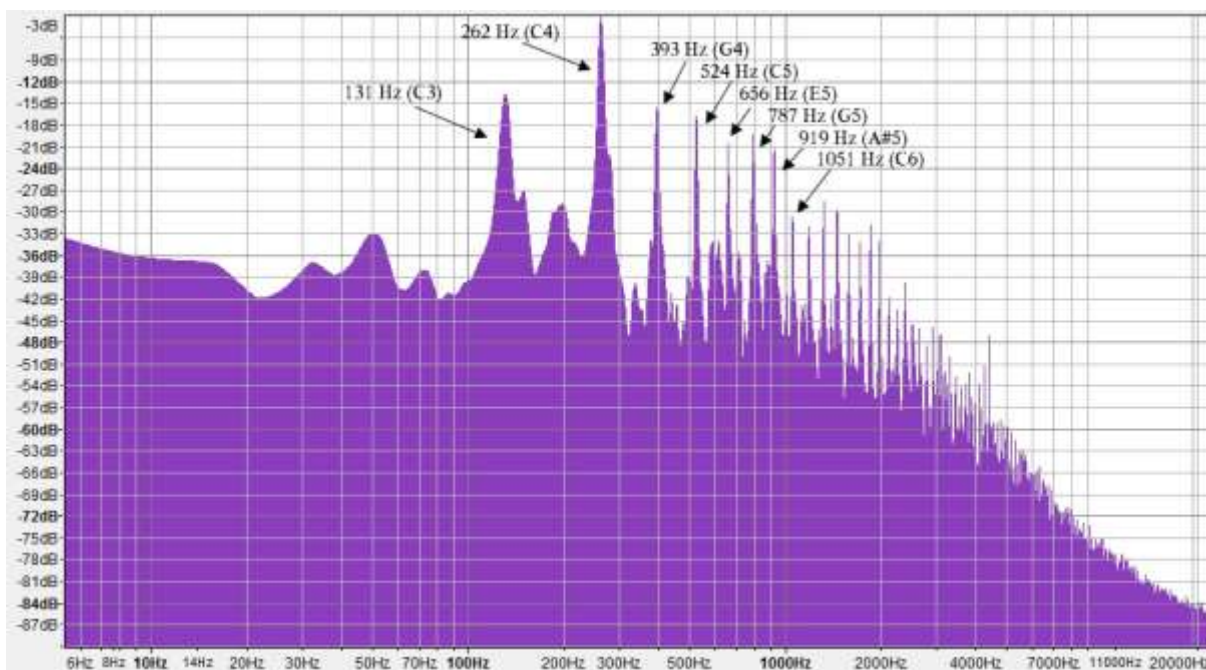
Obrázek 81: Logaritmičké spektrum tónu A3 se sešlápnutým pravým pedálem

Základní frekvence tónu A3 je 220 Hz, což odpovídá i prvnímu největšímu píku na naměřeném logaritmičkém spektru (obr. 81). Druhá harmonická má frekvenci 440 Hz a odpovídá tónu A4, třetí 660 Hz (tato frekvence odpovídá tónu E5), čtvrtá 880 Hz náležící tónu A5, pátá 1100 Hz, šestá 1320 Hz a sedmá 1540 Hz. Přičemž teoretické hodnoty frekvencí čerpáme z obr. 2. I další naměřené vyšší harmonické frekvence tónu A3 odpovídají teoretickým hodnotám a zapadají do rozmezí frekvencí pro příslušné tóny. Jejich píky na logaritmičkém spektru jsou vždy vysoké, osamocené a velmi dobře rozlišitelné. Při porovnání s obr. 23, na kterém je znázorněno logaritmičké spektrum tónu A3 zahraneého bez sešlápnutého pravého pedálu zjišťujeme, že vyšší harmonické mají stejnou hodnotu na obou spektrech. Pro tento případ můžeme konstatovat, že pravý pedál nemá na hodnoty vyšších harmonických vliv.



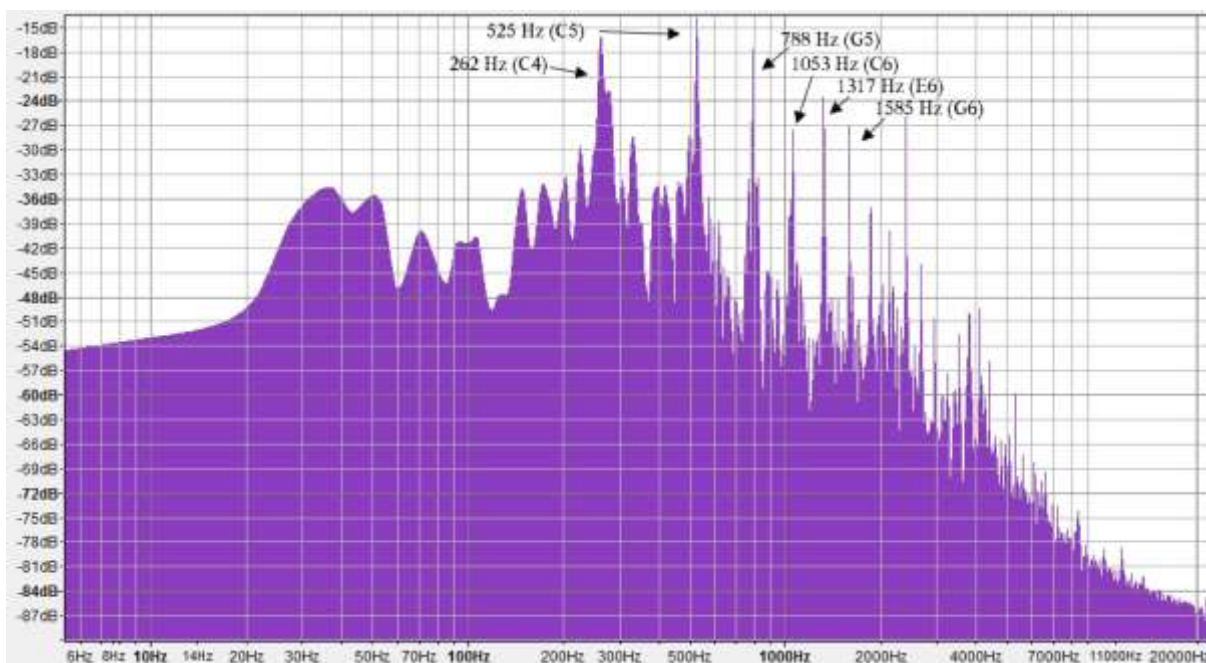
Obrázek 82: Logaritmičké spektrum tónu A4 se sešlápnutým pravým pedálem

O oktávu vyšší tón má základní frekvenci 440 Hz, i zde jde v logaritmičkém spektru pík s touto frekvencí rozpoznat na první pohled. Další vyšší harmonická má frekvenci 880 Hz a náleží tónu A5. Následující vyšší harmonické mají teoretické hodnoty frekvencí (obr. 2) postupně 1320 Hz, 1760 Hz, 2200 Hz, 2640 Hz, 3080 Hz a 3520 Hz. Naměřené a teoretické hodnoty se málo liší a jejich frekvence vždy spadají do rozmezí příslušných tónů. Na logaritmičkém spektru (obr. 82) jsou píky jednotlivých vyšších frekvencí opět dobře rozpoznatelné. Proto i v tomto případě můžeme konstatovat, že tón zahráný bez pedálu (jeho logaritmičké spektrum je na obrázku č. 19) i tón zahráný se sešlápnutým pravým pedálem má stejnou výšku a stejné frekvence vyšších harmonických.



Obrázek 83: Logaritmicke spektrum tónu C3 se sešlápnutým pravým pedálem

Základní frekvence tohoto tónu je 130,8 Hz (obr. 2). Vyšší harmonické frekvence jsou násobky této hodnoty. Druhá harmonická frekvence má tedy teoretickou hodnotu 261,6 Hz; třetí harmonická 392,4 Hz; čtvrtá 523,2 Hz; pátá 654 Hz; šestá 784,8 Hz, sedmá 915,6 Hz a na závěr osmá harmonická frekvence tónu C3 má dle výpočtu hodnotu 1046,4 Hz. Zde vidíme, že se teoretické hodnoty od naměřených odlišují jen minimálně a neliší se o více než 5 Hz, což je rozlišení algoritmu. Prvních osm vyšších harmonických tónu C3 se zmáčknutým pravým pedálem má stejnou hodnotu jako v případě, kdy pravý pedál sešlápnutý není (obrázek č. 29). Můžeme tedy i díky tomuto spektru konstatovat, že pravý pedál nemá vliv na frekvence vyšších harmonických.



