**PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA UNIVERZITY PALACKÉHO**
**KATEDRA TEORETICKÉ FYZIKY**

# Diplomová práce

## Sbírka řešených příkladů z obecné teorie relativity

Vypracoval:
Jaroslav Machačík
studující V. ročníku
obor M-F
studijní rok 1997/1998

Vedoucí diplomové práce:
Mgr. Lukáš Richterek

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně pod vedením Mgr. Lukáše Richterka za použití uvedené literatury.

V Olomouci 31. srpna 1998 ........................

# Úvod

*Pokud souhlasíte s okřídlenou větou, že naslouchat Bachově fuze je stejné jako konstruovat matematický teorém, měli byste pochopit i to, že konstruovat matematický teorém je jako naslouchat Bachově fuze.*

*Steven Weinberg*

*Jsem přesvědčen, můžeme objevit pomocí čistě matematických konstrukcí pojmy a zákony, jimiž jsou tyto pojmy provázány, což dává klíč k pochopení přírodních jevů. Skutečnost může napovědět vhodné matematické pojmy, ale ty z ní nemohou být vyvozeny s jistotou. Zkušenost ovšem zůstává jediným kritériem fyzikální užitečnosti matematické konstrukce. Tvůrčí princip však spočívá v matematice. V jistém smyslu tedy zastávám názor, že čisté myšlení může postihnout realitu, jak o tom kdysi snili oni.*

*Albert Einstein*

Byl to právě Albert Einstein, kdo během pražského pobytu v letech 1911–1912 začal zpracovávat novou teorii gravitace, teorii, kterou předložil světu o čtyři roky později (v roce 1915) v Berlíně a kterou dodnes řada fyziků považuje za vrchol estetické dokonalosti mezi fyzikálními teoriemi. Einsteinova obecná teorie relativity je „krásná," logická a ucelená matematická teorie. Její krása tkví v tom, že z malého počtu předpokladů umožňuje odvodit značné množství závěrů (ať už v astrofyzice nebo v kosmologii).

Na rozdíl od mnoha jiných teorií, například kvantové mechaniky, klasické Newtonovy teorie gravitace, atd. , v podstatě vznikla bez předchozích experimentů a pozorování (výjimkou je například Galileo Galilei, který na konci 16. století zjistil, že všechna tělesa padají ve vakuu se stejným zrychlením). Tyto experimenty byly prováděny až po jejím zveřejnění. Dnes považujeme za klasické testy obecné teorie relativity tyto tři jevy:

- posun perihelia Merkuru (vysvětlení tohoto jevu bylo velkým úspěchem teorie; zbytková hodnota zůstávala nevysvětlena už od roku 1859) (viz příklad **??**).
- ohyb světla vlivem gravitačního pole (teorie předpovídala pro úhel ohybu paprsku, který prochází v těsné blízkosti Slunce, hodnotu

$\Delta\phi = 1.75''$; jev byl poprvé (i když s nepříliš přesnými výsledky) pozorován v roce 1919 A. Eddingtonem) (viz příklad 6).

- rudý posuv spektrálních čar (spektrální čáry zdroje elektromagnetického vlnění, který se nachází v silném gravitačním poli, jsou posunuty směrem k červenému konci spektra, pokud tyto čáry srovnáme s odpovídajícími spektrálními čarami téhož zdroje, který je umístěn ve větší vzdálenosti od zdroje gravitačního pole; v roce 1976 provedli Vessot a Levine experiment, při němž ověřili platnost tohoto jevu s relativní přesností $1.10^{-5}$) (viz příklady 10, 8 ).

V současnosti existují také další testy, například Shapirův jev (závislost doby mezi odesláním a příjmem radarových signálů vyslaných např. ze Země směrem k vnitřní planetě (Merkur, Venuše), kde se signál odrazí zpět, na vzdálenosti dráhy signálu od povrchu Slunce), jev geodetické precese (změna směru osy malého setrvačníku, který je umístěn ve volně obíhající družici), gravitační vlny a gravitační čočky.

Tato sbírka obsahuje 40 příkladů, ve kterých se zaměříme na základy diferenciální geometrie na varietách (kovariantní derivace, geodetické čáry), základní vlastnosti metriky prostoru a na nejjednodušší aplikace Einsteinových rovnic pole. Na závěr popíšeme z hlediska Fermatova principu model gravitační čočky, který využívá analogie gravitační a logaritmické čočky a uvedeme fotografie reálných gravitačních čoček, které byly pořízeny Hubbleovým vesmírným dalekohledem. Sbírka je koncipována tak, aby bylo možno ji využívat jako doplněk k výběrové přednášce z obecné teorie relativity, a proto je zde uveden pouze stručný teoretický přehled tématu.

V celé sbírce je důsledně dodržována znaménková konvence podle [8], v níž má časový člen znaménko mínus a prostorové členy jsou kladné. Rovněž je dodržována geometrodynamická soustava jednotek, ve které jsou rychlost světla ve vakuu ($c$) a gravitační konstanta ($\kappa$) rovny jedné a ve které mají všechny fyzikální veličiny jednotku 1 metr nebo jsou bezrozměrné. Převody jednotek lze opět nalézt v publikaci [8]. Pokud nebude řečeno jinak, budeme považovat všechny vektory za čtyřvektory. Metrický tenzor je symetrický, proto $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$. Jeho kontravariantní složky vypočteme podle vztahu $g_{\alpha\beta}\, g^{\alpha\beta} = E$, kde $E$ je jednotková matice.

Závěrem mi dovolte, abych poděkoval Mgr. Lukáši Richterkovi za materiály a cenné rady, které mi při vypracování této diplomové práce vždy ochotně poskytl.

# Kapitola 1

# Metrika prostoru

## 1.1 Úvod

Nejkratší spojnicí dvou bodů na libovolné varietě[1] je obecně geodetická čára, jejíž rovnici odvodíme ve 2. kapitole. Pro vzdálenost dvou velmi blízkých bodů v neinerciální soustavě můžeme psát

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta,$$

kde $g_{\alpha\beta}$ jsou složky metrického tenzoru a podstatě určují metriku prostoru. Metrický tenzor má ve čtyřrozměrném prostoru 16 obecně nenulových složek. Přitom platí, že metrický tenzor je symetrický, tj. platí

$$g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha},$$

tedy tento tenzor má 10 nezávislých složek.

Příkladem jednoduché metriky může být prostoročasová metrika, kterou můžeme podle principu ekvivalence v libovolném bodě prostoročasu lokálně transformovat v Minkowského metriku

$$ds^2 = -dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2.$$

Další významnou metrikou je Schwarzschildova metrika

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right),$$

kterou se budeme podrobně zabývat ve 3. kapitole.

[1]N-dimenzionální varieta je takový typ prostoru, který je lokálně spojitě zobrazitelný do n-rozměrného euklidovského prostoru nebo do n-rozměrného reálného prostoru.

## 1.2 Úlohy

**Úloha 1.**

a) Dokažte, že metrický prostor, který je popsán metrikou

$$ds^2 = dv^2 - v^2 du^2, \tag{1.1}$$

je rovinný dvojrozměrný Minkowského prostoročas, jenž je popsán metrikou

$$ds^2 = dx^2 - dt^2. \tag{1.2}$$

Najděte transformaci souřadnic $x = x(v, u)$, $t = t(v, u)$, která převádí metriku (1.2) na tvar (1.1)

b) Dokažte, že pro neurychlovanou částici je složka $p_u$ čtyřhybnosti $\boldsymbol{p}$ konstantní na rozdíl od složky $p_v$.

*Řešení:*

a) Oba metrické prostory jsou dvojrozměrné, proto můžeme využít jistou analogii s polárními souřadnicemi. Předpokládejme tedy, že:

$$\begin{aligned} x &= v \cosh u, \\ t &= v \sinh u. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Pro diferenciály $dx, dt$ platí

$$\begin{aligned} dx &= \cosh u \;\, dv + v \sinh u \, du, \\ dt &= \sinh u \;\, dv + v \cosh u \;\, du, \end{aligned} \tag{1.4}$$

a pro jejich druhé mocniny

$$dx^2 = \cosh^2 u \;\, dv^2 + 2v \sinh u \;\, coshu \;\, dvdu + v^2 \sinh^2 u \;\, du^2,$$

$$dt^2 = \sinh^2 u \;\, dv^2 + 2v \sinh u \;\, \cosh u \;\, dvdu + v^2 \cosh^2 u \;\, du^2.$$

Jestliže obě tyto rovnice od sebe odečteme, obdržíme po úpravě vztah

$$dx^2 - dt^2 = (\cosh^2 u \; - \sinh^2 u) \, dv^2 - v^2 (\cosh^2 u \; - \sinh^2 u) \, du^2.$$

Z vlastností hyperbolických funkcí plyne, že $\cosh^2 u \; - \sinh^2 u \; = 1$, tedy

$$dx^2 - dt^2 = dv^2 - v^2 du^2,$$

čímž jsme dokázali ekvivalenci obou prostorů.

b) Nejprve vyřešíme soustavu (1.4) z části a) pro $du, dv$. První rovnici vynásobíme $\cosh u$, druhou $\sinh u$ a obě rovnice od sebe odečteme:

$$\cosh u \;\, dx - \sinh u \;\, dt = (\cosh^2 u - \sinh^2 u) \, dv,$$

$$dv = \cosh u \;\, dx - \sinh u \;\, dt. \tag{1.5}$$

Analogicky vypočteme $du$ (první rovnici vynásobíme $\sinh u$, druhou $\cosh u$ a obě opět odečteme)

$$du = \frac{1}{v} (\cosh u \;\, dt - \sinh u \;\, dx). \tag{1.6}$$

Pro částici o jednotkové hmotnosti můžeme psát

$$p_u = g_{uu}\, p^u,$$

kde

$$g^{uv} = \begin{pmatrix} -v^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad p^u = \frac{du}{d\tau},$$

přičemž za $du$ dosadíme z rovnice (1.6). Tedy

$$p_u = -v^2\,\frac{du}{d\tau} = -v\cosh u\;\frac{dt}{d\tau} + v\sinh u\;\frac{dx}{d\tau}. \tag{1.7}$$

Ze soustavy rovnic (1.3) dosadíme do vztahu (1.7). Proto

$$p_u = -x\,\frac{dt}{d\tau} + t\,\frac{dx}{d\tau}. \tag{1.8}$$

Předpokládáme-li neurychlovanou částici (tzn. že její rychlost je konstantní; označme ji $r$), potom $x$-ová souřadnice této částice lze popsat vztahem

$$x = x_0 + rt = x_0 + t\,\frac{dx}{dt},$$

kde $x_0$ je konstanta. Po dosazení tohoto vztahu do rovnice (1.8) a po úpravě získáme vztah

$$p_u = -x_0\,\frac{dt}{d\tau}.$$

Dále víme, že platí:

$$d\tau^2 = -ds^2 = -dx^2 + dt^2,$$

tedy

$$1 = -\left(\frac{dx}{dt}\,\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2,$$

a odtud

$$\frac{dt}{d\tau} = \sqrt{\frac{1}{1-r^2}} = \text{konstanta} = K.$$

Proto

$$p_u = -K x_0 = \text{konstanta}.$$

Pro výpočet $p_v$ využijeme vztah

$$-m^2 = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p} = g^{vv}\,(p_v)^2 + g^{uu}\,(p_u)^2,$$

kde

$$g^{uv} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{v^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$-m^2 = p_v^2 - \frac{1}{v^2}\,p_u^2,$$

a potom

$$p_v^2 = \frac{1}{v^2}\,p_u^2 - m^2.$$

Tento výraz není konstantní, protože obecně se rychlost $r$ mění podél trajektorie částice. To znamená, že kdykoli metrické koeficienty nezávisí na některé souřadnici - v našem případě $u$ - pak kovariantní složka čtyřhybnosti této souřadnice se zachovává a je integrálem pohybu.

❑ ❑ ❑

**Úloha 2.** Dokažte, že metrika

$$ds^2 = R^2[d\alpha^2 + \sin^2\alpha\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2)]$$

popisuje hyperkouli o poloměru $R$ v euklidovském čtyřprostoru, tj. množinu všech bodů tohoto prostoru se vzdáleností $R$ od daného bodu.
*Řešení:*

Euklidovský čtyřprostor je popsán metrikou

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2. \tag{1.9}$$

Hyperkoule o poloměru $R$ v tomto prostoru je analogicky jako v trojrozměrném prostoru vyjádřena rovnicí

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = R^2. \tag{1.10}$$

Obdobou sférických souřadnic v trojrozměrném případu zde budou čtyřrozměrné hypersférické souřadnice definované takto:

$$\begin{aligned} x_1 &= R\sin\alpha\,\sin\theta\,\sin\phi, \\ x_2 &= R\sin\alpha\,\sin\theta\,\cos\phi, \\ x_3 &= R\sin\alpha\,\cos\theta, \\ x_4 &= R\cos\alpha. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Při této volbě souřadnic je rovnice (1.10) splněna:

$$R^2[\sin^2\alpha\,\Big(\sin^2\theta\,(\sin^2\phi + \cos^2\phi) + \cos^2\theta\Big) + \cos^2\alpha] = R^2.$$

Předpokládejme, že $R$ je v našem případě konstantní. Pak derivováním rovnic ze soustavy (1.11) získáme vztahy

$$\begin{aligned} dx_1 &= R(\cos\alpha\,\sin\theta\,\sin\phi\,d\alpha + \sin\alpha\,\cos\theta\,\sin\phi\,d\theta + \sin\alpha\,\sin\theta\,\cos\phi\,d\phi), \\ dx_2 &= R(\cos\alpha\,\sin\theta\,\cos\phi\,d\alpha + \sin\alpha\,\cos\theta\,\cos\phi\,d\theta - \sin\alpha\,\sin\theta\,\sin\phi\,d\phi), \\ dx_3 &= R(\cos\alpha\,\cos\theta\,d\alpha - \sin\alpha\,\sin\theta\,d\theta), \\ dx_4 &= -R\sin\alpha\,d\alpha. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Tyto diferenciály umocníme a dosadíme do rovnice (1.9). Po úpravě zjistíme, že koeficienty u smíšených členů $d\alpha d\theta$, $d\alpha d\phi$ a $d\theta d\phi$ jsou rovny nule a hledaná rovnice má tvar

$$\begin{aligned} ds^2 = R^2\{d\alpha^2\,[\cos^2\alpha\,(\sin^2\theta\,(\sin^2\phi + \cos^2\phi) + \cos^2\theta) + \sin^2\alpha] +& \\ +d\theta^2[\sin^2\alpha\,(\cos^2\theta\,(\sin^2\phi + \cos^2\phi) + \sin^2\theta)] +& \\ +d\phi^2\,[\sin^2\alpha\,\sin^2\theta\,(\cos^2\phi + \sin^2\phi)]\}&, \end{aligned}$$

a tedy

$$ds^2 = R^2[d\alpha^2 + \sin^2\alpha\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2)].$$

❑ ❑ ❑

**Úloha 3.**
Metrika povrchu koule o poloměru $a$ je dána rovnicí

$$ds^2 = a^2(d\lambda^2 + \cos^2\lambda\, d\phi^2),$$

kde $\lambda$,$\phi$ jsou po řadě zeměpisná šířka a délka. Metrika rovinné mapy světa (v kartézských souřadnicích $x$,$y$) je

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Jaký bude tvar metriky koule v souřadnicích $x$,$y$, jestliže použijeme:

a) cylindrickou (válcovou) projekci,

b) stereometrickou mapu světa?

*Řešení:*

a) Na válci o poloměru podstavy $a$ definujme souřadnice $x$,$y$ předpisem

$$\begin{aligned} x &= a\phi, \\ y &= a\sin\lambda. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Odtud přímo vyplývá

$$\lambda = \arcsin\frac{y}{a},$$

$$\begin{aligned} d\phi &= \frac{1}{a}\,dx, \\ d\lambda &= \frac{dy^2}{\sqrt{a^2 - y^2}}, \end{aligned} \tag{1.14}$$

$$\cos^2\lambda = 1 - \sin^2\lambda = 1 - \frac{y^2}{a^2}. \tag{1.15}$$

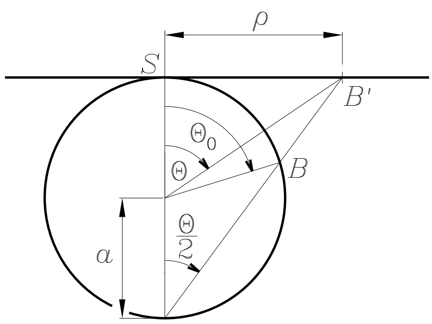
Dosadíme-li do rovnice metriky koule $ds^2 = a^2(d\lambda^2 + \cos^2\lambda\, d\phi^2)$ z rovnic (1.14) a (1.15), po úpravě získáme

$$ds^2 = \frac{dy^2}{\left(1 - \dfrac{y^2}{a^2}\right)} + \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right) dx^2. \tag{1.16}$$

Srovnáme-li rovnici (1.16) s rovnicí metriky rovinné mapy světa (tj. s rovnicí $ds^2 = dx^2 + dy^2$), vidíme, že nejmenší rozdíl mezi nimi je pro $y \to 0$, tedy v okolí rovníku, kde obě tyto rovnice splývají.

b) Při stereografické projekci je výhodné používat obvyklý polární úhel $\theta = \dfrac{\pi}{2} - \lambda$. Nechť ($\theta$, $\phi$) jsou souřadnice libovolného bodu na kouli, ($\theta_0$, $\phi_0$) sférické polární souřadnice obrazu B' bodu B.

Z obrázku je patrné, že vzdálenost $\rho$ obrazu B' od osy je $\rho = 2a\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$.




Obr. 1: K úloze 3

Definujme nyní souřadnice $x$, $y$ (analogicky jako při zavedení polárních souřadnic).

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\phi = 2a\,\mathrm{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\phi, \\ y &= \rho\sin\phi = 2a\,\mathrm{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\phi. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Z rovnic (1.17) plyne

$$dx = \frac{a\,d\theta}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\cos\phi - 2a\,\mathrm{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\phi\,d\phi,$$

$$dy = \frac{a\,d\theta}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\sin\phi + 2a\,\mathrm{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\phi\,d\phi.$$

Jestliže tyto rovnice umocníme a dosadíme do rovnice rovinné mapy

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

získáme

$$ds^2 = a^2\left[d\theta^2 + 4\cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right)\,\mathrm{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\,d\phi^2\right]\frac{1}{\cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right)},$$

$$\cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right)\,ds^2 = a^2\left[d\theta^2 + \left[2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^2 d\phi^2\right],$$

$$\cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right)\,(dx^2 + dy^2) = a^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2).$$

V tomto případě je nejmenší rozdíl v blízkosti $\theta = 0$, tedy v okolí severního pólu.

*Poznámka*: Tento typ projekce se nazývá konformní, protože

$$(ds^2)_{\mathrm{koule}} = f(ds^2)_{\mathrm{mapa}},$$

kde $f$ je nějaká funkce, v našem případě $f = \cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Konformní zobrazení zachovává úhly mezi křivkami (viz příklad 6).

❑ ❑ ❑

**Úloha 4.** Předpokládejme prostor popsaný souřadnicemi $x$,$y$,$z$ a metrikou

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - \left(\frac{3}{13}\,dx + \frac{4}{13}\,dy + \frac{12}{13}\,dz\right)^2.$$

Dokažte, že tento prostor je ve skutečnosti dvojrozměrný a najděte dvě nové souřadnice $\xi$, $\eta$, pro které platí

$$ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2.$$

*Řešení:*

O tom, zda je prostor trojrozměrný nebo ne, můžeme rozhodnout tak, že vypočteme hodnotu elementu objemu $dV$.

$$dV = \sqrt{\mid g \mid}\, dxdydz. \tag{1.18}$$

Abychom zjistili koeficienty metrického tenzoru, musíme upravit rovnici metriky

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - \left(\frac{3}{13}\,dx + \frac{4}{13}\,dy + \frac{12}{13}\,dz\right)^2. \tag{1.19}$$

Z rovnice (1.19) obdržíme po umocnění a sečtení tvar

$$\begin{aligned} ds^2 = &\left(1 - \frac{9}{169}\right) dx^2 + \left(1 - \frac{16}{169}\right) dy^2 + \left(1 - \frac{144}{169}\right) dz^2 - \\ &- \frac{24}{169}\,dxdy - \frac{72}{169}\,dxdz - \frac{96}{169}\,dydz. \end{aligned}$$

Nyní můžeme dosadit do rovnice (1.18)

$$dV = \begin{vmatrix} 1 - \dfrac{9}{169} & -\dfrac{12}{169} & -\dfrac{36}{169} \\[2ex] -\dfrac{12}{169} & 1 - \dfrac{16}{169} & -\dfrac{48}{169} \\[2ex] -\dfrac{36}{169} & -\dfrac{48}{169} & 1 - \dfrac{144}{169} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} dxdydz.$$

Determinant matice v předchozí rovnici je roven nule, to znamená, že $dV = 0$ pro všechna $x$, $y$, $z$. Proto jsou tyto tři souřadnice vždy lineárně závislé.

Nyní víme, že daný prostor je buď jednorozměrný, nebo dvojrozměrný. Můžeme proto zanedbat některou souřadnici, např. $z$, zvolíme-li $z =$ konstanta, což lze provést, protože koeficienty metrického tenzoru nezávisí na $z$. Při této volbě souřadnic se rovnice (1.19) zjednoduší na tvar

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 - \left(\frac{3}{13}\,dx + \frac{4}{13}\,dy\right)^2. \tag{1.20}$$

Analogickým postupem se přesvědčíme, že prostor popsaný touto metrikou je právě dvojrozměrný, a ne jednorozměrný:

$$g = \begin{vmatrix} 1 - \dfrac{9}{169} & -\dfrac{12}{169} \\ \\ -\dfrac{12}{169} & 1 - \dfrac{16}{169} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Transformaci souřadnic ze systému $(x,\ y)$ do systému $(\xi,\ \eta)$ najdeme např. pomocí vlastních čísel a vlastních vektorů matice

$$G = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{9}{169} & -\dfrac{12}{169} \\ \\ -\dfrac{12}{169} & 1 - \dfrac{16}{169} \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla této matice vypočteme z rovnice

$$\begin{vmatrix} \left(1 - \dfrac{9}{169}\right) - \lambda & -\dfrac{12}{169} \\ \\ -\dfrac{12}{169} & \left(1 - \dfrac{16}{169}\right) - \lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{1.21}$$

která je ekvivalentní s rovnicí

$$\lambda^2 - \frac{313}{169}\lambda + \frac{144}{169} = 0.$$

Po vyřešení této kvadratické rovnice obdržíme vlastní čísla

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1, \\ \lambda_2 &= \frac{144}{169}, \end{aligned}$$

a tyto vlastní čísla dosadíme do soustavy rovnic

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{9}{169} - \lambda\right) x - \frac{12}{169} y &= 0 \\ -\frac{12}{169} x + \left(1 - \frac{16}{169} - \lambda\right) y &= 0. \end{aligned}$$

Z této soustavy rovnic vypočteme, že vlastnímu číslu $\lambda_1 = 1$ odpovídá vlastní vektor

$$\xi = \frac{1}{5}\left(\frac{3}{13}x + \frac{4}{13}y\right),$$

a vlastnímu číslu $\lambda_2 = \dfrac{144}{169}$ odpovídá vlastní vektor

$$\eta = \frac{1}{5}\left(-\frac{4}{13}x + \frac{3}{13}y\right).$$

Vynásobíme-li vlastní vektor $\xi$ (resp. $\eta$) konstantou 12 (resp.13), získáme vlastní vektory (a tedy i nový souřadnicový systém), který vyhovuje rovnici $ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2$.

$$\xi = \frac{12}{5}\left(\frac{3}{13}x + \frac{4}{13}y\right),$$

$$\eta = \frac{13}{5}\left(-\frac{4}{13}x + \frac{3}{13}y\right).$$

*Poznámka*: Všimněte si, že původní metrika byla ve tvaru

$$g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - V_\alpha V_\beta,$$

kde $V_\alpha$ je euklidovský jednotkový vektor $\left(\frac{3}{13}, \frac{4}{13}, \frac{12}{13}\right)$. Tato metrika zobrazí trojrozměrný euklidovský prostor na dvojrozměrný prostor kolmý k $\boldsymbol{V}$, tedy že musely existovat souřadnice $\xi$, $\eta$, které převádějí původní metriku na metriku dvojrozměrného rovinného prostoru.

❑ ❑ ❑

**Úloha 5.**

Dokažte, že pomocí projekčního tenzoru $\boldsymbol{P} \equiv g + \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}$ promítneme vektor $\boldsymbol{A}$ do trojrozměrného prostoru kolmo ke čtyřvektoru rychlosti $\boldsymbol{u}$. Jestliže $\boldsymbol{n}$ je jednotkový prostorupodobný vektor, ukažte, že $\boldsymbol{P} \equiv g - \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n}$.

*Řešení:*

Z definice projekčního tenzoru $\boldsymbol{P}$ můžeme pro jeho složky psát

$$P_{\alpha\beta} \equiv g_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta.$$

Předpokládejme, že $\boldsymbol{A}$ je libovolný vektor. O tom, zda je obraz vektoru $\boldsymbol{A}$ v projekci $\boldsymbol{P}$ kolmý na čtyřvektor rychlosti $\boldsymbol{u}$, se přesvědčíme pomocí skalárního součinu:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{u} \cdot [(g_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta).\boldsymbol{A}] = u^\alpha (g_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta) A^\beta = \\ = u^\alpha g_{\alpha\beta} A^\beta + u^\alpha (u_\alpha u_\beta) A^\beta = u^\alpha A_\alpha - u_\beta A^\beta = u_\alpha A^\alpha - u_\beta A^\beta = 0. \end{aligned}$$

Také se snadno můžeme přesvědčit, že je-li $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{u} = 0$, pak $P \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$.

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{A}) = 0 \\ \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{u} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{A} = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{A}.$$

To znamená, že se vektor $\boldsymbol{A}$ promítne sám na sebe.

