

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA EXPERIMENTÁLNÍ FYZIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
PARADOXY V TEORII RELATIVITY



Vypracoval:	Ondřej Palovský
Studijní obor:	Fyzika – geografie
Forma studia:	Prezenční
Vedoucí diplomové práce:	Mgr. Lukáš Richterek, PhD.
Termín odevzdání práce:	květen 2021

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně pod vedením Mgr. Lukáše Richterka, PhD. a že jsem použil zdroje, které cituji a uvádím v seznamu literatury.

V Ostravě dne 11. května 2021

.....
Ondřej Palovský

OBSAH

1. ÚVOD	4
2. PARADOX DVOJČAT	5
3. PARADOX DVOU VESMÍRNÝCH KOSMICKÝCH LODÍ	11
4. PARADOX VOZÍKU	15
4.1 ŘEŠENÍ PARADOXU VOZÍKU S KOLY S KONSTANTNÍM POLOMĚREM	16
4.2 ŘEŠENÍ PARADOXU VOZÍKU S KOLY SE ZKRACUJÍCÍM SE POLOMĚREM..	18
4.3 ZÚŽENÍ KOL VOZÍKU DO TVARU ELIPSY	19
5. PARADOX KLÍČE A ZÁMKU	21
5.1 RYCHLOST PŘENOSU INFORMACE V TYČI.....	21
5.2 ŘEŠENÍ PARADOXU KLÍČE A ZÁMKU	25
6. PARADOX MAGNETICKÉ SÍLY	29
6.1 POPIS PARADOXU	30
6.2 ŘEŠENÍ PARADOXU MAGNETICKÉ SÍLY	31
7. SELLERIHO PARADOX.....	33
7.1 SAGNACŮV EFEKT	35
7.2 ŘEŠENÍ SELLERIHO PARADOXU	36
8. ZÁVĚR.....	38
9. ZDROJE LITERATURY	39

1. ÚVOD

V této bakalářské práci jsem se zabýval paradoxy ve speciální teorii relativity, jejímž autorem je Albert Einstein. Tato teorie je pomocí mnoha experimentů prokázána a není třeba pochybovat o její správnosti. Z jejích postulátů ovšem plynou neintuitivní jevy, které odporují naší běžné zkušenosti. Tyto jevy nastávají při rychlostech blížících se rychlosti světla a jedná se především o kontrakci délky a dilataci času. Z těchto jevů poté mohou plynout různé myšlenkové pokusy či modely, které mohou na první pohled vypadat paradoxně a nemusejí dávat smysl.

Cílem této práce je srozumitelně vysvětlit vybrané zajímavé paradoxy v STR, s cílem usnadnit jejich další využití. I když je předložená práce z větší části rešeršní, mojí snahou bylo srozumitelně a přehledně popsat paradoxy, jež nejsou v české literatuře věnované STR doposud podrobněji zpracovány.

Výjimkou je paradox dvojčat, který je považován za nejznámější paradox STR vůbec. Do bakalářské práce jsem ho zařadil proto, že je známý široké veřejnosti a také pro jeho názornost a jednoduchost. V druhém paradoxu jsem se zabýval kontrakcí délky u dvou za sebou letících kosmických lodí. Obdobou tohoto paradoxu jsou tzv. Bellovy rakety. Třetí paradox pojednává o tvaru kol vozíku, která při jeho pohybu téměř rychlostí světla změni tvar. Řešením paradoxu klíče a zámku je opět kontrakce délek spojená s šířením informace v materiálním prostředí. Zatímco v prvních pěti paradoxech jsou diskutovány především mechanické účinky STR, šestý paradox se zabývá magnetickou silou v okolí vodiče s proudem. Poslední paradox pojednává o anizotropii rychlosti světla na rotujícím disku.

Téma jsem si vybral z důvodu mého zájmu o STR a vesmír, témata, s nimiž jsem se setkal již na střední škole. Tato teorie mě uchvátila nejen tím, že z ní vyplývají velmi zajímavé situace, které jsou na první pohled těžko pochopitelné, protože je v běžném životě nevidíme a nesetkáváme se s nimi, ale také proto, že změnila pohled na fyzikální zákony a udělala revoluci ve fyzikálním myšlení.

Chtěl bych poděkovat mému vedoucímu práce Mgr. Lukáši Richterkovi PhD za jeho cenné rady a připomínky. Mé díky také patří mému mladšímu bratru Vítu Palovskému, který mi pomáhal s vytvořením diagramů a s výpočty.

2. PARADOX DVOJČAT

Asi nejznámějším paradoxem teorie relativity, ať už pro laickou nebo odbornou veřejnost, je paradox dvojčat (v určité formulaci také nazývaný paradoxem hodin). Tento paradox je diskutován a probírán v mnoha odborných pracích, článcích, na různých internetových stránkách nebo v učebnicích. S velmi jednoduchým, ale srozumitelným vysvětlením tohoto paradoxu se mohou setkat studenti gymnázií a středních škol v učebnici [1]. Jedná se o myšlenkový pokus, ve kterém vystupují dvojčata, z nichž jedno odletí v raketě do vesmíru a po nějaké době, řekněme dva roky, se zase vrátí zpět. Důležité je, aby raketa, ve které se jedno z dvojčat nachází, letěla velmi rychle, téměř rychlostí světla. Při takových rychlostech se více projevují děje, které se vymykají naší každodenní zkušenosti, jako dilatace času a kontrakce délek. Díky naší každodenní zkušenosti bychom řekli, že až se dvojče z vesmíru vrátí, budou obě stejně stará, ale speciální teorie relativity říká, že tomu tak nebude. Dvojče, které zůstalo na Zemi bude starší. O kolik starší bude záležet na parametrech experimentu.

Na tento problém budeme nahlížet z pohledu dilatace času. Za vztažnou soustavu při řešení tohoto paradoxu zvolíme Zemi. Na Zemi žijí dvojčata A a B a dvojče A se vydá na cestu k hvězdě vzdálené od Země n světelných let a raketa, ve které bude dvojče A cestovat, se bude pohybovat rychlostí v , která je velmi blízká rychlosti světla. Pro obecný výpočet budeme používat vztah pro dilataci času při pohybu rychlostí o velikosti v ve tvaru [2]

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma t', \quad (1)$$

kde t je čas měřený hodinami v klidové soustavě (v soustavě dvojčete B, čili na Zemi), t' je čas měřený hodinami v pohybuující se soustavě (v soustavě dvojčete A, čili v raketě), $\beta = v/c$ je bezrozměrná rychlost a γ je Lorentzův faktor (někdy také γ faktor) [2]

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2)$$

Jádro paradoxu tkví v tomto: protože je pohyb relativní, dvojče B by mohlo říci, že se pohybuje raketa od Země, ale dvojče A by mohlo stejně tak říci, že se dvojče B pohybuje na Zemi od rakety a logická úvaha proto je, že by měla obě dvojčata zestárnout stejně, ale výsledek ukáže, že tato úvaha je zavádějící.

Tento paradox ilustrujme na následujícím příkladu. Uvažujme raketu, která se bude pohybovat rychlostí $v = 0,980c$ a poletí k hvězdě Proxima Centauri vzdálené od Země $4,24 \text{ ly} = 4,01 \cdot 10^{16} \text{ m}$ [11] ($1 \text{ ly} = 9,46 \cdot 10^{15} \text{ m}$) [12]. Vzhledem k tomu, že se raketa pohybuje o dvě procenta pomaleji než světlo, musíme provést výpočet doby letu podle vztahu

$$t = \frac{s}{v}. \quad (3)$$

Po dosažení zjišťujeme, že raketa poletí k Proximě Centauri 4,33 let. Hodiny měřící čas v raketě ovšem naměří čas menší než hodiny na Zemi podle vztahu

$$t' = t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (4)$$

který jsme získali upravením vztahu (1). Odtud dostáváme

$$t' = t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 4,33 \cdot \sqrt{1 - \frac{0,980^2 c^2}{c^2}} \text{ roků} = 0,861 \text{ let.}$$

V tomto případě vyšel gamma faktor podle vztahu (2) $\gamma = 5,03$. Z výsledku vidíme, že dvojče A naměří na svých hodinách v raketě, že cesta na Proximu Centauri bude trvat 0,861 roku. Z Proximy Centauri se bude dvojče A vracet stejnou rychlostí a cesta zpět mu tedy bude trvat také 0,861 roku. Dvojče B se tedy shledá podle jeho hodin se svým dvojčetem za 8,66 roků. Dvojče B bude tedy o 8,66 roků starší, zato dvojče A bude jen o 1,72 roků starší.

Můžeme se taky ptát, k jakému výsledku bychom došli, kdybychom za inerciální vztažnou soustavu považovali kosmickou raketu. Tato úvaha je už od počátku nesprávná. Kdyby totiž byla raketa inerciální vztažnou soustavou, pak by se pro dvojče A dvojče B na Zemi vzdalovalo a poté přibližovalo rychlostí $0,980c$. Bylo by to tedy dvojče B, které by zestárlo o 8,66 roků. Vidíme, že takto to být nemůže, protože se na Zemi setkají a rozdíl stáří sami uvidí. Tato úvaha je chybná proto, že pokud bychom zanedbali vlastní rotaci Země kolem své osy a oběh Země kolem Slunce ($1 \text{ au} \approx 0,000158 \text{ ly}$), tak můžeme Zemi považovat za inerciální vztažnou soustavu, zato raketu, která se musí u hvězdy otočit, za inerciální vztažnou soustavu považovat nemůžeme a nemůžeme tedy tyto dvě soustavy považovat za rovnocenné. Jediný správný úhel pohledu, jak na tento problém nazírat, je, že starší bude vždy dvojče, které zůstane na Zemi.

Paradox dvojčat se dá také graficky ilustrovat pomocí Minkowského diagramu. Tyto diagramy dobře znázorňují události v prostoročasu, respektive v jeho dvourozměrném řezu. Na Minkowského diagramu světočára dvojčete B splývá s osou ct čili s časovou osou. Vzhledem k tomu, že zůstává na Zemi a v prostoru se tedy nepohybuje, zůstává na ose x v poloze 0. Dvojče A se bude pohybovat obecně po křivce, která má počátek v bodě 0 a konec v průsečíku s osou ct (bod C), což je místo setkání se svým dvojčetem, jak ukazuje obrázek 1.

V [3] je tento problém řešen z pohledu paradoxu hodin a současných událostí. Pro výpočet z pohledu soustavy, ve které je raketa v klidu, si rozdělme klidovou soustavu rakety na dvě části. Na část mezi startem a obratem rakety (soustava S') a část mezi obratem a návratem rakety (soustava S''). Soustavy S' a S'' jsou inerciální, ale zároveň různé, takže pojem současnosti je jiný jak mezi nimi, tak v soustavě rakety. Podle [3] platí vztah, že

$$\tau_D = \gamma^{-1} t_D, \quad (5)$$

kde τ_D je čas měřený hodinami H_R v raketě a t_D je čas měřený hodinami H_Z na Zemi což je vlastně dilatace času. Pokud bychom řekli, že událost C v polovině cesty je současná s událostí B, není už současná s událostí B v soustavě S' ani v soustavě S'' (obrázek 2). V soustavě S' nastane dříve/později než událost B. Podle [3] se hodiny H_Z v raketě vůči soustavám S' a S'' pohybují opačnými směry rychlostí u , a proto se opožďují vůči hodinám v soustavách S' a S'' podle vztahu [3]

$$dt(H_Z) = \gamma^{-1} dt', dt(H_Z) = \gamma^{-1} dt'', \quad (6)$$

a proto platí vztahy [3]

$$\Delta t_{AE} = \gamma^{-1} \Delta t'_{AE} = \gamma^{-1} \Delta \tau_{AB}, \quad (7)$$

$$\Delta t_{FD} = \gamma^{-1} \Delta t''_{FD} = \gamma^{-1} \Delta \tau_{BD} \quad (8)$$

a tedy [3]

$$\Delta t_{AE} + \Delta t_{FD} = \gamma^{-1} \Delta \tau_{AD} = \gamma^{-1} \tau_D. \quad (9)$$

Při pohybu tam a zpět je rychlost stejná (symetrie) a událost B je současná s E v soustavě S' a v S'' je současná s událostí F. Pro výpočet musíme ještě vzít do úvahy člen Δt_{EF} což je časová mezera mezi událostmi E a F, a proto musí platit, že [3]

$$t_D = \gamma^{-1} \tau_D + \Delta t_{EF}. \quad (10)$$

Ze symetrie také platí, že [3]

$$\Delta t_{EF} = \Delta t_{EC} + \Delta t_{CF} = 2\Delta t_{EC} = 2\Delta t_{EB}. \quad (11)$$

Podle [3] platí mezi soustavami rakety a Země Lorentzova transformace a musí platit, že

$$\Delta t = \gamma \left(\Delta t' + \frac{u}{c^2} \Delta x' \right). \quad (12)$$

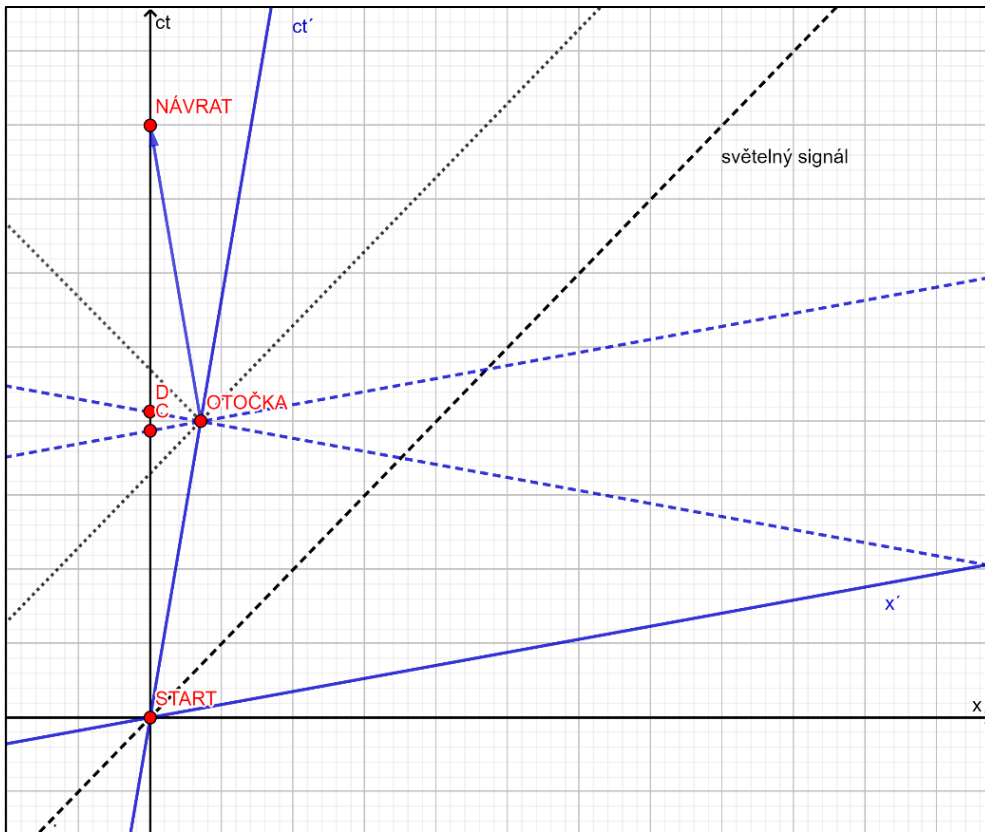
Hodiny H_R se od hodin H_Z v události B vzdálily o hodnotu $u \cdot \frac{1}{2} \tau$, protože jsme definovali, že událost B současná s E je bod obratu a $\Delta t' = 0$. Jakmile tyto hodnoty dosadíme do vztahu (12), dostaneme výraz