Obrázek 84: Logaritmicke spektrum tónu C4 se sešlápnutým pravým pedálem

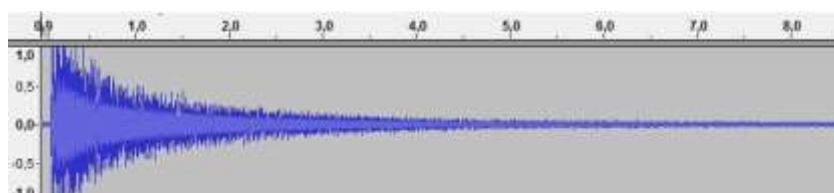
Tón C4 má základní frekvenci 261,6 Hz. Na logaritmicke spektru (obr. 84) je znázorněno prvních 6 vyšších harmonických frekvencí tónu C4. I zde hodnoty jejich frekvence odpovídají situaci, kdy pravý pedál sešlápnutý není (obrázek č. 30) a neobjevují se zde žádné frekvence odlišující se od předpokladů.

Pravý pedál tedy nemá vliv na výšku tónu, ani na jednotlivé hodnoty frekvencí vyšších harmonických.

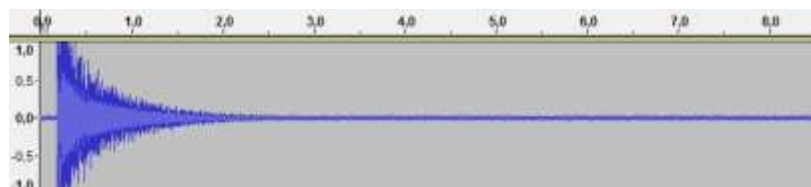
3.3.3 Vliv levého pedálu na intenzitu a barvu tónu

Vliv levého pedálu na intenzitu tónu

Jak jsme již popsali v části 2.3, funkcí levého pedálu je vydávat tišší zvuk.

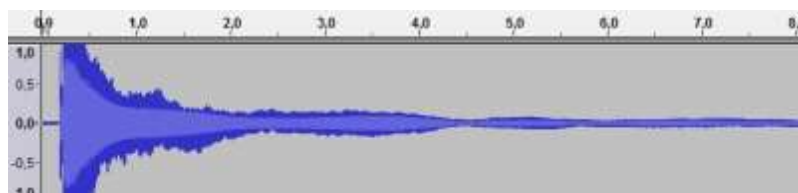


Obrázek 85: Zvuková stopa tónu A0

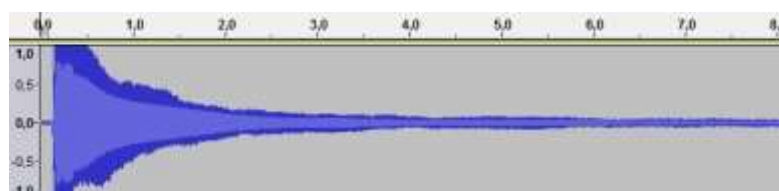


Obrázek 86: Zvuková stopa tónu A0 se sešlápnutým levým pedálem

Tón A0 je nejnižší tón na klaviiatúře pianina. Na jeho zvukových stopách bez pedálu (obr. 85) a se sešlápnutým levým pedálem (obr. 86) nepozorujeme rozdíl v intenzitě tónů na začátku zvukové stopy (ihned po úderu závaží na klávesu). Průběh zvukové stopy má ale menší intenzitu, je-li použit levý pedál. Můžeme také pozorovat, že v tomto případě je tón kratší a rychleji doznívá, zde už asi po 2,5 s od začátku zvukové stopy, ale u zvukové stopy tónu A0 bez pedálu tón zní ještě po asi 4 s.

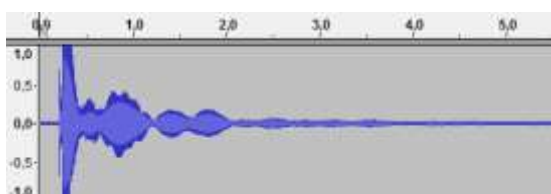


Obrázek 87: Zvuková stopa tónu A3

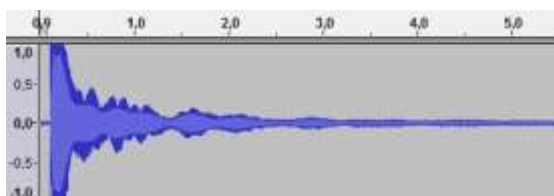


Obrázek 88: Zvuková stopa tónu A3 se sešlápnutým levým pedálem

U tohoto tónu není změna mezi zvukovou stopou zahrnou bez pedálu (obr. 87) a se sešlápnutým levým pedálem (obr. 88) výrazná. V první sekundě dochází k rychlejšímu utlumení u první zvukové stopy bez pedálu. Tón zahrný se sešlápnutým pedálem se postupem času utlumuje, kdežto u tónu, který je zahrný bez sešlápnutého pedálu vznikají rázy.



Obrázek 89: Zvuková stopa tónu A5

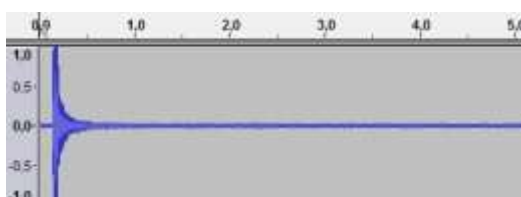


Obrázek 90: Zvuková stopa tónu A5 se sešlápnutým levým pedálem

I u tohoto tónu je amplituda zvuku ihned po zahrání tónu stejná. Průběh dozívání tónů už je ale rozdílný, největší změna je v čase okolo 1 s od zahrání tónu, kdy tón zahráný se sešlápnutým levým pedálem už pomalu dozívá, kdežto u druhého tónu, zahráném bez pedálu vznikají rázy.

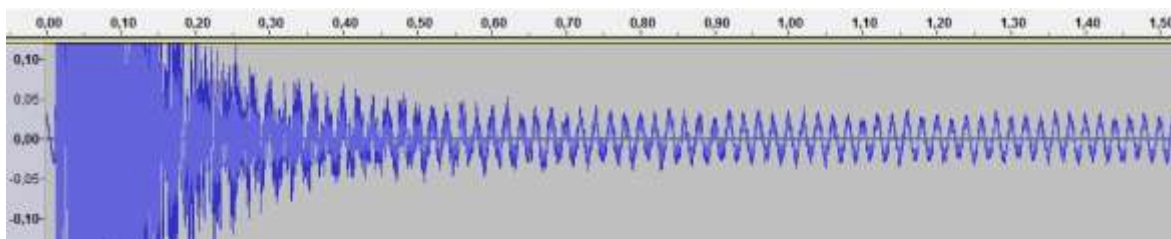


Obrázek 91: Zvuková stopa tónu A7



Obrázek 92: Zvuková stopa tónu A7 se sešlápnutým levým pedálem

Tón A7 patří k několika nejvyšším tónům pianina. Zde opět nepozorujeme žádnou významnou změnu mezi tónem zahráným bez pedálu a tónem zahráným se sešlápnutým levým pedálem.

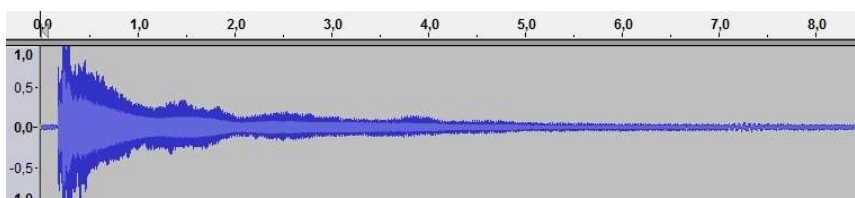


Obrázek 93: Přibližná zvuková stopa tónu A7

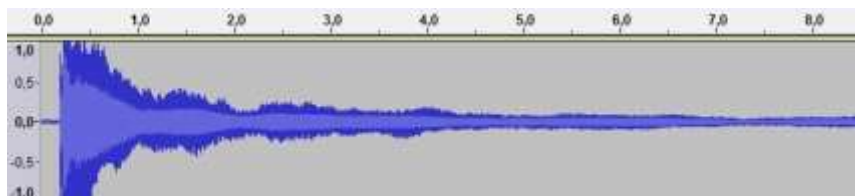


Obrázek 94: Přibližná zvuková stopa tónu A7 se sešlápnutým levým pedálem

Zvukové stopy tónů A7 jsme přiblížili (obr. 91, 92). Zde už můžeme vidět vliv levého pedálu, amplituda zvukové stopy se sešlápnutým levým pedálem je menší než bez sešlápnutého levého pedálu, největší změnu pozorujeme kolem 0,30 s od zahrání tónu. Můžeme tedy konstatovat, že i u vyšších tónů má levý pedál vliv na intenzitu zahraniých tónů. Změna v intenzitě způsobená sešlápnutím levého pedálu je ale velmi malá a bez přiblížení zvukové stopy téměř nepozorovatelná.