Předpokládejme nyní, že $\boldsymbol{n}$ je jednotkový prostorupodobný vektor.
Potom

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{A}) = n^\alpha (g_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta) A^\beta = n^\alpha g_{\alpha\beta} A^\beta - n^\alpha n_\alpha n_\beta A^\beta = n_\beta A^\beta - n_\beta A^\beta = 0.$$

Stejně jako vektor $\boldsymbol{A}$, tak i vektor $\boldsymbol{n}$ se zobrazí sám na sebe.

Nechť $\boldsymbol{P}$ je nyní projekční operátor kolmý na nulový vektor $\boldsymbol{k}$, tedy

$$\boldsymbol{k} \cdot (\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{A}) = 0$$

pro každý vektor $\boldsymbol{A}$. Opět snadno dokážeme, že $\boldsymbol{P} + K(\boldsymbol{k} \otimes \boldsymbol{k})$, $K$ je libovolná konstanta, je také projekční operátor.

$$\boldsymbol{P} = g - \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n} + K(\boldsymbol{k} \otimes \boldsymbol{k}),$$

$$P_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta + K(k_\alpha k_\beta).$$

Součin $k_\alpha k_\beta$ vypočteme pomocí skalárního součinu $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k}$:

$$0 = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} = g^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta \Rightarrow (k_\alpha k_\beta) = \frac{\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k}}{g^{\alpha\beta}} = 0.$$

Tedy

$$\boldsymbol{P} = g_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta,$$

což znamená, že takových projekčních tenzorů je nekonečně mnoho.

*Poznámka*: Všimněte si, že množina nulových projekčních operátorů je neprázdná a že pro libovolný čtyřvektor $\boldsymbol{w}$ lze jeden z těchto operátorů zapsat ve tvaru $\boldsymbol{P} = g - (\boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{k})/(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{w})$. Zároveň si také povšimněte, že neexistují *symetrické* nulové projekční operátory.

❑ ❑ ❑

**Úloha 6.**

Dokažte, že konformní transformace metriky, např. $g_{\alpha\beta} \to f(x^\mu) g_{\alpha\beta}$ pro libovolnou funkci $f$, zachovává všechny úhly. Dokažte také, že tato transformace zachovává nulové křivky.

*Řešení:*

V euklidovském prostoru je odchylka dvou vektorů $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ definována jako podíl skalárního součinu $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ a součinu velikostí těchto vektorů $(\mid \boldsymbol{a} \mid . \mid \boldsymbol{b} \mid)$

$$\cos\alpha = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{(\mid \boldsymbol{a} \mid . \mid \boldsymbol{b} \mid)}.$$

Analogickým způsobem budeme definovat odchylku dvou vektorů v libovolném metrickém prostoru. Nechť $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ jsou dva libovolné vektory metrického prostoru. Pak jejich odchylku $\theta$ vypočteme podle vztahu

$$\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})}{(\mid \boldsymbol{A} \mid . \mid \boldsymbol{B} \mid)}.$$

Při konformní transformaci souřadnic $g_{\alpha\beta} \to f(x^\mu g_{\alpha\beta})$ můžeme psát

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}}{\mid \boldsymbol{A} \mid . \mid \boldsymbol{B} \mid} = \frac{g_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta}{\sqrt{g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu g_{\rho\sigma} B^\rho B^\sigma}} \to \frac{f(x^\gamma) g_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta}{\sqrt{f(x^\gamma) g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu f(x^\gamma) g_{\rho\sigma} B^\rho B^\sigma}} =,$$

$$= \frac{f(x^\gamma) g_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta}{f(x^\gamma)\sqrt{g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu g_{\rho\sigma} B^\rho B^\sigma}} = \frac{g_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta}{\sqrt{g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu g_{\rho\sigma} B^\rho B^\sigma}} = \cos\theta.$$

Nulové křivky zůstávají nulovými křivkami, protože druhá mocnina jejich tečného vektoru zůstává rovna nule:

$$0 = \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{e} = g_{\mu\nu} e^\mu e^\nu.$$

Tedy při konformní transformaci souřadnic platí

$$\boldsymbol{e}' \cdot \boldsymbol{e}' = f(x^\gamma) g_{\mu\nu} e^\mu e^\nu = f(x^\gamma).0 = 0$$

❑ ❑ ❑

**Úloha 7.**

Varieta, která má tvar dvojrozměrné koule, je v okolí $\theta = \frac{1}{2}, \chi = 0$ popsána metrikou

$$ds^2 = d\theta^2 + (\theta - \theta^3)^2 d\chi^2.$$

Tato varieta má právě jeden bod, který není lokálně rovinný, zvaný „kónická" singularita. Dokažte, že existují dvě maximální analytická rozšíření této metriky, tj. že existují dvě různé možnosti rozšíření metriky, která splňují podmínku existence právě jedné „kónické" singularity.

*Poznámka*: Všimněte si, že v lokáním souřadnicovém okolí metrika ne vždy zachovává globální charakter variety.

( Nápověda: Uvažujte periodičnost souřadnice $\chi$.)

*Řešení:*

Rovnice metriky, která popisuje danou varietu, je

$$ds^2 = d\theta^2 + (\theta - \theta^3)^2\, d\chi^2. \tag{1.22}$$

Pokud v rovnici (1.22) nahradíme koeficient $(\theta - \theta^3)^2$ výrazem $\sin^2\theta$, obdržíme metriku, která popisuje jednotkovou euklidovskou kouli. Podle způsobu zadání se jedná o nějaký druh osově symetrické deformované dvojrozměrné koule s možnými singularitami v bodech $\theta = 0, \pm 1$. Máme-li zadánu hodnotu $\theta = \frac{1}{2}$, je zřejmé, že měřítko $\theta$ se může měnit od 0 do 1 (tedy $0 < \theta < 1$).

Musíme vyšetřit zvláštní případy $\theta = 0, \theta = 1$ s ohledem na hodnoty, které může nabývat souřadnice $\chi$. Víme, že $\chi$ musí být periodická, protože ze zadání metriky plyne: ($\theta = 0$, všechna $\chi$) a ($\theta = 1$, všechna $\chi$) vyjadřují každá jeden bod.

Pro $\theta \sim 0$ obdržíme přibližný tvar metriky

$$ds^2 \sim d\theta^2 + \theta^2\, d\chi^2.$$

Nechť je souřadnice $\chi$ periodická s periodou $P$, potom vlastní obvod $o$ kružnice o poloměru $\Delta\theta$ je

$$o = \int_0^P (\Delta\theta)\, d\chi = (\Delta\theta)P.$$

Jestliže se máme vyhnout „kónické" singularitě, pak musí platit

$$o = 2\pi(\Delta\theta).$$

Proto

$$P = 2\pi.$$

Nyní uvažujme $\theta \sim 1$ : Potom

$$ds^2 \sim d\theta^2 + \theta^2\,(1-\theta^2)^2\, d\chi^2 = d\theta^2 + \theta^2(1-\theta)^2(1+\theta)^2\, d\chi^2 =,$$

$$= d\theta^2 + 4(1-\theta)^2\, d\chi^2.$$

Abychom se vyhnuli „kónické" singularitě v tomto případě, musí platit analogická podmínka jako v předešlém případě:

$$o = \int_0^P 2(\Delta\theta)\, d\chi = 2P(\Delta\theta) = 2\pi(\Delta\theta).$$

Rovnost nastává pro $P = \pi$.

Tedy můžeme položit $P = 2\pi$ a mít „kónickou“ singularitu v bodě $\theta = 1$, nebo položíme $P = \pi$ a „kónická“ singularita je v bodě $\theta = 1$. To jsou jediná dvě možná globální rozšíření variety (1.22).

❑ ❑ ❑

# Kapitola 2

# Kovariantní derivace, geodetické křivky

## 2.1 Úvod

Parciální derivace vektoru nebo tenzoru podle prostorové souřadnice (stručně je označujeme čárkou, například $\dfrac{dA^{\mu}}{dx^{\nu}} = A^{\mu}{}_{,\nu}$ ) nejsou samy o sobě složkami tenzoru, protože musíme vzít v úvahu také zakřivení prostorových souřadnic. Zobecněním této myšlenky můžeme dojít k pojmu tzv. kovariantní derivace (stručně ji označujeme středníkem, např. $A^{\mu}{}_{;\nu}$). Tenzor, který vznikne derivováním tenzoru $\boldsymbol{Q} = Q^{\alpha\beta\ldots}{}_{\gamma\delta\ldots}$ označíme $\nabla\boldsymbol{Q}$ a jeho složky vypočteme podle vztahu

$$\begin{aligned} Q^{\alpha\beta\ldots}{}_{\gamma\delta\ldots;\sigma} &\equiv Q^{\alpha\beta\ldots}{}_{\gamma\delta\ldots,\sigma} + \Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}\, Q^{\nu\beta\ldots}{}_{\gamma\delta\ldots} + \Gamma^{\beta}_{\nu\sigma}\, Q^{\alpha\nu\ldots}{}_{\gamma\delta\ldots} + \cdots - \\ &- \Gamma^{\nu}_{\gamma\sigma}\, Q^{\alpha\beta\ldots}{}_{\nu\delta\ldots} - \Gamma^{\nu}_{\delta\sigma}\, Q^{\alpha\beta\ldots}{}_{\gamma\nu\ldots} - \cdots, \end{aligned}$$

kde každému indexu odpovídá právě jeden korekční člen. Výrazy $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ se nazývají Christoffelovy symboly (nebo koeficienty afinní konexe[1]) Jejich výpočet je nejjednodušší v tzv. souřadnicové bázi (v této bázi platí, že komutátor dvou bázových vektorů je roven nule a tedy také komutační koeficienty $c^{\gamma}_{\alpha\beta}$ jsou rovny nule,) tj. platí

$$c^{\gamma}_{\alpha\beta}\boldsymbol{e}_{\gamma} = [\boldsymbol{e}_{\alpha},\, \boldsymbol{e}_{\beta}] = \boldsymbol{e}_{\alpha}\cdot\boldsymbol{e}_{\beta} - \boldsymbol{e}_{\beta}\cdot\boldsymbol{e}_{\alpha} = 0.$$

Potom

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = g^{\alpha\mu}\,\Gamma_{\mu\beta\gamma} = \frac{1}{2}\, g^{\alpha\mu}\,(g_{\mu\beta,\gamma} + g_{\mu\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma\,\mu}).$$

V nesouřadnicové bázi Christoffelovy symboly vypočteme podle vztahu (viz např. [8])

$$\Gamma_{\mu\beta\gamma} = \frac{1}{2}(g_{\mu\beta,\gamma} + c_{\mu\beta\gamma} + g_{\gamma\mu,\beta} + c_{\gamma\mu\beta} - g_{\beta\gamma},\, \mu - c_{\beta\gamma\mu}).$$

Zároveň platí, že Christoffelovy symboly $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ jsou symetrické v posledních dvou indexech, tj. platí

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}.$$

[1]Vztah mezi Christoffelovými symboly a koeficienty afinní konexe je popsán v příkladu (1). Podrobnější informace jsou uvedeny například v [3], [8].

Kovariantní derivaci, kterou skalárně vynásobíme libovolným vektorem $\boldsymbol{u}$ nazýváme derivace ve směru vektoru $\boldsymbol{u}$ a platí

$$(\nabla \boldsymbol{Q}) \cdot \boldsymbol{u} \equiv \nabla_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{Q} = Q^{\alpha\beta\ldots}{}_{\gamma\delta\ldots,\nu}\, u^{\nu}.$$

Nechť $\boldsymbol{u}$ je tečný vektor ke křivce, která je parametrizovaná pomocí parametru $\lambda$, pak lze psát

$$\boldsymbol{u} = \frac{d}{d\lambda} \text{ pro } u^{\alpha} = \frac{dx^{\alpha}}{d\lambda} \text{ a } \nabla_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{Q} = \frac{D\boldsymbol{Q}}{\lambda}.$$

Pokud je vektor $\boldsymbol{u}$ bázový vektor, potom platí

$$\nabla_{\boldsymbol{e}_{\alpha}} \boldsymbol{Q} \equiv \nabla_{\alpha} \boldsymbol{Q}.$$

S využitím bázových vektorů můžeme zapsat také koeficienty afinní konexe ve tvaru

$$\nabla_{\beta} \boldsymbol{e}_{\alpha} = \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\, \boldsymbol{e}_{\mu} \text{ neboli } \Gamma_{\mu\alpha\beta} = \boldsymbol{e}_{\mu} \cdot \nabla_{\beta} \boldsymbol{e}_{\alpha}.$$

Operátor kovariantní derivace $\nabla$ splňuje všechna pravidla pro výpočet derivací s výjimkou komutativnosti (tj. $\nabla_{\boldsymbol{u}} \nabla_{\boldsymbol{v}} \neq \nabla_{\boldsymbol{v}} \nabla_{\boldsymbol{u}}$ ).

Nechť $\boldsymbol{u}$ je tečný vektor křivky. Pak řekneme, že vektor $\boldsymbol{Q}$ je paralelně přenesen podél křivky, jestliže platí

$$\nabla_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{Q} = 0.$$

Jestliže nyní nahradíme vektor $\boldsymbol{Q}$ vektorem $\boldsymbol{u}$, obdržíme vztah

$$\nabla_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{u} = 0,$$

což je rovnice geodetické čáry.
Nechť nyní $x^{\alpha}(\lambda)$ je geodetická čára. Potom složky rovnice této geodetické čáry jsou

$$0 = (\nabla_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{u}) = \frac{d^2 x^{\mu}}{d\lambda^2} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \frac{dx^{\alpha}}{d\lambda} \frac{dx^{\beta}}{d\lambda}$$

(tuto rovnici odvodíme v příkladu 9). V tomto případě musí být $\lambda$ afinní parametr podél křivky. To znamená, že pro nenulové[2] je $\lambda$ úměrné vlastní délce geodetické čáry.

Předpokládejme nyní prostorupodobnou křivku. Nechť $\boldsymbol{u}$ je její tečný vektor a nechť $\boldsymbol{a} = \nabla_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{u} = \dfrac{D\boldsymbol{u}}{d\tau}$. Fermi-Walkerův přesun vektoru $\boldsymbol{V}$ definujeme předpisem

$$\nabla_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{V} = (\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{V},$$

kde operace „$\otimes$" znamená

$$\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{a} = u_{\alpha}\, a^{\beta} = u^{\alpha}\, a_{\beta}$$

a uplatňuje se u zrychlených vztažných soustav.

[2]Nulová křivka má význam světlupodobné křivky. Nenulové jsou potom všechny časupodobné a všechny prostorupodobné křivky.

## 2.2 Úlohy

**Úloha 1.**

Dokažte, že koeficienty afinní konexe $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ nevyhovují tenzorovým transformačním pravidlům.

*Řešení:*

Předpokládejme, že máme takto definovanou transformaci:

$$e_{\mu'} = L^{\sigma}_{\mu'} e_{\sigma},$$

kde

$$L^{\sigma}_{\mu'} \equiv \frac{dx^{\sigma}}{dx^{\mu'}}.$$

Potom

$$\nabla_{e'_\beta} e'_\alpha = \Gamma^{\tau'}_{\alpha'\beta'} e_{\tau'} = \nabla_{(L^{\lambda}_{\beta'} e_\lambda)} (L^{\mu}_{\alpha'} e_\mu) = L^{\lambda}_{\beta'} \nabla_{e_\lambda} (L^{\mu}_{\alpha'} e_\mu) =$$

$$= L^{\lambda}_{\beta'} (L^{\mu}_{\alpha',\lambda} e_\mu + L^{\mu}_{\alpha'} \nabla_{e_\lambda} e_\mu).$$

Přitom víme, že

$$\nabla_{e_\lambda} e_\mu = \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} e_\nu.$$

Tedy

$$\Gamma^{\tau'}_{\alpha'\beta'} e_{\tau'} = L^{\lambda}_{\beta'} (L^{\mu}_{\alpha',\lambda} e_\mu + L^{\mu}_{\alpha'} \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} e_\nu). \tag{2.1}$$

Transformaci pro přechod od čárkovaných souřadnic k nečárkovaným lze zapsat tímto způsobem:

$$e_\mu = L^{\sigma'}_{\mu} e_{\sigma'}.$$

S využitím tohoto vztahu můžeme rovnici (2.1)0 dále upravit a získáme

$$\Gamma^{\tau'}_{\alpha'\beta'} e_{\tau'} = L^{\lambda}_{\beta'} (L^{\mu}_{\alpha',\lambda} L^{\tau'}_{\mu} e_{\tau'} + L^{\mu}_{\alpha'} \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} L^{\tau'}_{\nu} e_{\tau'}) = L^{\lambda}_{\beta'} (L^{\mu}_{\alpha',\lambda} L^{\tau'}_{\mu} + L^{\mu}_{\alpha'} L^{\tau'}_{\nu} \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}) e_{\tau'}.$$

Proto

$$\Gamma^{\tau'}_{\alpha'\beta'} = L^{\mu}_{\alpha'} L^{\lambda}_{\beta'} L^{\tau'}_{\nu} \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} + L^{\lambda}_{\beta'} L^{\tau'}_{\mu} L^{\mu}_{\alpha',\lambda}. \tag{2.2}$$

Druhý člen na pravé straně rovnice (2.2) způsobuje, že se koeficienty afinní konexe transformují jinak než tenzory.

❑ ❑ ❑

**Úloha 2.**

V dvojrozměrném euklidovském prostoru popsaném polárními souřadnicemi $r, \theta$ ukažte, že geodetické čáry splývají s přímkami.

a) Najděte Christoffelovy symboly pomocí derivace metrických koeficientů $g_{\mu\nu}$ z intervalu $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$ .

b) V souřadnicovém systému $x$, $y$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, předpokládejte, že všechny koeficienty afinní konexe jsou nulové

$$(\text{tj.} \quad \Gamma^{x}_{xx} = \Gamma^{x}_{xy} = \cdots = 0).$$

Použitím transformačního zákona najděte tyto koeficienty v souřadnicích $r$, $\theta$.

c) Najděte Christoffelovy symboly $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ s využitím rovnice geodetické čáry.

*Řešení:*

a) Dvojrozměrný metrický prostor je popsán metrikou

$$ds^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2, \tag{2.3}$$

odpovídající metrický tenzor je

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

Pro výpočet Christoffelových symbolů použijeme definičního vztahu

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu}(g_{\mu\beta,\gamma} + g_{\gamma\mu,\beta} - g_{\beta\gamma,\mu}), \tag{2.4}$$

kde $g^{\alpha\beta}$ je v našem případě

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix}.$$

Jak vidíme ze zápisu metrického tenzoru, jediným koeficientem, který při derivaci nezaniká, je $g_{\theta\theta} = r^2$, a to při derivaci podle $r$. Proto nenulové budou pouze ty Christoffelovy symboly, které obsahují člen $g_{\theta\theta,r} = 2r$. Jsou to:

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = \frac{1}{2} g^{rr}(g_{r\theta,\theta} + g_{\theta r,\theta} - g_{\theta\theta,r}) = \frac{1}{2} g^{rr}(-g_{\theta\theta,r}) = -r,$$

$$\Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{1}{2} g^{\theta\theta}(g_{\theta\theta,r}) = \frac{1}{r}.$$

Zbývající koeficienty afinní konexe jsou nulové.

b) Polární souřadnice jsou definovány rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta, \\ y &= r\sin\theta. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Odtud plyne

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2, \\ \frac{x}{y} &= \operatorname{cotg}\theta. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Derivováním těchto rovnic obdržíme vztahy pro $dr$ a $d\theta$ v závislosti na $dx$ a $dy$, což jsou v podstatě transformační rovnice pro přechod z kartézských do polárních souřadnic.

$$\begin{aligned} 2r\, dr &= 2x\, dx + 2y\, dy, \\ -\frac{d\theta}{\sin^2\theta} &= \frac{y\, dx - x\, dy}{y^2}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Dosadíme-li do soustavy rovnic (2.15) vztahy (2.5), obdržíme po úpravě

$$\begin{aligned} dr &= \cos\theta\, dx + \sin\theta\, dy, \\ d\theta &= -\frac{\sin\theta}{r}\, dx + \frac{\cos\theta}{r}\, dy, \end{aligned} \tag{2.8}$$

a tedy můžeme psát matici transformace

$$L^{\alpha'}_{\mu} = \begin{pmatrix} L^r_x & L^r_y \\ L^\theta_x & L^\theta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\dfrac{\sin\theta}{r} & \dfrac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix}.$$

Matici $L^{\mu}_{\beta'}$ inverzní transformace vypočítáme analogickým způsobem:

$$\begin{aligned} x = r\cos\theta \quad &\Rightarrow \quad dx = \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta, \\ y = r\sin\theta \quad &\Rightarrow \quad dy = \sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta, \end{aligned}$$

$$L^{\mu}_{\beta'} = \begin{pmatrix} L^x_r & L^x_\theta \\ L^y_r & L^y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Transformační rovnici v tenzorovém tvaru jsme odvodili v příkladu 1:

$$\Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'} = L^{\alpha'}_{\rho} L^{\mu}_{\beta'} L^{\nu}_{\gamma'} \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} + L^{\alpha'}_{\mu} L^{\mu}_{\beta',\gamma'}. \tag{2.9}$$

Podle předpokladu jsou v kartézských souřadnicích všechny Christoffelovy symboly $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ nulové, takže v rovnici (2.9) zůstane na pravé straně pouze druhý člen.

$$\Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'} = L^{\alpha'}_{\mu} L^{\mu}_{\beta',\gamma'} \tag{2.10}$$

Nyní už můžeme vypočítat jednotlivé koeficienty afinní konexe:

$$\Gamma^r_{rr} = L^r_x L^x_{r,r} + L^r_y L^y_{r,r} = 0,$$

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = L^r_x L^x_{\theta,\theta} + L^r_y L^y_{\theta,\theta} = -r.$$

Tímto způsobem určíme také hodnoty zbývajících symbolů:

$$\Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{1}{r},$$

$$\Gamma^r_{r\theta} = \Gamma^r_{\theta r} = \Gamma^\theta_{\theta\theta} = \Gamma^\theta_{rr} = 0.$$

c) Nejprve uvažujme přímku $\theta = 0$, $r = s$ ($s$ je afinní parametr - délka ). Rovnice metriky $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$ při této volbě souřadnic přejde na tvar $ds^2 = dr^2$, tedy v rovnici geodetické čáry (viz příklad 9)

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0 \tag{2.11}$$

je nenulový pouze jeden člen, který obsahuje $\left(\dfrac{dr}{ds}\right)^2$. Rovnice geodetiky se potom zjednoduší na tvar

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{rr} \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = 0.$$

Tato rovnice má dvě řešení:

i) $\mu = r$, potom

$$\frac{d^2r}{ds^2} + \Gamma^r_{rr}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = 0.$$

Předpokládali jsme, že $r =$ konstanta a $ds^2 = dr^2$, tedy $\dfrac{d^2r}{ds^2} = 0$ a

$$\Gamma^r_{rr} = 0.$$

ii) $\mu = \theta$, pak

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + \Gamma^\theta_{rr}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = 0.$$

Z počáteční podmínky $\theta = 0$ plyne, že

$$\Gamma^\theta_{rr} = 0.$$

Nyní uvažujme křivky, které neprocházejí počátkem. Přeparametrizujeme rovnici geodetiky (2.11) s využitím neafinního parametru $\theta$.

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} = \frac{d\theta}{ds}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{d\theta}{ds}\frac{dx^\mu}{d\theta}\right) = \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2\frac{d^2x^\mu}{d\theta^2} + \frac{d\theta}{ds}\frac{dx^\mu}{d\theta}\frac{d}{d\theta}\frac{d\theta}{ds} =$$

$$= \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2\frac{d^2x^\mu}{d\theta^2} + \frac{dx^\mu}{d\theta}\frac{d^2\theta}{ds^2},$$

$$\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2\frac{d^2x^\mu}{d\theta^2} + \frac{d^2\theta}{ds^2}\frac{dx^\mu}{d\theta} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2\frac{dx^\alpha}{d\theta}\frac{dx^\beta}{d\theta} = 0,$$

a po úpravě

$$\frac{d^2x^\mu}{d\theta^2} + \frac{\dfrac{d^2\theta}{ds^2}}{\left(\dfrac{d\theta}{ds}\right)^2}\frac{dx^\mu}{d\theta} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\theta}\frac{dx^\beta}{d\theta} = 0. \tag{2.12}$$

Obecný tvar rovnice přímky je

$$r\cos(\theta - \gamma) = R_0, \tag{2.13}$$

kde $\gamma$, $R_0$ jsou libovolné konstanty (viz např. [2]). K vyřešení rovnice (2.12) potřebujeme určit hodnotu výrazu $\dfrac{\frac{d^2\theta}{ds^2}}{\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2}$.