$$\Delta t_{EB} = \frac{1}{2} \gamma \beta^2 \tau_D, \quad (13)$$

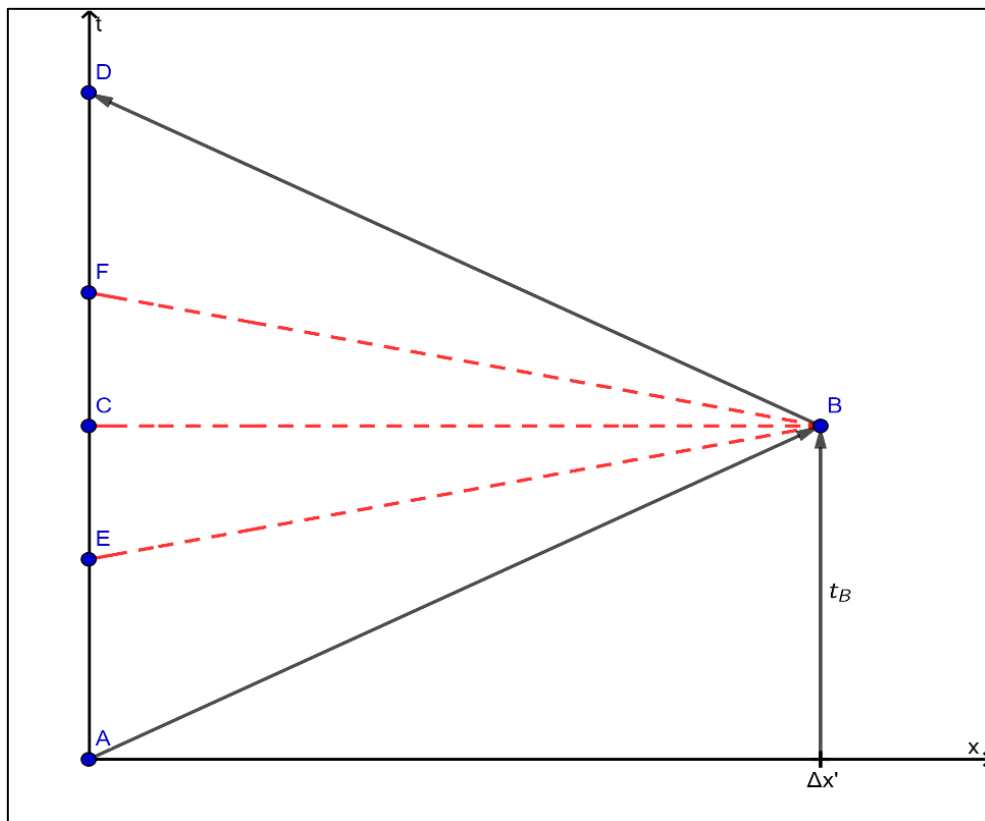
a poté ze vztahu (10)

$$t_D = \gamma^{-1} \tau_D + \gamma \beta^2 \tau_D = \gamma \tau_D. \quad (14)$$

Vidíme, že tento vztah odpovídá vztahu (5) a platí i za započítání mezery a odpovídají tomu, že události současná s B jsou v S' a v S'' různé.



Obr. 1: Minkowského diagram paradoxu dvojčat s obecnými proměnnými



Obr. 2: Minkowského diagram relativnosti současnosti

Nyní budeme brát v tomto paradoxu zřetel na konstantní zrychlení a zpomalení rakety. Dvojče A vyletí ze Země (bod 0) a první čtvrtinu celkové doby cesty vesmírem bude zrychlovat ve své vlastní soustavě $a = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ do bodu 1, jak je znázorněno na obrázku 3. Jakmile dosáhne nejvyšší rychlosti v_{\max} začne se zrychlením a zpomalovat, až se u hvězdy v bodě 2 zastaví. V tento okamžik dosáhne dvojče A největší vzdálenosti od Země x_{\max} . Poté začne znovu zrychlovat zrychlením a na rychlost v_{\max} do bodu 3, a jakmile jí dosáhne začne opět zpomalovat se zrychlením a až do bodu 4 na Zemi. Doba, kterou dvojče A uletí za celou dobu kosmické cesty je t' a protože jde o rovnoměrné zrychlování a zpomalování, čas, který dvojče A urazí mezi dvěma vyznačenými sousedními body bude stejný a je tedy roven $t'/4$ a čas, který prožije dvojče B na Zemi za celou dobu kosmického výletu bude t . Podle [4] je poloha dvojčete B mezi body 0 a 1 dána vztahem

$$x = \frac{c^2}{a} \left[\cosh\left(\frac{at'}{c}\right) - 1 \right]. \quad (15)$$

Jde o tzv. hyperbolický pohyb [2]. Souvislost mezi časy obou dvojčat je dána vztahem [4]

$$t = \frac{c}{a} \sinh\left(\frac{at'}{c}\right). \quad (16)$$

Z výše uvedeného plyne, že doba, kterou dvojče A urazí mezi dvěma vyznačenými sousedními body na obrázku 3 je po dosazení $t'/4$ a úpravě vztahu (15)

$$\frac{t'}{4} = \frac{c}{a} \cosh^{-1} \left[\left(\frac{xa}{c^2} \right) + 1 \right]. \quad (17)$$

Za x dosadíme polovinu vzdálenosti hvězdy $d/2 = 2,01 \cdot 10^{16} \text{ m}$, za zrychlení dosadíme hodnotu $a = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ a zjistíme t'

$$t' = 4 \frac{c}{a} \cosh^{-1} \left(\frac{da}{2c^2} + 1 \right) = 4 \cdot \frac{3,00 \cdot 10^8}{9,81} \cosh^{-1} \left(\frac{2,01 \cdot 10^{16} \cdot 9,81}{2 \cdot 9,00 \cdot 10^{16}} + 1 \right) \text{ s} = 2,24 \cdot 10^8 \text{ s} = 7,10 \text{ let.}$$

Výsledný čas $t'/4$ poté dosadíme do vztahu (16) a zjistíme vlastní čas dvojčete B od odletu do přiletu jeho dvojčete

$$t = 4 \frac{c}{a} \sinh \frac{at'}{4c} = 4 \cdot \frac{3,00 \cdot 10^8}{9,81} \sinh \left(\frac{9,81 \cdot 2,24 \cdot 10^8}{4 \cdot 3 \cdot 10^8} \right) \text{ s} = 3,72 \cdot 10^8 \text{ s} \approx 11,8 \text{ let.}$$

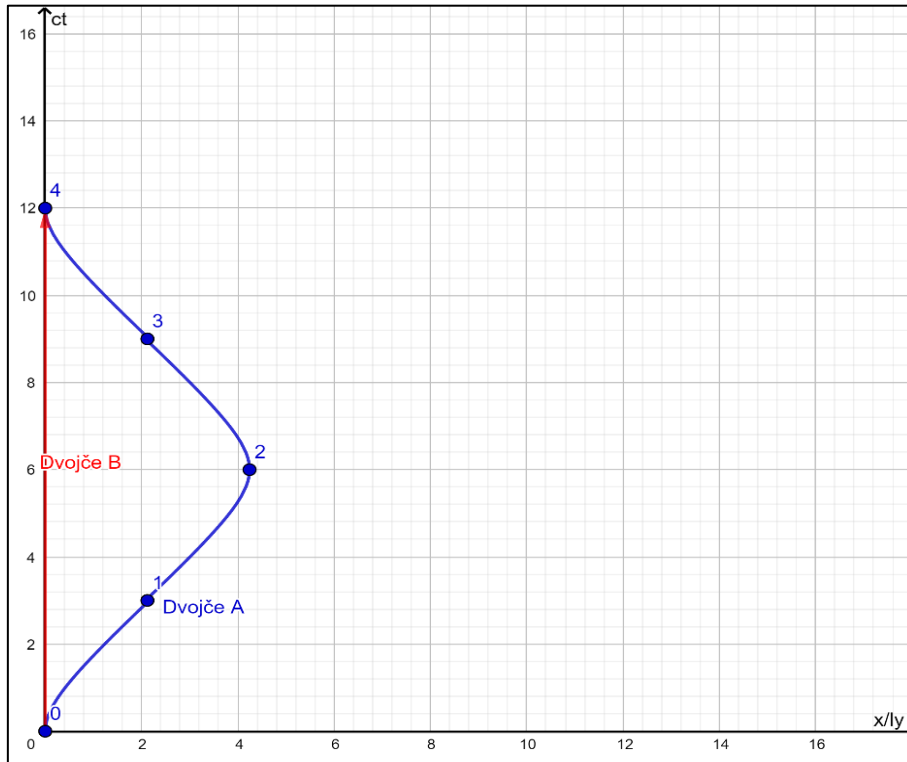
Když budeme v tomto paradoxu uvažovat konstantní zrychlení $a = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ vyjde nám, že dvojčeti A bude trvat cesta na Proximu Centauri a zpět 7,10 let, ale na Zemi mezitím uběhne 11,8 let. Výsledky, ke kterým jsme došli tímto výpočtem se velmi liší od výsledků, které nám vyšly po použití vztahu (4). Tento velký rozdíl můžeme vysvětlit právě uvažováním konstantního zrychlení. Je také správné, že nám vyšly větší hodnoty, protože v prvním případě (bez zrychlení) se dvojče A pohybovalo stále konstantní rychlostí $0,98c$, zatímco teď dvojče A musí teprve na tuto rychlost zrychlit postupným zrychlením. Vzhledem k danému zrychlení $a = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, se raketa v čase $t'/4$ dostane na rychlost danou vztahem podle [4]

$$v_{\max} = c \tanh\left(\frac{at'}{4c}\right). \quad (18)$$

Do vztahu (18) dosadíme a vyjde nám maximální dosažená rychlost v čase $t'/4$

$$v_{\max} = c \tanh\left(\frac{at'}{4c}\right) = 3,00 \cdot 10^8 \cdot \tanh\left(\frac{9,81 \cdot 2,24 \cdot 10^8}{4 \cdot 3,00 \cdot 10^8}\right) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 2,85 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 0,95c.$$

Stejným zrychlením musí poté zpomalit, pak zase zrychlit, a nakonec znovu zpomalit. Na obrázku 3 jsou znázorněny světočáry obou dvojčat. Mezi body 0 a 1 a body 2 a 3 rakety zrychluje, mezi body 1 a 2 a 3 a 4 raketa zpomaluje.



Obr. 3: Světočáry dvojčete A a B

3. PARADOX DVOU VESMÍRNÝCH KOSMICKÝCH LODÍ

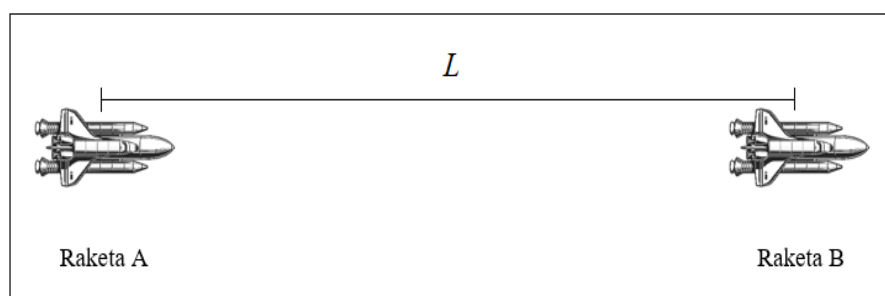
Představme si dvě stejně dlouhé kosmické lodě, které jsou umístěny za sebou a je mezi nimi pevně daná vzdálenost. Obě tyto rakety současně zrychlí ve stejném směru na rychlost o něco menší než rychlost světla a touto konstantní rychlostí se budou obě pohybovat dál. Paradox se zabývá otázkou, jaká bude vzdálenost mezi těmito raketami po dosažení dané rychlosti v soustavě S (soustava, ve které obě lodě zrychlují stejně) a v soustavě S' (soustava raket po zrychlení). Podobným paradoxem jsou Bellovy rakety, který na tento problém nahlíží podobně, ale s pomocí laserů a vlákna [10].

Jedno z možných vysvětlení tohoto paradoxu zpracovali autoři v článku [5]. Představme si kosmickou loď o délce l , která je v klidu na Zemi. Poté začne zrychlovat až dosáhne rychlosti $0,95c$. Touto rychlostí se potom bude pohybovat dále vesmírem. Pro pozorovatele na Zemi by se délka rakety měla změnit podle vztahu pro kontrakci délky [5]

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (19)$$

kde l je délka rakety v soustavě pozorovatele na Zemi, l_0 je délka rakety v její soustavě a v je rychlost rakety vzhledem k pozorovateli. Z tohoto vztahu také vyplývá, že délka rakety l je vždy menší než délka rakety l_0 .

Nyní mějme dvě kosmické lodě o stejné délce l . Tyto rakety jsou umístěny za sebe a vzdálenost mezi nimi je L jak je znázorněno na obrázku 4. Rakety poté začnou současně zrychlovat zrychlením a a současně dosáhnou rychlosti $v = 0,950c$. Rychlostí v se potom budou pohybovat dál.

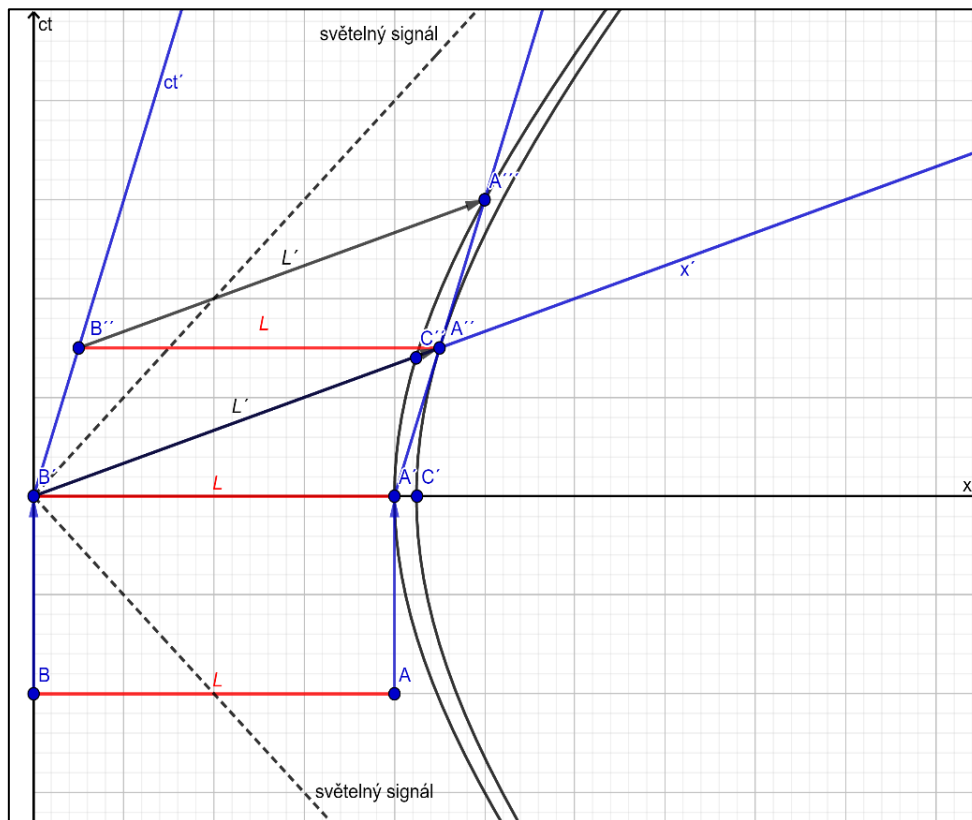


Obr. 4: Rakety A a B umístěné za sebou ve vzdálenosti (v obrázku použit volně dostupný materiál z www.freepik.com)

Otázkou tedy je, jakou vzdálenost mezi raketami po dosažení rychlosti v naměří pozorovatel na Zemi, jakou vzdálenost mezi raketami naměří pozorovatel v soustavě pohybujících se raket a co se stane se vzdáleností mezi nimi?