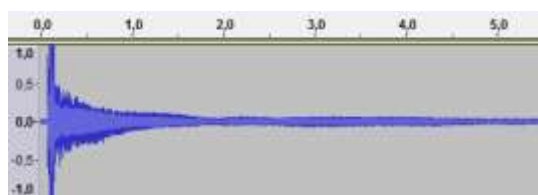
Obrázek 95: Zvuková stopa tónu C3



Obrázek 96: Zvuková stopa tónu C3 se sešlápnutým levým pedálem

Na zvukové stopě tónu C3 není zásadní rozdíl mezi zvukovou stopou zahraniou bez pedálu (obr. 95) a zvukovou stopou zahraniou se sešlápnutým levým pedálem (obr. 96). I vzhledem k předchozím zvukovým stopám analyzovaných tónů můžeme konstatovat, že

levý pedál nemá na zahráný tón u tohoto pianina tak zásadní vliv jako pravý pedál, u kterého je jeho efekt mnohem významnější.



Obrázek 97: Zvuková stopa tónu C5



Obrázek 98: Zvuková stopa tónu C5 se sešlápnutým levým pedálem

Na zvukových stopách tónů C5 (obr. 97, 98) vliv levého pedálu pozorujeme. Nejen, že tón zahráný se sešlápnutým levým pedálem končí dříve, a to už po době kratší než je jedna sekunda (tón zahráný bez sešlápnutého pedálu doznívá až po déle než jedné sekundě od zahrání tónu), ale i intenzita tónu je během jeho trvání menší.



Obrázek 99: Zvuková stopa tónu C8



Obrázek 100: Zvuková stopa tónu C8 se sešlápnutým levým pedálem

U tónu C8, nejvyššího tónu na klaviatuře pianina opět není výrazná změna mezi délkou a intenzitou zahráného tónu bez pedálu a se sešlápnutým levým pedálem.



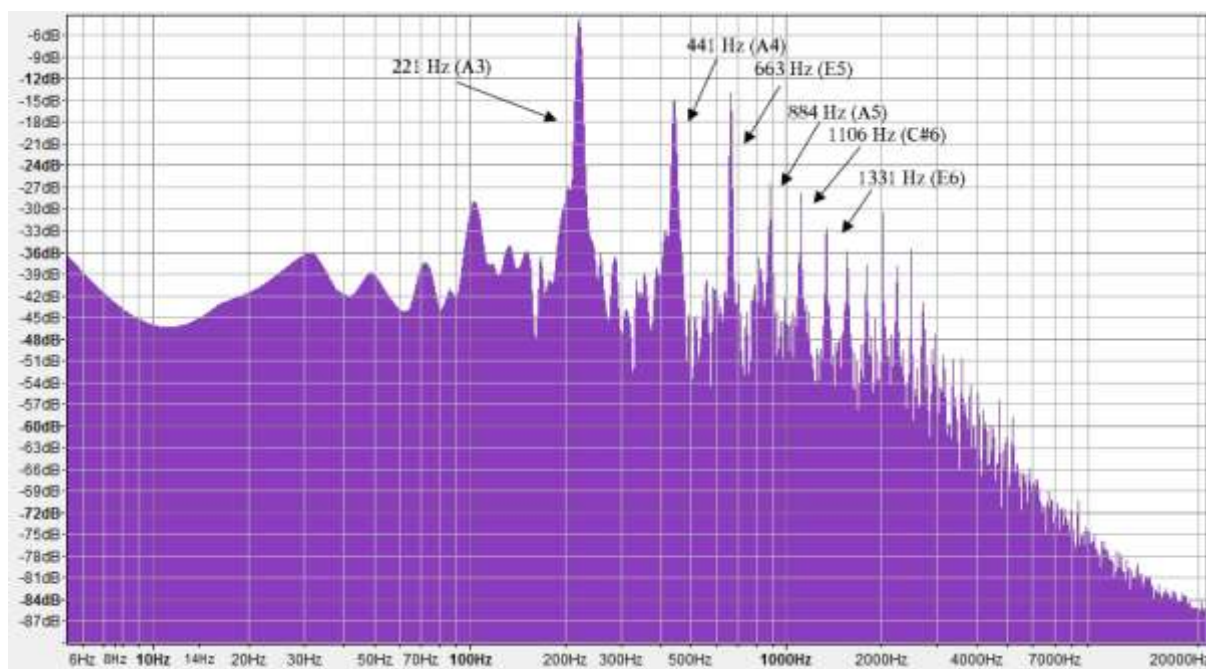
Obrázek 101: Přibližná zvuková stopa tónu C8



Obrázek 102 – Přibližná zvuková stopa tónu C8 se sešlápnutým levým pedálem

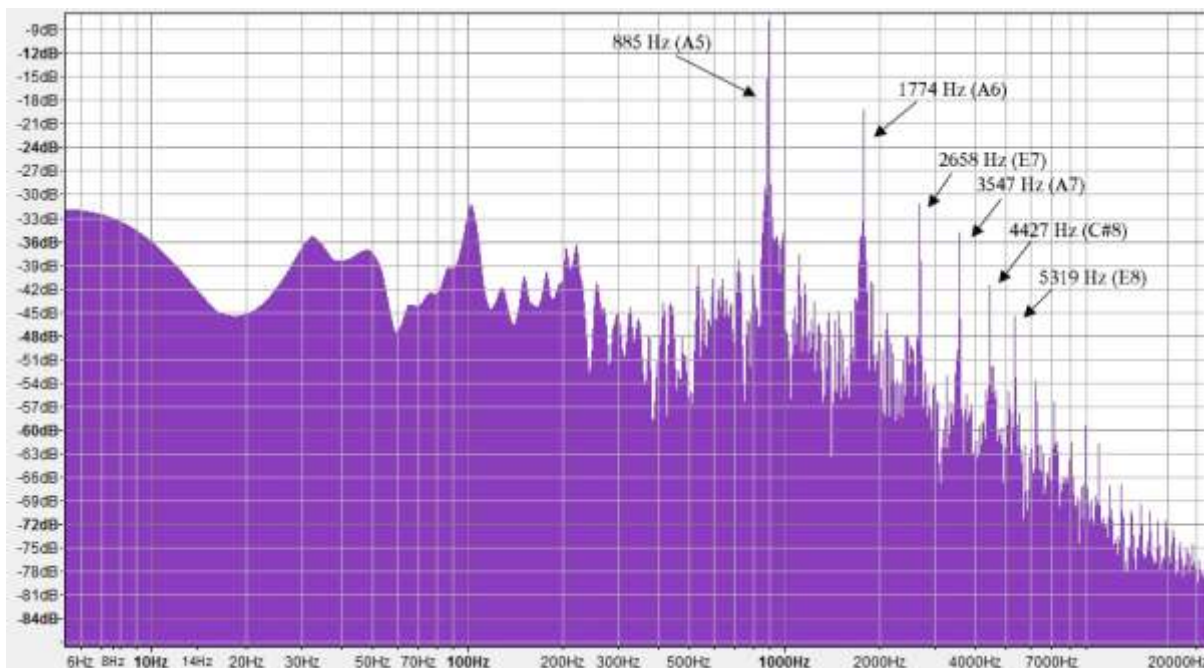
Abychom mohli lépe vidět vliv levého pedálu, tak jsme zvukové stopy tónu C8 přiblížili (obr. 99, 100). Na obr. 102, můžeme pozorovat slabší amplitudu zejména mezi 0,2 s a 0,3 s, než na obr. 101. Rozdíl mezi amplitudou zvukové stopy zahrané se sešlápnutým levým pedálem a bez sešlápnutého pedálu, a tedy vliv levého pedálu není ale nijak výrazný a můžeme ho zaznamenat až po detailnějším studiu zvukové stopy. Lze proto konstatovat, že sešlápnutí levého pedálu má na vysoké tóny pouze minimální vliv.

Vliv levého pedálu na barvu tónu



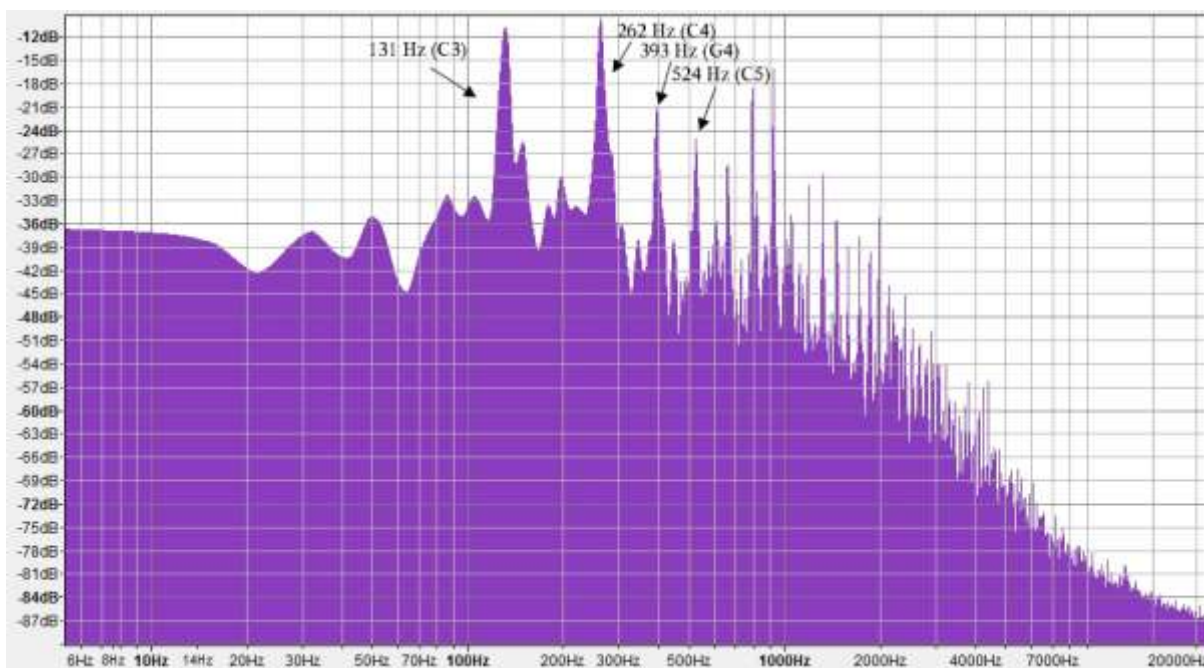
Obrázek 103: Logaritmické spektrum tónu A3 se sešlápnutým levým pedálem