Z rovnice (2.3) plyne

$$\frac{ds^2}{d\theta^2} = \left(\frac{dr^2}{d\theta^2}\right)^2 + r^2, \tag{2.14}$$

a z rovnice (2.13)

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{R_0\,\mathrm{tg}\,(\theta - \gamma)}{\cos^2(\theta - \gamma)}. \tag{2.15}$$

Po dosazení rovnice (2.15) do rovnice (2.14) získáme

$$\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 = \frac{R_0^2}{\cos^4(\theta - \gamma)},$$

a odtud

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{\cos^2(\theta-\gamma)}{R_0} \tag{2.16}$$

Proto

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = \frac{-2\cos^3(\theta-\gamma)\sin(\theta-\gamma)}{R_0^2}. \tag{2.17}$$

Po dosazení vztahů z rovnic (2.16) a (2.17) do rovnice (2.12) a po úpravě má rovnice geodetiky tvar

$$\frac{d^2x^\mu}{d\theta^2} - 2\,\mathrm{tg}\,(\theta-\gamma)\frac{dx^\mu}{d\theta} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\theta}\frac{dx^\beta}{d\theta} = 0. \tag{2.18}$$

Uvažujme nyní bod o souřadnicích $\theta = \gamma$, $r = R_0$, který leží na přímce. Potom $\mathrm{tg}\,(\theta-\gamma) = 0$ a rovnice (2.18) má teď tvar

$$\frac{d^2x^\mu}{d\theta^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\theta}\frac{dx^\beta}{d\theta} = 0,$$

který je ekvivalentní s rovnicí

$$\frac{d^2x^\mu}{d\theta^2} + \Gamma^\mu_{rr}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + 2\Gamma^\mu_{r\theta}\frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{d\theta} + \Gamma^\mu_{\theta\theta}\left(\frac{d\theta}{d\theta}\right)^2 = 0.$$

Víme-li, že $r =$ konstanta a $\Gamma^r_{rr} = \Gamma^\theta_{rr} = 0$, získáme rovnici

$$\frac{d^2x^\mu}{d\theta^2} + \Gamma^\mu_{\theta\theta} = 0,$$

kterou opět musíme vyřešit pro dvě hodnoty indexu $\mu$.

i) Nechť $\mu = r$. Pak

$$\frac{d^2r}{d\theta^2} + \Gamma^r_{\theta\theta} = 0$$

a

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = -\frac{d^2r}{d\theta^2}.$$

Využijeme-li rovnice (2.15), můžeme psát

$$\frac{d^2r}{d\theta^2} = \frac{R_0\cos^4(\theta-\gamma) + 6R_0\sin^2(\theta-\gamma)\cos^2(\theta-\gamma)}{\cos^6(\theta-\gamma)} =$$

$$= \frac{R_0}{\cos^2(\theta-\gamma)}(1 + 6\,\mathrm{tg}^2(\theta-\gamma)).$$

Ale protože je $\theta = \gamma$, platí

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = -r.$$

ii) Nechť $\mu = \theta$. Potom analogicky

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{d\theta}{d\theta}\right) + \Gamma^\theta_{\theta\theta} = 0,$$

tudíž

$$\Gamma^\theta_{\theta\theta} = 0.$$

Protože $\gamma$ a $R_0$ jsou libovolné konstanty, platí tyto vztahy obecně.

Nakonec uvažujme libovolný bod ležící na přímce. Napíšeme dvě rovnice geodetické čáry a použijeme ty Christoffelovy symboly, které již známe.

$$\begin{aligned}
\frac{d^2r}{d\theta^2} - 2\,\mathrm{tg}\,(\theta-\gamma)\frac{dr}{d\theta} + \Gamma^r_{rr}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + 2\Gamma^r_{r\theta}\frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{d\theta} + \Gamma^r_{\theta\theta}\left(\frac{d\theta}{d\theta}\right)^2 &= 0,\\
\frac{d^2\theta}{d\theta^2} - 2\,\mathrm{tg}\,(\theta-\gamma)\frac{d\theta}{d\theta} + \Gamma^\theta_{\theta\theta}\left(\frac{d\theta}{d\theta}\right)^2 + 2\Gamma^\theta_{r\theta}\frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{d\theta} + \Gamma^\theta_{rr}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 &= 0.
\end{aligned}$$

Již víme, že $\Gamma^r_{rr} = \Gamma^\theta_{rr} = \Gamma^\theta_{\theta\theta} = 0$, $\Gamma^r_{\theta\theta} = -r$, potom z geodetické rovnice pro $\mu = \theta$ a s využitím rovnice (2.13) můžeme psát

$$\begin{aligned}
2\Gamma^\theta_{r\theta}\frac{dr}{d\theta} &= 2\,\mathrm{tg}\,(\theta-\gamma),\\
r\,\mathrm{tg}\,(\theta-\gamma)\Gamma^\theta_{r\theta} &= \mathrm{tg}\,(\theta-\gamma),\\
\Gamma^\theta_{r\theta} &= \frac{1}{r}.
\end{aligned}$$

❑ ❑ ❑

**Úloha 3.**

Uvažujte rovinný prostor, který je popsán metrikou

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2.$$

a) Napište rovnice geodetických čar v tomto prostoru a dokažte, že následující výrazy jsou prvními integrály těchto rovnic.

$$r^2\frac{d\theta}{ds} = R_0 = \text{konstanta}, \tag{2.19}$$

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = 1. \tag{2.20}$$

b) S využitím výsledku a) odvoďte diferenciální rovnici prvního řádu pro $r = r(\theta)$.

c) Vzhledem k tomu, že daný metrický prostor je dvojrozměrný euklidovský prostor, napište obecnou rovnici přímky v souřadnicovém systému $r$,$\theta$ a dokažte, že tato rovnice přímky splňuje rovnici odvozenou v b).

*Řešení:*

a) Nejprve napíšeme rovnice geodetických čar, přičemž použijeme Christoffelovy symboly, které jsme vypočítali v předchozím příkladu, tj.

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = -r, \quad \Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{1}{r}.$$

Tedy máme dvě rovnice geodetických čar

$$\frac{d^2r}{ds^2} + \Gamma^r_{\theta\theta}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = 0, \qquad \frac{d^2\theta}{ds^2} + 2\Gamma^\theta_{r\theta}\frac{dr}{ds}\frac{d\theta}{ds} = 0.$$

Po dosazení obdržíme

$$\frac{d^2r}{ds^2} - r\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = 0, \tag{2.21}$$

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\theta}{ds} = 0. \tag{2.22}$$

První výraz získáme, jestliže vyřešíme rovnici (2.22).

$$\frac{\frac{d^2\theta}{ds^2}}{\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{ds} = 0.$$

Použijeme-li pravidla pro výpočet derivace přirozeného logaritmu, můžeme tuto rovnici dále upravovat

$$\frac{d}{ds}\left[\ln\frac{d\theta}{ds} + \ln r^2\right] = 0,$$

proto výraz v hranatých závorkách musí být roven konstantě

$$\ln\left(r^2\frac{d\theta}{ds}\right) = \text{konstanta}$$

a odtud plyne

$$r^2\frac{d\theta}{ds} = R_0 = \text{konstanta}.$$

Druhý z hledaných integrálů vypočteme přímo z rovnice metriky.

$$dr^2 + r^2 d\theta^2 = ds^2,$$

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = 1.$$

b) Vyjdeme z rovnice (2.20). Potom

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{ds}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = 1. \tag{2.23}$$

Z rovnice (2.19) plyne

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{R_0}{r^2},$$

a tento vztah dosadíme do rovnice (2.23).

$$\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2\left[\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right] = 1,$$

$$\frac{R_0^2}{r^4}\left[\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right] = 1.$$

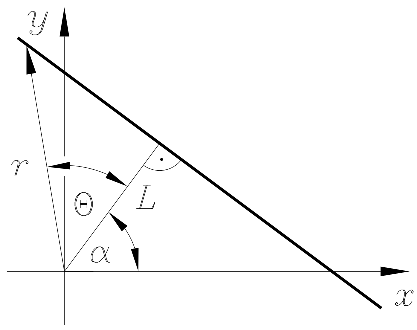
Hledaná diferenciální rovnice je

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2 - \frac{r^4}{R_0^2} = 0. \tag{2.24}$$

c) Rovnice přímky, která neprochází počátkem, má v polárních souřadnicích tvar (viz např. [2])

$$r = \frac{L}{\cos(\theta - \alpha)}. \tag{2.25}$$

Potom




Obr. 1: K úloze 3

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{L\sin(\theta - \alpha)}{\cos^2(\theta - \alpha)},$$

a tento vztah dosadíme do rovnice (2.24):

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2 = L^2 \frac{\sin^2(\theta - \alpha)}{\cos^4(\theta - \alpha)} + \frac{L^2}{\cos^2(\theta - \alpha)} =$$

$$= \frac{L^2}{\cos^2(\theta - \alpha)} \left[\frac{\sin^2(\theta - \alpha) + \cos^2(\theta - \alpha)}{\cos^2(\theta - \alpha)}\right] \frac{L^2}{L^2} = \frac{L^4}{\cos^4(\theta - \alpha)} \frac{1}{L^2} = \frac{r^4}{L^2}.$$

Tedy všechny přímky ve dvojrozměrném euklidovském prostoru vyhovují rovnici geodetické čáry.

❑ ❑ ❑

**Úloha 4.**

a) Vypočtěte všechny koeficienty afinní konexe $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$ pro dvojrozměrný metrický prostor

$$ds^2 = \frac{1}{t^2}(dx^2 - dt^2).$$

b) Najděte v tomto prostoru všechny časupodobné geodetické křivky.

*Řešení:*

a) Metrický tenzor této metriky je

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{t^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{t^2} \end{pmatrix}.$$

Jediné derivace jeho složek, které nezanikají, jsou

$$\begin{aligned} g_{xx,t} &= -\frac{2}{t^3}, \\ g_{tt,t} &= \frac{2}{t^3}, \end{aligned}$$

zbývající derivace jsou nulové. Vztah pro výpočet koeficientu afinní konexe $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$ je

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta,\gamma} + g_{\gamma\alpha,\beta} - g_{\beta\gamma,\alpha}).$$

Potom

$$\begin{aligned} \Gamma_{xxt} &= \frac{1}{2}(g_{xx,t} + g_{tx,x} - g_{xt,x}) = \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{t^3}\right) = -\frac{1}{t^3}, \\ \Gamma_{xtx} &= \frac{1}{2}(g_{xt,x} + g_{xx,t} - g_{tx,x}) = -\frac{1}{t^3}, \\ \Gamma_{txx} &= \frac{1}{2}(g_{tx,x} + g_{xt,x} - g_{xx,t}) = \frac{1}{t^3}, \\ \Gamma_{ttt} &= \frac{1}{2}(g_{tt,t} + g_{tt,t} - g_{tt,t}) = \frac{1}{t^3}, \\ \Gamma_{xxx} &= \Gamma_{ttx} = \Gamma_{txt} = \Gamma_{xtt} = 0. \end{aligned}$$

b) Nejjednodušší způsob, jak nalézt rovnici geodetické čáry, je odvodit ji přímo z její definice jako křivky extrémního vlastního času. Nechť rovnice geodetiky je $x = x(t)$. Potom

$$\delta\int d\tau = \delta\int\sqrt{-ds^2} = 0. \tag{2.26}$$

Z rovnice metriky získáme

$$ds^2 = \frac{-dt^2}{t^2}\left(1 - \frac{dx^2}{dt^2}\right) = \frac{dt^2}{t^2}\left(\dot{x}^2 - 1\right),$$

kde $\dot{x} \equiv \dfrac{dx}{dt}$, a tento vztah dosadíme do rovnice (2.26).

$$\delta\int\sqrt{\frac{dt^2}{t^2}(1 - \dot{x}^2)} = \delta\int\frac{dt}{t}\sqrt{1 - \dot{x}^2} = 0.$$

Nyní použijeme analogii s teoretickou mechanikou, když integrand budeme považovat za Lagrangeovu funkci. Odpovídající Euler-Lagrangeova rovnice je

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\dot{x}}{t\sqrt{1 - \dot{x}^2}}\right] = 0$$

(viz např. [13] nebo příklad 9). Odtud plyne, že

$$\frac{\dot{x}}{t\sqrt{1 - \dot{x}^2}} = K = \text{konstanta}.$$

Nechť

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} = \operatorname{tgh}\theta. \tag{2.27}$$

Potom $K = \dfrac{\sinh\theta}{t}$ a platí

$$t = \frac{\sinh\theta}{K}, \tag{2.28}$$

$$dt = \frac{d\theta}{K}\cosh\theta.$$

Z rovnice (2.27) vyplývá

$$dx = dt \operatorname{tgh}\theta.$$

Tedy

$$x = \int \operatorname{tgh}\theta dt = \frac{1}{K}\int \operatorname{tgh}\theta \cosh\theta d\theta = \frac{1}{K}\int \sinh\theta \, d\theta,$$

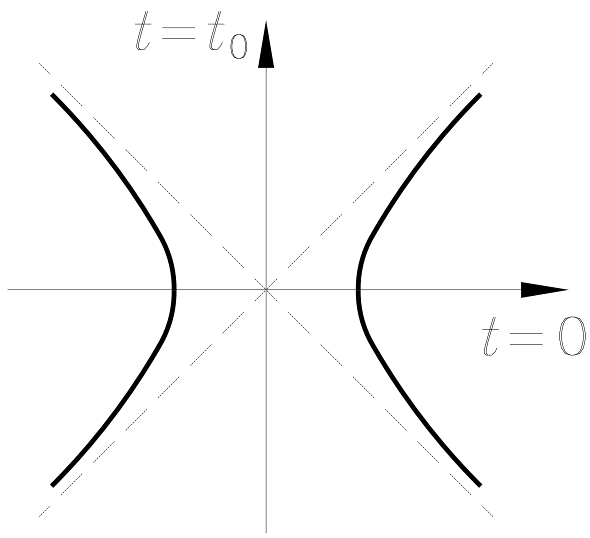
$$x = \frac{\cosh\theta}{K} + x_0,$$

$$x - x_0 = \frac{\cosh\theta}{K}.$$

Tuto rovnici umocníme a využijeme-li $\cosh^2\theta = 1 + \sinh^2\theta$, můžeme psát

$$(x - x_0)^2 = a^2 + t^2,$$

kde $a \equiv \dfrac{1}{K}$. Tedy časupodobnými geodetickými čaramijsou hyperboly a jejich asymptotické plochy jsou světelné kužely.




Obr. 2: K úloze 4

❑ ❑ ❑

**Úloha 5.**

Ukažte, že kovariantní derivace metrického tenzoru je nulová.

*Řešení:*

Výpočet kovariantní derivace je nejjednodušší v souřadnicové bázi, kde je tato derivace definovaná vztahem

$$g_{\alpha\beta;\gamma} = g_{\alpha\beta,\gamma} - g_{\sigma\beta}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\gamma} - g_{\alpha\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\beta\gamma}.$$

Za jednotlivé Christoffelovy symboly dosadíme

$$\Gamma^{\sigma}_{\alpha\gamma} = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(g_{\rho\alpha,\gamma} + g_{\rho\gamma,\alpha} - g_{\alpha\gamma,\rho}),$$

$$\Gamma^{\sigma}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}g^{\sigma\tau}(g_{\tau\beta,\gamma} + g_{\tau\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\tau}).$$

Potom

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta;\gamma} &= g_{\alpha\beta,\gamma} - \frac{1}{2}(g_{\sigma\beta}g^{\sigma\rho}g_{\rho\alpha,\gamma} + g_{\sigma\beta}g^{\sigma\rho}g_{\rho\gamma,\alpha} - g_{\sigma\beta}g^{\sigma\rho}g_{\alpha\gamma,\rho} + \\ &+ g_{\alpha\sigma}g^{\sigma\tau}g_{\tau\beta,\gamma} + g_{\alpha\sigma}g^{\sigma\tau}g_{\rho\gamma,\alpha} - g_{\alpha\sigma}g^{\sigma\tau}g_{\beta\gamma,\tau}). \end{aligned}$$

Využijeme-li vlastnosti metrického tenzoru $g_{\alpha\mu}g^{\mu\beta} = \delta^{\beta}_{\alpha}$, můžeme psát

$$g_{\alpha\beta;\gamma} = g_{\alpha\beta,\gamma} - \frac{1}{2}(\delta^{\rho}_{\beta}g_{\rho\alpha,\gamma} + \delta^{\rho}_{\beta}g_{\rho\gamma,\alpha} - \delta^{\rho}_{\beta}g_{\alpha\gamma,\rho} + \delta^{\tau}_{\alpha}g_{\tau\beta,\gamma} + \delta^{\tau}_{\alpha}g_{\tau\gamma,\beta} - \delta^{\tau}_{\alpha}g_{\beta\gamma,\tau}).$$

Nyní vidíme, že v závorce zůstanou pouze ty členy, u nichž je koeficient $\delta^{\rho}_{\beta}$ (resp. $\delta^{\tau}_{\alpha}$) roven jedničce, tj. pro $\rho = \beta$ (resp. $\tau = \alpha$ ). Potom

$$g_{\alpha\beta;\gamma} = g_{\alpha\beta,\gamma} - \frac{1}{2}(g_{\beta\alpha,\gamma} + g_{\beta\gamma,\alpha} - g_{\alpha\gamma,\beta} + g_{\alpha\beta,\gamma} + g_{\alpha\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\alpha}).$$

Odtud

$$g_{\alpha\beta;\gamma} = g_{\alpha\beta,\gamma} - \frac{1}{2}(2g_{\alpha\beta,\gamma}) = 0.$$

❑ ❑ ❑

**Úloha 6.**

Dokažte, že pro diagonální metriku jsou Christoffelovy symboly (v souřadnicovém tvaru) definovány vztahy

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = 0, \qquad \Gamma^{\mu}_{\lambda\lambda} = -\frac{1}{2g_{\mu\mu}}\frac{\partial g_{\lambda\lambda}}{\partial x^{\mu}},$$

$$\Gamma^{\mu}_{\mu\lambda} = \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\left(\ln\sqrt{|\, g_{\mu\mu}\,|}\right), \quad \Gamma^{\mu}_{\mu\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\ln\sqrt{|\, g_{\mu\mu}\,|}\right).$$

Přitom platí, že $\mu \neq \nu \neq \lambda$ a nesčítáme přes indexy, které se opakují.

*Řešení:*

Christoffelův symbol druhého druhu $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$ je v souřadnicové bázi definován vztahem

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}g^{\mu\alpha}(g_{\alpha\nu,\lambda} + g_{\alpha\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\alpha}). \tag{2.29}$$

a) Jestliže předpokládáme diagonální metriku, potom všechny nenulové koeficienty příslušného metrického tenzoru leží na hlavní diagonále a jsou to tyto: $g_{\mu\mu}$, $g_{\nu\nu}$ a $g_{\lambda\lambda}$. Proto se v rovnici (2.29) $\alpha$ musí rovnat $\mu$, ale protože je v zadání úlohy podmínka $\mu \neq \nu \neq \lambda$, jsou všechny Christoffelovy symboly $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$ nulové.

b) Nahradíme-li v rovnici (2.29) index $\nu$ indexem $\lambda$, můžeme psát

$$\Gamma^{\mu}_{\lambda\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha}(g_{\alpha\lambda,\lambda} + g_{\alpha\lambda,\lambda} - g_{\lambda\lambda,\alpha}) = -\frac{1}{2} g^{\mu\alpha} g_{\lambda\lambda,\alpha}.$$

Nyní opět využijeme faktu, že daná metrika je diagonální. Potom $g^{\mu\mu} = \dfrac{1}{g_{\mu\mu}}$ a

$$\Gamma^{\mu}_{\lambda\lambda} = -\frac{1}{2} \frac{1}{g_{\mu\mu}} g_{\lambda\lambda,\mu}.$$

c) Analogicky vypočteme zbývající Christoffelovy symboly.

$$\Gamma^{\mu}_{\mu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\mu}(g_{\mu\mu,\lambda} + g_{\mu\lambda,\mu} - g_{\mu\lambda,\mu}) = \frac{1}{2g_{\mu\mu}} g_{\mu\mu,\lambda},$$

a tedy

$$\Gamma^{\mu}_{\mu\lambda} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}(\ln \mid g_{\mu\mu} \mid) = \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \left( \ln \sqrt{\mid g_{\mu\mu} \mid} \right).$$

d) Nakonec

$$\begin{aligned} \Gamma^{\mu}_{\mu\mu} &= \frac{1}{2g_{\mu\mu}}(g_{\mu\mu,\mu} + g_{\mu\mu,\mu} - g_{\mu\mu,\mu}) = \frac{1}{2g_{\mu\mu}} g_{\mu\mu,\mu} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left( \ln \sqrt{|g_{\mu\mu}|} \right). \end{aligned}$$

❑ ❑ ❑

**Úloha 7.**

Dokažte následující identity:

a) $g_{\alpha\beta,\gamma} = \Gamma_{\alpha\beta\gamma} + \Gamma_{\beta\alpha\gamma}$ ,

b) $g_{\alpha\mu} g^{\mu\beta}{}_{,\gamma} = -g^{\mu\beta} g_{\alpha\mu,\gamma}$,

c) $g^{\alpha\beta}{}_{,\gamma} = -\Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma} g^{\mu\beta} - \Gamma^{\beta}_{\mu\gamma} g^{\mu\alpha}$,

d) $g_{,\alpha} = -g g_{\beta\gamma} g^{\beta\gamma}{}_{,\alpha} = g g^{\beta\gamma} g_{\beta\gamma,\alpha}$,

e) $\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta} = \left( \ln \sqrt{|g|} \right)_{,\beta}$,

f) $g^{\mu\nu} \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = -\dfrac{1}{\sqrt{|g|}} \left( g^{\alpha\nu} \sqrt{|g|} \right)_{,\nu}$,

g) $A^{\alpha}{}_{;\alpha} = \dfrac{1}{\sqrt{|g|}}\left(\sqrt{|g|}A^{\alpha}\right)_{,\alpha}$,

h) $A^{\beta}_{\alpha;\beta} = \dfrac{1}{\sqrt{|g|}}\left(\sqrt{|g|}A^{\beta}_{\alpha}\right)_{,\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu}A^{\mu}_{\lambda}$,

i) $A^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = \dfrac{1}{\sqrt{|g|}}\left(\sqrt{|g|}A^{\alpha\beta}\right)_{,\beta}$ (předpokládejte, že $A^{\alpha\beta}$ je antisymetrický).

*Řešení:*

a) Tuto identitu jsme v podstatě dokázali v příkladu 5. Lze ji ovšem dokázat i jiným způsobem: napíšeme rovnice pro Christoffelovy symboly $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$ a $\Gamma_{\beta\alpha\gamma}$ a tyto rovnice potom sečteme.

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha\beta\gamma} &= \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta,\gamma} + g_{\gamma\alpha,\beta} - g_{\beta\gamma,\alpha}),\\ \Gamma_{\beta\alpha\gamma} &= \frac{1}{2}(g_{\beta\alpha,\gamma} + g_{\gamma\beta,\alpha} - g_{\alpha\gamma,\beta}).\end{aligned}$$

Po sečtení získáme

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} + \Gamma_{\beta\alpha\gamma} = \frac{1}{2}(2g_{\alpha\beta,\gamma}) = g_{\alpha\beta,\gamma}. \tag{2.30}$$

b) Pro metrický tenzor platí

$$g_{\alpha\mu}g^{\mu\beta} = \delta^{\beta}_{\alpha}.$$

Tuto rovnici zderivujeme a přímo obdržíme výsledný vztah

$$g^{\mu\beta}g_{\alpha\mu,\gamma} + g_{\alpha\mu}g^{\mu\beta}{}_{,\gamma} = 0,$$

a tedy

$$g_{\alpha\mu}g^{\mu\beta}{}_{,\gamma} = -g^{\mu\beta}g_{\alpha\mu,\gamma}. \tag{2.31}$$

c) K důkazu této identity použijeme rovnici (2.31), ze které plyne

$$g^{\alpha\beta}{}_{,\gamma} = -\frac{1}{g_{\lambda\alpha}}g^{\mu\beta}g_{\lambda\mu,\gamma}.$$

Za $g_{\lambda\mu,\gamma}$ dosadíme z rovnice (2.30). Pak

$$g^{\alpha\beta}{}_{,\gamma} = -g^{\lambda\alpha}g^{\mu\beta}(\Gamma_{\lambda\mu\gamma} + \Gamma_{\mu\lambda\gamma}) = -g^{\lambda\alpha}g^{\mu\beta}\Gamma_{\lambda\mu\gamma} - g^{\lambda\alpha}g^{\mu\beta}\Gamma_{\mu\lambda\gamma},$$

a tedy

$$g^{\alpha\beta}{}_{,\gamma} = -g^{\mu\beta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma} - g^{\lambda\alpha}\Gamma^{\beta}_{\lambda\gamma}. \tag{2.32}$$

d) Pro libovolnou matici $||g_{\mu\nu}||$ platí

$$g_{\mu\nu,\alpha} = \begin{pmatrix} g_{11,\alpha} & g_{12,\alpha} & \cdots & g_{1n,\alpha} \\ \vdots & & & \vdots \\ g_{n1,\alpha} & g_{n2,\alpha} & \cdots & g_{nn,\alpha} \end{pmatrix}.$$

Determinant matice se obecně vypočte podle vzorce

$$g = \sum_P \mathrm{sgn} P \; g_{1k_1} g_{2k_2} \cdots g_{nk_n},$$

kde

$$P = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n \\ k_1, & k_2, & \ldots, & k_n \end{pmatrix}$$

je permutace množiny $\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ a $\mathrm{sgn} P$ je znaménko příslušné permutace (viz např. [2],[11]).