Tento paradox budeme řešit pomocí časoprostorového diagramu nejprve pro pozorovatele v soustavě S . Pro jednoduchost budeme počítat s tím, že obě rakety na svou stejnou maximální

rychlost zrychlí za velmi malý časový okamžik (např. 0,0001 s). Na obrázku 5 vidíme časoprostorový diagram dráhy obou raket z pohledu pozorovatele v soustavě S . V bodech A' a B' se začnou rakety pohybovat rychlostí v a touto rychlostí pokračují dál. Body A'' a body B'' označují současné události soustavy S' . Pro pozorovatele v soustavě S , vzhledem k vysoké rychlosti rakety a zákonům STR, by se měla délka raket změnit podle vztahu (19), ale z obrázku 5 vidíme, že vzdálenost L mezi raketami zůstává v každém okamžiku stejná.



Obr. 5: Světočáry raket A a B a vzdálenost mezi nimi z pohledu pozorovatele v soustavě S a S'

Pozorovatel v soustavě S' ale události A' a B' jako současné neuvidí. Pro tohoto pozorovatele spojují současné události rovnoběžné přímky s osou x' . Pozorovatel proto vzdálenost mezi raketami uvidí jako vzdálenost $L' = B'A''$. Na první pohled vidíme, že vzdálenost L' je delší než vzdálenost L , ale musíme brát v úvahu, že jednotky v obou soustavách nejsou stejné, a proto nemohou být zákonitě stejné ani vzdálenosti. Pro transformaci délky v soustavách S a S' použijeme transformaci z [5]

$$x^2 - (ct)^2 = (x')^2 - (ct')^2 = L'^2. \quad (20)$$

Tuto rovnici můžeme zobrazit jako rovnici hyperboly, která prochází bodem A'' a asymptoticky se blíží ke světelnému signálu. Hyperbola protíná osu x v bodě C' . Protože se jedná o transformační hyperbolu platí pro $t' = 0$, že $x' = L'$ a pro $t = 0$ platí, že $x = L'$. V diagramu na

obrázku 5 tedy platí, že vzdálenost bodů B' a C' je vzdálenost L'. Z obrázku je také zřejmé, že $|B'C'| > |B'A'|$, a proto platí, že $L' > L$. Podle [5] se dá souvislost mezi vzdálenostmi vypočítat ze vztahu pomocí Lorentzovy transformace

$$L' = \frac{L}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (21)$$

Dosažením do vztahu (21) zjistíme konkrétní závislost mezi L a L' pro naši rychlost 0,950c

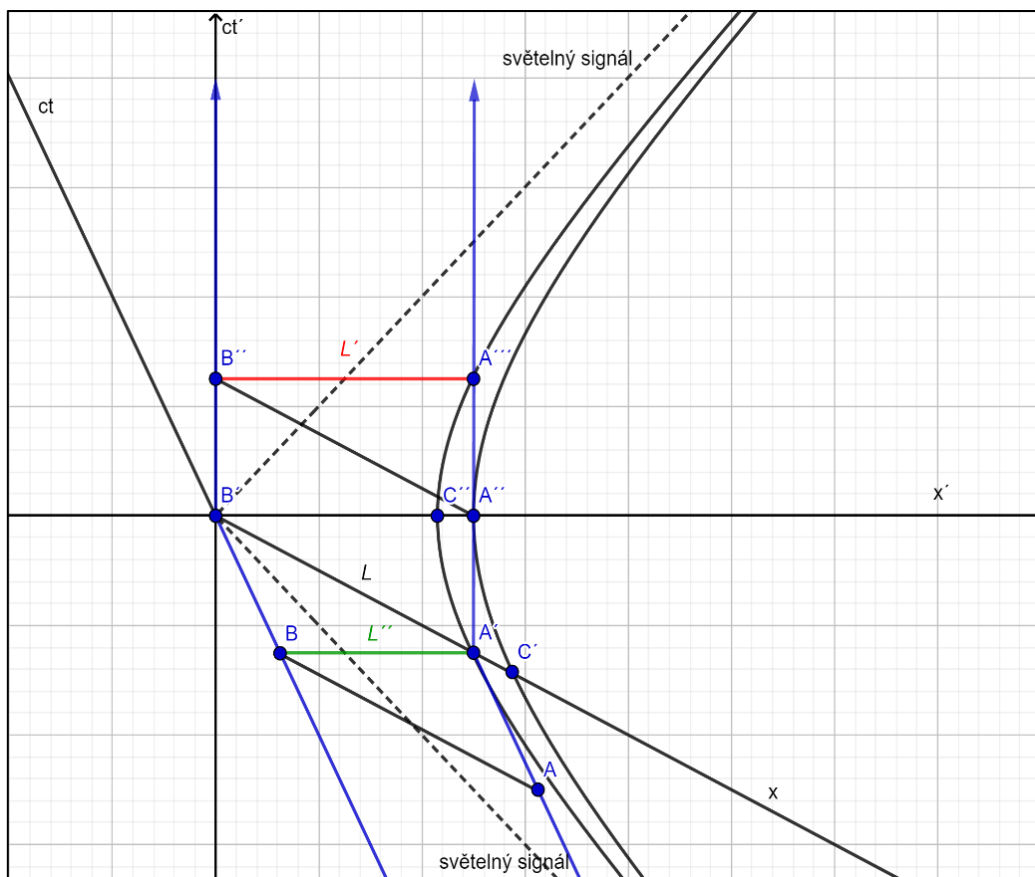
$$L' = \frac{L}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{L}{\sqrt{1 - \frac{0,950^2 c^2}{c^2}}} \approx 3,20L.$$

Z obrázku 5 jasně vyplývá, že pro pozorovatele v soustavě S' je vzdálenost L' mezi raketami větší než pro pozorovatele v soustavě S.

Nyní jsme dokázali, že vzdálenost mezi raketami by před a po zrychlení měla zůstat v soustavě S konstantní. Zatím jsme ale nikde neviděli kontrakci délky. Mějme dvě vesmírné stanice a v každé z nich se bude nacházet raketa. Vzdálenost mezi raketami v soustavě S bude L a v soustavě S' to bude L". Na obrázku 6 se z pohledu pozorovatele v soustavě S' rakety stejně jako vesmírné stanice pohybují doleva z bodu A do bodu A' (stanice s raketou A) a z bodu B do bodu B' (stanice raketou B). V bodě A' se raketa procházející bodem A zastaví a později se v bodě B' zastaví raketa, která prochází bodem B. Kvůli tomuto zpoždění se pro pozorovatele v S' vzdálenost mezi raketami zvětší. Vzdálenost L" mezi raketami před zastavením, která je stejná jako vzdálenost mezi stanicemi pro pozorovatele v S', je tedy dána body A' a B.

Abychom mohli tuto vzdálenost vidět graficky použijeme transformaci (20). Tuto rovnici můžeme považovat za hyperbolu, která prochází bodem A" a bodem A' a osu x' protíná v bodě C". Vzdálenost mezi raketami L pro pozorovatele v soustavě S je dána body A'B' = C"B', která je očividně větší než vzdálenost L", která je dána body A'B. Vzhledem k výsledkům dojdeme k závěru, že se vzdálenost mezi raketami změnila podle vztahu (19) pro kontrakci délky.

Shrnutím tohoto paradoxu tedy je, že vzdálenost raket se z pohledu pozorovatele v soustavě S nemění, ale pro pozorovatele v soustavě S' se vzdálenost L mezi dvěma raketami, po zrychlení na maximální rychlost, zvětšila podle vztahu (21) 3,20krát.



Obr. 6: Světočáry raket a vzdálenost mezi nimi z pohledu pozorovatele v soustavě S a S'

4. PARADOX VOZÍKU

Tento paradox zpracovali autoři v článku [6]. Uvažujme vozík s otáčejícími se koly, který se pohybuje relativistickou rychlostí. Paradox vozíku v sobě zahrnuje jak posuvný pohyb vozíku, tak rotační pohyb vozíkových kol. Příklad vozíku objasňuje důležitost zohlednění důsledků vyplývajících z STR a jejich přímý dopad na fyzické objekty. Také poskytuje metodu pro měření zvětšení délky obvodu kola s konstantním poloměrem a zrychlujícím rotačním pohybem. Ve článku [6] jsou uvedena dvě řešení, vycházejí přímo z kontrakce délky a ukáží, že vzdálenost dotyku konkrétního bodu na otáčejícím se kole s kolejnicemi a následujícího dotyku téhož bodu s kolejnicemi se nerovná vztahu

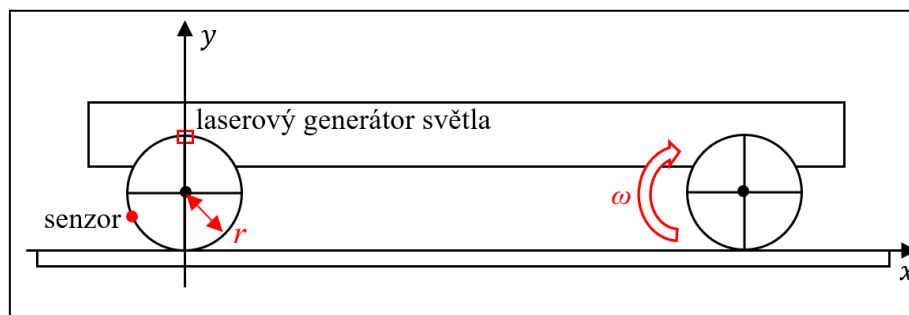
$$l = 2\pi r, \quad (22)$$

kde r je poloměr kola.

Představme si pozorovatele na pohybujícím vozíku (inerciální vztažná soustava S) který na kolejích neprokluzuje. Po zapnutí pohonu se kola vozíku roztočí úhlovou rychlostí ω . Po dosažení maximální úhlové rychlosti ω se okamžitá rychlost v okraje kola rovná [6]

$$v = r\omega, \quad (23)$$

kde r je poloměr kola a ω je maximální úhlová rychlost. Vzhledem k tomu, že hmotný objekt nemůže překročit rychlost světla c , tak rychlost okraje kola v musí být menší než c . Z toho plyne, že ω musí být menší než c/r . Jestliže se úhlová rychlost otáčení kola se blíží hodnotě c/r , posuvná rychlost okraje kola se blíží rychlosti světla c . Protože kola na kolejích neprokluzují, pozorovateli na vozíku se tím pádem bude zdát, že se rychlost pohybu kolejí bude blížit c . Na rámu vozíku je umístěn laserový generátor a na ráfku kola je umístěn světelný senzor, jak je ukázáno na obrázku 7.



Obr. 7: Vozík s laserovým senzorem pohybu

Pokaždé když senzor na ráfku kola projede světlem laserového generátoru detekuje signál. Laser a signál fungují jako tikající hodiny. Jestliže kolo udělá f otáček za sekundu je frekvence otáčejícího pohybu kol podle [6] dána vztahem

$$f = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (24)$$

Rychlost ráfku a kolejnice vzhledem k vozíku vyjádřená pomocí frekvence je tedy

$$v = 2\pi r f. \quad (25)$$

Maximální frekvence signálu se blíží výrazu [6]

$$f = \frac{c}{2\pi r}. \quad (26)$$

Pozorovatel v soustavě kolejí (soustava S'), což je také inerciální vztažná soustava, se musí shodnout s pozorovatelem v soustavě vozíku na vzájemné relativní rychlosti, která musí být tedy pro oba v . Pro frekvenci signálů v soustavě S' platí podle [6] dilatace času vztah

$$f' = \frac{f}{\gamma} = \frac{v}{2\pi r \gamma}, \quad (27)$$

kde γ je Lorentzův faktor. Jestliže se tedy rychlost vozíku blíží rychlosti světla, frekvence signálu se blíží nule. Jestliže se f' blíží nule, znamená to, že by se kolo vozíku mělo v soustavě S' přestat otáčet. V důsledku toho se zdá, jako by se vozík po kolejích pohyboval s prokluzováním kol. My jsme ale uvažovali pohyb vozíku bez prokluzování. Účinek prokluzování kol je absolutní a není relativní, proto v soustavě S' nemůže dojít k prokluzu, protože v soustavě S kola neprokluzují. To je tzv. paradox vozíku. Můžeme ho ilustrovat dvěma způsoby. V jednom budeme počítat s koly s konstantním poloměrem r a ve druhém případě můžeme počítat se zmenšeným poloměrem kol. Oba tyto způsoby pouze demonstrují účinky vyplývající z STR, ale nemusejí být v praxi realizovatelné kvůli vlastnostem reálných materiálů.

4.1 ŘEŠENÍ PARADOXU VOZÍKU S KOLY S KONSTANTNÍM POLOMĚREM

Problémem se v minulosti zabývali mnozí fyzikové jako např. Max Planck [6], který naznačil, že by se měl tento paradox řešit z pohledu pružné deformace tělesa. Definujeme zkrácení kol podle kontrakce délky v radiálním směru. Zavedeme osu x podél vodorovné kolejnice a osu y ve svislém směru (obrázek 7). Počátek souřadné soustavy souřadnic bude procházet bodem P , což je spodní bod levého kola v čase $t = 0$ v soustavě S .