Tón A3 má základní frekvenci 220 Hz. Frekvence jeho vyšších harmonických jsou postupně pro druhou harmonickou 440 Hz, pro třetí vyšší harmonickou 660 Hz, pro čtvrtou 880 Hz, pro pátou 1100 Hz a frekvence šesté vyšší harmonické je 1320 Hz. Z logaritmického spektra (obr. 103) tohoto tónu můžeme vidět, že rozdíly mezi teoretickou a experimentálně určenou hodnotou je jen několik jednotek hertzů. Teoretické hodnoty frekvencí čerpáme z obr. 2. Prvních šest vyšších harmonických tónu A3 zahráném se sešlápnutým levým pedálem tedy odpovídá teoretickým hodnotám pro tón A3. Logaritmické spektrum tónu A3 bez sešlápnutého pedálu je na obrázku č. 23. Sešlápnutí levého pedálu nemá vliv na frekvenci vyšších harmonických zahráného tónu.



Obrázek 104: Logaritmické spektrum tónu A5 se sešlápnutým levým pedálem

Další analyzovaný tón je tón A5 se základní frekvencí 880 Hz. Druhá harmonická frekvence má mít dle teorie (obr. 2) hodnotu 1760 Hz, naměřená hodnota je 1774 Hz. Tato frekvence ale stále náleží do rozmezí frekvencí odpovídajících tónu A6. Třetí harmonická frekvence má teoretickou hodnotu 2640 Hz, měřením jsme dostali hodnotu 2658 Hz, čímž také odpovídá rozmezí frekvencí tónu E7. Další harmonické frekvence mají teoretické hodnoty 3520 Hz, 4400 Hz a 5280 Hz. Experimentálně určené hodnoty mají oproti teoretickým už větší odchylky. Stále ale naměřené frekvence náleží do rozmezí frekvencí příslušnému tónu a rozdíl mezi vyššími harmonickými tónu A5 zahrnutým bez sešlápnutého pedálu (jeho logaritmické spektrum je na obr. 20) a vyššími harmonickými se sešlápnutým levým pedálem není.



Obrázek 105: Logaritmické spektrum tónu C3 se sešlápnutým levým pedálem

Vliv levého pedálu na barvu tónu si ukážeme ještě na příkladu tónu C3. Tento tón má základní frekvenci 130,8 Hz. Druhá harmonická má frekvenci 261,6 Hz a svojí frekvencí zapadá do rozmezí frekvencí tónu C4. Třetí harmonická frekvence má hodnotu 392 Hz a náleží tónu G4. Čtvrtá harmonická pak má teoretickou frekvenci 523,2 Hz a patří tónu C5. I zde můžeme konstatovat, že sešlápnutí levého pedálu nemá vliv na frekvenci vyšších harmonických měřeného tónu. Logaritmické spektrum tónu C3 zahrané bez sešlápnutí pedálu je na obr. 29. Hodnota frekvencí vyšších harmonických odpovídá teoretickým hodnotám jako bez zmáčknutí jakéhokoliv pedálu. Levý pedál tedy zmenšuje intenzitu tónu, nemá však vliv na jeho barvu.

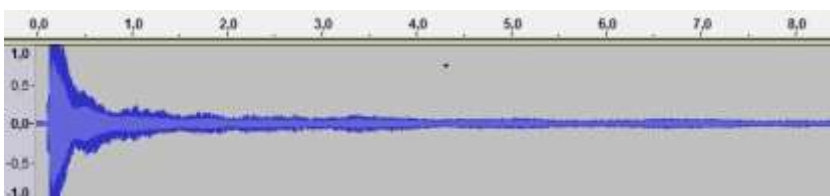
3.3.4 Vliv pedálů na intenzitu a barvu akordů

Vliv sešlápnutí jednoho z pedálů na intenzitu a délku tónů

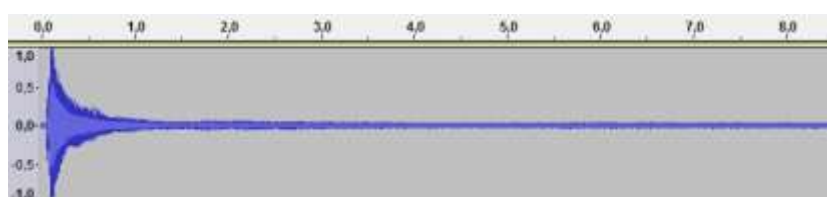
Nyní si ukážeme, zda je vliv levého a pravého pedálu stejný, zahrajeme-li více tónů na jednou. Vliv pedálů si ukážeme na třech různých akordech – A4 dur, A4 moll a C4 moll. V tomto měření nebylo možné pouštět tři závaží zároveň na tři klávesy, proto bylo měření akordů prováděno ručně. I tak ale můžeme pozorovat jevy způsobené sešlápnutím pedálů, které známe již z předchozí části.



Obrázek 106: Zvuková stopa akordu A4 dur



Obrázek 107: Zvuková stopa akordu A4 dur se sešlápnutým pravým pedálem

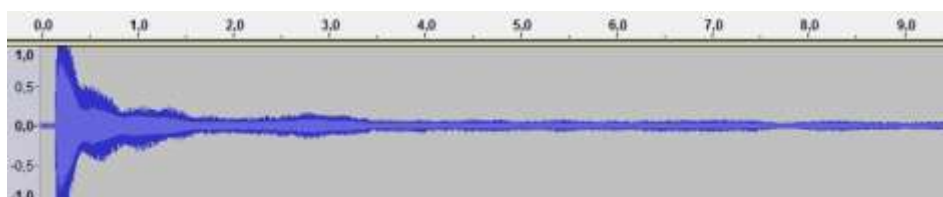


Obrázek 108: Zvuková stopa akordu A4 dur se sešlápnutým levým pedálem

Zvuková stopa akordu A4 Dur (obr. 106) odezní po více než 3 sekundách. Na obr. 107 zvukové stopy tohoto akordu se sešlápnutým pravým pedálem můžeme vidět, že zahrané tóny odezní po mnohem delší době – až po asi sedmi sekundách. V případě sešlápnutého levého pedálu tóny sice neodezní dříve než tóny zahrané bez pedálu, ale intenzita zvukové stopy je výrazně slabší, největší rozdíl můžeme zaznamenat během první sekundy od zahrání. U akordu zahráného bez pedálu a se sešlápnutým pravým pedálem ještě vznikají rázy, u akordu zahráného se sešlápnutým levým pedálem v tomto přiblížení rázy nevidíme.



Obrázek 109: Zvuková stopa akordu A5 moll



Obrázek 110: Zvuková stopa akordu A5 moll se sešlápnutým pravým pedálem

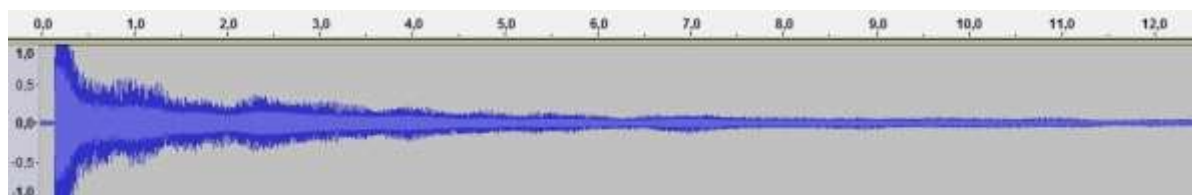


Obrázek 111: Zvuková stopa akordu A5 moll se sešlápnutým levým pedálem

Akord A5 moll doznívá po asi 2 s od zahrání, akord zahráný se sešlápnutým pravým pedálem zní o několik sekund déle. Akord zahráný se sešlápnutým levým pedálem má opět, zejména v první sekundě slabší intenzitu a zní tedy slaběji. U akordu zahráného se sešlápnutým levým pedálem nevznikají rázy.