Tedy

$$\begin{aligned} g_{,\alpha} &= \sum_P \mathrm{sgn} P \; (g_{1k_1,\alpha} g_{2k_2} \cdots g_{nk_n} + g_{1k_1} g_{2k_2,\alpha} \cdots g_{nk_n} + \\ &+ g_{1k_1} g_{2k_2} \cdots g_{nk_n,\alpha}) = \\ &= \begin{vmatrix} g_{11,\alpha} & g_{12,\alpha} & \cdots & g_{1n,\alpha} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{n1,\alpha} & g_{n2,\alpha} & \cdots & g_{nn,\alpha} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Jednotlivé determinanty vypočteme podle Laplaceovy věty (viz [11])

$$g = \det G = \sum_{k=1}^{n} g_{ik} G_{ik}, \tag{2.33}$$

kde $G_{ik}$ je algebraický doplněk prvku $g_{ik}$. Potom

$$g_{,\alpha} = \sum_{\mu=1}^{n} g_{1\mu,\alpha} G_{1\mu} + \cdots + \sum_{\mu=1}^{n} g_{n\mu,\alpha} G_{n\mu} = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} g_{\nu\mu,\alpha} G_{\nu\mu}.$$

Protože se ale v našem případě algebraické doplňky nemění, můžeme je vyjádřit z rovnice (2.33) a dosadit do předchozí rovnice

$$g_{,\alpha} = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} g_{\nu\mu,\alpha} \, g \, g^{\nu\mu}.$$

Tento vztah můžeme ještě přepsat pomocí Einsteinova sumačního pravidla

$$g_{,\alpha} = g \, g^{\nu\mu} \, g_{\nu\mu,\alpha}$$

e) Christoffelův symbol $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ v souřadnicovém tvaru vypočteme podle vztahu

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (g_{\nu\alpha,\beta} + g_{\nu\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}).$$

Nechť $\mu = \alpha$. Potom

$$\begin{aligned} \Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} g^{\alpha\nu} (g_{\nu\alpha,\beta} + g_{\nu\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}) = \frac{1}{2} (g^{\alpha\nu} g_{\nu\alpha,\beta} + g^{\alpha\nu} g_{\nu\beta,\alpha} - \\ &- g^{\alpha\nu} g_{\alpha\beta,\nu}) = \frac{1}{2} g^{\alpha\nu} g_{\nu\alpha,\beta}. \end{aligned}$$

Zaměníme-li v posledním členu předchozí rovnice sumační indexy (tj. $\alpha \to \nu,\ \nu \to \alpha$), budou poslední dva členy shodné a jejich rozdíl bude roven nule. Použijeme-li rovnost

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\nu,\alpha} = \frac{g_{,\alpha}}{g} = (\ln g)_{,\alpha}$$

můžeme psát

$$\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \frac{g_{,\beta}}{g} = \frac{1}{2} (\ln |g|)_{,\beta} = \left( \ln \sqrt{|g|} \right)_{,\beta}. \tag{2.34}$$

f) K důkazu této identity použijeme rovnosti (2.32), v níž index $\gamma$ nahradíme indexem $\beta$. Potom lze psát

$$g^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = -\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} g^{\mu\beta} - \Gamma^{\beta}_{\lambda\beta} g^{\lambda\beta}.$$

Odtud plyne, že

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} g^{\mu\beta} = -g^{\alpha\beta}{}_{,\beta} - \Gamma^{\beta}_{\lambda\beta} g^{\lambda\alpha}$$

Z rovnosti (2.34) vyplývá

$$\Gamma^{\beta}_{\lambda\beta} = \left( \ln \sqrt{|g|} \right)_{,\lambda}.$$

Proto

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} g^{\mu\beta} = -g^{\alpha\beta}{}_{,\beta} - \left( \ln \sqrt{|g|} \right)_{,\lambda} g^{\lambda\alpha}.$$

Nyní zaměníme sumační indexy: $\beta \to \nu,\ \lambda \to \nu$. Potom

$$\begin{aligned} \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} g^{\mu\nu} &= -g^{\alpha\nu}{}_{,\nu} - \left( \ln \sqrt{|g|} \right)_{,\nu} g^{\nu\alpha} = -g^{\alpha\nu}{}_{,\nu} - \frac{1}{\sqrt{|g|}} \left( \sqrt{|g|} \right)_{,\nu} g^{\nu\alpha} = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{|g|}} \left[ \sqrt{|g|} g^{\alpha\nu}{}_{,\nu} + g^{\nu\alpha} \left( \sqrt{|g|} \right)_{,\nu} \right]. \end{aligned}$$

Výraz v hranatých závorkách je derivace součinu, tedy

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = -\frac{1}{\sqrt{|g|}} \left( g^{\alpha\mu} \sqrt{|g|} \right)_{,\nu}.$$

g) Kovariantní derivace ${A^\alpha}_{;\alpha}$ je definována vztahem

$$ {A^\alpha}_{;\alpha} = {A^\alpha}_{,\alpha} + \Gamma^\alpha_{\beta\alpha} A^\beta . $$

Opět použijeme rovnost (2.34) a získáme

$$ {A^\alpha}_{;\alpha} = {A^\alpha}_{,\alpha} + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \left(\sqrt{|g|}\right)_{,\beta} A^\beta = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \left[ \sqrt{|g|} {A^\alpha}_{,\alpha} + A^\beta \left(\sqrt{|g|}\right)_{,\beta} \right], $$

což lze přepsat ve tvaru

$$ {A^\alpha}_{;\alpha} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \left( A^\alpha \sqrt{|g|} \right)_{,\alpha} . $$

h) Kovariantní derivaci $A^\beta_{\alpha;\beta}$ smíšeného tenzoru $A^\beta_\alpha$ definujeme

$$ A^\beta_{\alpha;\beta} = A^\beta_{\alpha,\beta} + \Gamma^\beta_{\mu\beta} A^\mu_\alpha - \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} A^\beta_\lambda . $$

Analogickým způsobem jako v předchozím případě odvodíme následující rovnost

$$ \begin{aligned} A^\beta_{\alpha;\beta} &= A^\beta_{\alpha,\beta} + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \left(\sqrt{|g|}\right)_{,\mu} A^\mu_\alpha - \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} A^\beta_\lambda = \\ &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \left[ \sqrt{|g|} A^\beta_{\alpha,\beta} + \left(\sqrt{|g|}\right)_{,\mu} A^\mu_\alpha \right] - \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} A^\beta_\lambda . \end{aligned} $$

Po záměně sumačních indexů $\mu \to \beta$ můžeme tuto rovnici psát ve tvaru

$$ \begin{aligned} A^\beta_{\alpha;\beta} &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \left[ \sqrt{|g|} A^\beta_{\alpha,\beta} + \left(\sqrt{|g|}\right)_{,\beta} A^\beta_\alpha \right] - \Gamma^\lambda_{\alpha\mu} A^\mu_\lambda = \\ &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \left( \sqrt{|g|} A^\beta_\alpha \right)_{,\beta} - \Gamma^\lambda_{\alpha\mu} A^\mu_\lambda . \end{aligned} $$

i) Budeme postupovat obdobně jako při dokazování předešlých dvou rovností. Kovariantní derivace ${A^{\alpha\beta}}_{;\beta}$ kontravariantního tenzoru $A^{\alpha\beta}$ je definována tímto způsobem

$$ {A^{\alpha\beta}}_{;\beta} = {A^{\alpha\beta}}_{,\beta} + \Gamma^\alpha_{\mu\beta} A^{\mu\beta} + \Gamma^\beta_{\mu\beta} A^{\alpha\mu} . $$

Tedy

$$ \begin{aligned} {A^{\alpha\beta}}_{;\beta} &= {A^{\alpha\beta}}_{,\beta} + \Gamma^\alpha_{\mu\beta} A^{\mu\beta} + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \left(\sqrt{|g|}\right)_{,\mu} A^{\alpha\mu} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \left[ \sqrt{|g|} {A^{\alpha\beta}}_{,\beta} + \left(\sqrt{|g|}\right)_{,\beta} A^{\alpha\beta} \right] + \Gamma^\alpha_{\mu\beta} A^{\mu\beta} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \left( \sqrt{|g|} A^{\alpha\beta} \right)_{,\beta} + \Gamma^\alpha_{\mu\beta} A^{\mu\beta} . \end{aligned} $$

Ale protože předpokládáme antisymetrický tenzor, platí

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}A^{\alpha\beta} = -\Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}A^{\beta\mu}$$

a poslední člen zaniká. Tedy

$$A^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\left(\sqrt{|g|}A^{\alpha\beta}\right)_{,\beta}.$$

❑ ❑ ❑

**Úloha 8.**

Nechť je geodetická čára časupodobná v libovolném pevně zvoleném bodě P. Dokažte, že je časupodobná v každém bodě podél své délky (obdobně tuto vlastnost dokažte i pro prostorupodobnou a světlupodobnou geodetickou čáru).

*Řešení:*

Nechť $\boldsymbol{u}$ je tečný vektor geodetické čáry v daném bodě P. Pak tato geodetika je

a) prostorupodobná, jestliže $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} > 0$,

b) světlupodobná, jestliže $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} = 0$,

c) časupodobná, jestliže $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} < 0$.

Dále víme, že

$$\nabla_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}) = 2\boldsymbol{u}\cdot\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u} = 0,$$

což plyne z rovnice geodetické čáry $\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u} = 0$. To ale znamená, že se skalární součin $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}$ zachovává podél celé geodetické čáry, a tedy že geodetická čára zůstává prostorupodobná nebo časupodobná nebo světlupodobná podél celé své délky.

❑ ❑ ❑

**Úloha 9.**

Odvoďte rovnici geodetické čáry z definice geodetiky jako křivky extrémního vlastního času.

*Řešení:*

Geodetická čára jako křivka extrémního vlastního času musí vyhovovat variační podmínce

$$\delta\tau = \delta\int_A^B d\tau = 0. \tag{2.35}$$

Víme, že platí

$$d\tau^2 = -(ds^2) = -g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}.$$

Z této rovnice vyplývá

$$\sqrt{-g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}} = 1. \tag{2.36}$$

Stejně jako v příkladu 4 použijeme analogii s Lagrangeovou funkcí a s Lagrangeovou rovnicí z teoretické mechaniky, přičemž Lagrangeovu funkci ztotožníme s výrazem

$$L = \sqrt{-g_{\alpha\beta}\ dx^\alpha dx^\beta}.$$

Potom můžeme variační rovnici (2.35) přepsat ve tvaru

$$\delta\int L d\tau = 0. \tag{2.37}$$

Obecný tvar Lagrangeovy rovnice je

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x} \tag{2.38}$$

(viz [13]). Využijeme-li vztahu (2.36), potom platí

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= \frac{\partial L}{\partial u^\gamma} = \frac{1}{2\sqrt{-g_{\alpha\beta}\ \dfrac{dx^\alpha}{d\tau}\dfrac{dx^\beta}{d\tau}}}\left(-g_{\alpha\beta}\ \frac{\partial u^\alpha}{\partial u^\gamma}u^\beta - g_{\alpha\beta}\ u^\alpha \frac{\partial u^\beta}{\partial u^\gamma}\right) = \\
&= -\frac{1}{2}\left(g_{\alpha\beta}\ \delta^\alpha_\gamma\ u^\beta + g_{\alpha\beta}\ \delta^\beta_\gamma\ u^\alpha\right) = -g_{\gamma\beta}\ u^\beta, \\
\frac{\partial L}{\partial x} &= \frac{\partial L}{\partial x^\gamma} = \frac{1}{2\sqrt{-g_{\alpha\beta}\ \dfrac{dx^\alpha}{d\tau}\dfrac{dx^\beta}{d\tau}}}\left(-g_{\alpha\beta,\gamma}\ u^\alpha u^\beta\right) = -\frac{1}{2}g_{\alpha\beta,\gamma}\ u^\alpha u^\beta,
\end{aligned}$$

a tyto vztahy dosadíme do rovnice (2.38).

$$\frac{d}{d\tau}(g_{\gamma\beta}\ u^\beta) = \frac{1}{2}g_{\alpha\beta,\gamma}\ u^\alpha u^\beta$$

Potom

$$g_{\gamma\beta}\ \frac{du^\beta}{d\tau} + \frac{dx^\alpha}{d\tau}g_{\gamma\beta,\alpha}\ u^\beta = g_{\gamma\beta}\ \frac{du^\beta}{d\tau} + g_{\gamma\beta,\alpha}\ u^\alpha u^\beta = \frac{1}{2}g_{\alpha\beta,\gamma}\ u^\alpha u^\beta.$$

Po úpravě a po vynásobení celé rovnice výrazem $g^{\gamma\mu}$ lze psát

$$g_{\gamma\beta}\ g^{\gamma\mu}\ \frac{d^2x^\beta}{d\tau^2} + \frac{1}{2}g^{\gamma\mu}\ u^\alpha u^\beta(g_{\gamma\beta,\alpha} + g_{\gamma\alpha,\beta} - g_{\alpha\beta,\gamma}) = 0,$$

a tedy

$$\delta^\mu_\beta\ \frac{d^2x^\beta}{d\tau^2} + g^{\gamma\mu}\ \Gamma_{\gamma\alpha\beta}\ \frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0,$$

což lze dále upravit

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\ \frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0.$$

❑ ❑ ❑

**Úloha 10.**

Rovnice geodetické čáry pro afinní parametr $\lambda$ má tvar

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\ \frac{dx^\beta}{d\lambda}\frac{dx^\gamma}{d\lambda} = 0.$$

Dokažte, že všechny afinní parametry jsou spojeny s konstantními koeficienty pomocí lineárních transformací.

*Řešení:*

Předpokládejme, že pomocí funkčního předpisu $s = f(\lambda)$ definujeme novou parametrizaci křivky. Potom pro první a druhou derivaci podle $\lambda$ můžeme psát

$$\frac{d}{d\lambda} = \frac{df}{d\lambda}\frac{d}{ds} = f'\frac{d}{ds}, \tag{2.39}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{d\lambda^2} &= \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d}{d\lambda}\right) = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{df}{d\lambda}\frac{d}{ds}\right) = \frac{d^2f}{d\lambda^2}\frac{d}{ds} + \frac{df}{d\lambda}\frac{d}{d\lambda}\frac{d}{ds} = \\ &= f''\,\frac{d}{ds} + f'^2\,\frac{d^2}{ds^2}.\end{aligned}$$

Dosadíme-li oba tyto vztahy do rovnice geodetické čáry

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\,\frac{dx^\beta}{d\lambda}\frac{dx^\gamma}{d\lambda} = 0,$$

obdržíme rovnici

$$f''\,\frac{dx^\alpha}{ds} + f'^2\,\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\,f'^2\,\frac{dx^\beta}{ds}\frac{dx^\gamma}{ds} = 0.$$

Tuto rovnici vynásobíme výrazem $\dfrac{1}{f'^2}$ . Potom

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \frac{f''}{f'^2}\,\frac{dx^\alpha}{ds} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\,\frac{dx^\beta}{ds}\frac{dx^\gamma}{ds} = 0. \tag{2.40}$$

Rovnice (2.40) přejde na tzv. standartní tvar s afinním parametrem $s$, jestliže druhý člen zanikne, tj. jestliže platí

$$\frac{f''}{f'^2}\,\frac{dx^\alpha}{ds} = 0.$$

Odtud ovšem plyne, že

$$f''\;\equiv \frac{d^2f}{d\lambda^2} = 0.$$

Tedy $s$ je lineární funkcí $\lambda$.

❑ ❑ ❑

**Úloha 11.**

a) Dokažte, že v rovinném prostoročase můžeme zapsat zákon zachování čtyřhybnosti volné částice ve tvaru

$$\nabla_{\boldsymbol{p}}\,\boldsymbol{p} = 0.$$

b) Dokažte, že se částice s nenulovou klidovou hmotností pohybuje podél časupodobné geodetické čáry.

*Řešení:*

a) Složky $(\nabla_{\boldsymbol{p}}\, \boldsymbol{p})$ jsou

$$(\nabla_{\boldsymbol{p}}\, \boldsymbol{p})^{\beta} = m u^{\alpha} (p^{\beta}{}_{,\alpha} + \Gamma^{\beta}_{\sigma\alpha}\, p^{\sigma}) = m \left( \frac{dp^{\beta}}{d\tau} + u^{\alpha} p^{\sigma} \Gamma^{\beta}_{\sigma\alpha} \right).$$

V rovinném prostoročasu můžeme vždy nalézt globální souřadnicovou soustavu, v níž jsou všechny Christoffelovy symboly nulové (tyto souřadnice se nazývají Minkowského souřadnice). V Minkowského souřadnicové soustavě můžeme psát

$$(\nabla_{\boldsymbol{p}}\, \boldsymbol{p})^{\beta} = m \frac{dp^{\beta}}{d\tau}.$$

Zároveň v této soustavě lze psát zákon zachování čtyřhybnosti ve tvaru

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{d\tau} = 0,$$

tedy

$$\nabla_{\boldsymbol{p}}\, \boldsymbol{p} = 0.$$

Tato rovnice je tenzorová, musí proto vyjadřovat zákon zachování čtyřhybnosti v libovolném tvaru.

b) Čtyřvektor hybnosti je přímo úměrný čtyřvektoru rychlosti hmotné částice.

$$p^{\mu} = m_0 u^{\mu},$$

kde $m_0$ je klidová hmotnost částice, $u^{\mu}$ čtyřvektor rychlosti.

Zákon zachování čtyřrychlosti lze psát ve tvaru

$$u_{\mu} u^{\mu} = -1.$$

Potom

$$p_{\mu} p^{\mu} = m_0^2 (u_{\mu} u^{\mu}) = -m_0.$$

Protože je skalární součin roven zápornému číslu, pohybují se hmotné částice po časupodobných geodetických čarách.

❑ ❑ ❑

**Úloha 12.**

Dokažte Fermatův princip v obecné teorii relativity: v libovolné statické metrice ($g_{0j} = g_{\alpha\beta,0} = 0$) uvažujte všechny světlupodobné křivky mezi dvěma body v prostoru, $x^j = a^j$, $x^j = b^j$. Každá světlupodobná křivka $x^j(t)$ vyžaduje určitý souřadnicový čas $\delta t$ k přechodu z $a^j$ do $b^j$. Ukažte, že všechny křivky extrémního času $\delta t$ jsou světlupodobné geodetické čáry prostoročasu.

*Řešení:*

Vyjdeme z obecné rovnice geodetické čáry s afinním parametrem $\lambda$.

$$\frac{d^2 x^{\alpha}}{d\lambda^2} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} \frac{dx^{\beta}}{d\lambda} \frac{dx^{\gamma}}{d\lambda} = 0.$$

Analogicky jako v příkladu 10 přejdeme od afinního parametru $\lambda$ k souřadnicovému času $t$. Potom

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} + \frac{\left(\frac{d^2t}{d\lambda^2}\right)}{\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2}\frac{dx^\alpha}{dt} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\,\frac{dx^\beta}{dt}\frac{dx^\gamma}{dt} = 0. \tag{2.41}$$

Nyní se v rovnici (2.41) omezíme na její prostorovou část, tedy index $\alpha$ nahradíme indexem $k$, přičemž $k = 1,\ 2,\ 3$, a celou rovnici vynásobíme výrazem $g_{jk}$.

$$g_{jk}\frac{d^2x^k}{dt^2} + g_{jk}\frac{\left(\frac{d^2t}{d\lambda^2}\right)}{\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2}\frac{dx^k}{dt} + \Gamma_{j\beta\gamma}\,\frac{dx^\beta}{dt}\frac{dx^\gamma}{dt} = 0. \tag{2.42}$$

Nejprve upravíme výraz $\Gamma_{j\beta\gamma}\,\dfrac{dx^\beta}{dt}\dfrac{dx^\gamma}{dt}$.

$$\Gamma_{j\beta\gamma}\,\frac{dx^\beta}{dt}\frac{dx^\gamma}{dt} = \Gamma_{j00}\,\left(\frac{dt}{dt}\right)^2 + \Gamma_{jl0}\,\frac{dx^l}{dt} + \Gamma_{jkl}\,\frac{dx^l}{dt}\frac{dx^k}{dt}. \tag{2.43}$$

Nyní vypočteme Christoffelovy symboly $\Gamma_{j00}$, $\Gamma_{jl0}$ a dosadíme je do rovnice (2.43).

$$\begin{aligned}\Gamma_{j00} &= \frac{1}{2}(g_{j0,0} + g_{j0,0} - g_{00,j}) = -\frac{1}{2}g_{00,j},\\ \Gamma_{jl0} &= \frac{1}{2}(g_{jl,0} + g_{j0,l} - g_{l0,j}) = 0.\end{aligned}$$

Zároveň z rovnice

$$0 = dt^2 + \frac{g_{kl}}{g_{00}}dx^k dx^l$$

vyjádříme

$$\left(\frac{dt}{dt}\right)^2 = 1 = -\frac{g_{kl}}{g_{00}}\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^k}{dt}, \tag{2.44}$$

a tento výraz dosadíme do rovnice (2.43).

$$\Gamma_{j\beta\gamma}\,\frac{dx^\beta}{dt}\frac{dx^\gamma}{dt} = -\Gamma_{j00}\,\frac{g_{kl}}{g_{00}}\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^l}{dt} + \Gamma_{jkl}\,\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^l}{dt},$$

což dosadíme do rovnice (2.42).

$$g_{jk}\frac{d^2x^k}{dt^2} + g_{jk}\frac{\frac{d^2t}{d\lambda^2}}{\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2}\frac{dx^k}{dt} - \Gamma_{j00}\,\frac{g_{kl}}{g_{00}}\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^l}{dt} + \Gamma_{jkl}\,\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^l}{dt} = 0. \tag{2.45}$$

Z rovnice geodetiky (2.41) vyjádříme její časovou složku.

$$\frac{d^2t}{dt^2} + \frac{\frac{d^2t}{d\lambda^2}}{\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2}\frac{dt}{dt} + \Gamma^0_{\beta\gamma}\,\frac{dx^\beta}{dt}\frac{dx^\gamma}{dt} = 0.$$

Přitom víme, že $\frac{dt}{dt} = 1$ a $\frac{d^2t}{dt^2} = 0$. Pak

$$\frac{\frac{d^2t}{d\lambda^2}}{\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2} + \Gamma^0_{\beta\gamma} \frac{dx^\beta}{dt}\frac{dx^\gamma}{dt} = 0,$$

což lze upravit na tvar

$$g_{00}\frac{\frac{d^2t}{d\lambda^2}}{\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2} + \Gamma_{0\beta\gamma} \frac{dx^\beta}{dt}\frac{dx^\gamma}{dt} = 0.$$

Nyní vypočteme hodnoty Christoffelových symbolů, které vystupují v poslední rovnici.

$$\begin{aligned} \Gamma_{000} &= 0, \\ \Gamma_{0ll} &= 0, \\ \Gamma_{0k0} &= \frac{1}{2} g_{00,k} \neq 0, \end{aligned}$$

Proto

$$g_{00}\frac{\frac{d^2t}{d\lambda^2}}{\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2} = -2\Gamma_{0k0} \frac{dx^k}{dt} = -2\Gamma_{0l0} \frac{dx^l}{dt},$$

a tedy

$$\frac{\frac{d^2t}{d\lambda^2}}{\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2} = -\frac{2}{g_{00}}\Gamma_{0l0} \frac{dx^l}{dt}.$$

Tento vztah dosadíme do rovnice (2.45). Potom

$$g_{jk} \frac{d^2x^k}{dt^2} + \Gamma_{jkl} \frac{dx^k}{dt}\frac{dx^l}{dt} - \Gamma_{j00}\, ds\frac{g_{kl}}{g_{00}} - 2\Gamma_{0l0} \frac{g_{jk}}{g_{00}}\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^l}{dt} = 0. \qquad (2.46)$$

Víme, že

$$\begin{aligned} \Gamma_{jkl} &= \frac{1}{2}(g_{jk,l} + g_{jl,k} - g_{kl,j}), \\ \Gamma_{j00} &= -\frac{1}{2} g_{00,j}, \\ \Gamma_{0l0} &= \frac{1}{2} g_{00,l}, \end{aligned}$$

Po dosazení těchto vztahů do rovnice (2.46) lze psát

$$\frac{g_{jk}}{g_{00}}\frac{d^2x^k}{dt^2} + \frac{dx^k}{dt}\frac{dx^l}{dt}\left(\frac{1}{g_{00}}\Gamma_{jkl} + \frac{g_{kl}}{2g_{00}}g_{00,j} - \frac{g_{jk}}{g_{00}^2}g_{00,l}\right) = 0,$$

a tuto rovnici budeme dále upravovat

$$\frac{g_{jk}}{g_{00}}\frac{d^2x^k}{dt^2} + \frac{1}{2}\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^l}{dt}\left[\frac{g_{jk,l}}{g_{00}} + \frac{g_{lj,k}}{g_{00}} - \frac{g_{kl,j}}{g_{00}} + \frac{g_{00,j}}{g_{00}}g_{kl} - 2\frac{g_{00,l}}{g_{00}^2}g_{jk}\right] = 0,$$

$$
\begin{aligned}
\frac{g_{jk}}{g_{00}}\frac{d^2x^k}{dt^2} \quad &+ \quad \frac{1}{2}\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^l}{dt}\left[\frac{g_{jk,l}}{g_{00}} + \frac{g_{lj,k}}{g_{00}} - \frac{g_{jk}g_{00,l}}{g_{00}^2} - \frac{g_{jl,k}}{g_{00}} - \right. \\
&- \quad \left.\frac{g_{jk}g_{00,l}}{g_{00}^2} - \frac{g_{kl,j}}{g_{00}} + \frac{g_{kl}g_{00,j}}{g_{00}^2}\right] = 0.
\end{aligned}
\tag{2.47}
$$

Označme $\gamma_{jk} = -\dfrac{g_{jk}}{g_{00}}$. Potom

$$
\begin{aligned}
\gamma_{jk,l} &= -\left(\frac{g_{jk,l}}{g_{00}} - \frac{g_{jk}g_{00,l}}{g_{00}^2}\right), \\
\gamma_{jl,k} &= -\left(\frac{g_{jl,k}}{g_{00}} - \frac{g_{jl}g_{00,k}}{g_{00}^2}\right), \\
\gamma_{kl,j} &= -\left(\frac{g_{kl,j}}{g_{00}} - \frac{g_{kl}g_{00,j}}{g_{00}^2}\right).
\end{aligned}
$$

Vidíme, že v hranatých závorkách na pravé straně rovnice (2.46) se vyskytují právě tyto členy. Proto můžeme psát

$$
\gamma_{jk}\,\frac{d^2x^k}{dt^2} + \frac{1}{2}\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^l}{dt}(\gamma_{jk,l} + \gamma_{jl,k} - \gamma_{kl,j}) = 0. \tag{2.48}
$$

Tuto rovnici můžeme dále upravit na tvar

$$
\frac{d^2x^k}{dt^2} + \frac{1}{2}\gamma^{jk}\,\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^l}{dt}(\gamma_{jk,l} + \gamma_{jl,k} - \gamma_{kl,j}) = 0,
$$

$$
\frac{d^2x^k}{dt^2} + \Gamma^k_{kl}\,\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^l}{dt} = 0,
$$

což je geodetická rovnice s afinním parametrem $t$ na trojrozměrné varietě, která je popsána metrikou $\gamma_{jk}$. Z rovnice (2.44) vyplývá, že řešení rovnice (2.48) nabývá extrémní hodnoty $\delta dt$ a Fermatův princip zůstává v platnosti.

❑ ❑ ❑

**Úloha 13.**

Nechť souřadnice $x^1$ je cyklická souřadnice, tj. metrické koeficienty $g_{\alpha\beta}$ jsou nezávislé na $x^1$. Jestliže $\boldsymbol{p}$ je hybnost neurychlované částice, dokažte, že složka $p_1$ je konstantní podél světočáry částice.