Podle [6] má v čase t tento bod souřadnice

$$x = r \sin(\omega t), \quad (28)$$

$$y = r[1 - \cos(\omega t)]. \quad (29)$$

Pomocí Lorentzovy transformace zjistíme čas t' a souřadnice x' a y' [6]

$$t' = \gamma \left[t - \left(\frac{v}{c^2} \right) x \right], \quad (30)$$

$$x' = \gamma(x - vt), \quad (31)$$

$$y' = y, \quad (32)$$

kde $v = \omega r$. Budeme také pro výpočet potřebovat vyjádřit čas t ze vztahu (30)

$$t = \gamma \left[t' + \left(\frac{v}{c^2} \right) x' \right]. \quad (33)$$

Vztahy (28) a (29) dosadíme do vztahů (30), (31) a (32) najdeme požadované rovnice:

$$x' = r \left\{ \gamma^{-1} \sin \left[\gamma \omega \left(t' + \frac{r\omega}{c^2} x' \right) \right] - \omega t' \right\}, \quad (34)$$

$$y' = r \left\{ 1 - \cos \left[\gamma \omega \left(t' + \frac{r\omega}{c^2} x' \right) \right] \right\}. \quad (35)$$

Nyní najdeme vzdálenost l' mezi body dotyku bodu P s kolejnicí. Tuto vzdálenost najdeme, pokud v čase t' nastavíme hodnoty $y' = 0$ a $x' = -l'$. Tyto hodnoty dosadíme do vztahu (35) a hledaná hodnota bude

$$\gamma \omega \left(t' - \frac{r\omega}{c^2} l' \right) = 2\pi. \quad (36)$$

Dosazením tohoto výrazu do vztahů (34) a (35) nám vyjde vztah pro l'

$$l' = \gamma 2\pi r. \quad (37)$$

Ze vztahů (23) a (27) vyplývá, že frekvence kola měřená v soustavě S' souvisí s úhlovou rychlostí kola měřené v soustavě S takto

$$f' = \gamma^{-1} \frac{\omega}{2\pi}. \quad (38)$$

Protože jedna otáčka kola odpovídá zvětšení úhlu o 2π jak v soustavě S , tak v soustavě S' , úhlová rychlost ω' podle [6] závisí na frekvenci f' tímto vztahem

$$\omega' = 2\pi f'. \quad (39)$$

Vztahy (38) a (39) vedou k

$$\omega' = \gamma^{-1} \omega, \quad (40)$$

a pokud položíme $\omega_c \equiv c/r$ pak podle [6]

$$\omega' = \omega \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2}. \quad (41)$$

Na obrázku 8 je znázorněn vztah (41) pro $\omega_c = \text{konst.}$ V soustavě S' vidíme, že se úhlová rychlost zvyšuje z 0, když je vozík v klidu, na maximální hodnotu $\omega'_{\max} = \omega_c/2$, když $\omega = \omega_c/\sqrt{2}$. Když se rychlost vozíku přibližuje c , úhlová rychlost klesá k 0 při $r\omega = c$. V soustavě S' je rychlost vozíku podle [6]

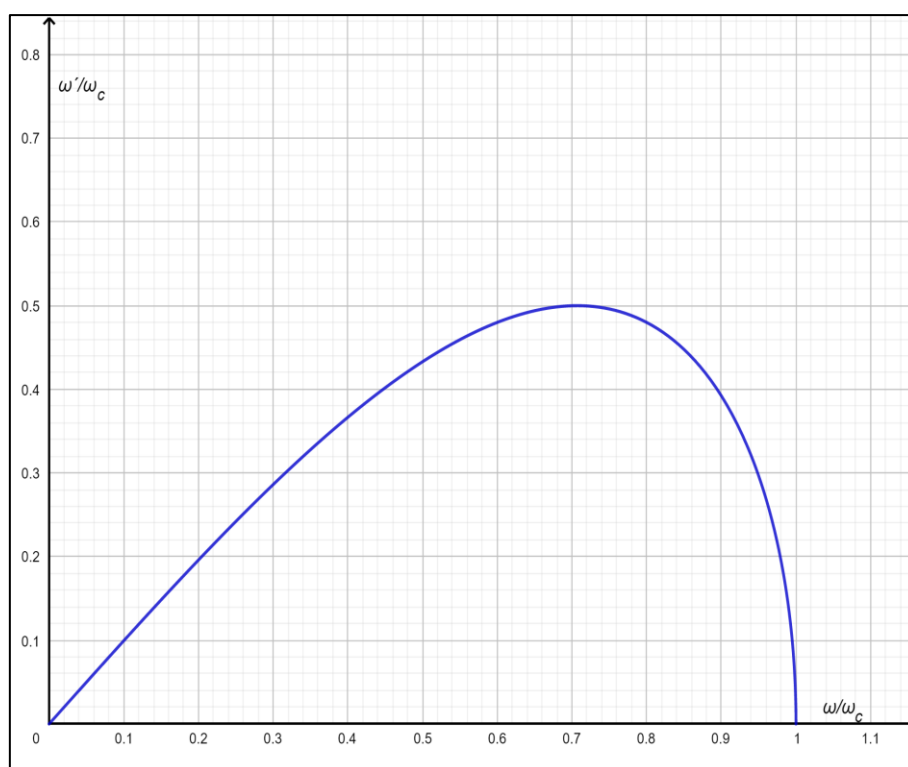
$$v' = \gamma r \omega' = r\omega = v, \quad (42)$$

což je v souladu s relativitou pohybu, jinými slovy že v soustavě kolejí pozorovatel vidí jet vozík stejnou rychlostí jako vidí pozorovatel ve vozíku vzdalovat se koleje. Vztahy uvedené v rovnicích (37), (41) a (42) jsou hlavní body řešení paradoxu vozíku s koly s konstantním poloměrem. Obvod rotujícího okraje kola je sice oproti klidové délce $2\pi r$ v S' prodloužen na l' , ale odvaluje se po koleji s menší frekvencí a nedochází k prokluzování kol, i když se úhlová rychlost kol blíží 0 když se rychlost vozíku blíží c .

V tomto řešení jsme tedy došli k závěru, že délka obvodu kol vozíku, jehož rychlost se blíží c , se blíží nekonečnu.

4.2 ŘEŠENÍ PARADOXU VOZÍKU S KOLY SE ZKRACUJÍCÍM SE POLOMĚREM

Nyní si představme, že bude senzor detekovat signál pokaždé, když se dotkne kolejí. Paradoxem bylo, že v soustavě kolejí S' se úhlová rychlost kol blížíla nule, pokud se rychlost vozíku blížíla c . Tak by se mohlo zdát, že kola prokluzují, ale definovali jsme, že v soustavě vozíku S k prokluzování nedochází a tento jev je invariantní pro obě soustavy čili pokud neprokluzuje v jedné soustavě, nemůže prokluzovat ani v soustavě druhé. V části 3.1 jsme tento paradox vyřešili tím, že jsme předpokládali, že délka obvodu kol se s rychlostí vozíku blížící se k c blíží nekonečnu. Proto v soustavě S' nedochází k prokluzu, i když se úhlová rychlost kola blíží nule. V tomto řešení jsme uvažovali vozík s koly s konstantním poloměrem.



Obr. 8: Úhlová rychlost kol vozíku v soustavě S' jako funkce úhlové rychlosti kol vozíku v soustavě S

Nyní si představme, že kolo má dovoleno se smršťovat. Se zrychlováním vozíku a při jeho rozjíždění a se zvětšováním délky obvodu se v ráfku kol začne objevovat tangenciální napětí. Představme si, že se kolo může volně smršťovat v radiálním směru (může měnit poloměr) a toto smršťování nepovede k žádnému napětí. Klidová délka ráfku musí poté během zrychlení vozíku zůstat konstantní. To znamená, že délka obvodu ráfku i poloměr kol podléhá Lorentzově

kontrakci při přechodu do S' . Výsledkem je, že se kola budou mít nekonečně malý poloměr, jestliže se bude rychlost vozíku blížit c .

Tím ale vyvstává otázka, zda by se vozík s nekonečně malými koly zastavil. Důvodem, proč se vozík nezastaví bude to, že se poloměr ráfku nekonečně zmenší v podmínce $r\omega \rightarrow c$.

Nyní popíšeme točící se kola v soustavě S (soustava vozíku). Pro obvodovou rychlost kol platí vztah (23), kde $r = r_0/\gamma$ a r_0 je poloměr kol v klidu.

Pro úhlovou rychlost poté podle [6] platí

$$\omega = \frac{\gamma v}{r_0}. \quad (43)$$

Ze vztahu (43) vidíme, že úhlová rychlost musí nabývat nekonečně velkých hodnot, když se rychlost vozíku blíží rychlosti světla. V soustavě S' se vzdálenost mezi dvěma doteky stejných bodů na kole s koleji bude řídit vztahem (37)

$$l' = \gamma 2\pi r = 2\pi r_0. \quad (44)$$

Jak si můžeme všimnout, tato vzdálenost je nezávislá na rychlosti vozíku. V soustavě S' zůstává úhlová rychlost konečná, i když se rychlost vozíku blíží c , a i když mají kola nekonečně malý poloměr. Pro úhlovou rychlost v této soustavě platí vztah

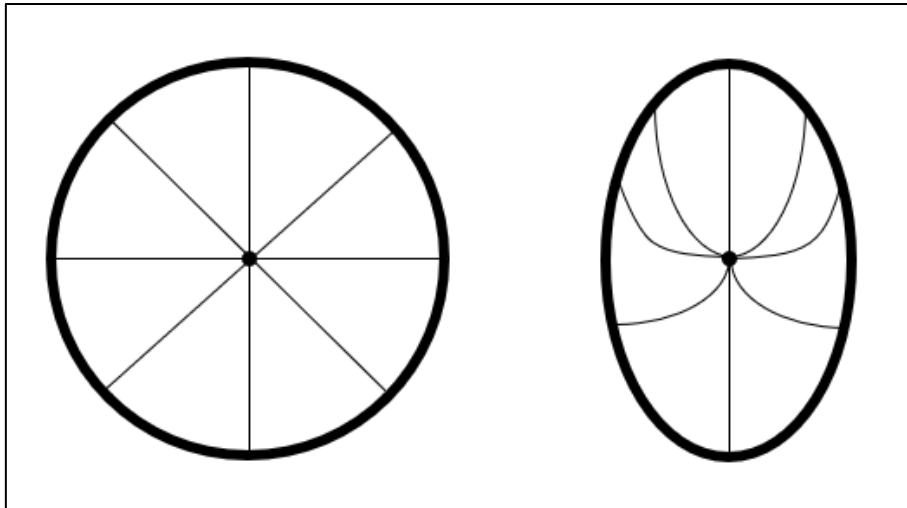
$$\omega' = \gamma^{-1} \omega = \frac{v}{r_0}. \quad (45)$$

Z tohoto vztahu můžeme vidět, že pokud se rychlost vozíku blíží $v \rightarrow c$, vyjde nám konečná hodnota úhlové rychlosti.

Závěr tohoto řešení tedy je, že i když mají kola vozíku v soustavě S' nekonečně malý poloměr, stále nedochází k prokluzování.

4.3 ZÚŽENÍ KOL VOZÍKU DO TVARU ELIPSY

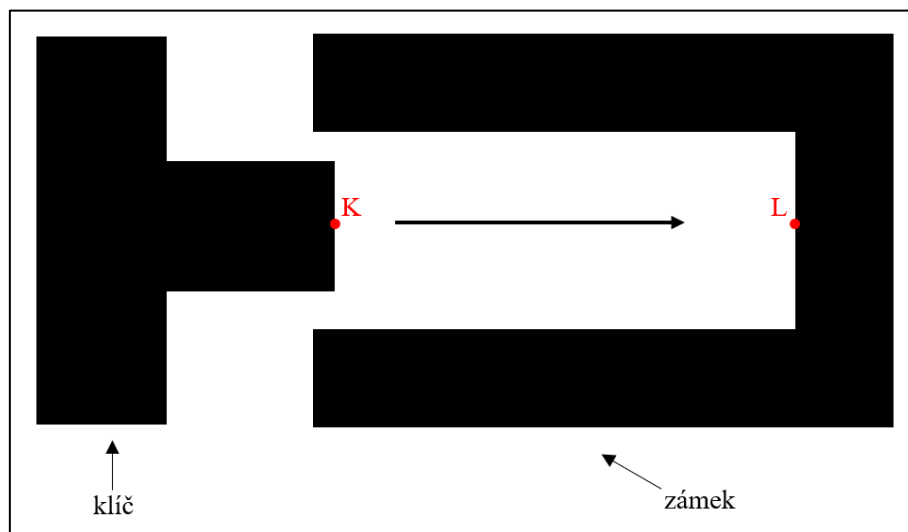
Na základě znalostí kontrakce délky v STR můžeme říci, že pro pozorovatele v soustavě kolejí (soustava S') se všechny kruhová kola vozíku protáhla do tvaru elipsy (obrázek 9). Pokud se rychlost vozíku limitně přiblíží rychlosti c , pak se tvar elipsy bude blížit úsečce o délce $2r$ a obvod se poté rovná $4r$, což je menší hodnota než obvod původního kruhu $2\pi r$. Můžeme si všimnout toho, že vozík po jedné otočce kola ujede menší vzdálenost, než kdyby měl kola kruhová o poloměru $2\pi r$.



Obr. 9: Vlevo je vyobrazeno nerotujícího kolo a vpravo rotující kolo, které se pohybuje rychlostí, která se blíží c (nakresleno podle [6])

5. PARADOX KLÍČE A ZÁMKU

Představme si následující situaci. Zámek ve tvaru U se dá otevřít klíčem ve tvaru T, jak je ukázáno na obrázku 10. Klíč je ovšem kratší, než aby mohl být do zámku zasunut celý. Zámek se ale otevře jen tehdy, pokud se bod K dotkne bodu L, ve kterém je umístěno tlačítko T. Nyní si představme, že do sebe zapadnou relativistickou rychlostí. Z pohledu klíče se zámek podle Lorentzovy kontrakce zmenší, takže do něj bude moci klíč zapadnout, ale z pohledu zámku se ovšem podle Lorentzovy kontrakce zmenší klíč, takže se jeho velikost ještě zmenší a body K a L se nemůžou dotknout. V tomto paradoxu, jde o to, že v jedné inerciální soustavě k zapadnutí klíče do zámku dojde, zatímco v druhé ne.



Obr. 10: Zámek a klíč

Důležité je si také uvědomit, že zapadnutí klíče do zámku je objektivní událostí, na které se musí shodnout všichni pozorovatelé. Řešení tohoto paradoxu spočívá v konečné rychlosti šíření informace, která prochází klíčem. Pro jednoduchost definujeme rychlost informace jako rychlost c a také definujeme, že jsou klíč i zámek dokonale tuhá nerozbitná tělesa čili že mají nekonečné napětí. Jakmile hroty zámku narazí na zadní část klíče, zadní část klíče “informuje” rychlostí světla přední část klíče že se musí zastavit. Než se informace o zastavení dostane na druhý konec klíče, tak se špička klíče pohybuje stále dál směrem k bodu L.

5.1 RYCHLOST PŘENOSU INFORMACE V TYČI

Abychom Lorentzovu kontrakci délky a přenos informace pochopili, ukážeme její důsledky na následujícím příkladu. Předpokládejme tyč o délce l letící kolem pozorovatele rychlostí v a když kolem pozorovatele prolétá, chytí ji za její zadní část a tyč se okamžitě zastaví (obrázek 15a).