Obrázek 112: Zvuková stopa akordu C4 moll



Obrázek 113: Zvuková stopa akordu C4 moll se sešlápnutým pravým pedálem



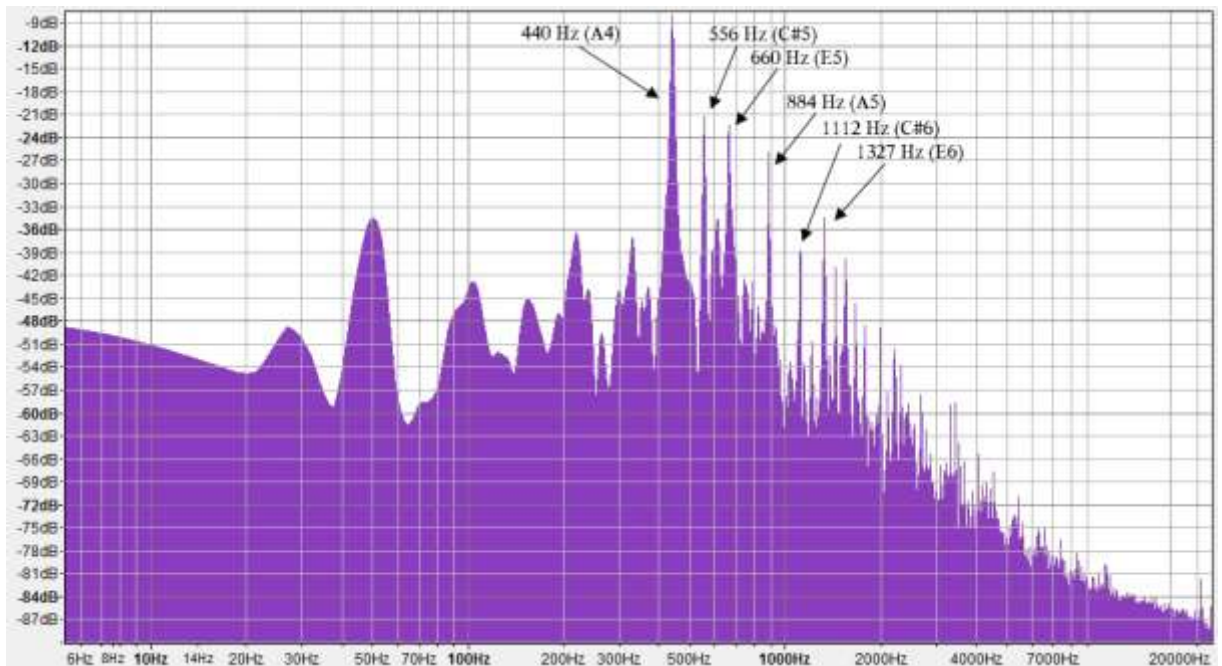
Obrázek 114: Zvuková stopa akordu C4 moll se sešlápnutým levým pedálem

I zde akord se sešlápnutým pravým pedálem odezní po delší době než akord zahráný bez sešlápnutí pedálu. Můžeme konstatovat, že pravý pedál opravdu prodlužuje délku tónu, i v případě, že je zmáčknuto více tónů zároveň. U zvukové stopy akordu C4 se sešlápnutým levým pedálem (obr. 114) a zahráné bez něj (obr. 112) nevidíme výrazný rozdíl jako v předchozích příkladech. Vliv levého pedálu tedy není tak významný jako vliv toho pravého.

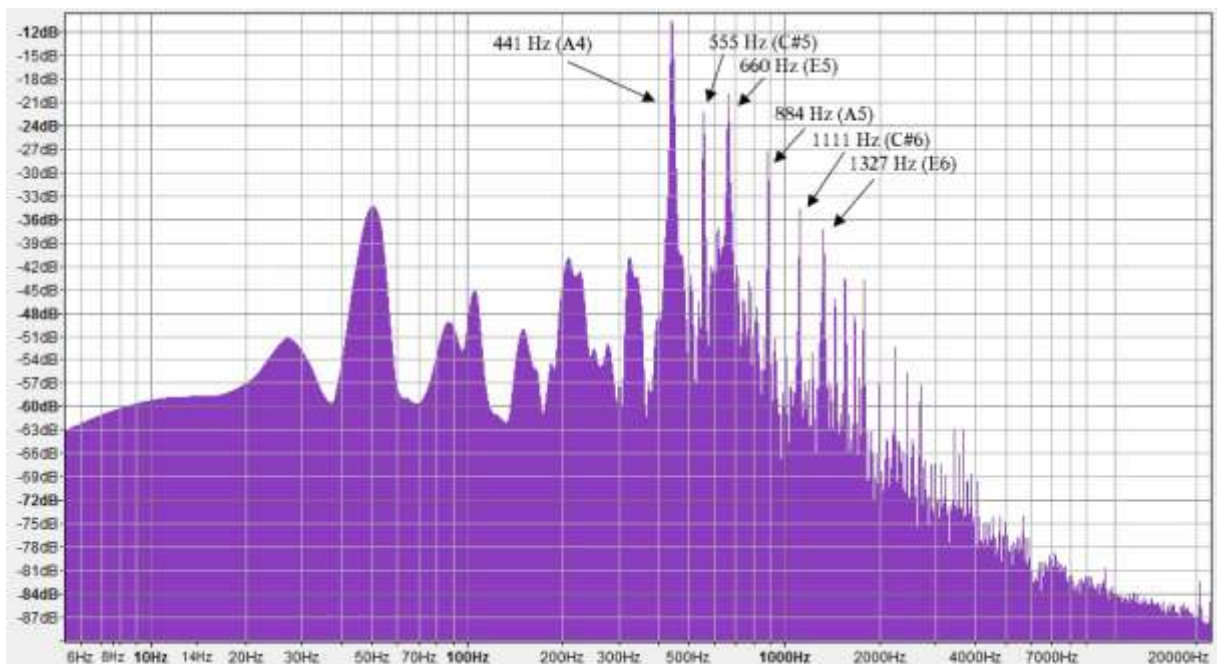
Vliv sešlápnutí jednoho z pedálů na barvu tónů

Vyšší harmonické akordu A4 Dur mají teoretické hodnoty frekvencí (obr. 2):

1.	1.	1.	2.	2.	2.
440 Hz	554,3 Hz	659,3 Hz	880 Hz	1108,7 Hz	1318,5 Hz
A4	C#5	E5	A5	C#6	E6



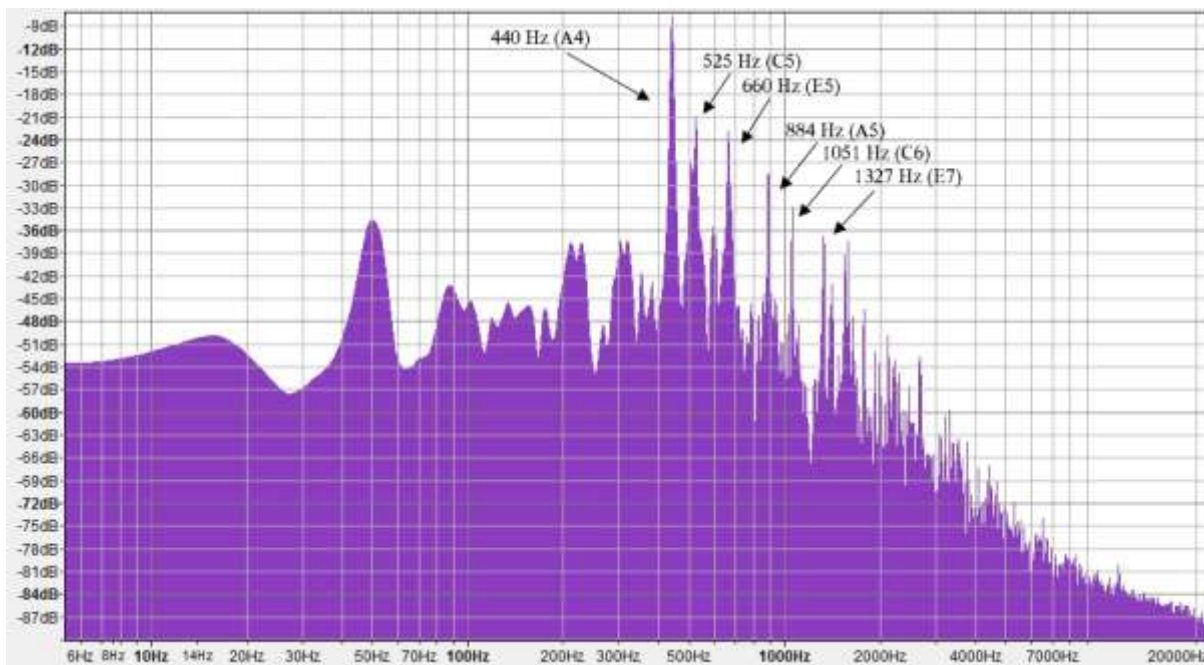
Obrázek 115: Logaritmické spektrum akordu A4 Dur se sešlápnutým pravým pedálem