*Řešení:*

Nechť $\lambda$ je takový afinní parametr, pro který platí $p^\alpha = \dfrac{dx^\alpha}{d\lambda}$. Potom pro pohyb částice po geodetické čáře můžeme psát

$$
(\nabla_{\boldsymbol{p}}\,\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{e}_1 = p_{1;\alpha}\,p^\alpha = 0.
$$

Přitom kovariantní derivaci lze vyjádřit vztahem

$$
p_{1;\alpha} = p_{1,\alpha} - \Gamma^\sigma_{1\alpha}\,p_\sigma = \frac{dp_1}{dx^\alpha} - \Gamma^\sigma_{1\alpha}\,p_\sigma
$$

a tedy

$$p^\alpha \frac{dp_1}{dx^\alpha} - \Gamma^\sigma_{1\alpha} = \frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dp_1}{dx^\alpha} - \Gamma_{(\sigma\alpha)1}\, p^\alpha p^\sigma =$$

$$= \frac{dp_1}{d\lambda} - \Gamma_{(\sigma\alpha)1}\, p^\alpha p^\sigma. \tag{2.49}$$

V příkladu 7 jsme dokázali tuto rovnost

$$g_{\alpha\beta,\gamma} = \Gamma_{\alpha\beta\gamma} + \Gamma_{\beta\alpha\gamma} = 2\Gamma_{(\alpha\beta)\gamma}.$$

Odtud plyne, že

$$\Gamma_{(\sigma\alpha)1} = \frac{1}{2} g_{\sigma\alpha,1} = 0$$

a tento vztah dosadíme do rovnice (2.49)

$$\frac{dp_1}{d\lambda} = \frac{1}{2} p^\alpha p^\sigma g_{\sigma\alpha,1} = 0.$$

Tedy složka $p_1$ je konstantní podél celé světočáry částice.

❑ ❑ ❑

**Úloha 14.**

V bodě $\theta = \theta_0,\ \phi = 0$ na povrchu dvojrozměrné koule

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\ d\phi^2$$

vektor $\boldsymbol{A}$ splývá s vektorem $\boldsymbol{e}_\theta$. Jaké bude mít složky po přesunutí paralelním přenosem podél kružnice $\theta = \theta_0$? Jaká bude jeho velikost?

*Řešení:*

Nechť je $\boldsymbol{A}$ paralelně přesunován podél souřadnicové osy $\phi$ (přitom $\theta$ zůstává konstantní). Pro velikost změny vektoru při tomto přenosu lze psát

$$A^\alpha{}_{;\phi} = A^\alpha{}_{,\phi} + \Gamma^\alpha_{\beta\phi}\, A^\beta = 0. \tag{2.50}$$

Nejprve musíme vypočítat Christoffelovy symboly $\Gamma^\alpha_{\beta\phi}$.

$$\begin{aligned}
\Gamma^\phi_{\phi\phi} &= \frac{1}{2} g^{\phi\mu} \left(g_{\mu\phi,\phi} + g_{\phi\mu,\phi} - g_{\phi\phi,\mu}\right) = -\frac{1}{2} g^{\phi\phi} g_{\phi\phi,\phi} - \frac{1}{2} g^{\phi\theta} g_{\phi\phi,\theta} = 0, \\
\Gamma^\phi_{\theta\phi} &= \frac{1}{2} g^{\phi\mu} \left(g_{\mu\theta,\phi} + g_{\phi\mu,\theta} - g_{\theta\phi,\mu}\right) = \frac{1}{2} g^{\phi\mu} g_{\phi\mu,\theta} = \operatorname{cotg}\theta.
\end{aligned}$$

Analogicky vypočteme také

$$\begin{aligned}
\Gamma^\theta_{\theta\phi} &= 0, \\
\Gamma^\theta_{\phi\phi} &= -\sin\theta\,\cos\theta.
\end{aligned}$$

Tedy rovnice (2.50) se rozpadá na dvě rovnice

$$A^\theta_{,\phi} - \sin\theta\,\cos\theta\, A^\phi = 0, \tag{2.51}$$

$$A^\phi_{,\phi} + \operatorname{cotg}\theta\, A^\theta = 0. \tag{2.52}$$

Rovnici (2.51) zderivujeme podle $\phi$ a za $A^{\phi}_{,\phi}$ dosadíme z rovnice (2.52).

$$A^{\theta}_{,\phi\phi} = (\sin\theta\,\cos\theta\,A^{\phi})_{,\phi} = \sin\theta\,\cos\theta\,A^{\phi}_{,\phi} = -\cos^2\theta\,A^{\theta}.$$

Řešení této diferenciální rovnice budeme hledat ve tvaru

$$A^{\theta} = \alpha\,\cos(\phi\,\cos\theta) + \beta\,\sin(\phi\,cos\theta), \tag{2.53}$$

kde $\alpha$, $\beta$ jsou konstanty. Rovnici (2.53) nyní dosadíme do rovnice (2.51)

$$[\alpha\,\cos(\phi\,\cos\theta) + \beta\,\sin(\phi\,\cos\theta)]_{,\phi} = \sin\theta\,\cos\theta\,A^{\phi}$$

a tedy

$$A^{\phi} = \frac{-\alpha\,\sin(\phi\,\cos\theta) + \beta\,\cos(\phi\,\cos\theta)}{\sin\theta}.$$

Z počáteční podmínky, že v bodě $\theta = 0$ je vektor $\boldsymbol{A}$ totožný s vektorem $\boldsymbol{e}_{\theta}$, vypočteme hodnoty obou konstant. Na počátku (před zahájením paralelního přenosu) platí:

$$\begin{aligned} A^{\theta} = 1 &= \alpha\,\cos(0.\cos\theta) + \beta\,\sin(0.\cos\theta) = \alpha & \Rightarrow\quad \alpha = 1, \\ A^{\phi} = 0 &= \frac{-\alpha\,\sin(0.\cos\theta) + \beta\,\cos(0.\cos\theta)}{\sin\theta} = \frac{\beta}{\sin\theta} & \Rightarrow\quad \beta = 0. \end{aligned}$$

Proto

$$\begin{aligned} A^{\theta} &= \cos(\phi\,\cos\theta), \\ A^{\phi} &= \frac{-\sin(\phi\,\cos\theta)}{\sin\theta}. \end{aligned}$$

Po provedení paralelního přesunu vektoru $\boldsymbol{A}$ podél kružnice $\theta = \theta_0$ můžeme v bodě $\phi = 2\pi$ psát

$$\begin{aligned} A^{\theta} &= \cos(2\pi\,\cos\theta), \\ A^{\phi} &= \frac{-\sin(2\pi\,\cos\theta)}{\sin\theta}, \end{aligned}$$

tudíž

$$\boldsymbol{A} = [\cos(2\pi\,\cos\theta)]\boldsymbol{e}_{\theta} - \left[\frac{-\sin(2\pi)\,\cos\theta}{\sin\theta}\right]\boldsymbol{e}_{\phi}.$$

Velikost vektoru $\boldsymbol{A}$ v bodě $\phi = 2\pi$ vypočteme pomocí skalárního součinu

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})_{2\pi} &= \cos^2(2\pi\,\cos\theta)\;(\boldsymbol{e}_{\theta}\cdot\boldsymbol{e}_{\theta}) + \left[\frac{\sin(2\pi\,\cos\theta)}{\sin\theta}\right]^2(\boldsymbol{e}_{\phi}\cdot\boldsymbol{e}_{\phi}) = \\ &= \frac{1-\cos^2\theta}{\sin\theta} = 1 = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})_0. \end{aligned}$$

Vidíme, že se při paralelním přesunu mění směr vektoru $\boldsymbol{A}$, ale nemění se jeho velikost.

❑ ❑ ❑

**Úloha 15.**

Dokažte, že se při Fermi-Walkerově paralelním přesunu dvou vektorů $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ nemění hodnota skalárního součinu $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$.

*Řešení:*

Nechť $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ jsou libovolné vektory. Potom rovnice popisující Fermi-Walkerův paralelní přesun podél křivky C jsou

$$\begin{aligned} \nabla_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{x} &= (\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{x}, \\ \nabla_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{y} &= (\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{y}, \end{aligned}$$

kde $\boldsymbol{u}$ je tečný vektor křivky C a $\boldsymbol{a} = \nabla_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{u}$.

Změnu skalárního součinu vypočítáme pomocí pravidel pro výpočet skalárního součinu a pro derivaci součinu.

$$\begin{aligned} \nabla_{\boldsymbol{u}} (\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y}) &= (\nabla_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x} \cdot (\nabla_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{y}) = \\ &= [(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{x}] \cdot \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x} [(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{y}]. \end{aligned}$$

Tuto rovnici si rozepíšeme do složek.

$$\begin{aligned} \nabla_{u} (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) &= (u^\alpha a^\beta - a^\alpha u^\beta) x_\beta y_\alpha + x_\alpha (u^\alpha a^\beta - a^\alpha u^\beta) y_\beta = \\ &= \underbrace{u^\alpha a^\beta x_\beta y_\alpha}_{1.} - \underbrace{a^\alpha u^\beta x_\beta y_\alpha}_{2.} + \underbrace{x_\alpha u^\alpha a^\beta y_\beta}_{3.} - \underbrace{x_\alpha a^\alpha u^\beta y_\beta}_{4.}. \end{aligned}$$

Zaměníme-li sumační indexy $\alpha \leftrightarrow \beta$ mezi prvním a čtvrtým (resp. mezi druhým a třetím) členem, vidíme, že tyto členy jsou shodné, proto jejich rozdíl je roven nule.

$$\nabla_{\boldsymbol{u}} (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) = 0.$$

To znamená, že skalární součin libovolných dvou vektorů, které jsou současně přemísťovány Fermi-Walkerovým paralelním přesunem, se nemění.

❑ ❑ ❑

**Úloha 16.**

Ukažte, že Fermi-Walkerův přesun podél geodetické čáry je stejný jako paralelní přesun podél téže křivky.

*Řešení:*

Diferenciální rovnice pro Fermi-Walkerův paralelní přesun libovolného vektoru je

$$\nabla_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{x}, \tag{2.54}$$

kde $\boldsymbol{u}$ je tečný vektor ke křivce a $\boldsymbol{a} = \nabla_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{u} = \dfrac{D\boldsymbol{u}}{d\tau}$.

Proto rovnici (2.54) můžeme přepsat

$$\nabla_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{x} = [\boldsymbol{u} \otimes (\nabla_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{u}) - (\nabla_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{u}) \otimes \boldsymbol{u}] \cdot \boldsymbol{x}.$$

Jestliže je křivka, podél níž tento paralelní přesun probíhá, geodetickou křivkou, musí nutně splňovat rovnici geodetické čáry

$$\nabla_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{u} = 0.$$

Potom

$$\nabla_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{x} = [\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{o} - \boldsymbol{o} \otimes \boldsymbol{u}] \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} \cdot \boldsymbol{x} = 0.$$

Ovšem poslední rovnice je rovnicí paralelního přesunu, tedy podél geodetických křivek jsou Fermi-Walkerův a paralelní přesuny identické.

❑ ❑ ❑

**Úloha 17.**

Napište následující výrazy bez použití indexů.

a) $U_{\alpha;\beta}U^{\beta}U^{\alpha}$,

b) $V^{\alpha}_{\ ;\beta}U^{\beta} - U^{\alpha}_{\ ;\beta}V^{\beta}$,

c) $T_{\alpha\beta;\gamma}V^{\alpha}W^{\beta}U^{\gamma}$,

d) $W^{\alpha;\beta}V_{\beta;\gamma}U^{\gamma}$,

e) $W^{\alpha}_{\ ;\beta\gamma}U^{\gamma}U^{\beta} + W^{\alpha}_{\ ;\gamma}U^{\gamma}_{\ ;\beta}U^{\beta} - U^{\gamma}_{\ ;\beta}W^{\beta}_{\ ;\gamma}U^{\gamma}$.

*Řešení:*

a) Pro kovariantní derivaci platí tyto dva vztahy

i) $V^{\alpha}_{\ ;\beta} = \dfrac{DV^{\alpha}}{dx^{\beta}} = \nabla_{\beta}V^{\alpha}$,

ii) $(\nabla \boldsymbol{V}) \cdot \boldsymbol{u} = \nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{V}$. Potom

$$U_{\alpha;\beta}U^{\beta}U^{\alpha} = U^{\alpha}_{\ ;\beta}U^{\beta}U_{\alpha} = (\nabla_{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{U}) \cdot \boldsymbol{U}.$$

b) Analogickým způsobem vyjádříme i tento výraz.

$$V^{\alpha}_{\ ;\beta}U^{\beta} - U^{\alpha}_{\ ;\beta}V^{\beta} = \nabla_{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{V} - \nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{U} = [\boldsymbol{U}; \boldsymbol{V}].$$

Výraz v hranatých závorkách se nazývá komutátor vektorů $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$.

c) Obdobně

$$T_{\alpha\beta;\gamma}\,V^{\alpha}W^{\beta}U^{\gamma} = V^{\alpha}\,(T_{\alpha\beta;\gamma}U^{\gamma})\,W^{\beta} = \boldsymbol{V} \cdot (\nabla_{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{T}) \cdot \boldsymbol{W}.$$

d)

$$W^{\alpha;\beta}V_{\beta;\gamma}U^{\gamma} = W^{\alpha}_{\ ;\beta}\,V^{\beta}_{\ ;\gamma}\,U^{\gamma} = \nabla_{(\nabla_{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{V})}\boldsymbol{W}.$$

e) Všimněte si, že po vytknutí $U^{\beta}$ z prvních dvou členů tohoto výrazu zůstane v závorce kovariantní derivace součinu.

$$\begin{aligned} W^{\alpha}_{\ ;\beta\gamma}U^{\gamma}U^{\beta} &+ W^{\alpha}_{\ ;\gamma}U^{\gamma}_{\ ;\beta}U^{\beta} - U^{\gamma}_{\ ;\beta}W^{\beta}_{\ ;\gamma}U^{\gamma} = \\ &= (W^{\alpha}_{\ ;\beta\gamma}U^{\gamma} + W^{\alpha}_{\ ;\gamma}U^{\gamma}_{\ ;\beta})U^{\beta} - U^{\gamma}_{\ ;\beta}W^{\beta}_{\ ;\gamma}U^{\gamma} = \\ &= (W^{\alpha}_{\ ;\beta}\,U^{\gamma})_{;\beta}U^{\beta} - U^{\gamma}_{\ ;\beta}W^{\beta}_{\ ;\gamma}U^{\gamma} = \\ &= \nabla_{\boldsymbol{U}}(\nabla_{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{W}) - \nabla_{(\nabla_{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{W})}\boldsymbol{W} = [\boldsymbol{U}; \nabla_{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{W}]. \end{aligned}$$

❑ ❑ ❑

# Kapitola 3

# Schwarzschildova geometrie

## 3.1 Úvod

Již v roce 1915, tedy rok po zveřejnění obecné teorie relativity, publikoval německý fyzik Karl Schwarzschild první exaktní řešení Einsteinových rovnic pole

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\, g_{\alpha\beta}\, R + \Lambda\, g_{\alpha\beta} = 8\pi\, T_{\alpha\beta},$$

kde $R_{\alpha\beta}$ je Ricciho tenzor, $R = R^{\alpha}_{\alpha}$ skalární křivost, $\Lambda$ kosmologická konstanta[1] a $T_{\alpha\beta}$ tenzor energie hybnosti.

Toto řešení, které můžeme v křivočarých souřadnicích $t$, $r$, $\theta$, $\phi$ zapsat ve tvaru[2]

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \dfrac{2M}{r}\right)}\, dr^2 + r^2\, (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2), \tag{3.1}$$

kde $r$ je radiální vzdálenost, $M$ hmotnost zdroje gravitačního pole, je sféricky symetrické a statické řešení, které popisuje oblast ve vakuu[3] v níž platí $r \geq 2M$. Kritická hodnota $r = 2M$, ve které je zdánlivá singularita (kterou ovšem lze odstranit přechodem k jiné soustavě souřadnic), se nazývá Schwarzschildův poloměr. Tato zdánlivá singularita spočívá v tom, že pozorovatel v nekonečnu nikdy neuvidí, že volně padající pozorovatel dosáhne vzdálenosti $r = 2M$, ačkoliv tento volně padající pozorovatel této vzdálenosti dosáhl v konečném vlastním čase (a dokonce v konečném vlastním čase dosáhne vlastní singularity). Tedy pozorovatel v nekonečnu nedostane žádné zprávy od pozorovatele, který již překročil Schwarzschildův poloměr.

V této kapitole se budeme zabývat základními vlastnostmi prostoročasu, který je popsán Schwarzschildovou metrikou (3.1) (stručně jej budeme označovat Schwarzschildova geometrie). Odvodíme rovnici geodetické čáry, ověříme platnost tří „klasických“ testů obecné teorie relativity. Sestrojíme tzv. „embedding diagram“, který znázorňuje odlišnost

[1] Ve Schwarzschildově řešení je kosmologická konstanta rovna nule.

[2] Rovnici (3.1) můžeme zkráceně zapsat takto:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \dfrac{2M}{r}\right)} dr^2 + r^2\, d\Omega^2,$$

kde $d\Omega^2 = (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)$.

[3] Tj. oblast, kde tenzor energie hybnosti $T_{\alpha\beta}$ je roven nule, tzn. oblast bez zdrojů gravitačního pole.

prostorové části Schwarzschildovy geometrie od trojrozměrného euklidovského prostoru. Nakonec se seznámíme s dalšími možnými soustavami souřadnic (Lemaitrovy, Eddington-Finkelsteinovy, Kruskalovy), v nichž je někdy výhodné relativistické úlohy řešit.

## 3.2 Úlohy

**Úloha 1.**

Vypočtěte koeficienty afinní konexe [4] $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ pro Schwarzschildovu metriku

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \dfrac{2M}{r}\right)} dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\phi^2\right).$$

*Řešení:*

Metrický tenzor popisující Schwarzschildovu metriku je diagonální a má tvar

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \dfrac{2M}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \dfrac{2M}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}.$$

Kontravariantní složky metrického tenzoru vypočteme podle vztahu

$$g_{\alpha\beta} \, g^{\alpha\beta} = E,$$

kde $E$ je jednotková matice. Potom

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \dfrac{2M}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \dfrac{2M}{r}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (r^2 \sin^2\theta)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že složky metrického tenzoru nezávisí na $t$ a na $\phi$, tedy všechny derivace složek metrického tenzoru podle $t$ a podle $\phi$ budou rovny nule. Derivace podle $\theta$ je různá od nuly pouze v případě složky $g_{\phi\phi}$. Nenulové Christoffelovy symboly potom jsou:

[4] Koeficienty afinní konexe můžeme definovat na libovolné varietě, na rozdíl od Christoffelových symbolů, které lze definovat pouze v Riemannově prostoru se zavedenou libovolnou metrikou.

$$\begin{aligned}
\Gamma^t_{rt} &= \Gamma^t_{tr} = \frac{1}{2}\,g^{tt}\,g_{tt,r} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{\left(1-\dfrac{2M}{r}\right)}\left(\frac{-2M}{r}\right) = \frac{M}{r(r-2M)},\\
\Gamma^r_{rr} &= \frac{1}{2}\,g^{rr}\,g_{rr,r} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{1}{\left(1-\dfrac{2M}{r}\right)^2}\,\frac{2M}{r} = \frac{M}{r(r-2m)},\\
\Gamma^r_{tt} &= -\frac{1}{2}\,g^{rr}\,g_{tt,r} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(-\frac{2M}{r}\right) = -\frac{M(r-2M)}{r^3},\\
\Gamma^r_{\theta\theta} &= -\frac{1}{2}\,g^{rr}\,g_{\theta\theta,r} = -\frac{1}{2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)(2r) = -(r-2M),\\
\Gamma^r_{\phi\phi} &= -\frac{1}{2}\,g^{rr}\,g_{\phi\phi,r} = -\frac{1}{2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)(-2r\sin^2\theta) = -(r-2M)\sin^2\theta,\\
\Gamma^\theta_{r\theta} &= \Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{1}{2}\,g^{\theta\theta}\,g_{\theta\theta,r} = \frac{1}{2}\,\frac{2r}{r^2} = \frac{1}{r},\\
\Gamma^\theta_{\phi\phi} &= -\frac{1}{2}\,g^{\theta\theta}\,g_{\phi\phi,\theta} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{r^2}(-2r\sin\theta\,\cos\theta) = -\sin\theta\,\cos\theta,\\
\Gamma^\phi_{r\phi} &= \Gamma^\phi_{\phi r} = \frac{1}{2}\,g^{\phi\phi}\,g_{\phi\phi,r} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{r^2\,\sin^2\theta}(2r\,\sin^2\theta) = \frac{1}{r},\\
\Gamma^\phi_{\phi\theta} &= \Gamma^\phi_{\theta\phi} = \frac{1}{2}\,g^{\phi\phi}\,g_{\phi\phi,\theta} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{r^2\,\sin^2\theta}(2r^2\,\sin\theta\,\cos\theta) = \operatorname{cotg}\theta.
\end{aligned}$$

Všechny zbývající Christoffelovy symboly jsou nulové.

❑ ❑ ❑

**Úloha 2.**

Dokažte, že druhá mocnina celkového momentu hybnosti

$$L^2 = p_\theta^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\,p_\phi^2 \tag{3.2}$$

je konstantou pohybu podél libovolné Schwarzschildovy geodetické čáry.

*Řešení:*

Nechť se částice pohybuje v ekvatoriální rovině. Potom $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ a $p_\theta = 0$. Proto

$$L^2 = p_\phi^2$$

a z rovnice geodetické čáry dokážeme, že tento výraz je konstantní.

$$\frac{d^2\phi}{d\tau^2} + 2\Gamma^\phi_{r\phi}\,\frac{dr}{d\tau}\frac{d\phi}{d\tau} = 0,$$

$$\frac{\dfrac{d^2\phi}{d\tau^2}}{\dfrac{d\phi}{d\tau}} + \frac{2}{r}\frac{dr}{d\tau} = 0.$$

Odtud plyne, že

$$\frac{d}{d\tau}\left[\ln\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right) + \ln r^2\right] = 0,$$

a tedy

$$u^\phi = \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{K}{r^2},$$

kde $K$ je konstanta. Pak platí

$$p_\phi = m\,u_\phi = m\,g_{\phi\phi}\,u^\phi = mK = \text{konstanta}.$$

Nyní využijeme sférickou symetrii Schwarzschildova řešení. Pohyb vždy probíhá v ekvatoriální rovině některého otáčejícího se systému souřadnic. Předpokládejme, v daném okamžiku je částice ve vzdálenosti $r$ a má zde moment hybnosti

$$L_\mu = r\,p_\theta + r\,p_\phi$$

Potom

$$L^2 = L_\mu\,L^\mu = g^{\theta\theta}\,r^2\,p_\theta^2 + g^{\phi\phi}\,r^2\,p_{\phi\phi}^2 = r^4\left(p_\theta^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}p_\phi^2\right).$$

Protože ale můžeme soustavu souřadnic otočit tak, aby pohyb probíhal v ekvatoriální rovině, musí být výraz na pravé straně rovnice (3.2) roven konstantě.

❑ ❑ ❑

**Úloha 3.**

Částice padá v radiálním směru ve Schwarzschildově poli. Zjistěte velikost dostředivé souřadnicové rychlosti $\dfrac{dr}{dt}$ ve vzdálenosti $r$ od středu centrálního tělesa v závislosti na energii částice. Jak velká je lokálně měřená rychlost vzhledem ke stacionárnímu pozorovateli v téže vzdálenosti?

*Řešení:*

V časové rovnici geodetické čáry

$$\frac{d^2t}{ds^2} + 2\Gamma^t_{rt}\,\frac{dr}{ds}\frac{dt}{ds} = 0$$

položíme $s = \tau$ a dosadíme $\Gamma^t_{rt} = \dfrac{M}{r(r-2M)}$. Potom

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} + \frac{2M}{r(r-2M)}\,\frac{dr}{d\tau}\frac{dt}{d\tau} = 0.$$

Tuto rovnici budeme řešit analogicky jako rovnici (2.22) v příkladu 3.

$$\frac{\dfrac{d^2t}{d\tau^2}}{\left(\dfrac{dt}{d\tau}\right)^2} + \frac{2M}{r(r-2M)}\frac{dr}{d\tau} = 0,$$

což můžeme upravit na tvar

$$\frac{d}{d\tau}\left[\ln\left(\frac{dt}{d\tau}\right)+\ln\left(1-\frac{2M}{r}\right)\right]=0.$$

Odtud

$$\ln\left[\frac{dt}{d\tau}\left(1-\frac{2M}{r}\right)\right]=K_1,$$

kde $K_1$ je konstanta. Pak

$$\frac{dt}{d\tau}\left(1-\frac{2M}{r}\right)=e^{K_1}=-u^0\,g_{00}=-u_0=\tilde{E}.$$

Prvním integrálem pohybu je tedy výraz

$$u_0=-\tilde{E}. \tag{3.3}$$

Druhým integrálem pohybu je „kvadrát čtyřrychlosti“

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}=-1. \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
-1 &= u_0\,u^0+u_r\,u^r=g_{00}\,(u^0)^2+g_{rr}\,(u^r)^2= \\
&= -\left(1-\frac{2M}{r}\right)(u^0)^2+\frac{1}{\left(1-\frac{2M}{r}\right)}(u^r)^2= \\
&= \left[\frac{-\left(1-\frac{2M}{r}\right)^2+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}{\left(1-\frac{2M}{r}\right)}\right]\frac{1}{\left(1-\frac{2M}{r}\right)^2}\,u_0^2.
\end{aligned}$$

Z posledního vztahu vyjádříme $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$.