Za předpokladu, že se rychlost informace, která probíhá od zadní části tyče do přední rovná rychlosti světla, platí pro dobu této informace podle [7] vztah

$$t = \frac{l}{(c-v)\gamma}, \quad (46)$$

kde je γ Lorentzův faktor. Pro vzdálenost, kterou za tento čas urazí tyč platí podle [7] vztah

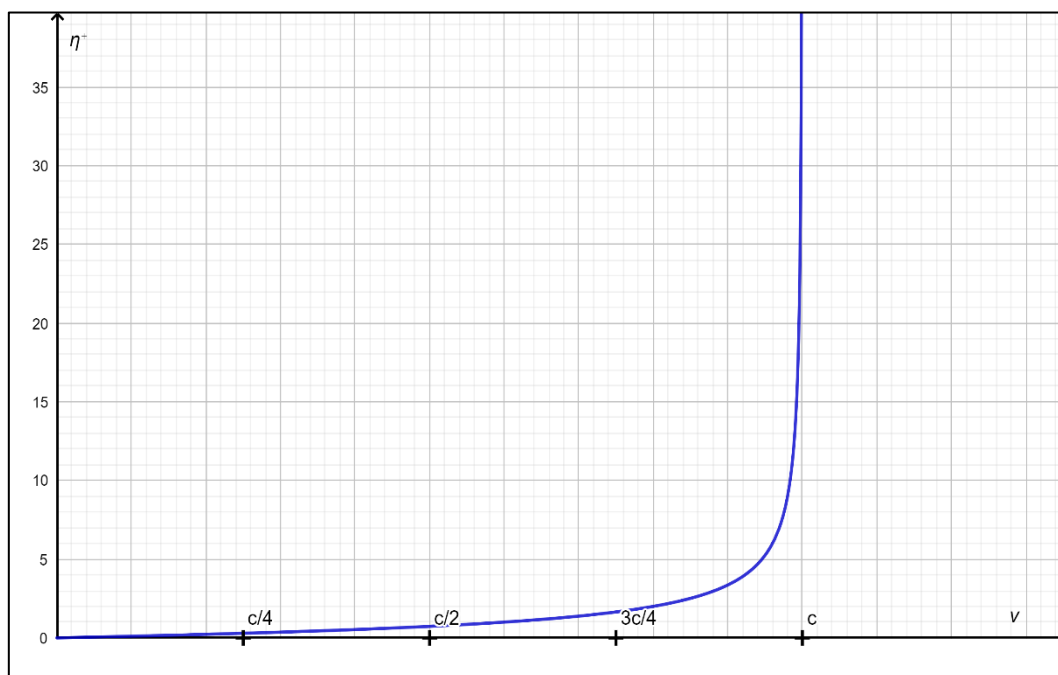
$$vt = \frac{vl}{(c-v)\gamma}. \quad (47)$$

Koeficient prodloužení, který je definovaný jako rozdíl mezi maximální délkou tyče a délkou, kterou nakonec bude mít, bude podle [7]

$$\eta^+ \equiv \frac{1}{l} \left(vt + \frac{l}{\gamma_0} - \frac{l}{\gamma_f} \right), \quad (48)$$

kde γ_0 je počáteční hodnota Lorentzova faktoru, γ_f je konečná hodnota Lorentzova faktoru a v je velikost změny rychlosti tyče. Pro naši úvahu je $\gamma_f = 1$ a $\gamma_0 = \sqrt{(1 - v^2/c^2)}$. Poté bude podle [7] platit vztah (48), který je pro $x > 0$ vykreslen na obrázku 11

$$\eta^+ = \frac{1}{l} (ct - l) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{c}{c-v} - 1. \quad (49)$$



Obr. 11: Graf závislosti koeficientu prodloužení η^+ na rychlosti v

Z obrázku 11 vyplývá, že se může tyč teoreticky prodloužit do nekonečna. Teď si představme, že je tyč v klidu, pozorovatel ji chytne za její přední část a trhne s ní tak silně, že tyč okamžitě zrychlí na rychlost v (obrázek 15b).

Čas, který bude informace potřebovat pro přesun z přední části tyče k zadní části, bude podle

$$t = \frac{l}{c}. \quad (50)$$

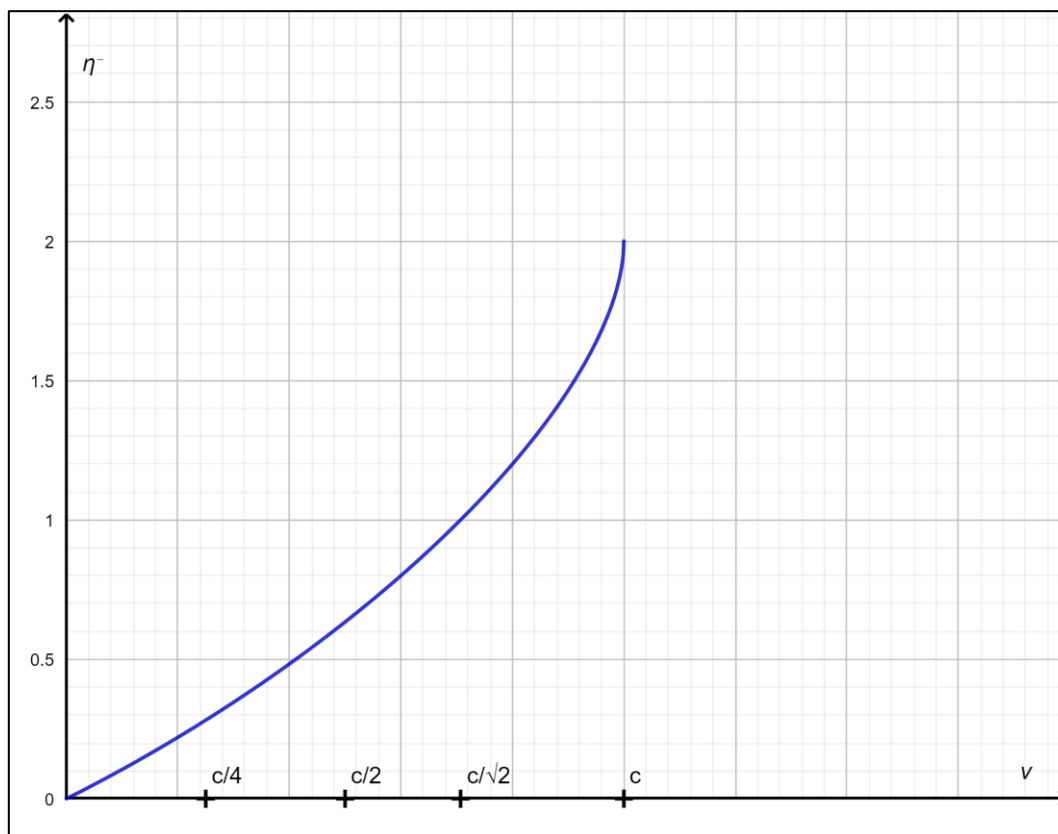
Tyč během této doby urazí podle [7] vzdálenost

$$vt = \frac{vl}{c}. \quad (51)$$

Pro tento případ vyjde podle [7] koeficient prodloužení

$$\eta^- = \frac{1}{l} \left(\frac{vl}{c} + l - \frac{l}{\gamma} \right) = \frac{v}{c} + 1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{\eta^+}{\gamma}, \quad (52)$$

a graf této závislosti je vykreslen na obrázku 11.



Obr. 12: Graf závislosti koeficientu prodloužení η^- na rychlosti v

Nyní si představme, že přední část tyče, která kolem pozorovatele prolétá vysokou rychlostí, pozorovatel zastaví dlaní (obrázek 15c). Opět bude informace tyčí procházet rychlostí světla a čas, za jaký se informace dostane z přední části na zadní je dán podle [7] vztahem

$$t = \frac{l}{(c+v)\gamma}. \quad (53)$$

Vzdálenost, kterou za tuto dobu tyč urazí je podle [7] dána vztahem

$$vt = \frac{vl}{(c+v)\gamma}. \quad (54)$$

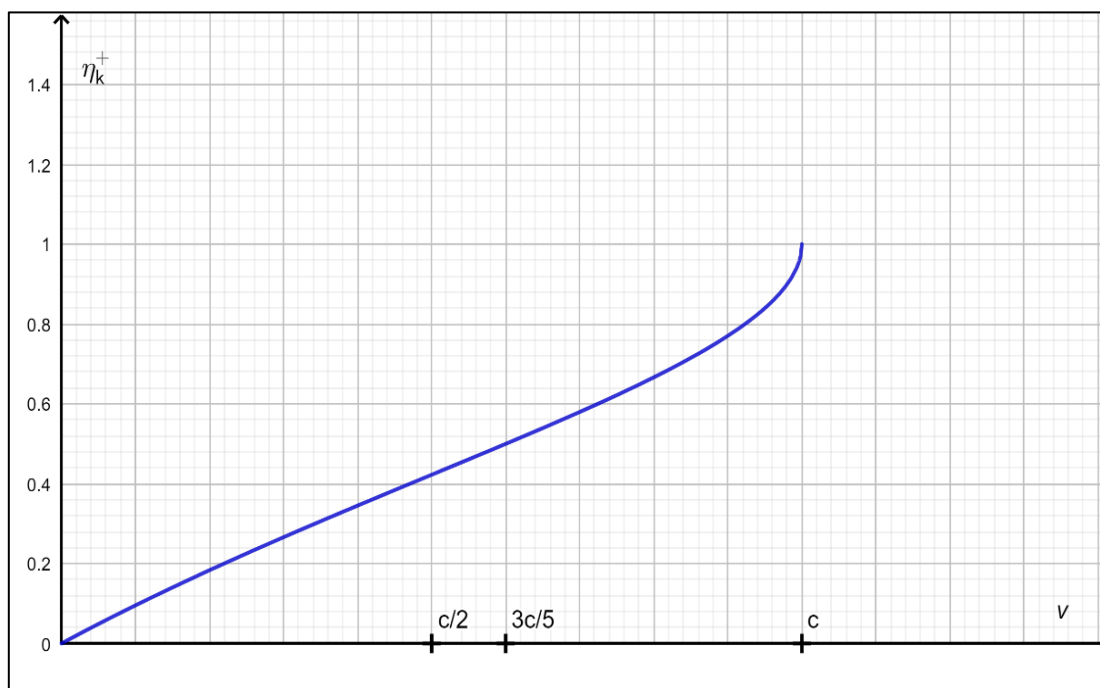
Z tohoto vztahu je jasné, že je tyč kratší než l/γ a můžeme o ní říct, že je stačena. Na rozdíl od předchozích případů, zavedeme koeficient komprese [7], který pro tento případ definujeme jako délku tyče zmenšenou o minimální délku tyče

$$\eta_k^+ \equiv \frac{1}{l} \left[\frac{l}{\gamma_f} - \left(\frac{l}{\gamma_0} - vt \right) \right]. \quad (55)$$

Pro naši úvahu platí opět $\gamma_f = 1$ a $\gamma_0 = \sqrt{1 - v^2/c^2}$. Pro tento případ platí vztah (55)

$$\eta_k^+ \equiv \frac{1}{l} (l - ct) = 1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{c}{c+v}, \quad (56)$$

a je vykreslen na obrázku 13.



Obr. 13: Graf závislosti koeficientu komprese η_k^+ na rychlosti v

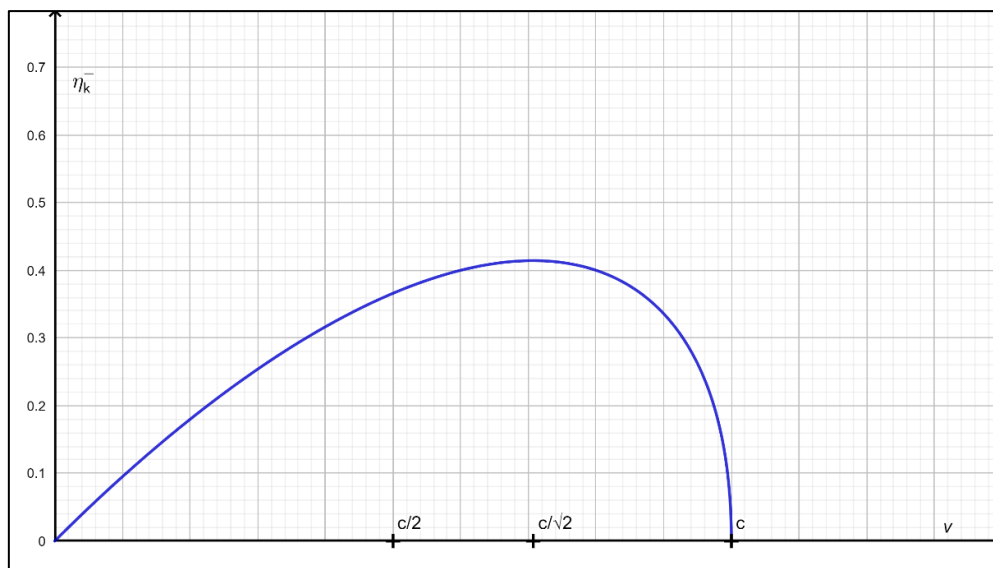
Nakonec si představme, že na zadní konec tyče v klidu pozorovatel zatlačí na její zadní část (obrázek 15d). Doba, za kterou se informace dostane ze zadní části k přední je dána vztahem (50) a vzdálenost, kterou za tento čas tyč urazí je dána vztahem (51) a koeficient komprese je podle [7]

$$\eta_k^- = \frac{1}{l} \left[\frac{l}{\gamma} - \left(l - \frac{vl}{c} \right) \right] = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{v}{c} - 1 = \frac{\eta_k^+}{\gamma}, \quad (57)$$

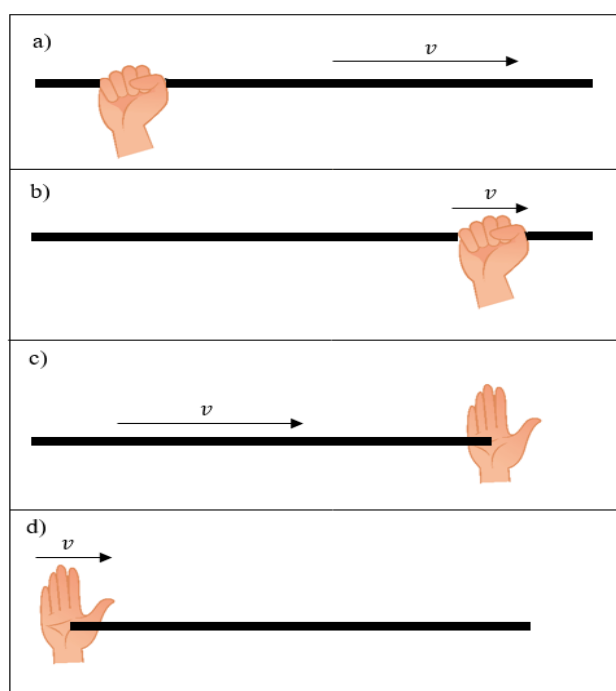
a je vykreslen na obrázku 14.