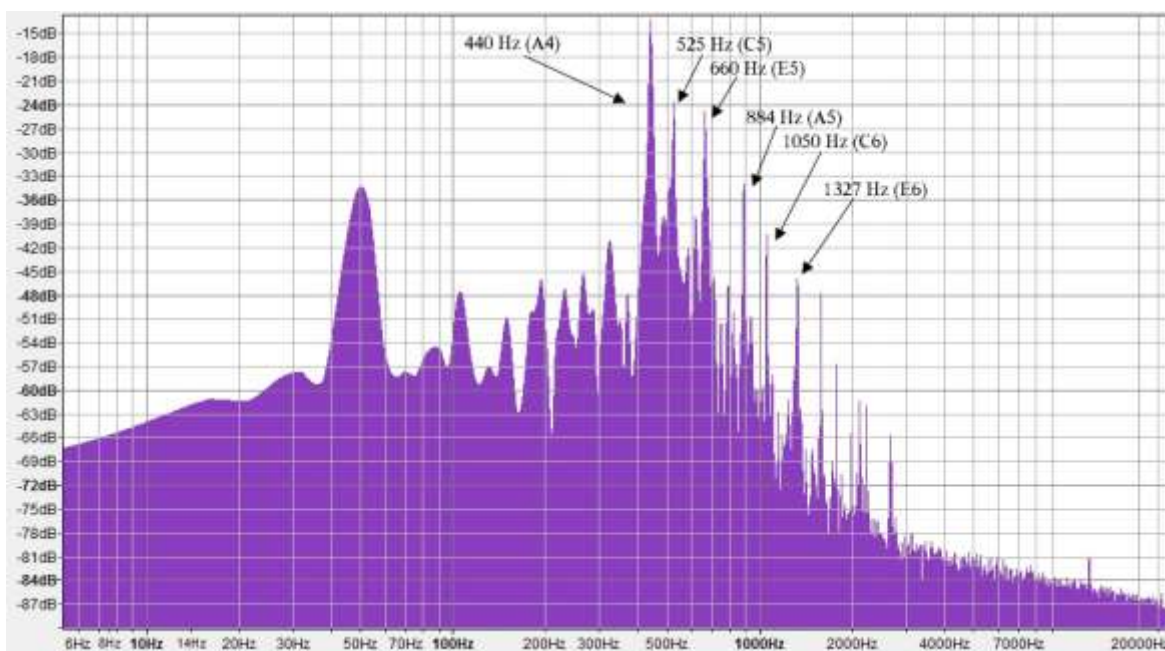
Obrázek 116: Logaritmické spektrum akordu A4 Dur se sešlápnutým levým pedálem

Vyšší harmonické akordu A4 moll mají teoretické hodnoty frekvencí (obr. 2):

1.	1.	1.	2.	2.	2.
440 Hz	523,2 Hz	659,3 Hz	880 Hz	1046,5 Hz	1318,5 Hz
A4	C5	E5	A5	C6	E6



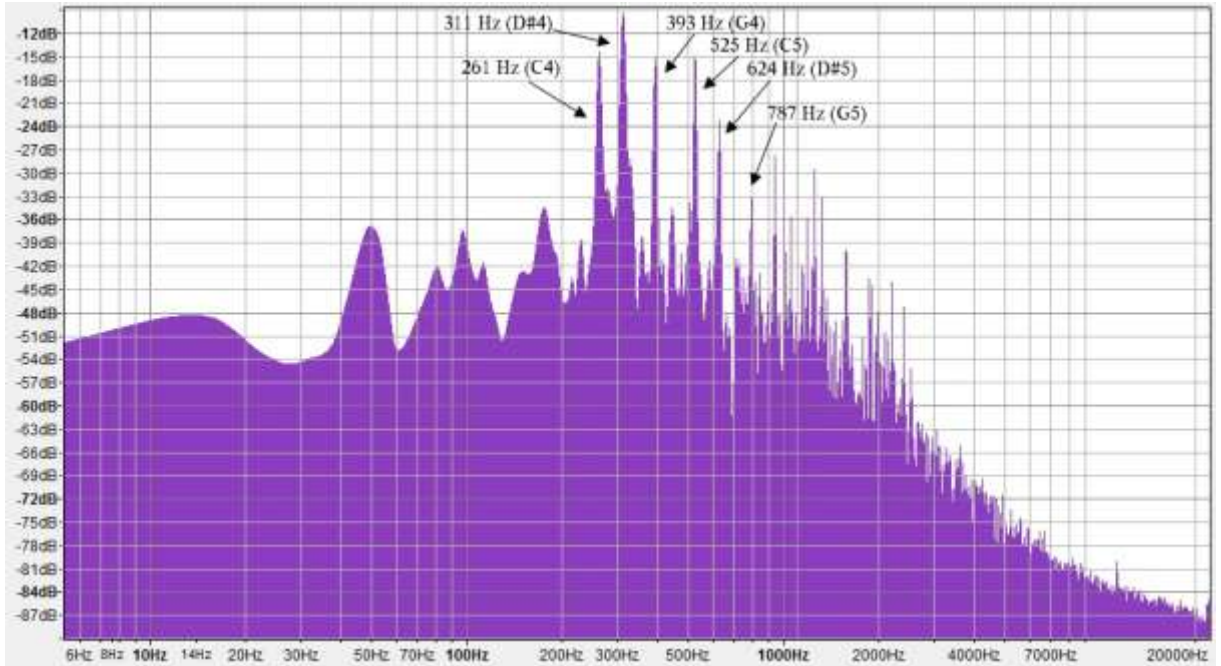
Obrázek 117: Logaritmičké spektrum akordu A4 moll se sešlápnutým pravým pedálem



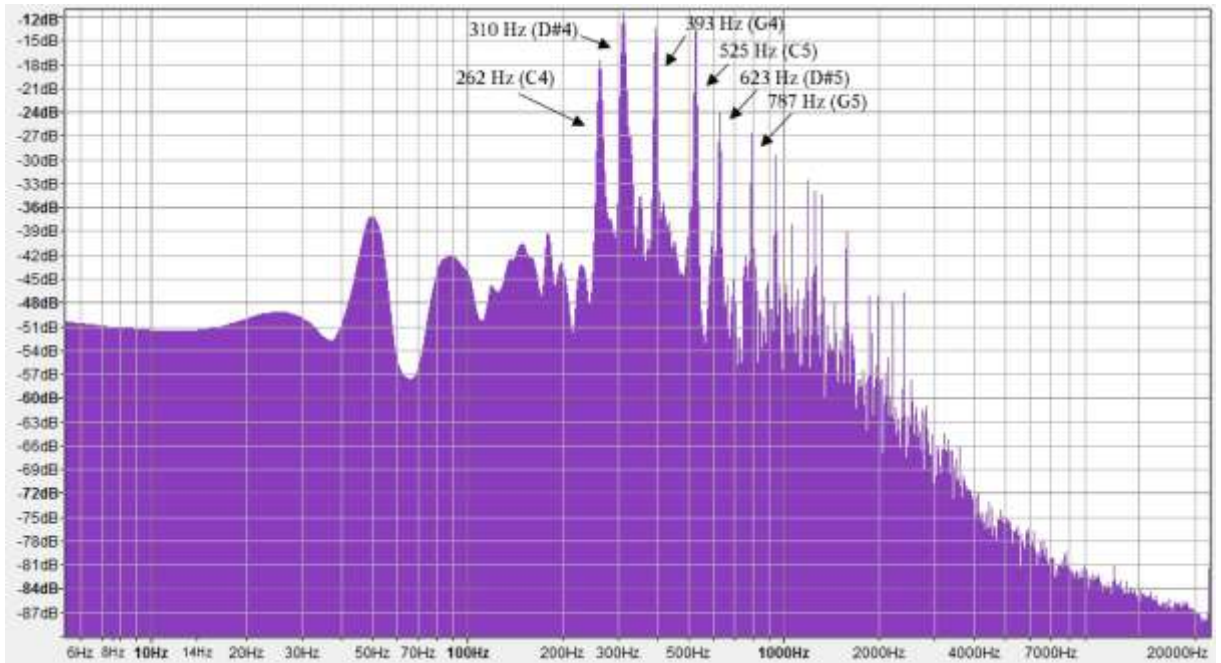
Obrázek 118: Logaritmičké spektrum akordu A4 moll se sešlápnutým levým pedálem

Vyšší harmonické akordu C4 moll mají teoretické hodnoty frekvencí (obr. 2):

1.	1.	1.	2.	2.	2.
261,6 Hz	311,1 Hz	392 Hz	523,3 Hz	622,2 Hz	784 Hz
C4	D#4	G4	C5	D#5	G5



Obrázek 119: Logaritmičké spektrum akordu C4 moll se sešlápnutým pravým pedálem



Obrázek 120: Logaritmičké spektrum akordu C4 moll se sešlápnutým levým pedálem

Na logaritmických spektrech analyzovaných akordů (obr. 115–120) jsme vždy zvýraznili první dvě harmonické zahranych tónů. Při pozorování naměřených hodnot, můžeme konstatovat, že se neliší od těch určených teorií (obr. 2). Tón po sešlápnutí některého z pedálu tedy neobsahuje více vyšších harmonických tónů či vyšší harmonické s odlišnou frekvencí. Barva zahraneého akordu tedy zůstává stejná i po sešlápnutí jednoho z pedálů.