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=\left(1-\frac{2M}{r}\right)^2\left[1-\left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{1}{u_0}\right]. \tag{3.5}$$

Stacionární pozorovatel ve vzdálenosti $r$ naměří časové intervaly a radiální vzdálenosti

$$d\tilde{t}=\sqrt{\left(1-\frac{2M}{r}\right)}\,dt \qquad\qquad d\tilde{r}=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{2M}{r}\right)}}\,dr,$$

takže měří rychlost

$$\tilde{v}=\frac{d\tilde{r}}{d\tilde{t}}=\frac{1}{\left(1-\frac{2M}{r}\right)}\frac{dr}{dt}=\sqrt{1-\left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{1}{u_0}}.$$

Všimněte si, že pro $r\to 2M$ je $\tilde{v}\sim 1$, což v geometrodynamické soustavě jednotek znamená rychlost světla.

❑ ❑ ❑

**Úloha 4.**

Odvoďte pohybové rovnice (tj. vztahy mezi $t$, $r$, $\tau$) pro částici, která padá radiálním směrem ve Schwarzschildově poli. Uvažujte tři případy:

a) částice vypuštěná ze vzdálenosti $r = R$ s nulovou počáteční rychlostí,

b) částice vypuštěná z nekonečna s nulovou počáteční rychlostí,

c) částice vystřelená z nekonečna s počáteční rychlostí $v_\infty$.

*Řešení:*

Z prvních integrálů pohybu (viz příklad 3)

$$u_0 = -\tilde{E} \qquad \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = -1$$

plyne

$$u^0 = \frac{dt}{d\tau} = g^{00}\,u_0 = -\frac{1}{\left(1 - \dfrac{2M}{r}\right)}\,(-\tilde{E}) = \frac{\tilde{E}}{\left(1 - \dfrac{2M}{r}\right)}, \tag{3.6}$$

$$g_{00}\,(u^0)^2 + g_{rr}\,(u^r)^2 = -1,$$

$$(u^r)^2 = \frac{-[1 + g_{00}\,(u^0)^2]}{g_{rr}} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) + \tilde{E}^2,$$

$$u^r = \pm\sqrt{\tilde{E}^2 - 1 + \frac{2M}{r}}. \tag{3.7}$$

V rovnici (3.7) budeme uvažovat pouze znaménko mínus, protože ve všech případech se jedná o částici, která padá do středu, tj. $\dfrac{dr}{d\tau} < 0$.

a) V případě částice, která volně padá ze vzdálenosti $r = R$, platí

$$\left.\frac{dr}{d\tau}\right|_{r=R} = 0.$$

Odtud plyne, že $\dfrac{2M}{r} = -\tilde{E}^2 + 1$, tzn. $\tilde{E}^2 < 1$. Rovnici (3.7) potom můžeme přepsat ve tvaru

$$d\tau = -\frac{dr}{\sqrt{\dfrac{2M}{r} - \dfrac{2M}{R}}}.$$

Tedy

$$\tau = -\int \frac{dr}{\sqrt{\dfrac{2M}{r} - \dfrac{2M}{R}}} = -\frac{1}{\sqrt{M}} \int \frac{\sqrt{r}\,dr}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{2r}{R} - 1\right)}}. \tag{3.8}$$

K vyřešení tohoto integrálu použijeme substituci

$$\cos\eta = \frac{2r}{R} - 1. \tag{3.9}$$

Potom platí

$$\begin{aligned} r &= \frac{R}{2}(\cos\eta + 1), \\ dr &= -\frac{R}{2}\sin\eta\, d\eta, \\ \eta &= \arccos\left(\frac{2r}{R} - 1\right). \end{aligned}$$

Tyto vztahy dosadíme do rovnice (3.8) a obdržíme

$$\begin{aligned} \tau &= \sqrt{\frac{R^3}{8M}}\int\frac{\sqrt{1+\cos\eta}\,\sin\eta\,d\eta}{\sqrt{1-\cos\eta}} = \sqrt{\frac{R^3}{8M}}\int(1+\cos\eta)\,d\eta = \\ &= \sqrt{\frac{R^3}{8M}}[\eta + \sin\eta]. \end{aligned}$$

Dále vyjádříme $\sin\eta$

$$\sin\eta = \sqrt{1-\cos^2\eta} = \sqrt{1-\left(\frac{2r}{R}-1\right)^2} = 2\sqrt{\frac{r}{R}-\frac{r^2}{R^2}}.$$

Potom

$$\tau = \sqrt{\frac{R^3}{8M}}\left[\arccos\left(\frac{2r}{R}\right) + 2\sqrt{\frac{r}{R}-\frac{r^2}{R^2}}\right]. \tag{3.10}$$

Jestliže zavedeme tzv. *cykloidní parametr* $\eta$, můžeme přepsat rovnici (3.10) ve tvaru

$$\tau = \sqrt{\frac{R^3}{8M}}(\eta + \sin\eta). \tag{3.11}$$

Z rovnice (3.6) vyplývá

$$\begin{aligned} t &= \int\frac{\tilde{E}}{\left(1-\dfrac{2M}{r}\right)}d\tau = \tilde{E}\int\frac{d\tau}{d\eta}\,\frac{d\eta}{\left(1-\dfrac{2M}{r}\right)} = \\ &= \left(1-\frac{2M}{r}\right)\sqrt{\frac{R^3}{8M}}\int\frac{(1+\cos\eta)}{1-\dfrac{4M}{R(1+\cos\eta)}}\,d\eta. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Tento integrál vypočteme pomocí substituce

$$z = \operatorname{tg}\frac{\eta}{2},$$

pak

$$\begin{aligned} \eta &= 2\arctan z, \\ d\eta &= \frac{2\,dz}{1+z^2}, \\ \cos\eta &= \frac{1-z^2}{1+z^2}. \end{aligned}$$

Po dosazení do rovnice (3.12) a po úpravě lze psát

$$t = \frac{2R}{M}\sqrt{\frac{R^3}{8M}\left(1-\frac{2M}{r}\right)}\int\frac{dz}{(1+z^2\,)^2\left[\left(\frac{2M}{r}-1\right)-z^2\right]}.$$

Poslední integrál rozložíme na parciální zlomky a po jejich upravení platí

$$\begin{aligned} t &= 2\sqrt{2MR\left(1-\frac{2M}{r}\right)}\int\frac{dz}{1+z^2}+\sqrt{\frac{2R^3}{M}\left(1-\frac{2M}{r}\right)}\int\frac{dz}{1-z^2}+ \\ &+ 2\sqrt{2MR\left(1-\frac{2M}{r}\right)}\int\frac{dz}{\left(\frac{R}{2M}-1\right)-z^2} = \\ &= 2\sqrt{2MR\left(1-\frac{2M}{r}\right)}\arctan z\ +\sqrt{\frac{2R^3}{M}\left(1-\frac{2M}{r}\right)}\left(\frac{1}{2}\arctan z\ +\right. \\ &+ \left.\frac{1}{2}\frac{z}{1+z^2}\right)+\frac{\sqrt{2MR\left(1-\frac{2M}{r}\right)}}{\sqrt{\left(\frac{R}{2M}-1\right)-1}}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{R}{2M}-1}+z}{\sqrt{\frac{R}{2M}-1}-z}\right|. \end{aligned}$$

Využijeme-li vztahu

$$\frac{1}{2}\sin\eta=\frac{z}{1+z^2},$$

pak po úpravě získáme výsledný vztah

$$t = 2M\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{R}{2M}-1}+\operatorname{tg}\frac{\eta}{2}}{\sqrt{\frac{R}{2M}-1}-\operatorname{tg}\frac{\eta}{2}}\right|+2M\sqrt{\frac{R}{2M}-1}\left[\eta+\frac{R}{4M}(\eta+\sin\eta)\right]. \qquad (3.13)$$

V případě, že se $\operatorname{tg}\frac{\eta}{2}$ blíží $\sqrt{\frac{R}{2M}-1}$, tj. $r\to 2M$, potom se čas $t$ blíží k $\infty$, tzn., že když se částice blíží ke Schwarzschildovu poloměru, její vlastní čas roste nade všechny meze.

b) Jestliže se částice pohybuje z nekonečna s nulovou počáteční rychlostí, platí $\tilde{E} = 1$ a rovnici (3.7) lze psát ve tvaru

$$u^r = \frac{dr}{d\tau} = -\sqrt{\frac{2M}{r}}.$$

Odtud plyne,že

$$\frac{d\tau}{dr} = -\sqrt{\frac{r}{2M}}.$$

Přitom víme, že

$$\frac{dt}{dr} = \frac{dt}{d\tau}\,\frac{d\tau}{dr} = u^0\,\frac{d\tau}{dr} = \frac{-\sqrt{\frac{r}{2M}}}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}.$$

Tedy

$$\begin{aligned} t &= -\int \frac{\sqrt{\frac{r}{2M}}\,dr}{\left(1-\frac{2M}{r}\right)} = -\frac{1}{\sqrt{2M}}\int \frac{r\sqrt{r}\,dr}{r-2M} = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2M}}\int \sqrt{r}\,dr - \frac{2M}{\sqrt{2M}}\int \frac{\sqrt{r}\,dr}{r-2M} = \\ &= -\frac{2}{3\sqrt{2M}}\sqrt{r^3} - \underbrace{\int \frac{\sqrt{\frac{r}{2M}}\,dr}{\frac{r}{2M}-1}}_{I_2}. \end{aligned}$$

Integrál $I_2$ vyřešíme pomocí substituce $z = \sqrt{\frac{r}{2M}}$. Pak $dz = \frac{dr}{\sqrt{4Mr}}$, tedy

$$\begin{aligned} I_2 &= 4M\int \frac{z^2\,dz}{z^2-1} = 4Mz - 2M\,\ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right| + \text{konstanta} = \\ &= 4M\sqrt{\frac{r}{2M}} - 2M\,\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{r}{2M}}+1}{\sqrt{\frac{r}{2M}}-1}\right| + \text{konstanta}. \end{aligned}$$

Tedy pro souřadnicový čas $t$ platí

$$t = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{r^3}{2M}} - 4M\sqrt{\frac{r}{2M}} + 2M\,\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{r}{2M}}+1}{\sqrt{\frac{r}{2M}}-1}\right| + \text{konstanta}.$$

c) Budeme postupovat analogicky jako v části a). Zákon zachování energie můžeme vyjádřit pomocí rovnice

$$\frac{2M}{R} = \tilde{E}^2 - 1 = \frac{1}{m^2}\left(\frac{m^2}{1-v_\infty^2}\right) - 1 = \frac{v_\infty^2}{1-v_\infty^2},$$

kde $m$ je hmotnost částice. Rovnice (3.7) bude mít tvar

$$d\tau = -\frac{dr}{\sqrt{\frac{2M}{r} + \frac{2M}{R}}},$$

z něhož vyplývá

$$\tau = -\frac{1}{\sqrt{2M}}\int \frac{\sqrt{r}\,dr}{\sqrt{\frac{r}{R}+1}} = -\sqrt{\frac{R}{2M}}\int \frac{\sqrt{\frac{2r}{R}}\,dr}{\sqrt{\frac{2r}{R}+1+1}}.$$

Nyní použijeme substituci $\cosh\eta = \frac{2r}{R} + 1$. Pak platí

$$\begin{aligned} dr &= \frac{R}{2}\sinh\eta\, d\eta, \\ \sqrt{\frac{2r}{R}} &= \sqrt{\cosh\eta - 1}. \end{aligned}$$

Potom

$$\tau = -\frac{R}{2}\sqrt{\frac{R}{2M}}\int \frac{\sqrt{\cosh\eta - 1}\,\sinh\eta\;\, d\eta}{\sqrt{\cosh\eta + 1}} = -\sqrt{\frac{R}{2M}}\int (\cosh\eta - 1)\, d\eta,$$

a odtud

$$\tau = -\sqrt{\frac{R}{2M}}\,[\sinh\eta - \eta]. \tag{3.14}$$

Stejně jako v části a) vyjádříme $\sin\eta$ pomocí $\cosh\eta$.

$$\sinh\eta = \sqrt{\cosh^2\eta - 1} = 2\sqrt{\frac{r^2}{R^2} + \frac{r}{R}},$$

a tento vztah dosadíme do rovnice (3.14).

$$\tau = -\sqrt{\frac{R}{2M}}\left[2\sqrt{\frac{r^2}{R^2} + \frac{r}{R}} - \operatorname{arg\,cosh}\left(\frac{2r}{R} - 1\right)\right].$$

Analogickým způsobem vypočteme vlastní čas $t$. Již víme, že

$$r = \frac{R}{2}(\cosh\eta - 1). \tag{3.15}$$

Z rovnice (3.6) plyne

$$t = \int dt = \int \frac{\tilde{E}\, d\tau}{\left(1 - \dfrac{2M}{r}\right)} = \int \frac{\tilde{E}}{\left(1 - \dfrac{2M}{r}\right)} \frac{d\tau}{d\eta}\, d\eta. \tag{3.16}$$

Do této rovnice dosadíme vztahy pro $r$, $\tau$ z rovnic (3.14), (3.15) a vztah

$$\tilde{E} = \sqrt{1 + \frac{2M}{R}}$$

$$t = \sqrt{1 + \frac{2M}{R}} \left(-\sqrt{\frac{R^3}{8M}}\right) \int \frac{(\cosh\eta - 1)\, d\eta}{1 - \dfrac{4M}{R(\cosh\eta - 1)}}.$$

Tento integrál vypočteme pomocí substituce $z = \operatorname{cotgh}\dfrac{\eta}{2}$. Odtud vyplývá, že

$$\begin{aligned} \eta &= 2 \arg\operatorname{cotgh} z\ , \\ \cosh z &= \frac{z^2+1}{z^2-1}. \end{aligned}$$

Po dosazení a po úpravě můžeme psát

$$t = -\frac{R}{2M}\sqrt{\frac{R^3}{8M}\left(1 + \frac{2M}{R}\right)} \int \frac{dr}{(1-z^2)^2 \left(\dfrac{R}{2M} + 1 - z^2\right)},$$

a po rozkladu na parciální zlomky

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2R}{M}}\sqrt{1 + \frac{2M}{R}}\,(4M - R) \int \frac{dz}{z-1} + \\ &+ \frac{R}{4}\sqrt{\frac{2R}{M}}\sqrt{1 + \frac{2M}{R}} \int \frac{dz}{(z-1)^2} - \\ &- \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2R}{M}}\sqrt{1 + \frac{2M}{R}}\,(4M - R) \int \frac{dz}{z+1} + \\ &+ \frac{R}{4}\sqrt{\frac{2R}{M}}\sqrt{1 + \frac{2M}{R}} \int \frac{dz}{(z+1)^2} + \\ &+ 2\sqrt{2MR\left(1 + \frac{2M}{R}\right)} \int \frac{dz}{\dfrac{R}{2M} + 1 - z^2}, \end{aligned}$$

což je po integraci

$$
\begin{aligned}
t &= \sqrt{\frac{2MR\left(1+\frac{2M}{R}\right)}{\frac{R}{2M}+1}}\ \ln\left|\frac{\sqrt{\frac{R}{2M}+1}+z}{\sqrt{\frac{R}{2M}+1}-z}\right| + \\
&+ \frac{4M-R}{4}\sqrt{\frac{2R}{M}\left(1+\frac{2M}{R}\right)}\ \ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| - \\
&- \frac{R}{4}\sqrt{\frac{2R}{M}1+\frac{2M}{R}}\left(\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z-1}\right).
\end{aligned}
$$

Nyní upravíme jednotlivé výrazy:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z-1}\right) &= \frac{2z}{z^2-1} = \sinh\eta, \\
\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| &= \ln\left|\frac{\cosh\frac{\eta}{2} - \sinh\frac{\eta}{2}}{\cosh\frac{\eta}{2} + \sinh\frac{\eta}{2}}\right| = -\eta.
\end{aligned}
$$

Po dosazení a po úpravě pak obdržíme rovnici

$$
\begin{aligned}
t &= 2M\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{R}{2M}+1}+\operatorname{cotgh}\frac{\eta}{2}}{\sqrt{\frac{R}{2M}+1}-\operatorname{cotgh}\frac{\eta}{2}}\right| - \\
&- 2M\sqrt{\frac{R}{2M}+1}\left[\eta+\frac{R}{4M}\left(\sinh\eta-\eta\right)\right].
\end{aligned}
$$

Stacionární pozorovatel v nekonečnu, který měří souřadnicový čas od určitého okamžiku, v důsledku nenulové počáteční rychlosti částice tuto částici pozoruje ještě před počátkem měření. To znamená, že při změně vzdálenosti $r$ od $+\infty$ do $2M$ se souřadnicový čas mění od $-\infty$ do $+\infty$.

❑ ❑ ❑

**Úloha 5.**

Odvoďte diferenciální rovnici prvního řádu pro geodetické čáry ve Schwarzschildově geometrii (pro jednoduchost uvažujte pohyb v ekvatoriální rovině).

*Řešení:*

V příkladu 3 jsme odvodili první integrály pohybu

$$
\begin{aligned}
u_0 &= -\tilde{E} = \text{konstanta}, \\
\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} &= -1.
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

Další konstantou je

$$u_\phi = \tilde{L} = \text{konstanta}, \tag{3.18}$$

kterou vypočteme z rovnice geodetické čáry

$$\frac{d^2\phi}{d\tau^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{d\tau}\frac{d\phi}{d\tau} + 2\,\mathrm{cotg}\,\theta\,\frac{d\theta}{d\tau}\frac{d\phi}{d\tau} = 0$$

analogickým způsobem jako v příkladu 3. Po úpravě předchozí rovnice získáme

$$\ln\left(\frac{d\phi}{d\tau}\,r^2\,\sin^2\theta\right) = K = \text{konstanta},$$

a odtud

$$r^2\,\sin^2\theta\,u^\phi = u_\phi = \frac{L}{m} = \tilde{L},$$

$\tilde{E} = \dfrac{E}{m}$, resp. $\tilde{L} = \dfrac{L}{m}$, je energie, resp. moment hybnosti, vztažená na jednotkovou klidovou hmotnost.

Zvolme ekvatoriální rovinu $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, ve které je složka $u^\theta$ čtyřrychlosti částice rovna nule.

Rovnici $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} = -1$ rozepíšeme do složek a vyjádříme z ní $u^r = \dfrac{dr}{d\tau}$

$$\begin{aligned} u_0 u^0 \quad &+ \quad u_r u^r + u_\phi u^\phi = -1 \\ (u^r)^2 \quad &= \quad \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = -\frac{-1 - g^{00}\,(u_0)^2 - g^{\phi\phi}\,(u_\phi)^2}{g_{rr}}. \end{aligned}$$

Za $u_0$ a $u_\phi$ dosadíme z rovnic (3.17) a (3.18), kontravariantní složky metrického tenzoru jsme vypočítali v příkladu 1. Potom

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \left[-1 + \frac{\tilde{E}^2}{\left(1 - \dfrac{2M}{r}\right)} - \frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right]\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$$

a po odmocnění

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right) = \pm\sqrt{\left[-1 + \frac{\tilde{E}^2}{\left(1 - \dfrac{2M}{r}\right)} - \frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right]\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}.$$

Dále víme, že $u^\phi = \dfrac{d\phi}{d\tau} = g_{00}\,u_\phi = \dfrac{\tilde{L}}{r^2}$. Proto

$$\frac{dr}{d\phi}\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{\tilde{L}}{r^2}\,\frac{dr}{d\phi} = \pm\sqrt{\left[-1 + \frac{\tilde{E}^2}{\left(1 - \dfrac{2M}{r}\right)} - \frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right]\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}$$

a hledaná diferenciální rovnice je

$$\frac{dr}{d\phi} = \pm\frac{r^2}{\tilde{L}}\sqrt{\left[-1 + \frac{\tilde{E}^2}{\left(1-\frac{2M}{r}\right)} - \frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right]\left(1-\frac{2M}{r}\right)}. \tag{3.19}$$

❑ ❑ ❑

**Úloha 6.**

Dokažte, že se světelné paprsky ve Schwarzschildově poli pohybují po křivkách, které splňují rovnici

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 3u^2,$$

kde $u \equiv \frac{M}{r}$, $r$ je Schwarzschildova radiální souřadnice. Vypočtěte minimální hodnotu $r$ podél trajektorie s využitím parametru $b$ [5]. O jaký úhel se odchýlí foton, který se pohybuje kolem velmi hmotného sférického tělesa v takové vzdálenosti, že $\frac{M}{b} \ll 1$? Napište rovnici pro úhel ohybu v závislosti na $\frac{M}{b}$.

*Řešení:*

Nechť se foton pohybuje v ekvatoriální rovině $\theta = \frac{\pi}{2}$. Potom $u^\theta = 0$ a tedy i $p^\theta = 0$. Nechť $\lambda$ je afinní parametr, pro který platí

$$p^r = \frac{dr}{d\lambda}$$

$$p^\phi = \frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{p_\phi}{r^2}.$$

Potom

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{dr}{d\lambda}\frac{d\lambda}{d\phi} = \frac{p^r}{p^\phi}.$$

Z invariantu $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p} = -m^2 = 0$ (jedná se o fotony) vyplývá

$$g_{rr}\,(p^r)^2 + g^{\phi\phi}\,(p_\phi)^2 + g^{00}\,(p_0)^2 = 0,$$

což lze upravit na tvar

$$\frac{1}{\left(1-\frac{2M}{r}\right)}\left(\frac{p^r}{p_\phi}\right)^2 + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{\left(1-\frac{2M}{r}\right)}\left(\frac{p_0}{p_\phi}\right)^2 = 0.$$

Označme $\gamma = \left(\frac{p_0}{p_\phi}\right)^2$, pak

$$\frac{1}{\left(1-\frac{2M}{r}\right)}\frac{1}{r^4}\left(\frac{p^r}{p^\phi}\right)^2 + \frac{1}{r^2} - \frac{\gamma}{\left(1-\frac{2M}{r}\right)} = 0,$$

[5] Parametr $b$ je nejmenší vzdálenost trajektorie fotonu od středu centrálního tělesa

a z této rovnice vyjádříme $\left(\frac{p^r}{p^\phi}\right)^2$

$$\begin{aligned}\left(\frac{p^r}{p^\phi}\right)^2 &= \gamma r^4 - r^2\left(1-\frac{2M}{r}\right) = \\ &= r^4\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left[\frac{\gamma}{\left(1-\frac{2M}{r}\right)} - \frac{1}{r^2}\right] = \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 .\end{aligned} \tag{3.20}$$

Zadefinujme nyní novou proměnnou $u \equiv \frac{M}{u}$. Potom $r = \frac{M}{u}$ a $dr = -\frac{M}{u^2}\,du$. Dále můžeme psát

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{dr}{du}\,\frac{du}{d\phi} = -\frac{M}{u^2}\,\frac{du}{d\phi} = -\frac{M}{u^2}\,u',$$

kde $u' \equiv \frac{du}{d\phi}$. všechny tyto vztahy dosadíme do rovnice (3.20), kterou následně upravíme na tvar

$$(u')^2 = M^2\,\gamma - u^2 + 2u^3. \tag{3.21}$$

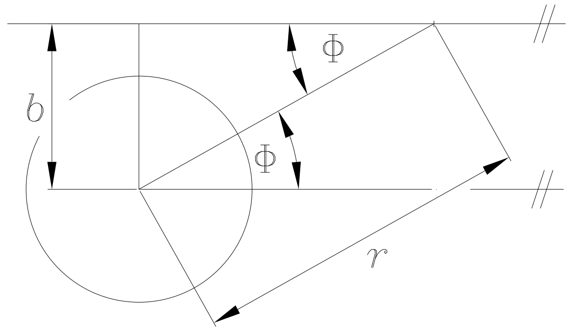
Rovnici (3.21) zderivujeme podle $\phi$ a obdržíme diferenciální rovnici druhého řádu

$$2u'\,u'' = -2u\,u' + 6u^2\,u',$$

$$u'' + u = 3u^2. \tag{3.22}$$

V limitním případě $\frac{M}{b} \ll 1$ můžeme řešení nultého řádu této rovnice považovat za přímkové řešení [6]

$$r\sin\phi = b \qquad \text{nebo} \qquad u_0 = \frac{M}{b}\sin\phi.$$




Obr. 1: K úloze 6

Napíšeme řešení rovnice (3.22) ve tvaru řady

[6] Odtud je patrné, že $b$ je nejmenší vzdálenost.

$$u = u_0 + u_1 + \cdots,$$

kde $u_1 \ll 1$, a dosadíme je zpět do rovnice (3.22).

$$u_0'' + u_1'' + \cdots + u_0 + u_1 + \cdots = 3(u_0 + u_1 + \cdots)^2,$$

$$-\frac{M}{b}\sin\phi + u_1'' + \cdots + \frac{M}{b}\sin\phi + u_1 + \cdots = 3(u_0 + u_1 + \cdots)^2.$$

V poslední rovnici zanedbáme na levé straně všechny členy $u_2, \ldots,\ u_2'', \ldots$ a na pravé straně také všechny členy s výjimkou $u_0^2$, proto můžeme psát

$$u_1'' + u_1 = 3u_0^2 = 3\left(\frac{M}{b}\right)^2 \sin^2\phi = \frac{3}{2}\left(\frac{M}{b}\right)^2 (1 - \cos 2\phi). \tag{3.23}$$

Tato diferenciální rovnice má dvě partikulární řešení, označme je $u_{1p},\ u_{2p}$, pro která platí

$$\begin{aligned} u_{1p} &= \frac{3}{2}\left(\frac{M}{b}\right)^2, \\ u_{2p} &= A\ \cos 2\phi + B\sin 2\phi. \end{aligned}$$

Nyní vypočteme $u_{2p}'$ , $u_{2p}''$ a dosadíme je do rovnice (3.23)

$$-4A\ \cos 2\phi - 4B\ \sin 2\phi + A\ \cos 2\phi + B\ \sin 2\phi = \frac{3}{2}\left(\frac{M}{b}\right)^2 - \frac{3}{2}\left(\frac{M}{b}\right)^2 \cos 2\phi.$$

Porovnáním koeficientů u $\cos 2\phi$ a $\sin 2\phi$ určíme konstanty $A$, $B$.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\left(\frac{M}{b}\right)^2, \\ B &= 0. \end{aligned}$$

Řešení diferenciální rovnice (3.22) je

$$\begin{aligned} u &= \frac{M}{b}\sin\phi + \frac{3}{2}\left(\frac{M}{b}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{M}{b}\right)^2 (3 + \cos 2\phi) = \\ &= \frac{M}{b}\sin\phi + \frac{1}{2}\left(\frac{M}{b}\right)^2 (3 + \cos 2\phi). \end{aligned}$$

Nyní můžeme vypočítat celkový úhel ohybu. Určíme dva úhly, pro něž platí

$$\begin{aligned} r &= \infty \qquad (\text{tj. } u = \frac{M}{r} = 0) \\ \sin\phi &= -\frac{1}{2}\left(\frac{M}{b}\right)(3 + \cos 2\phi). \end{aligned}$$

Víme, že $\cos 2\phi = 1 - 2\sin^2\phi$ a v případě, že úhel ohybu je malý (tj. $\phi \ll 1$), potom můžeme přibližně psát $\sin\phi \sim \phi$ a $\sin^2 \ll 1$. Proto

$$
\begin{aligned}
\sin\phi &= -\frac{2M}{b} + \frac{M}{b}\sin^2\phi, \\
\phi &\sim -\frac{2M}{b}.
\end{aligned}
$$

Druhý úhel je

$$\phi \sim \pi + \frac{2M}{b}$$

Celkový úhel, o který se foton odchýlí, je $\Delta\phi = \dfrac{4M}{b}$.