5.2 ŘEŠENÍ PARADOXU KLÍČE A ZÁMKU

V předchozí části jsme ukázali, jaká je rychlost šíření informace v tyči za různých podmínek. Nyní tyto znalosti aplikujeme na paradox klíče a zámku. Ukážeme si, že pokud klíč dosáhne dostatečné rychlosti, díky které dokáže zmáčknout bod L na obrázku 10 ve své klidové soustavě pak dosáhne bodu L i v soustavě zámku



Obr. 14: Graf závislosti koeficientu komprese η_k na rychlosti v

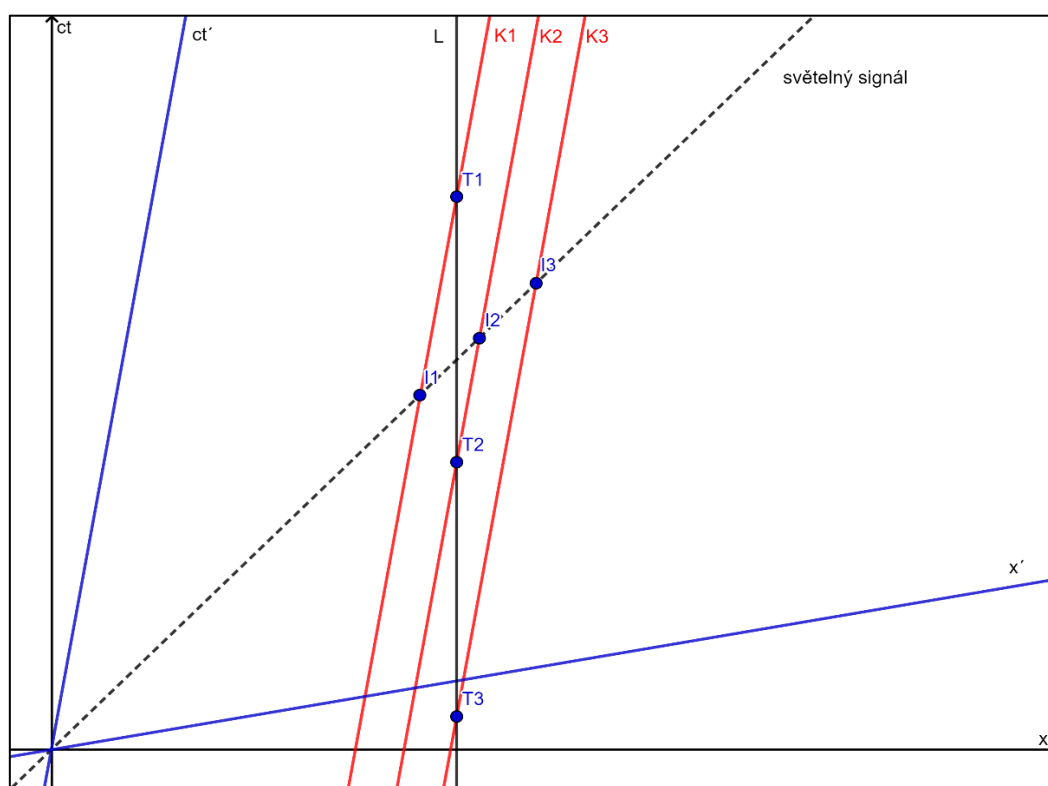


Obr. 15: a) tyč je v pohybu a pozorovatel ji uvede okamžitě do klidu za její zadní konec, b) tyč je v klidu a pozorovatel ji uvede okamžitě do pohybu za její přední konec, c) tyč je v pohybu a pozorovatel ji okamžitě zastaví za její přední konec, d) tyč je v klidu a pozorovatel ji okamžitě uvede do pohybu za její zadní konec L (v obrázku použit volně dostupný materiál z www.freepik.com)

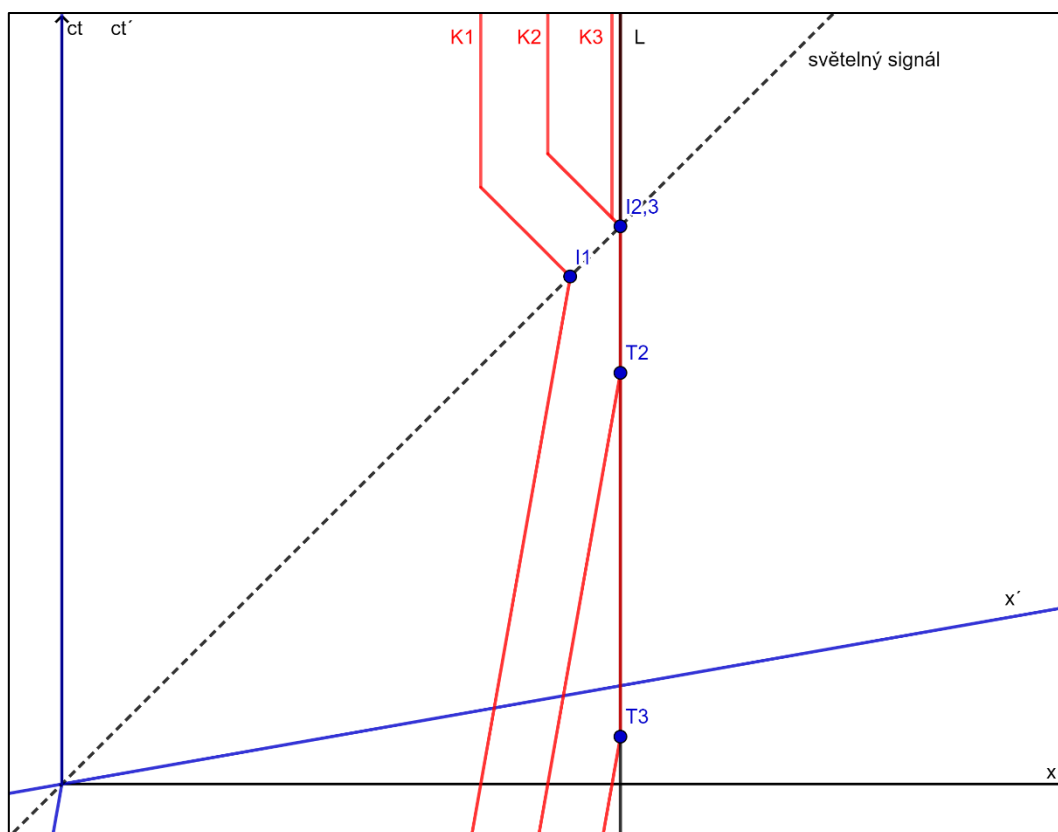
Jedna z možností, jak tento paradox vyřešit, je použití Minkowského diagramu. Na obrázku 15 jsou znázorněny tři možné délky klíče bez kolize se zámkem. Poloha tlačítka na zámku je $L = x$. Délka klíče K_1 získává informaci o zastavení (událost I_1) předtím, než se dotkne tlačítka (událost T_1). Z toho můžeme usoudit, že se délka klíče K_1 nikdy tlačítka nedotkne. Délka klíče K_2 na druhou stranu dosáhne tlačítka (událost T_2) dříve, než se informace I_2 dostane na hrot klíče. Klíč délky K_3 dosáhne tlačítka (událost T_3) ještě předtím, než se zadní část klíče dotkne hrotů zámku v soustavě klíče.

Na obrázku 16 je ukázán Minkowského diagram, do kterého je započítána srážka klíče a zámku. Pro jednoduchost předpokládáme, že se při srážce zámek nepohne. Z obrázku 16 můžeme vyčíst, že klíč délky K_1 se nikdy tlačítka nedotkne, zatímco K_2 a K_3 ano i přes to, že byly v klidu kratší než délka zámku. Bod I_1 znázorňuje událost, kdy informace o zastavení zadního konce klíče dosáhne K_1 a body I_2 a I_3 jsou body, ve kterých informace dosáhne K_2 a K_3 ; v těchto případech k tomu dojde až po zmáčknutí tlačítka. Pokud bychom nebrali v úvahu rychlost přenosu informace, tlačítko by stisknul pouze délkový režim K_3 . V našem případě se ovšem informace o zastavení klíče šíří okamžitě po zastavení, a proto stiskne tlačítko i K_2 . Z toho plyne, že prodloužení má větší vliv pro řešení tohoto paradoxu než Lorentzova kontrakce.

Nyní si ukažme, jak bychom odvodili vztah pro nejmenší možnou délku klíče. Nejmenší možná délka klíče K , která dosáhne na tlačítko podle kontrakce délky z jeho pohledu je L/γ , kde L je hloubka zámku.



Obr. 16: Minkowského diagram prodloužení klíče s obecnými hodnotami



Obr. 17: Minkowského diagram kolize klíče se zámkem s obecnými hodnotami

Nejmenší délka klíče K , která dosáhne na tlačítko s prodloužením z pohledu zámku je podle [7]

$$\frac{K}{\gamma} + \frac{vK}{\gamma(c-v)} = L, \quad (58)$$

což můžeme zjednodušit na

$$K = L\gamma \left(1 - \frac{v}{c}\right), \quad (59)$$

a z tohoto vztahu plyne, že

$$K = \frac{1}{1+\frac{v}{c}} \frac{L}{\gamma} \leq \frac{L}{\gamma}. \quad (60)$$

Vztahy (59) a (60) jsou navzájem ekvivalentní. Minimální délka klíče potřebná k dosažení tlačítka díky prodloužení je tedy menší kontrovaná délka zámku. Jinými slovy, pokud je rychlost dostatečná, aby se klíč dotknul tlačítka v soustavě klíče pomocí Lorentzovy kontrakce, tak se při srážce díky svému prodloužení klíč dotkne tlačítka i v soustavě zámku.

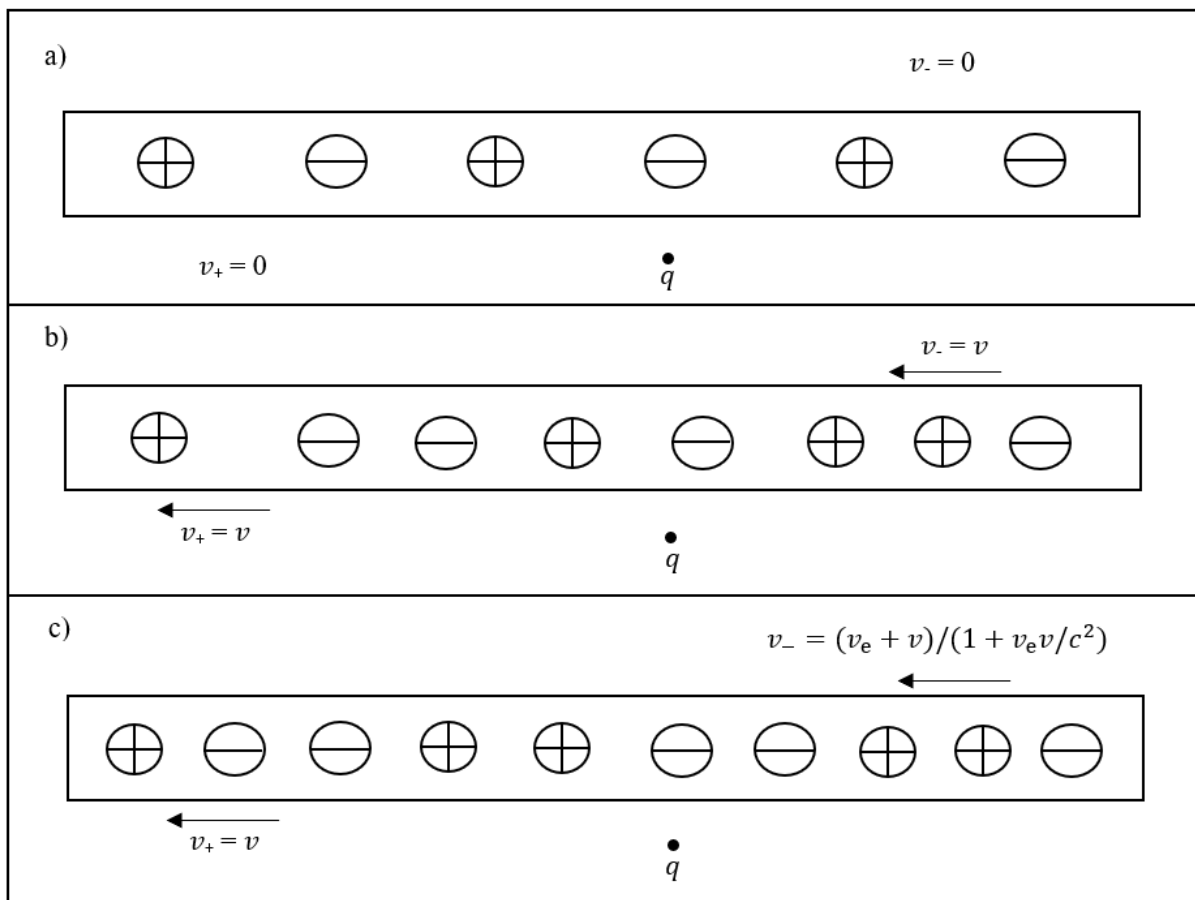
Toto řešení paradoxu s sebou nese určité problémy a otázky. Pro konkrétní rychlost v by se pozorovateli v soustavě klíče zdálo, že se klíč neprodloužil natolik, aby dosáhl na tlačítko na zámku, zatímco pozorovateli v soustavě zámku by se zdálo, že se klíč prodloužil dost na to, aby tlačítko zmáčknu. Tuto situaci lze zkoumat jak z pohledu zámku, tak z pohledu klíče, ale potřebná délka klíče by měla být z obou pohledů stejná. Z pohledu zámku se klíč prodlouží jako

v případě, kdy tyč (klíč) zastavíme na konci (obrázek 15a) a z pohledu klíče se zámek vpředu zastaví jako v případě tyče na obrázku 15c. Vztahy, které tyto dvě situace popisují tedy můžeme dát do rovnosti

$$L\gamma\left(1 - \frac{v}{c}\right) = \frac{L}{\gamma} \frac{1}{1 + \frac{v}{c}}. \quad (61)$$

6. PARADOX MAGNETICKÉ SÍLY

Představme si bodový náboj q poblíž drátu (vodiče) v laboratoři. Pokud je tento náboj v klidu vůči laboratoři i drátu a drátem neprochází žádný elektrický proud, jeví se bodovému náboji jako elektricky neutrální (obrázek 17a). Pokud se bude bodový náboj pohybovat podél drátu, kterým nebude protékat proud tak jako na obrázku 17b, na ionty a elektrony bude působit Lorentzova kontrakce stejnou měrou z pohledu bodového náboje, a proto bude vodič stále vypadat elektricky neutrální.



Obr. 18: a) bodový náboj v klidu a vodič bez proudu v klidu, b) vodič bez proudu v klidu a bodový náboj se pohybuje rychlostí v doprava, kde v_- je rychlost pohybu elektronů a v_+ je rychlost pohybu kladných iontů, c) bodový náboj se pohybuje rychlostí v doprava a vodičem teče proud tvořený elektrony s driftovací rychlostí v_e

Pokud se ale bodový náboj bude pohybovat podél vodiče s proudem, rychlost lineární hustoty iontů a elektronů vzhledem k bodovému náboji bude různá. Tato rozmístění budou kontrakcí délky zmenšena různou měrou a drát se nebude v soustavě pohybujícího bodového náboje jevit jako elektricky neutrální.

Na obrázku 17c je ukázán případ, kde rychlost rozmístění iontů v_+ vzhledem k bodovému náboji je rychlost v směrem vlevo, rychlost rozmístění elektronů vzhledem k bodovému náboji je podle [8]

$$v_- = \frac{v_e + v}{1 + \frac{v_e v}{c^2}}, \quad (62)$$

kde v_e je driftovací rychlost elektronů tvořících elektrický proud.