Závěr

V této práci jsme prováděli analýzu vybraných tónů pianina pomocí programu Audacity. Program zaznamenává zahráný tón, provádí Fourierovu transformaci a následně můžeme díky němu studovat logaritmické spektrum měřeného tónu. K analýze jsme zvolili tóny A0, A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7 a tóny C1, C2, C3, C4, C5, C6, C7 a C8. Můžeme konstatovat, že zejména pro tóny A3, A4 a C3, získané výsledky poměrně dobře odpovídají teoretickým předpokladům vyplývajícím z výkladu učiva akustiky na střední škole. Prokázali jsme přítomnost vyšších harmonických frekvencí, jejichž hodnota i výška měřeného tónu souhlasily s teoretickými hodnotami, které jsme prezentovali v teoretickém úvodu. Při porovnání vyšších harmonických frekvencí nízkých a vysokých tónů můžeme konstatovat, že nízké tóny mají o poznání více vyšších harmonických frekvencí než tóny vysoké. Protože je měření, i zpracování výsledků velmi jednoduché, ale zároveň dostatečně přesné můžeme měření doporučit pro výuku fyziky na střední škole v rámci kapitoly kmitů na struně. Při určování základní frekvence nižších tónů jsme se setkali s problémem měřitelného rozmezí mikrofону. Základní frekvenci nízkých tónů jsme ale ověřili výpočtem po přiblížení zvukové stopy daného tónu. I tato část experimentu je vhodná jako úloha pro studenty středních škol, kdy si studenti mohou procvičit vztah mezi periodou a frekvencí na základě měření. Navíc jsme pomocí měření ověřili temperované ladění klavíru, velikost temperovaného půltónu a fyzikálně jsme vysvětlili především hudební pojem - dur a moll akordy. Na závěr jsme porovnali délku, intenzitu a barvu tónu v případech, kdy je sešlápnut pravý nebo levý pedál. Ve všech případech jsme zjistili, že barva tónu se po sešlápnutí jakéhokoliv z pedálů neliší a že zastoupení vyšších harmonických frekvencí je stejné, jako když pedál sešlápnutý není. Ověřili jsme, že sešlápnutí pedálu výrazně prodlužuje délku tónu a tím i jeho intenzitu. Levý pedál snižuje intenzitu zahráného tónu. Zde ale rozdíl mezi tónem zahráným bez sešlápnutí pedálu a se sešlápnutým levým pedálem není tak markantní. Při detailnějším studiu zvukové stopy zahráného tónu je však pozorovatelný.

Na závěr můžeme konstatovat, že cíl práce byl splněn – pro několik tónů jsme provedli důkladnou analýzu jejich vyšších harmonických frekvencí a ukázali jsme vliv pedálů na výsledný zahráný tón. Jelikož bylo měření dostatečně přesné, lze konstatovat, že i s pomocí běžně dostupných pomůcek můžeme zajímavě demonstrovat některé fyzikální jevy týkající se kmitání strun při výuce na střední škole.

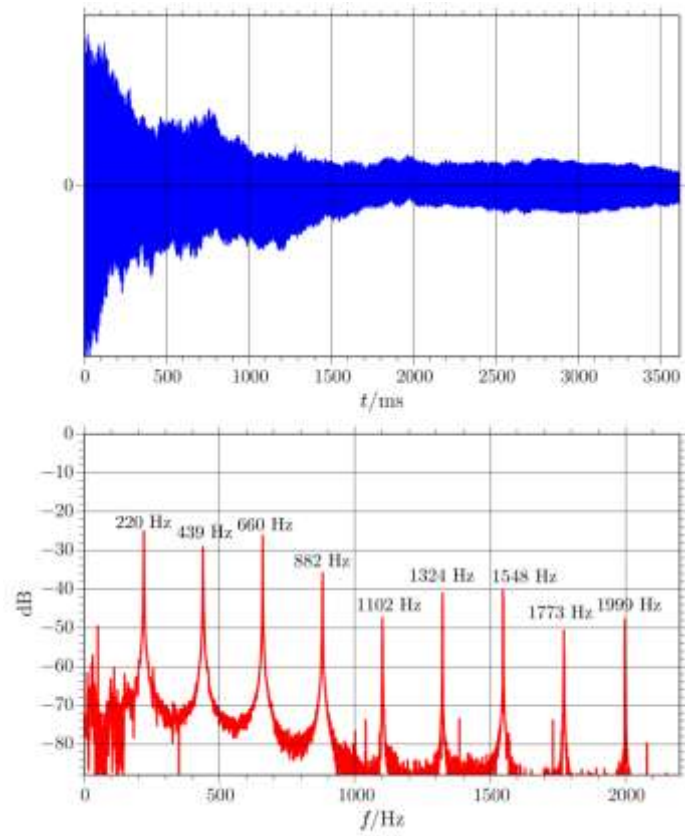
Zajímavé by bylo tento experiment provést na dalších hudebních nástrojích (housle, flétna apod.), porovnat jejich vyšší harmonické frekvence a díky tomu vysvětlit různou barvu tónů.

Seznam použitých pramenů

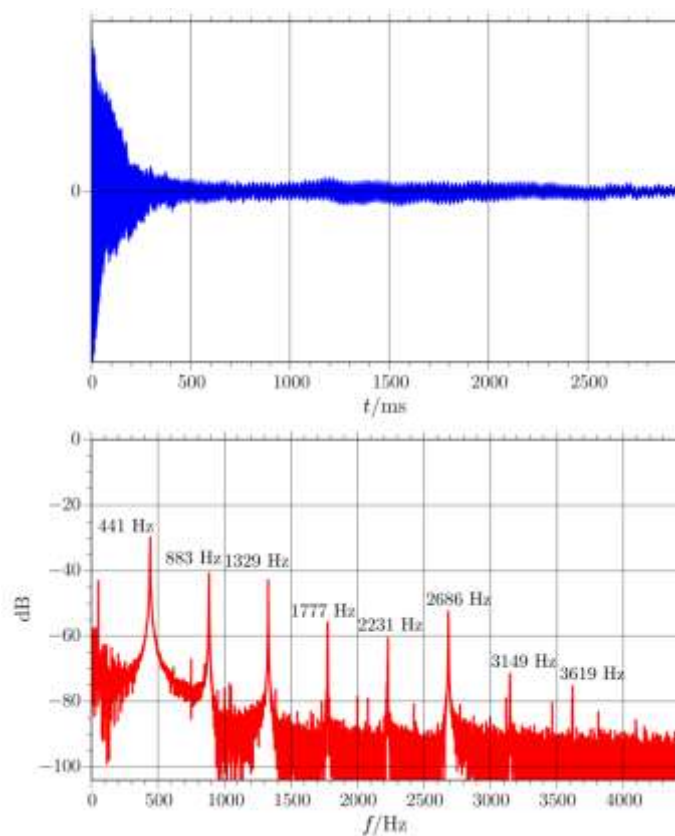
- [1] BAJER, Jiří, 2016. *Mechanika*. Olomouc: Univerzita Palackého. ISBN 80-244-1293-4.
- [2] *Elcodis.com: Elcodis – electronic components distributor*, 2017 [online]. Elcodis Company. [cit. 2017-04-28]. Dostupné z: <http://elcodis.com/parts/4015034/MC-1500.html>
- [3] FLETCHER, Neville H. a Thomas D., ROSSING, 2010. *The physics of musical instruments*. 2nd ed. New York, NY: Springer. ISBN 9781441931207.
- [4] GEIST, Bohumil, 2005. *Akustika: jevy a souvislosti v hudební teorii a praxi*. Praha: Muzikus. ISBN 80-86253-31-7.
- [5] GIORDANO, Nicholas J., 2010. *Physics of the piano*. Oxford: Oxford University Press. ISBN 978-0-19-954602-2.
- [6] HALLIDAY, David, Robert RESNICK a JEARL WALKER, ed., 2013. *Fyzika. 2., přeprac. vyd.* Přeložil Miroslav ČERNÝ a kol. Brno: VUTIUM. Překlady vysokoškolských učebnic. ISBN 978-80-214-4123-1.
- [7] Harmonique (musique), 2016. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation. [cit. 2017-04-16]. Dostupné z: [https://fr.wikipedia.org/wiki/Harmonique_\(musique\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Harmonique_(musique))
- [8] LEPIL, Oldřich, 2009. *Fyzika pro gymnázia*. 4. vyd. Praha: Prometheus. ISBN 978-80-7196-387-5.
- [9] MODR, Antonín, 1977. *Hudební nástroje*. 6., dop. vyd. Praha: Supraphon.
- [10] OLING, Bert a Heinz WALLISCH, 2004. *Encyklopedie hudebních nástrojů*. Přeložila Jiřina HOLEŇOVÁ. Čestlice: Rebo. ISBN 80-7234-289-4.
- [11] Plot Spectrum, 2017. In: *Audacity 2.1.3 Manual* [online]. [cit. 2017-04-27]. Dostupné z: http://manual.audacityteam.org/man/plot_spectrum.html

- [12] RangeE, 2017. In: *Bw music* [online]. [cit. 2017-04-15]. Dostupné z: <http://www.bwmusic.com/goodies/RangeE.pdf>
- [13] Scientific pitch notation, 2017. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation. [cit. 2017-04-16]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Scientific_pitch_notation
- [14] ZENKL, Luděk, 1982. *ABC hudební nauky*. 3. nezm. vyd. Praha: Supraphon. Příručky ABC.