❑ ❑ ❑

**Úloha 7.**

Vypočtěte, o jaký úhel se posune perihelium planety při jednom jejím oběhu kolem Slunce.

*Řešení:*

Vyjdeme z obecné rovnice geodetické čáry

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0.$$

Tato rovnice se obecně rozpadá na čtyři rovnice

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2t}{ds^2} &- \frac{2M}{r(2M-r)}\frac{dr}{ds}\frac{dt}{ds} = 0, \\
\frac{d^2r}{ds^2} &+ \frac{M}{r(2M-r)}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + (-r+2M)\sin^2\theta\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 - \\
&- \frac{(2M-r)M}{r^3}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 0, \\
\frac{d^2\theta}{ds^2} &+ \frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\theta}{ds} - \sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 = 0, \\
\frac{d^2\phi}{ds^2} &+ \frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\phi}{ds} + 2\operatorname{cotg}\theta\frac{d\theta}{ds}\frac{d\phi}{ds} = 0.
\end{aligned}
$$

Předpokládejme, že na počátku planeta obíhá v rovině $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. Potom $\cos\theta = 0$ a $\dfrac{d\theta}{ds} = 0$, proto se i další pohyb planety odehrává v této rovině. Pro zjednodušení si zavedeme ještě tyto pomocné vztahy.

$$
\begin{aligned}
\frac{M}{r(2M-r)} &= \frac{\lambda'}{2}, \\
(2M-r)\sin^2\theta &= -r\,e^{-\lambda}\sin^2\theta, \\
-\frac{(2M-r)M}{r^3} &= \frac{1}{2}\,e^{\nu-\lambda}\,\nu'.
\end{aligned}
$$

S využitím těchto vztahů lze rovnice geodetických čar přepsat ve tvaru

$$\frac{d^2t}{ds^2} + \nu' \frac{dr}{ds}\frac{dt}{ds} = 0 \tag{3.24}$$

$$\frac{d^2r}{ds^2} + \frac{1}{2}\lambda' \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - r\,e^{-\lambda}\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 + \frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\,\nu'\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 0 \tag{3.25}$$

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = 0 \tag{3.26}$$

$$\frac{d^2\phi}{ds^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\phi}{ds} = 0. \tag{3.27}$$

Rovnici (3.27) jsme již vypočetli v příkladu 3 a rovnici (3.24) v příkladu 3, proto zde použijeme pouze jejich řešení.

$$r^2\,\frac{d\phi}{ds} = h = \text{konstanta}. \tag{3.28}$$

Předpokládejme, že $\nu' \equiv \dfrac{d\nu(r)}{dr}$, potom

$$\frac{dt}{ds} = a\,e^{-\nu(r)} = \frac{a}{\gamma}, \tag{3.29}$$

kde $\gamma = e^{\nu(r)}$. Místo rovnice (3.25) použijeme rovnici Schwarzschildovy metriky

$$ds^2 = -\gamma\,dt^2 + \frac{1}{\gamma}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 dr^2 + r^2\,d\theta^2 + r^2\,\sin^2\theta\,d\phi^2,$$

kde $\gamma = 1 - \dfrac{2M}{r}$. Odtud plyne

$$1 = -\gamma\,\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{1}{\gamma}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2,$$

a tuto rovnici můžeme s využitím vztahů (3.28) a (3.29) upravit na tvar

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = \gamma + \frac{a^2}{\gamma} - \frac{h^2\,\gamma}{r^2},$$

který lze po dosazení vztahu $\gamma = 1 - \dfrac{2M}{r}$ dále upravit na

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = a^2 + 1 + \frac{2M}{r} - \frac{h^2}{r^2} + \frac{2Mh^2}{r^3}. \tag{3.30}$$

Zaveďme novou proměnnou $u = \dfrac{1}{r}$. Pak $\dfrac{dr}{du} = -r^2$ a $\dfrac{dr}{d\phi} = \dfrac{dr}{du}\dfrac{du}{d\phi}$. Přitom však víme, že $\dfrac{dr}{ds} = \dfrac{h^2}{r^2}\dfrac{dr}{d\phi}$ a rovnici (3.30) lze tedy po úpravě přepsat v následující podobě

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \frac{a^2+1}{h^2} + \frac{2Mu}{h^2} - u^2 + 2Mu^3.$$

Tuto rovnici zderivujeme podle $\phi$ a obdržíme

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{M}{h} + 3Mu^2. \tag{3.31}$$

Všimněte si, klasická newtonovská rovnice popisující pohyb téže planety neobsahuje na pravé straně člen $3Mu^2$.

Řešení rovnice (3.31) budeme hledat ve tvaru $u = A + B\cos(\lambda\phi)$. Do rovnice (3.31) dosadíme vztahy

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\phi} &= -\gamma B \sin(\lambda\phi),\\ \frac{d^2u}{d\phi^2} &= -\gamma^2 B\cos(\lambda\phi).\end{aligned}$$

Potom

$$A + (1-\lambda^2)B\,\cos(\lambda\phi) = \frac{M}{h} + 3MA^2 + 6MAB\cos(\lambda\phi) + 3MB^2\cos^2(\lambda\phi) + \cdots.$$

Nejprve porovnáme konstantní členy a koeficienty u $\cos(\lambda\phi)$. Vyšší mocniny $\cos(\lambda\phi)$ zanedbáme.

$$\begin{aligned}A &= \frac{M}{h} + 3MA^2\\ (1-\lambda^2) &= 6MA.\end{aligned} \tag{3.32}$$

Nechť $\lambda = 1-\omega, \quad \omega \ll 1$. Potom

$$1-\lambda^2 = 1-(1-\omega)^2 = 2\omega - \omega^2 \sim 2\omega = 2(1-\lambda).$$

Konstantu $A$ určíme z trajektorie planety, tj. z elipsy. Předpokládejme, že $\lambda\phi = 0$. Potom

$$u = \frac{1}{r_{\min}} = \frac{1}{a(1-\varepsilon)} = A + B,$$

kde $a$ je hlavní poloosa elipsy a $\varepsilon$ její excentricita. V případě, že $\lambda\phi = \pi$, pak

$$u = \frac{1}{r_{\max}} = \frac{1}{a(1+\varepsilon)} = A - B.$$

Po sečtení obou rovnic obdržíme

$$2A = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{1+\varepsilon} + \frac{1}{1-\varepsilon}\right) = \frac{2}{a(1-\varepsilon^2)},$$

a tedy

$$A = \frac{1}{a(1-\varepsilon^2)}.$$

Z rovnice (3.32) plyne

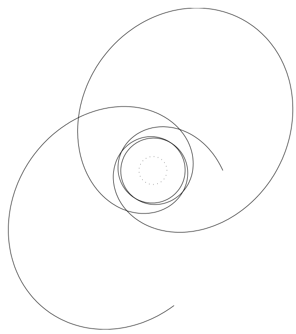
$$\omega = 1-\lambda = 3MA = \frac{3M}{a(1-\varepsilon^2)}.$$

Nyní už můžeme vypočítat, o jak velký úhel se posune perihelium planety při jednom oběhu kolem Slunce.

$$\delta\phi = 2\pi\omega = \frac{6\pi M}{a(1-\varepsilon^2)}.$$

Posun perihelia nejbližších planet Sluneční soustavy popisuje následující tabulka ($\delta\phi$ vyjadřuje odchylku perihelia v úhlových vteřinách za sto let).

| Planeta | $\frac{r_{\text{Merkur}}}{r}$ | $\delta\phi$ |
|---|---|---|
| Merkur | 1 | 42 |
| Venuše | 0,536 | 8,8 |
| Země | 0,386 | 3,9 |
| Mars | 0,245 | 1,25 |



Obr. 2: Výrazný posun perihélia (numerické řešení k úloze 7)

❑ ❑ ❑

**Úloha 8.**

Vesmírná loď Enterprise, která se pohybuje po kruhové orbitě o poloměru $r$ kolem hvězdy o hmotnosti $M$, je vyzbrojena laserovým dělem s klidovou frekvencí $\nu_0$. Vypočtěte frekvenci laseru, kterou bude pozorovat stacionární pozorovatel v nekonečnu.

*Řešení:*

Tuto úlohu budeme řešit ve dvou částech. Nejprve vypočteme frekvenci laseru, kterou změří statický pozorovatel ve vzdálenosti $r$ (označme jej sr), a poté vypočteme rudý posuv mezi tímto pozorovatelem a statickým pozorovatelem v nekonečnu, kterého označíme sn.

Nechť $v$ je vlastní relativní rychlost mezi raketou a statickým pozorovatelem ve vzdálenosti $r$.

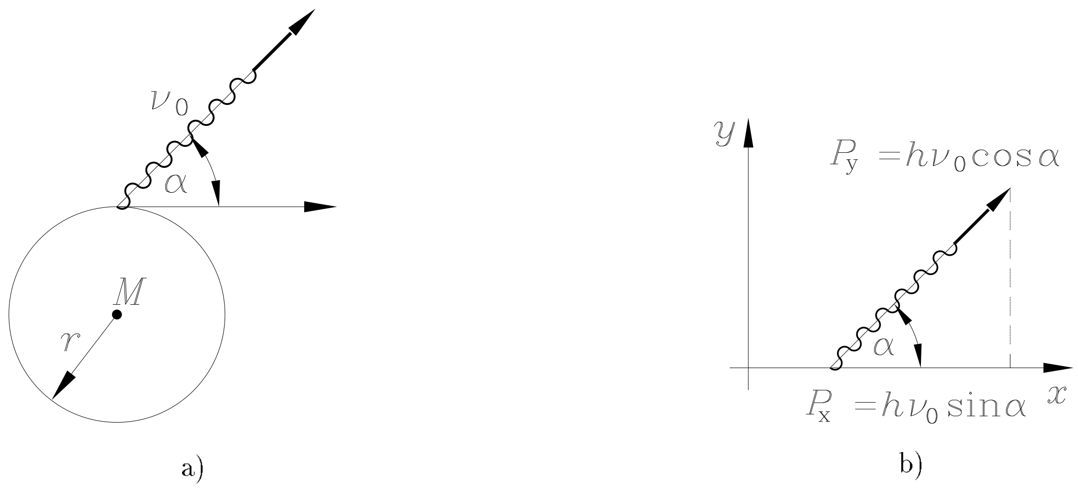
Z Dopplerova jevu vyplývá (viz obr. 3b), že

$$\begin{aligned} p_0 &= \gamma\,(p'_0 + \beta\, p'_x) \\ h\nu_{\text{sr}} &= \gamma\,(h\nu_0 + v\,h\,\nu_0\,\cos\alpha) = \gamma\,h\,\nu_0\,(1 + v\cos\alpha). \end{aligned}$$

Odtud plyne, že statický pozorovatel ve vzdálenosti $r$ naměří frekvenci

$$\nu_{\text{sr}} = \gamma\,\nu_0\,(1 + v\,\cos\alpha). \tag{3.33}$$

Vlastní rychlost $v$ vypočteme pomocí úhlové rychlosti $\omega = \dfrac{d\phi}{dt}$. Pro kruhové orbity platí, že vztah pro výpočet úhlové rychlosti je ve stejném tvaru jako 3. Keplerův zákon v klasické mechanice.




Obr. 3: K úloze 8

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} = \sqrt{\frac{M}{r^3}}. \tag{3.34}$$

Tedy

$$v = \hat{\omega} r = \frac{d\hat{\omega}}{dt}\, r,$$

přičemž $d\hat{\omega} = d\omega$ a $d\hat{t} = \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}\, dt$. Potom

$$v = \frac{r}{\sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}} \frac{d\phi}{dt} = \sqrt{\frac{M}{r\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}}. \tag{3.35}$$

Předpokládejme, že $r$, $\theta$, a $\phi$ jsou konstanty. Schwarzschildova metrika se potom zjednoduší na tvar

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2.$$

Pro vlastní čas pozorovatele platí

$$d\tau^2 = -ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2,$$

proto můžeme přibližně psát

$$\Delta\tau \sim \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}\, \Delta t.$$

Časové intervaly $\Delta\tau$, , $\Delta t$ můžeme považovat za periody kmitání ve vzdálenosti $r$ a v nekonečnu. Pak

$$T_{sr} \sim \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}\, T_{\mathrm{sn}}. \tag{3.36}$$

Protože $\nu = \dfrac{1}{T}$, potom rovnici (3.36) lze přepsat ve tvaru

$$\frac{1}{\nu_{\mathrm{sr}}} = \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}}{\nu_{\mathrm{sn}}}.$$

Odtud vyjádříme $\nu_{\mathrm{sr}}$ a dosadíme jej do rovnice (3.33).

$$\nu_{\mathrm{sr}} = \frac{\nu_{\mathrm{sn}}}{\sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}}.$$

Tedy

$$\nu_{\mathrm{sn}} = \gamma\, \nu_0\, (1 + v\, \cos\alpha) \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)},$$

kde $v$ vyhovuje rovnici (3.35).

❑ ❑ ❑

**Úloha 9.**

Testovací částice se pohybuje rychlostí $v \to 1$ ve vzdálenosti $b$ [7] od hvězdy hmotnosti $M$. Vzdálenost $b$ je tak velká, že odchylka částice $\Delta\phi_g$ od původního směru vlivem gravitačního pole je malá. Vypočtěte tuto odchylku. Nechť v rovinném prostoročase letí elektron s rychlostí $v$ kolem atomového jádra s nábojem $Ze$ ve vzdálenosti $b'$, která je tak velká, že odchylka elektronu $\Delta\phi_e$ od původního směru způsobená přitažlivými silami je malá. Vypočtěte úhel $\Delta\phi_e$. Proč se liší rovnice pro úhel ohybu vlivem gravitačního pole od rovnice úhlu ohybu, který je způsoben přitažlivými silami?

*Řešení:*

Předpokládejme, že se pohyb odehrává v rovině $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

a) Z prvních integrálů pohybu $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} = -1$, $u_0 = -\tilde{E}$, $u_\phi = \tilde{L}$ jsme v příkladu 5 odvodili diferenciální rovnici

$$\frac{dr}{d\phi} = \pm\frac{r^2}{\tilde{L}} \sqrt{\left[-1 + \frac{\tilde{E}^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} - \frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right]\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}.$$

[7] Vzdálenost $b$ zde má význam nejmenší vzdálenosti trajektorie částice od středu centrálního tělesa, např. velmi hmotné hvězdy (viz příklad 6)

Jestliže zavedeme novou proměnnou $u = \dfrac{M}{r}$ a označíme $\bar{L} = \dfrac{\tilde{L}}{M}$, můžeme tuto rovnici upravit na tvar

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \frac{\tilde{E}^2 - (1-2u)(1+\bar{L}^2\,u^2)}{\bar{L}^2}. \tag{3.37}$$

Tuto rovnici zderivujeme podle $\phi$, přičemž označíme $u' \equiv \dfrac{du}{d\phi}$, a získáme rovnici

$$2u'\,u'' = \frac{2u'}{\bar{L}^2}(1 + 3\bar{L}^2\,u^2 - \bar{L}^2\,u),$$

kterou upravíme na tvar

$$u'' + u = \frac{1}{\bar{L}^2} + 3u^2. \tag{3.38}$$

Pro velkou vzdálenost $b$ je pravá strana rovnice (3.38) velmi malá. Nechť je řešení této rovnice ve tvaru $u = u_0 + v$, kde $v = v(\phi)$, $v \ll 1$. Potom

$$u_0 = A\cos\phi,\ \ A = \text{konstanta} \tag{3.39}$$

je při vhodné volbě souřadnicových os $x$, $y$ řešení homogenní rovnice příslušné k diferenciální rovnici (3.38). Dosadíme-li tyto vztahy do rovnice (3.38), můžeme po úpravě psát

$$u_0'' + v'' + u_0 + v = \frac{1}{\bar{L}^2} + 3(u_0 + v)^2,$$

$$-A\cos\phi\ + v'' + A\cos\phi = \frac{1}{\bar{L}^2} + 3(A\cos\phi + v)^2.$$

Na pravé straně této rovnice zanedbáme všechny členy, které obsahují $v$ a zároveň použijeme vzorce $\cos^2\phi = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2\phi)$, proto můžeme psát

$$v'' + v = \frac{1}{\bar{L}^2} + \frac{3}{2}A^2\,(1 + \cos 2\phi). \tag{3.40}$$

Řešení této rovnice je ve tvaru

$$v = \frac{1}{\bar{L}^2} + \frac{3}{2}A^2 - \frac{A^2}{2}\cos 2\phi = \frac{1}{\bar{L}^2} + 2A^2 - A^2\,\cos^2\phi$$

a tento vztah dosadíme do rovnice $u = u_0 + v$, ze které získáme

$$u = A\,\cos\phi + \frac{1}{\bar{L}^2} + 2A^2 - A^2\,\cos^2\phi.$$

Asymptoty řešení vyhovují rovnici

$$u = 0\ \Leftrightarrow A^2\,\cos^2\phi - A\,\cos\phi - 2A^2 - \frac{1}{\bar{L}^2} = 0.$$

Položíme-li $B \equiv 2A^2 - \dfrac{1}{\bar{L}^2}$, můžeme pro kořeny předchozí kvadratické rovnice psát

$$\cos\phi = \frac{A \pm \sqrt{A^2 + 4A^2 B}}{2A^2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4B}}{2A}.$$

V dalším výpočtu budeme uvažovat pouze znaménko mínus, které říká, že úhel $\phi$, který svírá trajektorie částice a nejmenší vzdálenost $b$, bude nabývat hodnot větších než $\frac{\pi}{2}$. Při volbě znaménka plus obdržíme nepřípustnou hodnotu $\cos\phi > 1$. Potom

$$\cos\phi \sim \frac{1 - (1 + \frac{1}{2} 4B)}{2A} = -\frac{B}{A}. \tag{3.41}$$

Protože $\frac{B}{A}$ je velmi malé číslo, přibližně platí

$$\begin{aligned} \phi &\sim \frac{\pi}{2} - \frac{B}{A}, \\ \phi &\sim -\frac{\pi}{2} + \frac{B}{A}. \end{aligned}$$

Úhel ohybu je stejný i od druhé asymptoty, proto celková odchylka je

$$\Delta\phi = \frac{2M}{b}. \tag{3.42}$$

Nechť $b$ je nejmenší vzdálenost trajektorie částice od středu centrálního tělesa, pak podle rovnice (3.39) můžeme psát

$$A = \frac{M}{b}. \tag{3.43}$$

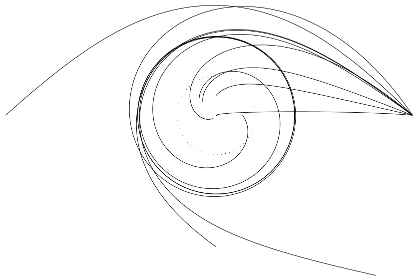
S využitím vztahů $E = \frac{m^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ a $L = b\,p$ ($b$ je nejmenší vzdálenost, tedy v tomto bodě je hybnost částice kolmá na $b$ a moment hybnosti pak vypočteme jako součin velikostí $b$ a $p$) získáme tyto rovnice pro $L^2$ a konstantu $B$

$$\bar{L}^2 = \left(\frac{\tilde{L}}{M}\right)^2 = \left(\frac{L}{mM}\right)^2 = \frac{b^2\,(E^2 - m^2)}{m^2\,M^2} = \frac{b^2}{M^2}\,\frac{\beta^2}{1-\beta^2}, \tag{3.44}$$

$$B = \frac{1}{\bar{L}^2} + 2A^2 = \frac{M^2\,(1-\beta^2)}{b^2\,\beta^2} + \frac{2M^2}{b^2} = \frac{M^2\,(1+\beta^2)}{b^2\,\beta^2}, \tag{3.45}$$

kde $\beta = \frac{v}{c} = v$. Výsledný vztah pro odchylku vlivem gravitačního pole získáme, jestliže do rovnice (3.42) dosadíme vztahy z rovnic (3.43) a (3.45)

$$\Delta\phi_g = \frac{\frac{2M^2\,(1+\beta^2)}{b^2\,\beta^2}}{\frac{M}{b}} = \frac{2M\,(1+\beta^2)}{b\,\beta^2}. \tag{3.46}$$



Obr. 4: Geodetické čáry v Schwarzschildově poli pro částice s různou energií a momentem hybnosti (numerické řešení k úloze 9a)

b) Diferenciální rovnice, která popisuje trajektorii elektronu v magnetickém poli, je

$$\frac{d}{dt}(m\gamma\dot{r}) = \gamma m r\omega^2 - \frac{Ze^2}{r^2}, \tag{3.47}$$

přičemž

$$\gamma m r^2\omega \equiv L = \text{konstanta}, \tag{3.48}$$

$$\gamma m - \frac{Ze^2}{r^2} \equiv E = \text{konstanta}. \tag{3.49}$$

Z rovnice (3.48) vyplývá

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{L}{\gamma m r^2},$$

a odtud

$$\frac{d}{dt} = \left(\frac{L}{\gamma m r^2}\right)\frac{d}{d\phi}.$$

Tento vztah dosadíme do rovnice (3.47)

$$\frac{L}{\gamma m r^2}\frac{d}{d\phi}\left(\frac{L}{r^2}\frac{dr}{d\phi}\right) = \gamma m r\omega^2 - \frac{Ze^2}{r^2} \overset{(3.48)}{=} \frac{L^2}{\gamma m r^3} - \frac{Ze^2}{r^2},$$

a po úpravě můžeme psát

$$\frac{L^2}{\gamma m}\frac{d}{d\phi}\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\phi}\right) = \frac{L^2}{\gamma m r} - Ze^2. \tag{3.50}$$

Nechť $u = \frac{1}{r}$. Pak $r = \frac{1}{u}$ a $\frac{dr}{du} = -\frac{1}{u^2}$ a rovnice (3.50) má tvar

$$\frac{L^2}{\gamma m}\frac{d}{d\phi}\left(u^2\frac{dr}{du}\frac{du}{d\phi}\right) = -\frac{L^2}{\gamma m}\frac{d^2u}{d\phi^2} = \frac{L^2 u}{\gamma m} - Ze^2.$$

Z rovnice (3.49) vypočteme $\gamma m$ a dosadíme jej do předchozí rovnice

$$\gamma m = E + \frac{Ze^2}{r} = E + Ze^2\, u\ ,$$

a tedy po úpravě

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + \left(1 - \frac{Z^2\, e^4}{L^2}\right)\ u\ = \frac{Ze^2\, E}{L^2}. \tag{3.51}$$

Nejprve vyřešíme homogenní diferenciální rovnici příslušnou k rovnici (3.51)

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + \left(1 - \frac{Z^2\, e^2}{L^2}\right)\ u\ = 0.$$

Řešení této rovnice budeme hledat ve tvaru

$$u = A\sin(\omega\phi)\ + B\cos(\omega\phi)$$

$$u_0 = \frac{1}{b}.$$

Z počáteční podmínky $\left.\frac{du}{d\phi}\right|_{\phi=0} = 0$ vypočteme, že $A = 0$, a proto $u = \frac{1}{b'}\cos(\omega\phi)$. Přitom

$$K\left(1 - \frac{Z^2\, e^4\, E}{L^2}\right) = \frac{Ze^2\, E}{L^2},$$

tudíž

$$K = \frac{Ze^2\, E}{L^2 - Ze^4}$$

a obecné řešení rovnice (3.51) je

$$u = \frac{1}{b'}\cos(\omega\phi)\ + \frac{Ze^2\, E}{L^2 - Ze^4}, \tag{3.52}$$

kde $\omega = \sqrt{1 - \frac{Z^2\, e^4}{L^2}}$. Pro velmi velká $L$ (tj. $1 \ll L$) můžeme rovnici (3.52) zjednodušit na tvar

$$u = \frac{1}{b'}\cos\phi + \frac{Ze^2\, E}{L^2}.$$

Asymptoty řešení splňují rovnici

$$u = 0 \iff \frac{1}{b'}\cos\phi + \frac{Ze^2\, E}{L^2} = 0.$$

Z této rovnice již můžeme vypočítat hledaný úhel $\Delta\phi$

$$\cos\phi = \frac{Zb'e^2\, E}{L^2}.$$

Pokud předpokládáme, že vzdálenost $b'$ je tak velká, že je ohybový úhel malý, můžeme řešení předešlé rovnice zapsat

$$\phi \sim \frac{Zb'e^2\,E}{L^2}.$$

a celkový úhel ohybu je

$$\Delta\phi_e = 2\phi = \frac{2Zb'e^2\,E}{L^2}.$$

Použijeme-li vztahy $E = \dfrac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}$ a $L^2 = \dfrac{b'\,m^2\,\beta^2}{1-\beta^2}$, kde $\beta$ je stejně jako v části a) rovno rychlosti částice, potom lze úhel $\Delta\phi_e$ vyjádřit vztahem

$$\Delta\phi_e = \frac{2Ze^2\sqrt{1-\beta^2}}{mb'\,\beta^2}. \tag{3.53}$$

Rovnice (3.46) a (3.53) se liší v důsledku rozdílu mezi tenzorovým charakterem gravitace a vektorovým charakterem elektromagnetického pole. Navíc se obě pole rozdílně lorentzovsky transformují, což právě vede k různé závislosti úhlů ohybu na rychlosti částic v případě, že rychlost těchto částic je téměř rovna rychlosti světla.