6.1 POPIS PARADOXU

Z pohledu bodového náboje q je hustota kladného náboje podle [8]

$$\lambda'_+ = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}}, \quad (63)$$

a podle [8] je z pohledu bodového náboje q hustota záporného náboje

$$\lambda'_- = -\frac{\lambda_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}}, \quad (64)$$

kde λ_0 je hustota kladných iontů a $-\lambda_0$ je hustota elektronů ve vodiči, kterým neteče proud. Těmito vztahy můžeme popsat magnetickou sílu pociťovanou nábojem pohybujícím se v blízkosti vodiče s proudem z hlediska soustavy spojené s nábojem. Paradox nastane, jestliže bude bodový náboj q v klidu vzhledem k vodiči, kterým ovšem poteče proud. V tomto případě to bude vypadat tak, že lineární hustota iontů bude odpovídat klidové lineární hustotě iontů λ_0 , zatímco vzdálenost mezi elektrony se díky kontrakci délky zmenší faktorem [8]

$$\gamma^{-1} = \sqrt{\left(1 - \frac{v_e^2}{c^2}\right)}, \quad (65)$$

a bude odpovídat vztahu (64) pro rychlost v_e . Proto náboj vidí drát elektricky záporně nabitý a pociťuje elektrickou sílu. Toto je ekvivalentní k tvrzení, že pro libovolný proud ve vodiči nebude bodový náboj pociťovat žádnou sílu kdykoli je distribuce iontů a elektronů z pohledu bodového náboje stejná a výsledná hustota náboje nulová.

Podle výše uvedeného toto nastane, když rychlost rozmístění iontů a elektronů je stejná v klidové soustavě pohybujícího bodového náboje [8]

$$v = \frac{v_e + v}{1 + \frac{v_e v}{c^2}}. \quad (66)$$

Jediným řešením je, když bude platit $v = c$, ale to by odporovalo postulátům STR. Tento problém lze obejít tím, že proud ve vodiči není způsoben pohybem elektronů rychlostí v_e , ale pohybem elektronů proti směru proudu rychlostí $v_e/2$ v kombinaci s pohybem iontů ve směru proudu rychlostí $v_e/2$. Poté uvidí statický bodový náboj rozmístění iontů a elektronů, které budou podle Lorentzovy kontrakce zkráceny o stejnou hodnotu a drát bude vypadat zdánlivě elektricky neutrální. Fyzikální proudy ve vodiči nejsou způsobeny takovou symetrickou kombinací pohybu elektronů a iontů. Tento problém můžeme vyřešit například tím, že budeme uvažovat proud, který je způsoben pouze pohybem elektronů, ale vodič musí být v soustavě

laboratoře neutrální. Není okamžitě jasné, že by tento předpoklad měl platit, pokud se také předpokládá, že vodič je v laboratorní soustavě také neutrální, když jím neprotéká žádný proud, což je základní požadavek neutrality atomů. Zdrojem paradoxu musí být skutečnost, že se zanedbávají účinky vzájemného pohybu na rozložení iontů a elektronů v důsledku jejich relativního pohybu a v důsledku skutečnosti, že když vodičem teče proud, je součástí většího systému.

6.2 ŘEŠENÍ PARADOXU MAGNETICKÉ SÍLY

Pro řešení tohoto paradoxu si představme rozmístění kladných iontů ve vodiči jako tuhou mřížku. Interakce mezi rozmístěním iontů a rozmístěním elektronů bude vyjádřeno úpravami v rozmístění elektronů. Jestliže bude vodičem procházet proud, musí se na obou koncích umístit „zdroj“ a „jímka elektronů“, což mohly například dva kontakty baterie. Elektrony ve „zdroji“ a „jímce“ jsou v klidu v klidové soustavě iontů. Vodičem poteče proud, protože elektrony ve vodiči budou pociťovat sílu, která je bude táhnout k „jímce“. Když se tímto směrem pohybují a začínají se hromadit v „jímce“, elektrony ze „zdroje“ budou pociťovat sílu, která je bude táhnout směrem k drátu. Při ustáleném stavu se elektrony pohybují do a ven z drátu charakteristickou rychlostí v_e . Klidová soustava elektronů, které se nacházejí ve „zdroji“ a „jímce“ je stejná jako klidová soustava iontů. Tuto soustavu označíme jako soustavu S . S_e je klidová soustava elektronů pohybujících se v drátu. Tato soustava se pohybuje podél drátu rychlostí $-v_e$. Za soustavu S' budeme považovat klidovou soustavu bodového náboje q pohybující se rychlostí v (podle obrázku 17c).

Vzdálenost mezi ionty bude v soustavě S nezměněná, ale rozložení elektronů bude podléhat vztahu kontrakci délky (19). Hustota náboje měřená v dané soustavě bude superpozicí zdánlivé hustoty iontů a elektronů v této soustavě. Proto pokud bude elektronová hustota v drátu v soustavě S něco jiného než [8]

$$-\lambda_0 \sqrt{\left(1 - \frac{v_e^2}{c^2}\right)}, \quad (67)$$

pak by elektrony ve „zdroji“ a v „jímce“ viděly hustotu elektronů jako něco jiného než $-\lambda_0$, a vodič by pro ně byl nabitý. Elektrony by pak cítily sílu, která by měla tendenci s nimi pohybovat tak, aby došlo k neutralizování nabití. Můžeme dojít k závěru, že elektrony ve „zdroji“ a „jímce“ mají tendenci být vodičem odpuzovány, jakmile jím začne procházet proud. Výsledný tok elektronů do drátu je kvůli hnací síle menší, než kdyby elektrony nepodléhaly Lorentzově kontrakci, což způsobilo, že elektronová hustota v soustavě S_e klesla. V rovnováze by hustota elektronů měla být taková, že se bude vodič v soustavě S jevit neutrální. Jestliže by to tomu tak nebylo, musely by rovnováhu nastolit elektrony ze „zdroje“ a „jímky“. Rovnovážná hustota náboje elektronů ve vodiči v soustavě S_e je proto (67). Na náboj v klidu vzhledem k vodiči nepůsobí žádná síla, protože se mu jeví jako elektricky neutrální.

Zdánlivá elektrická síla pociťovaná bodovým nábojem q pohybujícím se podél vodiče s proudem I rychlostí v (podle obrázku 17c) může být označena za vhodnou magnetickou sílu. Hustota náboje iontů v klidové soustavě iontů je λ_0 a hustota náboje elektronů v klidové soustavě elektronů je (67).

V soustavě S' jsou tyto hustoty dány vztahy podle [8]

$$\lambda'_+ = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (68)$$

$$\lambda'_- = -\lambda_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{v_e^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (69)$$

kde $v = (v + v_e)/(1 + vv_e/c^2)$. Celková hustota náboje v této soustavě je podle [8]

$$\lambda' = \frac{-\lambda_0 vv_e}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (70)$$

Elektrické pole z pohledu bodového náboje q vzhledem ke vztahu (70) má potom podle [8] velikost

$$E' = \frac{\lambda_0 vv_e}{2\pi\epsilon_0 r c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (71)$$

kde r je vzdálenost bodového náboje q od vodiče s proudem. Výraz $\lambda_0 v_e$ můžeme nahradit proudem I , který protéká vodičem. Pokud nahradíme výraz $\epsilon_0 c^2 = 1/\mu_0$, síla, kterou pocítuje bodový náboj q , je potom [8]

$$F' = \frac{q\mu_0 I v}{2\pi r \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (72)$$

Pokud bychom tuto sílu změřili v soustavě laboratoře, byla by potom podle [8]

$$F = F' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{q\mu_0 I v}{2\pi r} = qvB. \quad (73)$$

Z hlediska náboje q se vodič jeví jako záporně nabitý a síla bude směrem k drátu pro kladný náboj podle Lorentzovy síly [8]

$$F = qv \times B. \quad (74)$$

Zjistili jsme, že bodový náboj q pocítuje magnetickou sílu i když je vodič nenabitý a neprochází v něm proud. Toto je jádro paradoxu. Na tomto paradoxu se dá dobře demonstrovat, že se na tento problém nemůžeme dívat jako na izolovaný systém (např. vodič s proudem), ale jako na větší systém, tvořený vodičem a okolními částmi („zdroj“ a „jímka“).

7. SELLERIOHO PARADOX

Selleriho paradox řeší problém různé rychlosti světla na rotujícím disku pro signály poslané v opačných směrech, což může vypadat jako rozpor s druhým postulátem teorie relativity. Tento problém se dá obejít vhodnou synchronizací hodin v rotujících soustavách.

Představme si disk rotující konstantní úhlovou rychlostí ω , pozorovatele U, který stojí na disku v poloměru R . Tento pozorovatel vysílá současně dva světelné signály v opačném směru okolo disku po kruhové dráze o poloměru $r = R$. Jaký čas návratu naměří pozorovatel U u obou světelných signálů?

Nejdříve si ukažme, co uvidí ve své inerciální soustavě pozorovatel C, který se nachází ve středu disku. Světelné signály se pohybují podle [9] okolo disku rychlostí

$$R \frac{d\varphi}{dt} = \pm c, \quad (75)$$

pozorovatel U se pohybuje úhlovou rychlostí [9]

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \quad (76)$$

a oba paprsky se k pozorovateli U vrátí v časovém rozpětí T_{\pm} , které je dáno vztahem [9]

$$\pm cT_{\pm} = R\omega T_{\pm} \pm 2\pi R, \quad (77)$$

a odtud plyne, že

$$T_{\pm} = \frac{2\pi R}{c \mp \omega R}. \quad (78)$$

Vlastní čas pozorovatele U plyne pomaleji než vlastní čas pozorovatele C podle dilatace času podle [9]

$$\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{\omega^2 R^2}{c^2}}, \quad (79)$$

takže pro pozorovatele C bude časové rozmezí návratu světelných signálů podle [9]

$$\tau_{\pm} = \sqrt{1 - \frac{\omega^2 R^2}{c^2}}, \frac{2\pi R}{c \mp \omega R} = \frac{2\pi R}{c} \sqrt{\frac{1 \pm \frac{\omega R}{c}}{1 \mp \frac{\omega R}{c}}}. \quad (80)$$

Pro kladný směr platí znaménko + a pro záporný směr znaménko -. Kontrakcí délky se zkrátí lokální měřítka, a proto bude pro pozorovatele obvod kruhu větší než $2\pi r$. Podle [9] je vzdálenost, kterou světelné paprsky urazí,

$$L' = \frac{2\pi R}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 R^2}{c^2}}}, \quad (81)$$

a proto je průměrná rychlost světelných signálů kladným a záporným směrem

$$c_{\pm} = \frac{2\pi R}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 R^2}{c^2}} \tau_{\pm}} = \frac{c}{1 \pm \frac{\omega R}{c}}. \quad (82)$$

Tento výsledek se dá interpretovat tak, že světlo při šíření podél obvodu disku v opačných směrech potřebuje pro stejnou dráhu v různých směrech (kladném a záporném) různý čas. Toto by ale bylo v rozporu se STR, ve které platí, že rychlost světla je vždy c a nezávisí na pozorovateli.

Kromě tohoto Selleri vytvořil ještě jeden zajímavý paradox. Jeho první argument byl, že místní rychlost světla se musí rovnat průměrné rychlosti světla ze symetrických důvodů. Všechny body na obvodu kruhu jsou si fyzicky ekvivalentní, takže pozorovatel v klidu na obvodu kruhu by měl naměřit stejnou rychlost světla podél stejně orientovaných tečen. Pokud je tedy rychlost stejná, musí se rychlost rovnat i průměru těchto rychlostí. Druhý argument byl, že poměr těchto rychlostí pro dvě tečné orientace je podle [9]

$$q \equiv \frac{c_+}{c_-} = \frac{c - \omega R}{c + \omega R} \neq 1, \quad (83)$$

který nezáleží na ω a R samostatně, ale záleží pouze na jejich součinu v . Pokud si představíme, že poloměr disku se blíží nekonečnu a pro zachování konstantní obvodové rychlosti musí se úhlová rychlost blížit nule. Dostředivé zrychlení bodu s poloměrem $r = R$ je podle [9]

$$\omega^2 R = \frac{v^2}{R}. \quad (84)$$

Pokud se poloměr blíží nekonečnu, musí se dostředivé zrychlení blížit nule. Tento systém se pak bude očividně blížit inerciálnímu systému, ale $q = q(v)$ zůstane nezměněn. Tím jsme zkonstruovali setrvačný systém, ve kterém je rychlost světla různá v kladném a záporném směru různá. Toto by mohlo vypadat, že STR není správná. Je nutné dodat, že argument symetrie tvrdí, že rovnost místní rychlosti světla je rovna průměrné rychlosti světla $c_{\text{prům}}$ ve všech bodech dráhy světelného paprsku. Protože je celý tento model stacionární, mohli bychom argumentovat, že průměrná rychlost je rovna průměrné rychlosti podél aktuální světelné dráhy a paprsek prošel svou dráhu postupně. To znamená, že je jedno kdy v určitém bodě budeme rychlost měřit. Je ovšem tato rychlost také rovna průměrné rychlosti změřené pozorovatelem U , který čeká na vrácení světelného signálu? Podle [9] je tato rychlost

$$c_{\text{prům}}^U = \frac{L'}{\tau} = \frac{1}{\tau} \oint ds' = \frac{1}{\tau} \int \frac{ds'}{dt'} dt' = \frac{1}{\tau} \int c_l(t') dt', \quad (85)$$

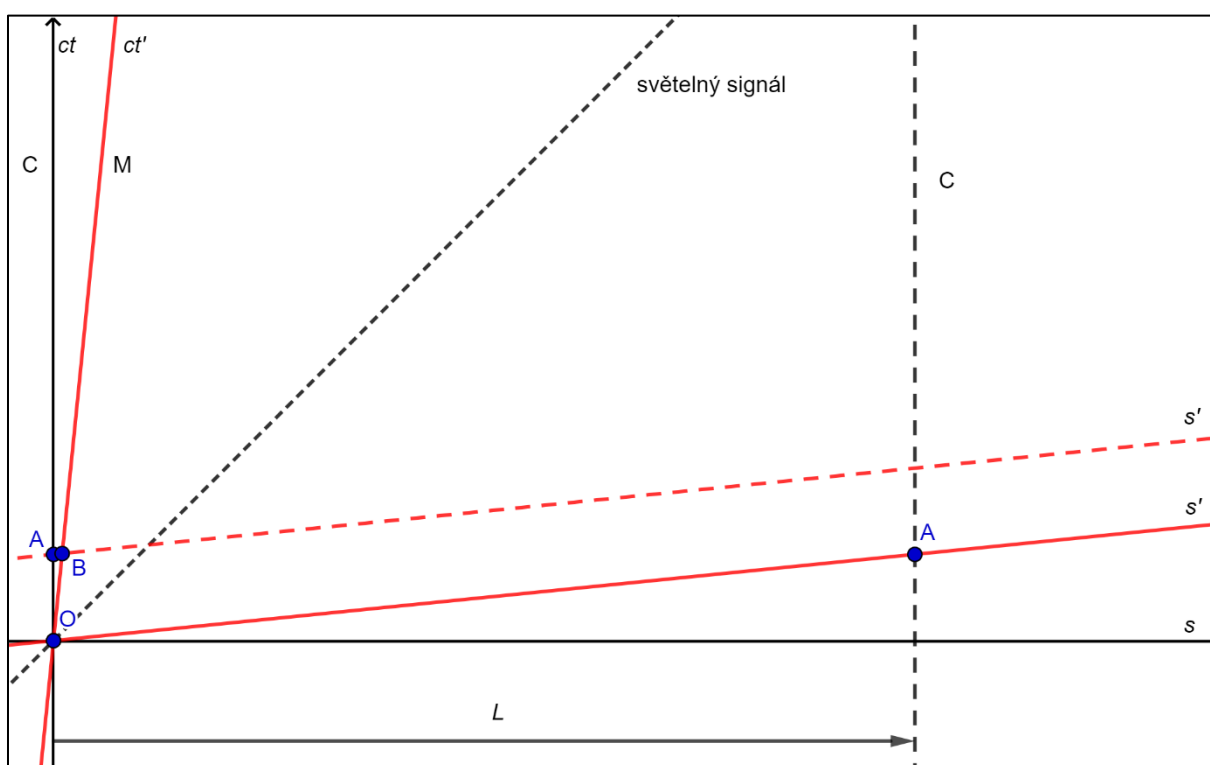
kde $c_l(t')$ je místní rychlost světla, kterou vidí pozorovatel U , která může být ovšem jiná než ta, kterou naměří místní pozorovatel $U_l(s')$ v pozici s' . Pro pozorovatele v klidu vůči disku by vzdálenosti na disku rotujícím konstantní úhlovou rychlostí měly zůstat stejné. Délkový element ds' je měřen místním měřidlem, takže všichni pozorovatelé podél disku by se na vzdálenosti měli shodnout na místních délkách. Pokud bychom na problém nahlíželi bez znalosti STR, mohli bychom jednoduše prohlásit, že čas je absolutní, takže pokud by se dva pozorovatelé shodli na ds' pak se jednoduše musí shodnout i na místní rychlosti. Vzhledem k tomu, že STR známe, měli bychom dokázat, že se tyto pozorovatelé shodnou i na dt' . Pokud bychom vyslali světelný paprsek na zrcadlo vzdálené Δs , tak by se podle [9] vrátilo za čas

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{c_+} + \frac{\Delta s}{c_-} = \frac{\Delta s}{c} \left(1 + \frac{\omega R}{c} + 1 - \frac{\omega R}{c} \right) = \frac{2\Delta s}{c}, \quad (86)$$

což nám ukazuje, že průměrná obousměrná rychlost světla je c .