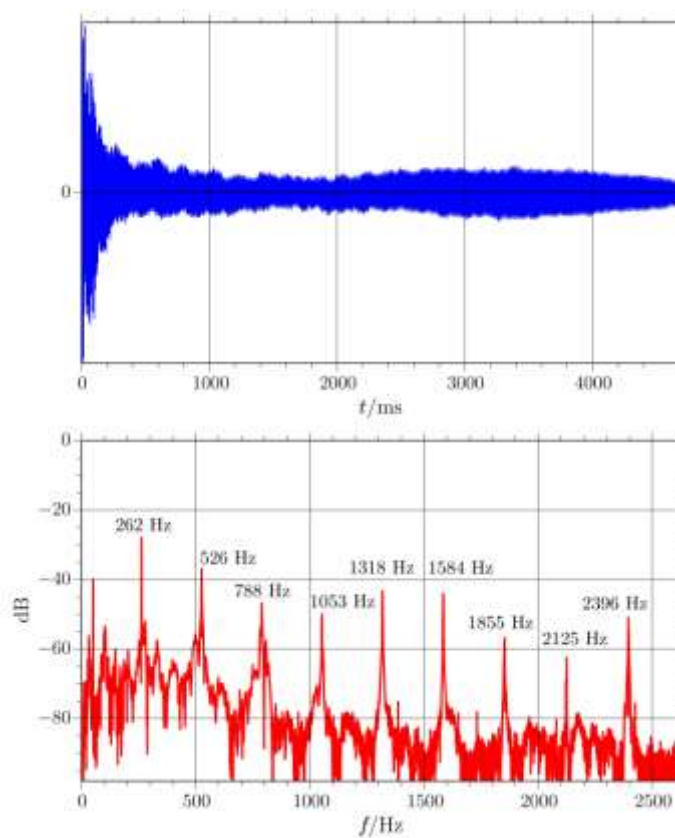
Přílohy



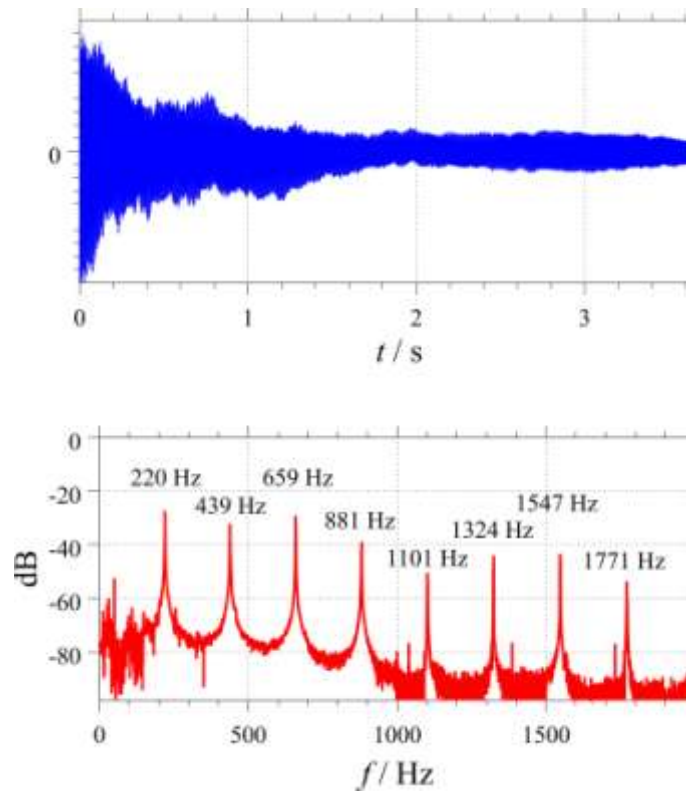
Příloha 1: Tón A3 s vypočítanou Fourierovou analýzou v programu Python



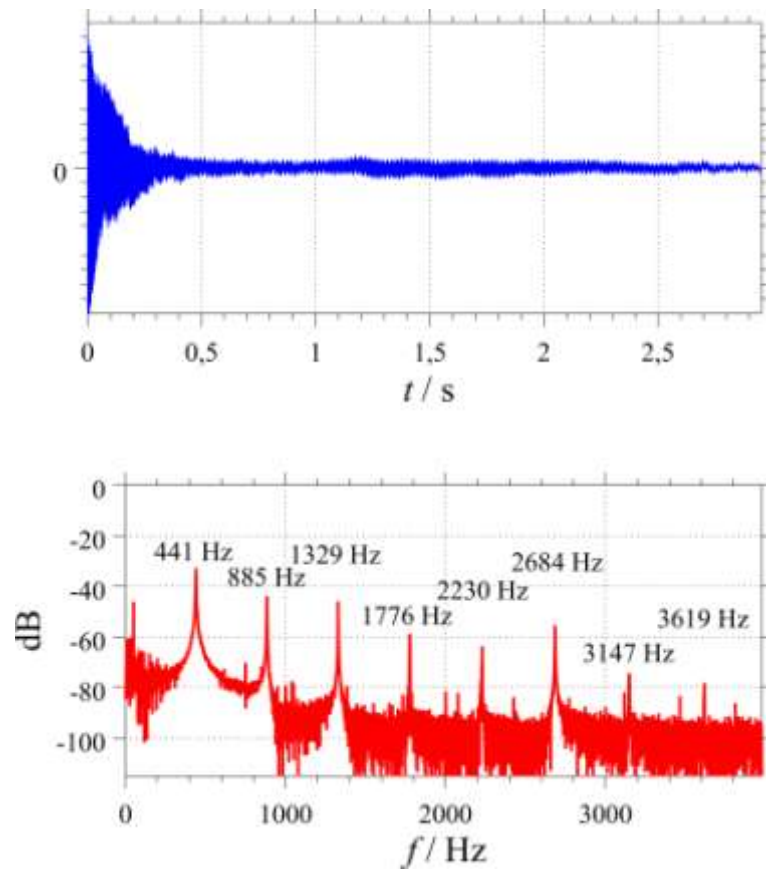
Příloha 2: Tón A4 s vypočítanou Fourierovou analýzou v programu Python



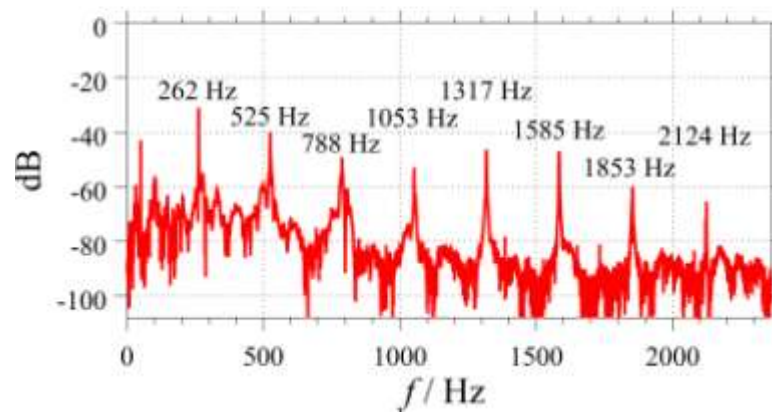
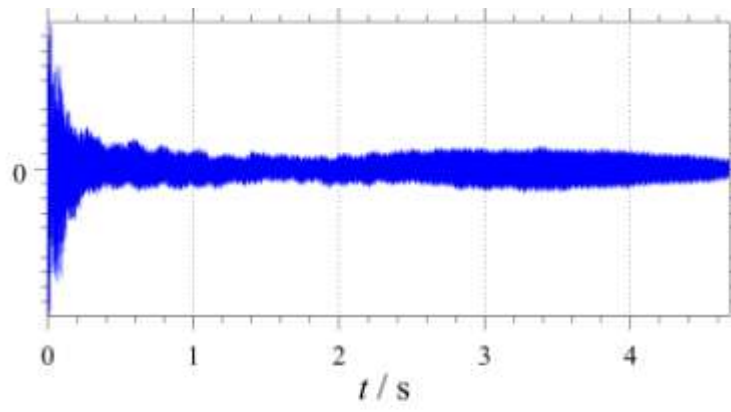
Příloha 3: Tón C4 s vypočítanou Fourierovou analýzou v programu Python



Příloha 4: Tón A3 s vypočítanou Fourierovou analýzou v programu GNU Octave



Příloha 5: Tón A4 s vypočítanou Fourierovou analýzou v programu GNU Octave



Příloha 6: Tón C4 s vypočítanou Fourierovou analýzou v programu GNU Octave