7.1 SAGNACŮV EFEKT

Ukažme si, jak tento paradox vysvětlil Sagnac [9]. Ten tento paradox řešil z pohledu pozorovatelů na obvodu disku. Každý z těchto pozorovatelů může být považován za inerciální vztažnou soustavu a v těchto soustavách lze synchronizovat hodiny. Vyjdeme z předpokladu, že nejen obousměrná rychlost světla je c , ale i jednosměrná rychlost světla musí být také c . Podle postulátu konstantní rychlosti světla bychom mohli místní pozorování použít do obecného popisu, je dobré ukázat si to na Minkowského diagramu (obrázek 19). Prostorové osy místních pozorovatelů jsou rovnoběžné nebo se shodují, protože je obvodová rychlost je stejná ve všech uvažovaných bodech, a proto Minkowského diagram obsahuje pouze dvě sady os. Jednu pro pozorovatele C v klidu vzhledem ke středu disku a jednu pro pozorovatele M na okraji rotujícího disku.



Obr. 19: Minkowského diagram k objasnění Selleriho paradoxu

Diagram je periodický vzhledem k s . Události (s, ct) a $(s + L, ct)$ jsou identické, protože $L = 2\pi R$. Podle [9] dojdeme k závěru, že synchronizace hodin selže, když je provedena podél celého kruhu. Hodiny na disku v události B jsou synchronizovány s hodinami v bodu O a oboje hodiny budou ukazovat čas $t' = 0$. Pro pozorovatele M se ale událost B stane na stejném místě jako událost O, ale událost B se stane až po $t' = 0$, takže dvojice synchronizované hodiny ukazují jiný čas pro událost B, což je rozpor. Proto může být synchronizace hodin prodloužena z bodu O do bodu B, ale ne včetně B. Zpoždění hodin lze snadno vypočítat.

V soustavě C je mezi událostmi O a A časový rozdíl $\Delta t_L = (v/c^2)L$ a v soustavě M je mezi těmito událostmi podle [9] časový rozdíl

$$\Delta t'_L = \gamma \frac{v}{c^2} L = 2\pi R \gamma \frac{v}{c^2}. \quad (87)$$

Pokud budeme čas měřit na místních hodinách víme, že se světlo pohybuje rychlostí c . Celkový čas oběhu světelného paprsku ve směru otáčení disku by měl na těchto hodinách trvat $L'/c = \gamma L/c$. Toto je čas čtený na posledních synchronizovaných hodinách, kdy se světlo vrací do stejného místa, ale čas na hodinách, které stojí na místě, musí být napřed o časovou mezeru $\Delta t'_L$. Takže čas světelného signálu je podle [9]

$$\Delta t'_+ = \gamma \frac{L}{c} + \gamma \frac{v}{c^2} L = \gamma \frac{L}{c} \left(1 + \frac{v}{c}\right) = \frac{2\pi R}{c} \sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}} = \tau_+. \quad (88)$$

Pro paprsek vyslaný opačným směrem musí být tato časová mezera odečtena, takže [9]

$$\Delta t'_- = \gamma \frac{L}{c} \left(1 - \frac{v}{c}\right) = \frac{2\pi R}{c} \sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}} = \tau_-. \quad (89)$$

Tento popis v soustavě disku by vyvodil i pozorovatel vně disku ve své inerciální soustavě. Rychlost světla je všude c , kromě středu disku, kde jsme započítali časovou mezeru. Můžeme tedy říct, že místní pozorovatel na disku vždy naměří lokálně rychlost světla c , ale celkové rozložení rychlosti světla na disku je nehomogenní. Takto jsme vysvětlili Sagnacův efekt pomocí synchronizace hodin. V tomto případě je rychlost světla vpřed a vzad c , kromě časové mezery. Pokud bychom poloměr disku zvětšovali do nekonečna, mohli bychom tuto mezeru přesunout do nekonečna a vznikl by nám tak setrvačný systém, ve kterém je rychlost světla všude stejná a rovna c . Selleri použil symetrii, aby dokázal, že průměrná rychlost světla je rovna jeho místní rychlosti.

7.2 ŘEŠENÍ SELLERIHO PARADOXU

Při řešení Selleriho paradoxu bychom mohli časové mezeře zabránit pomocí synchronizace hodin podél kruhu s $r = R$. Jednou z možností, jak zabránit vzniku časové mezery je posunout oboje synchronizované hodiny podél osy s' (obrázek 19) podle $\Delta t'(s') = \Delta t_L s'/L'$ [9]. Pak po úplném otočení kolem kruhu ($s' = L'$) místní hodiny v události B budou ukazovat $t^*(L') = t' + \Delta t'_L$, což je přesně čas hodin, které zůstaly v počátku. Nový čas by podle [9] mohl být přepsán do tvaru

$$t^* = t' + \gamma \frac{\left(\frac{v}{c^2}\right) L s'}{\gamma L} = t' + \left(\frac{v}{c^2}\right) s'. \quad (90)$$

Pro synchronizace hodin bez časové mezery bude podle [9] čas

$$t^* = \frac{t}{\gamma}, \quad s^* = s' = \gamma(s - vt), \quad (91)$$

kde je současnost pro časy t a t^* stejná. Protože všechny hodiny podléhají stejnému zrychlení a pohybují se vůči středu disku stejnou rychlostí, z pohledu pozorovatele C ve středu disku

zůstanou synchronizovány. Tento způsob řešení můžeme nazvat stanovení současnosti pomocí centrální synchronizace. Nyní vypočítáme tečnou rychlost světla ke kruhu, kterou změříme pomocí centrálně synchronizovaných hodin. Vyjdeme ze vztahu (91)

$$\frac{ds^*}{dt^*} = \gamma^2 \frac{ds - v dt}{dt} = \gamma^2 (\pm c - v) = \frac{\pm c}{1 \pm \frac{v}{c}} = \pm c_{\pm}, \quad (92)$$

což nám ukazuje, že místní rychlost všude podél kruhu je c_+ a c_- . Jinými slovy je rychlost světla homogenní podél celého disku, ale liší se ve směru a proti směru otáčení. Tečné rychlosti světla jsou všude po obvodu disku stejné, což je ve shodě s obecnou úvahou o symetrii. Poměr dvou rychlostí světla je zachován při zvětšování disku. Mezní případ nastává při inerciální soustavě, ve které je rychlost světla $c_{\pm} = c/(1 \pm v/c)$ v obou směrech [9]. V jakémkoli konečném poloměru disku centrální synchronizace zachovává současnost mezi pozorovatelem ve středu disku a pozorovatelem v určitém poloměru na disku. Pokud by se poloměr disku blížil nekonečnu, stejně by se synchronizace u dvou inerciálních pozorovatelů zachovávala. Podle [9] můžeme napsat transformační rovnice, které jsou

$$t^* = \frac{t}{\gamma}, \quad x^* = \gamma(x - vt) \quad (93)$$

$$t = \gamma t^*, \quad x = \frac{1}{\gamma}(x^* + \gamma^2 vt^*),$$

kterými získáme Lorentzovy transformace [9]

$$x' = x^*, \quad t' = t^* - \frac{v}{c^2} x'. \quad (94)$$

Pokud je v soustavě S popsán souřadnicemi x a ct , což je souřadnicový systém pozorovatele C , použita synchronizace, rychlost světla je zde izotropní [9]. Osy x' a ct' popisují soustavu S' . Osy x^* a ct^* popisují také soustavu S' , ale hodiny na pozici x' posunuty o vx'/c^2 používají jinou synchronizaci. Kvůli této jiné synchronizaci není nadále rychlost světla izotropní, i když obousměrná rychlost světla zůstává c ve všech směrech. Vzhledem k tomu, že za soustavu S a za soustavu S' můžeme vzít jakékoli inerciální systémy, je zřejmé, že synchronizace je dána volbou časové souřadnice [9]. Rychlost světla je anizotropní v limitním inerciálním případě soustavy S' , když položíme $R \rightarrow \infty$ s obvodovou rychlostí $v = R\omega$.

Výsledkem tedy je, že rychlost světla v daném směru závisí na synchronizaci, a proto se může od c lišit a nepředstavuje to z hlediska STR problém. Rychlost světla, které se pohybuje okolo kruhu zůstává c .

8. ZÁVĚR

V této práci jsem se snažil zpracovat alespoň některé v české literatuře méně se vyskytující paradoxy teorie relativity, mohla by tak posloužit jako doplňující materiál k výuce speciální teorie relativity.

I přes rešeršní charakter mé práce, jsem se snažil práci obohatit o diagramy, obrázky a o konkrétní řešení některých paradoxů, nejen jejich obecná řešení. První paradox dvojčat je asi veřejnosti nejznámější, a proto jsem ho zařadil na začátek mé práce. Řešení tohoto paradoxu v sobě zahrnuje jak dilataci času, tak relativnost současnosti. Tento paradox jsem pro zajímavost doplnil o konkrétní výpočet věku dvojčat při letu k nám nejbližší hvězdě Proximě Centauri. Ve druhém paradoxu, který je podobný tzv. problému Bellových raket [13], jsem se zabýval tím, zda pro vzdálenost mezi raketami platí kontrakce délek a jaká bude vzdálenost mezi nimi v různých inerciálních vztažných soustavách. Ve třetím paradoxu jsem diskutoval změnu tvaru kol vozíku, který se pohyboval téměř rychlostí světla. Čtvrtý paradox, paradox klíče a zámku, mi osobně přišel nejzajímavější, protože se na něm dá krásně demonstrovat jak kontrakce délky a relativnost současnosti. Paradox magnetické síly se od předchozích poněkud liší, protože se na něj neuplatňují mechanické účinky STR. Selleriho paradox je velmi zajímavý proto, že na první pohled odporuje druhému postulátu STR, ale ukáže se, že anizotropie rychlosti světla tomuto postulátu odporovat nemusí a tento paradox nepředstavuje argument proti STR, což bylo jeho prvotním záměrem.

Tyto paradoxy jsou samozřejmě velmi těžko prakticky ověřitelné, protože nastávají při rychlostech, které jsou jen o něco menší, než je rychlost světla ve vakuu. Můžeme si na nich ale ukázat, jaké důsledky má STR a mohly by nám pomoci tuto teorii lépe pochopit.

Tato práce byla zadána se záměrem vytvořit doplňující materiál k výuce teorie relativity na PřF UP a je samozřejmě určena všem, kteří se o STR zajímají.

9. ZDROJE LITERATURY

- [1] BARTUŠKA, Karel. *Fyzika pro gymnázia*. 4. vyd. Praha: Prometheus, 2010. ISBN 978-80-7196-388-2.
- [2] RICHTEREK, Lukáš. *Teorie relativity a astronomie: studijní modul*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2012. ISBN 9788024433356.
- [3] VOTRUBA, Václav. *Základy speciální teorie relativity: vysokoškolská učebnice*. Praha: Academia, 1969.
- [4] MÜLLER, Thomas, Andreas KING a Daria ADIS. A trip to the end of the universe and the twin “paradox.” *American Journal of Physics* [online]. 2008, 76(4), 360–373 [cit. 2021-5-13]. ISSN 0002-9505. Dostupné z: doi:10.1119/1.2830528.
- [5] MATSUDA, Takuya, Atsuya KINOSHITA. A Paradox of Two Ships in Special Relativity. *AAPPS Buletin*, 2004, 14/1, 3–7. Dostupně z: <http://aappsbulletin.org/myboard/down.php?Board=webzine&filename=Vol.14-1.pdf&id=139&fidx=2>.
- [6] MATVEJEV, Vadim N., Oleg V. MATVEJEV a Ø. GRØN. A relativistic trolley paradox. *American Journal of Physics* [online]. 2016, 84(6), 419–425 [cit. 2021-5-13]. ISSN 0002-9505. Dostupné z: doi:10.1119/1.4942168.
- [7] PIERCE, Evan. The lock and key paradox and the limits of rigidity in special relativity. *American Journal of Physics* [online]. 2007, 75(7), 610–614 [cit. 2021-5-13]. ISSN 0002-9505. Dostupné z: doi:10.1119/1.2711827.
- [8] GABUZDA, Denise C. Magnetic force due to a current-carrying wire: A paradox and its resolution. *American Journal of Physics* [online]. 1987, 55(5), 420–422 [cit. 2021-5-13]. ISSN 0002-9505. Dostupné z: doi:10.1119/1.15124.
- [9] KASSNER, Klaus. Ways to resolve Selleri's paradox. *American Journal of Physics* [online]. 2012, 80(12), 1061–1066 [cit. 2021-5-13]. ISSN 0002-9505. Dostupné z: doi:10.1119/1.4755950.
- [10] GIBLOVÁ, Tereza. Rovnoměrně zrychlený pohyb ve speciální teorii relativity. Bakalářská práce. Olomouc: PřF UP, 2018. Dostupné z: http://muj.optol.cz/richterek/lib/exe/fetch.php?media=diplomky:18_giblova.pdf.
- [11] *Wikipedie: Otevřená encyklopedie: Proxima Centauri* [online]. c2021 [citováno 14. 05. 2021]. Dostupný z WWW: [<https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Proxima_Centauri&oldid=19339919>](https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Proxima_Centauri&oldid=19339919).

- [12] KLECZEK, Josip. *Velká encyklopedie vesmíru*. Praha: Academia, 2002 s., 48 s. barev. obr. příl. ISBN 80-200-0906-X.
- [13] *Wikipedie: Otevřená encyklopedie: Bell's spaceship paradox* [online]. c2021 [citováno 14. 05. 2021]. Dostupný z WWW: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Bell%27s_spaceship_paradox&oldid=1020484522.