❑ ❑ ❑

**Úloha 10.**

Rozhlasový komentátor popisuje svůj radiální pád do Schwarzschildovy černé díry. Těsně předtím, než překročí Schwarzschildův poloměr, je jeho vysílací frekvence posunuta vlivem gravitačního pole s časovou závislostí $\exp\left(-\dfrac{t}{\text{konstanta}}\right)$, kde $t$ značí vlastní čas v nekonečnu. Z konstanty odhadněte hmotnost černé díry.

*Řešení:*

Podobné problémy se obvykle řeší ve „ven směřujících“ Eddington- Finkelsteinových souřadnicích. Nechť $r^*$ je definováno pomocí

$$\frac{dr^*}{dr} = \frac{1}{\left(1-\dfrac{2M}{r}\right)},$$

tedy

$$dr^* = dr + \frac{dr}{\dfrac{r}{2M}-1},$$

a

$$r^* = r + 2M\ln\left(\frac{r}{2m}\right) + A,$$

kde $A$ je integrační konstanta.

Nechť $u = t - r^*$ je zpožděná časová souřadnice. Potom

$$dt = du + \frac{dr}{\left(1-\dfrac{2M}{r}\right)}.$$

Schwarzschildova metrika v souřadnicích $r$, $u$ má tvar

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left[du^2+\right. \\ &+ 2\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\left[du+\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}dr\right]dr-\left.\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-2}dr^2\right]+ \\ &+ \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2+r^2\,d\Omega^2, \end{aligned}$$

kde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2$. Tuto rovnici metriky můžeme dále upravit na tvar

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)du^2 - 2\,dr du + r^2\,d\Omega^2. \tag{3.54}$$

Odtud vidíme, že vycházející fotony se pohybují po křivkách $u =$ konstanta. Rudý posuv vypočteme tak, že porovnáme čas, který uběhne mezi emisí a příjmem fotonů.

$$\frac{\lambda_\infty}{\lambda_{\rm em}} = \frac{(\Delta t)_\infty}{(\Delta\tau)_{\rm em}}.$$

Zároveň ale víme, že $\Delta u_\infty = \Delta t_\infty - \Delta r^*_\infty = \Delta t_\infty - \dfrac{\Delta r_\infty}{1-\dfrac{2M}{r_\infty}} = \Delta t$ (předpokládáme, že pozorovatel v nekonečnu je v klidu) a $(\Delta u)_{em} = (\Delta u)_\infty$. Proto můžeme psát

$$\frac{\lambda_\infty}{\lambda_{\rm em}} = \frac{(\Delta u)_\infty}{(\Delta\tau)_{\rm em}} = \frac{(\Delta u)_{\rm em}}{(\Delta\tau)_{\rm em}} = \left.\frac{du}{d\tau}\right|_{\rm em}.$$

Abychom mohli porovnávat časové údaje u pozorovatele v nekonečnu a u komentátora, který padá do černé díry, musíme vypočítat složku $u^u = \dfrac{du}{d\tau}$ komentátorovy čtyřrychlosti $\boldsymbol{u}$ v závislosti na čase $t$.

Nechť $u_t = u_u = -\tilde{E}$. Matice metriky (3.54) je

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -\left(1-\dfrac{2M}{r}\right) & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a matice k ní inverzní je

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & \left(1-\dfrac{2M}{r}\right) \end{pmatrix}.$$

Souřadnice $\theta$ a $\phi$ se nemění, proto je nebudeme uvažovat.

Vyjdeme z rovnice $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} = -1$

$$u_u\, u^u + u_r\, u^r = -1. \tag{3.55}$$

Složky $u^u$ a $u^r$ vypočteme podle vztahů

$$\begin{aligned} u^u &= g^{uu}\, u_u + g^{ur}\, u_r = g^{ur}\, u_r, \\ u^r &= g^{ru}\, u_u + g^{rr}\, u_r, \end{aligned} \tag{3.56}$$

a tyto dosadíme do rovnice (3.55). Potom

$$-1 = g^{ur}\, u_r\, u_u + g^{ru}\, u_u\, u_r + g^{rr}\, u_r^2 = 2\tilde{E}\, u_r + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) u_r^2.$$

Řešením této kvadratické rovnice získáme dva kořeny, přičemž při jejich výpočtu budeme uvažovat pouze znaménko mínus, protože se komentátor pohybuje proti směru radiální souřadnicové osy. Tedy

$$u_r = \frac{-\tilde{E} - \sqrt{\tilde{E}^2 - 1 + \dfrac{2M}{r}}}{\left(1 - \dfrac{2M}{r}\right)}.$$

Tento vztah dosadíme do rovnic (3.56) a obdržíme

$$u^u = \frac{\tilde{E} + \sqrt{\tilde{E}^2 - 1 + \dfrac{2M}{r}}}{\left(1 - \dfrac{2M}{r}\right)} \tag{3.57}$$

$$u^r = -\sqrt{\tilde{E}^2 - 1 + \frac{2M}{r}}, \tag{3.58}$$

a tedy

$$\frac{dr}{du} = \frac{u^r}{u^u} = \frac{-\left(1 - \dfrac{2M}{r}\right)\sqrt{\tilde{E}^2 - 1 + \dfrac{2M}{r}}}{\tilde{E} + \sqrt{\tilde{E}^2 - 1 + \dfrac{2M}{r}}}.$$

Pro $r \to 2M$ lze přibližně psát

$$\frac{dr}{du} \sim -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right),$$

a proto

$$du \sim \frac{-2\, dr}{\dfrac{r}{2M} - 1}.$$

Integrováním posledního vztahu získáme

$$u = \int du \sim -4M\, \ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right) + C,$$

$C$ je integrační konstanta. Odtud plyne, že

$$-\frac{u}{4M} \sim \ln\left[\frac{r}{2M}\left(1-\frac{2M}{r}\right)\right] \sim \ln\left(1-\frac{2M}{r}\right),$$

a po odlogaritmování

$$\left(1-\frac{2M}{r}\right) = \exp\left(-\frac{u}{4M}\right).$$

Rovnici (3.57) můžeme pro $r \to 2M$ aproximovat

$$u^u = \frac{2\tilde{E}}{\exp\left(-\dfrac{u}{4M}\right)} = 2\tilde{E}\exp\left(\frac{u}{4M}\right) = K_1\exp\left(\frac{u}{4M}\right),$$

kde $K_1$ je konstanta.

Přitom ale pro pozorovatele v libovolně velké, ale pevně stanovené vzdálenosti $r$ platí, že $u = t + \text{konstanta}$. Proto

$$\frac{\lambda_\infty}{\lambda_{\text{em}}} = \left.\frac{du}{d\tau}\right|_{\text{em}} = u^u|_{\text{em}} = K_1\exp\left(\frac{t+\text{konstanta}}{4M}\right) = K\ \exp\left(\frac{t}{4M}\right).$$

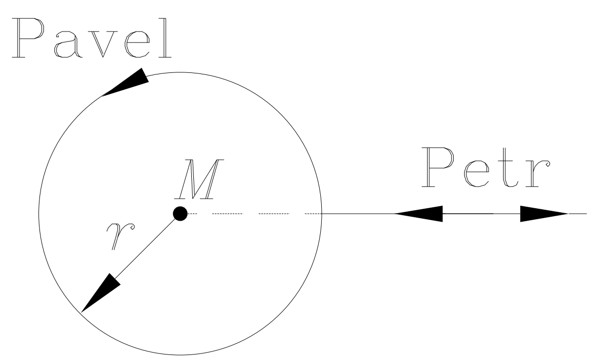
Tedy

$$\frac{\lambda_\infty}{\lambda_{\text{em}}} \sim \exp\left(\frac{t}{4M}\right).$$

❑ ❑ ❑

**Úloha 11.**

Nechť Pavel obíhá v raketě po kruhové orbitě kolem neutronové hvězdy ve vzdálenosti $r = 4M$. Jeho kamarád Petr byl vyslán z neutronové hvězdy radiálním směrem v raketě, jejíž počáteční rychlost je menší než úniková rychlost. Při odletu potká Pavla přesně v okamžiku, kdy protíná jeho orbitu, potom dosáhne maximální vzdálenosti a padá zpět. Přitom se znovu setká s Pavlem, právě když protíná jeho orbitu. Mezi těmito dvěma setkáními Pavel desetkrát obletěl kolem hvězdy. Oba kamarádi si při prvním setkání seřídili hodinky. O kolik se lišil jejich časové údaje, když se potkají podruhé?




Obr. 5: K úloze 11

*Řešení:*

Nechť Pavel obíhá v rovině $\theta = \frac{\pi}{2}$. Protože je jeho orbita kruhová, je $u^r = \frac{dr}{d\tau} = 0$. Nejprve napíšeme rovnici geodetické čáry pro souřadnici $r$

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} + \Gamma^r_{rr}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \Gamma^r_{\theta\theta}\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 + \Gamma^r_{\phi\phi}\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 + \Gamma^r_{tt}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0,$$

což lze s využitím počátečních podmínek přepsat ve tvaru

$$\Gamma^r_{\phi\phi}\left(u^\phi\right)^2 + \Gamma^r_{tt}\left(u^t\right)^2 = 0. \tag{3.59}$$

Než se Petr vrátí ze své cesty, Pavel mezitím oběhne celkový úhel

$$\Delta\phi = 10\,.\,2\pi = 20\pi.$$

Souřadnicový čas mezi jejich opětovným setkáním vypočteme pomocí úhlové rychlosti $\omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$. Z rovnice (3.59) vyplývá

$$\omega^2 = \left(\frac{u^\phi}{u^t}\right)^2 = -\frac{\Gamma^r_{tt}}{\Gamma^r_{\phi\phi}} = \frac{M}{r^3}. \tag{3.60}$$

Protože Pavel obíhá ve vzdálenosti $r = 4M$, je jeho úhlová rychlost

$$\omega = \frac{1}{8M}.$$

Potom

$$\Delta t = \frac{\Delta\phi}{\omega} = 160\,\pi M.$$

Z rovnice (3.60) vyjádříme $(u^\phi)^2$

$$(u^\phi)^2 = \frac{M}{r^3}(u^t)^2$$

a dosadíme jej do rovnice

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} = g_{tt}\,(u^t)^2 + g_{\phi\phi}\,(u^\phi)^2 = -1.$$

Tímto způsobem získáme rovnici

$$\left(g_{tt} + g_{\phi\phi}\,\frac{M}{r^3}\right)(u^t)^2 = -1,$$

ze které následně vypočteme $u^t$

$$u^t = \sqrt{\frac{-1}{g_{tt} + \frac{M}{r^3}\,g_{\phi\phi}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{3M}{r}}}.$$

Dosadíme-li do této rovnice $r = 4M$ pro Pavlovu orbitu, obdržíme hodnotu

$$u^t = 2.$$

To znamená, že Pavel naměří vlastní čas

$$\Delta\tau_{\rm Pavel} = \frac{\Delta t}{u^t} = \frac{1}{2}(160\pi M) = 80\pi M,$$
$$\Delta\tau_{\rm Pavel} \sim 252\,M.$$

K řešení Petrovy orbity použijeme rovnice, které popisují radiální pád (viz příklad 4). Aby se Petr dostal ve stejném čase zpět na stejné místo jako Pavel, musí se dostat ze vzdálenosti $R$ do $r = 4M$ za dobu $\frac{1}{2}\Delta t = 80\pi M$. Musíme proto najít odpovídající veličiny $R$, $\eta$, které jsou v souladu s danými podmínkami.

Petrův vlastní čas popisuje rovnice (3.11) z příkladu 4.

$$\Delta\tau_{\rm Petr} = 2\sqrt{\frac{R^3}{8M}}\;(\eta + \sin\eta), \tag{3.61}$$

kde dvojka vyjadřuje skutečnost, že musíme započítat kromě Petrovy cesty tam také jeho cestu zpět. Rovnice, podle nichž můžeme vypočítat $R$ a $\eta$, jsou rovnice (3.9 ) a (3.13) z řešení příkladu 4

$$\frac{t}{2M} = \ln\left|\frac{\sqrt{X-1} + \operatorname{tg}\frac{\eta}{2}}{\sqrt{X-1} - \operatorname{tg}\frac{\eta}{2}}\right| + \sqrt{X-1}\,\left[\eta + \frac{X}{2}\;(\eta + \sin\eta)\right], \tag{3.62}$$

$$r = \frac{R}{2}(1 + \cos\eta), \tag{3.63}$$

kde $X \equiv \dfrac{R}{2M}$. Z rovnice (3.63) po dosazení $r = 4M$ plyne

$$X(1 + \cos\eta) = 4$$

a z rovnice (3.62)

$$\frac{t}{2M} = 40\pi = \ln\left|\frac{\sqrt{X-1} + \operatorname{tg}\frac{\eta}{2}}{\sqrt{X-1} - \operatorname{tg}\frac{\eta}{2}}\right| + \sqrt{X-1}\,\left[\eta + \frac{X}{2}\;(\eta + \sin\eta)\right]. \tag{3.64}$$

Nyní použijme intuici: Petr cestuje značnou dobu pryč, zatímco Pavel obíhá po orbitě. Proto $X$ by mělo být dosti velké a tedy z rovnice (3.63) vypočteme

$$\eta = \arccos\left(\frac{4}{X} - 1\right) \sim \arccos(-1) = \pi$$

Logaritmus je funkce, jejíž hodnota se mění velmi pomalu, a proto v přibližném řešení rovnice (3.64) zanedbáme logaritmický člen. Potom

$$40\pi \sim \sqrt{X-1}\,(\pi + \pi X + \sin\pi) \sim \sqrt{X}\,\left(\pi + \frac{\pi X}{2}\right).$$

Odtud potom vypočteme

$$\sqrt{X^3} \sim 80$$

a tedy

$$X = 18,56.$$

Jestliže tento výsledek dosadíme do rovnice (3.63), obdržíme

$$\eta \sim 2,47\,\mathrm{rad}.$$

Vlastní čas, který naměří Petr, vypočteme z rovnice (3.61)

$$\Delta\tau_{\mathrm{Petr}} = 2\sqrt{\frac{8M^3X^3}{8M}}\,(\eta + \sin\eta) = 2M\,\sqrt{X^3}\,(\eta + \sin\eta).$$

Po dosazení hodnot $\sqrt{X^3} = 80,\ \eta = 2,47\,\mathrm{rad}$ získáme

$$\Delta\tau_{\mathrm{Petr}} = 494,85\,M.$$

Pavel naměří téměř poloviční vlastní čas než Petr. Je to způsobeno tím, že Pavel po celou dobu zůstává na relativistické orbitě v silném gravitačním poli. Oba tyto faktory „zpomalují“ chod Pavlových hodinek. Petrova rychlost je relativně malá, navíc tráví většinu času v slabším gravitačním poli.

❑ ❑ ❑

**Úloha 12.**

Najděte transformaci souřadnic, která převádí Schwarzschildovu metriku

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}\,dr^2 + r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2) \tag{3.65}$$

do tzv. *izotropních* souřadnic, kde

$$ds^2 = -e^{2\phi}\,dt^2 + e^{2\mu}\,(d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega^2). \tag{3.66}$$

Zaměřte se na Schwarzschildovo vakuové řešení (tj. vně od horizontu událostí zdroje gravitačního pole). Je oblast $A$ na povrchu plochy $\bar{r} = \mathrm{konstanta}, t = \mathrm{konstanta}$ definována rovnicí $A = 4\pi\bar{r}^2$? Sestrojte „embedding diagram“ pro prostorupodobnou hyperplochu $t = 0,\ 0 < \bar{r} < \infty$.

*Řešení:*Ve Schwarzschildových souřadnicích můžeme Schwarzschildovu metriku přepsat ve tvaru

$$ds^2 = -e^{2\phi}\,dt^2 + e^{2\Lambda}\,dr^2 + r^2\,d\Omega^2.$$

Porovnáme-li tuto rovnici Schwarzschildovy metriky a rovnici metriky v izotropních souřadnicích, vidíme, že musíme najít takovou transformaci souřadnic, která splňuje

$$r^2 = e^{2\mu}\,\bar{r}^2 \tag{3.67}$$

$$e^{2\Lambda}\,dr^2 = e^{2\mu}\,d\bar{r}^2. \tag{3.68}$$

Z rovnice (3.67) vyjádříme $e^{2\mu}$ a dosadíme jej do rovnice (3.68). Po úpravě obdržíme diferenciální rovnici pro transformaci $\bar{r} = \bar{r}(r)$

$$\frac{d\bar{r}}{\bar{r}} = e^{\Lambda}\,\frac{dr}{r}.$$

Po integraci lze psát

$$\ln \bar{r} = \int e^{\Lambda} \frac{dr}{r} + \ln C_1,$$

kde $C_1$ je integrační konstanta, a po odlogaritmování

$$\bar{r} = C_1 \exp\left(\int e^{\Lambda} \frac{dr}{r}\right). \tag{3.69}$$

Nejprve vypočteme integrál v exponentu na pravé straně rovnice (3.69). Z tvaru Schwarzschildovy metriky (3.65) vyplývá, že

$$e^{2\Lambda} = \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}$$

a tedy

$$e^{\Lambda} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}}.$$

Potom

$$\int \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} \frac{dr}{r} = \int \frac{dr}{r^2 - 2Mr + M^2 - M^2} = \int \frac{dr}{(r-M)^2 - M^2}.$$

Hodnotu tohoto integrálu najdeme v tabulce integrálů (viz např. [2], [12])

$$\begin{aligned}\int \frac{dr}{\sqrt{(r-M)^2 - M^2}} &= \ln \left| \frac{r - M + \sqrt{r^2 - 2Mr}}{M} \right| = \\ &= \ln\left(C \left| r - M + \sqrt{r^2 - 2Mr} \right|\right),\end{aligned}$$

kde $C$ je integrační konstanta. Potom

$$\bar{r} = \exp \ln \left[C \left| r - M + \sqrt{r^2 - 2Mr} \right|\right] = C \left| r - M + \sqrt{r^2 - 2Mr} \right|.$$

Konstantu $C$ vypočteme z počáteční podmínky $r \to \bar{r} \to \infty$, $M \ll r$,

$$\bar{r} = 2C\,\bar{r} \Longrightarrow C = \frac{1}{2}.$$

Proto

$$\bar{r} = \frac{1}{2}(r - M + \sqrt{r^2 - 2Mr}). \tag{3.70}$$

Z této rovnice vyjádříme $r$ a dosadíme jej do rovnice (3.67)

$$e^{2\mu} = \frac{r^2}{\bar{r}^2} = \frac{\left[\bar{r}\left(1 + \frac{M}{2\bar{r}}\right)^2\right]^2}{\bar{r}^2} = \left(1 + \frac{M}{2\bar{r}}\right)^4.$$

Plocha koule o poloměru $r =$ konstanta a $t =$ konstanta je

$$A = \int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (r^2 \sin\theta \, d\theta d\phi) = \bar{r}^2 \left(1 + \frac{M}{2\bar{r}}\right)^4 \int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta \, d\theta d\phi) = 4\pi \bar{r}^2 \left(1 + \frac{M}{2\bar{r}}\right)^4.$$

„Embedding diagram“ je vnořením Schwarzschildovy geometrie do trojrozměrného euklidovského prostoru. Při jeho konstrukci si všimněte:

- vzhledem k rovnici (3.70) je $r$ dvakrát větší než $\bar{r}$
- souřadnice $\bar{r}$ popisuje pouze tu oblast Schwarzschildovy geometrie, pro kterou platí $r \geq 2M$ (v rovnici (3.70) nabývá $\bar{r}$ komplexních hodnot pro $r < 2M$.)

„Embedding diagram" hyperplochy $r$ = konstanta, $t$ = konstanta vyžaduje takovou funkci $z(r)$, která vyhovuje rovnici

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2\, d\Omega^2 = \left[1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right] dr^2 + r^2\, d\Omega^2 = \frac{dr^2}{\left(1 - \dfrac{2M}{r}\right)} + r^2\, d\Omega^2. \quad (3.71)$$

Odtud plyne

$$\left(\frac{dz}{dr}\right)^2 = \frac{2M}{r - 2M},$$

a tedy

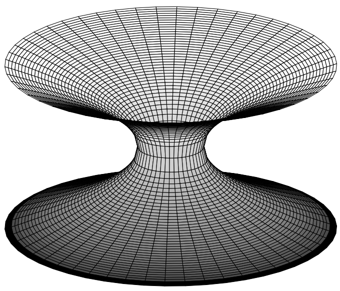
$$dz = \sqrt{\frac{2M}{r - 2M}}\, dr.$$

Potom

$$z = \int dz = \sqrt{2M} \int \frac{dr}{r - 2M} = \sqrt{8M(r - 2M)}$$

Nyní určíme polohu paraboly $z^2 = 8M(r - 2M)$. Tato parabola je symetrická podle osy $r$ a její vrchol leží v bodě $r = 2M$, což je podle rovnice (3.70) $\bar{r} = \dfrac{M}{2}$

„Embedding diagram" je potom paraboloid, který vznikne rotací paraboly kolem osy $z(r)$.



Obr. 6: K úloze 12

❑ ❑ ❑

**Úloha 13.**

Dokažte, že prostorupodobný řez $v$ = konstanta, $|v| > 1$, Schwarzschildovy geometrie v Kruskalových souřadnicích $u$, $v$ nelze vnořit do trojrozměrného euklidovského prostoru. Jaká je obecná podmínka pro derivaci $\dfrac{dv}{du}$, která umožňuje vnoření tohoto prostorupodobného řezu do trojrozměrného euklidovského prostoru?

*Řešení:*

V Kruskalových souřadnicích $u$, $v$ má Schwarzschildova metrika tvar (viz např. [8])

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r}\ \exp\left(-\frac{r}{2M}\right)(-dv^2 + du^2) + r^2\, d\Omega^2, \tag{3.72}$$

kde

$$\left(\frac{r}{2M} - 1\right)\ \exp\left(\frac{r}{2M}\right) = u^2 - v^2. \tag{3.73}$$

Nechť $\theta = \frac{\pi}{2}$ a $v =$ konstanta. Potom se rovnice (3.72) zjednoduší na tvar

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r}\ \exp\left(-\frac{r}{2M}\right) du^2 + r^2\, d\Omega^2. \tag{3.74}$$

Jestliže porovnáme rovnici (3.74) s rovnicí (3.71) (která vyjadřuje podmínku pro vnoření plochy do trojrozměrného euklidovského prostoru) z příkladu 12, obdržíme rovnici

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r}\ \exp\left(-\frac{r}{2M}\right) du^2 + r^2\, d\Omega^2 = \left[1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right] dr^2 + r^2\, d\Omega^2, \tag{3.75}$$

ze které vyplývá, že

$$\frac{32M^3}{r}\ \exp\left(-\frac{r}{2M}\right)\left(\frac{du}{dr}\right)^2 = \left[1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right].$$

Derivaci $\frac{du}{dr}$ vypočteme z rovnice (3.73)

$$u = \left[v^2 + \left(\frac{r}{2M} - 1\right)\ \exp\left(\frac{r}{2M}\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{du}{dr} = \frac{r}{8M^2}\left[v^2 + \left(\frac{r}{2M} - 1\right)\ \exp\left(\frac{r}{2M}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{r}{2M}\right)$$

a dosadíme do rovnice (3.75), z níž po úpravě dospějeme ke vztahu

$$1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2 = \frac{r}{2M}\left[v^2 + \left(\frac{r}{2M} - 1\right)\ \exp\left(\frac{r}{2M}\right)\right]^{-1} \exp\left(\frac{r}{2M}\right).$$

Abychom mohli sestrojit „embedding diagram“, musí být $z$ *reálná* funkce, tedy musí platit podmínka

$$\frac{r}{2M}\left[v^2 + \left(\frac{r}{2M} - 1\right)\ \exp\left(\frac{r}{2M}\right)\right]^{-1} \exp\left(\frac{r}{2M}\right) \geq 1,$$

kterou můžeme upravit na tvar

$$\exp\left(\frac{r}{2M}\right) \geq v^2.$$

Odtud potom vyplývá, že

$$\frac{r}{4M} \geq \ln v.$$

Protože předpokládáme, že $|v| > 1$, pak musí existovat minimální hodnota $r_{\min}$, v níž plochu nelze vnořit do trojrozměrného euklidovského prostoru.

Z geometrického hlediska lze podmínku pro vnoření plochy zapsat ve tvaru

$$\frac{d(\text{odvod kružnice})}{d(\text{vlastní poloměr})} = \frac{2\pi r}{l} \leq 2\pi,$$

a tedy

$$r \leq l.$$

Nyní vypočteme, za jakých obecných podmínek je možné vnořit plochu v trojrozměrném euklidovském prostoru. Nechť je řez popsán rovnicí

$$v = v(u).$$

Potom můžeme přepsat rovnici (3.72) ve tvaru

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} \exp\left(-\frac{r}{2M}\right) \left[1 - \left(\frac{dv}{du}\right)^2\right] du^2 + r^2\, d\Omega^2, \tag{3.76}$$

Z rovnice (3.73) vyjádříme $du$

$$2\left(u - v\,\frac{dv}{du}\right) du = \frac{r}{4M^2} \exp\left(\frac{r}{2M}\right) dr,$$

a odtud

$$du = \frac{r}{8M^2} \frac{\exp\left(\frac{r}{2M}\right)}{u - v\,\frac{dv}{du}}\, dr.$$

Tento vztah dosadíme do rovnice (3.76)

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{32M^3}{r} \left[1 - \left(\frac{dv}{du}\right)^2\right] \left[\frac{r}{8M^2} \frac{\exp\left(\frac{r}{2M}\right)}{u - v\,\frac{dv}{du}}\right]^2 \exp\left(-\frac{r}{2M}\right) dr^2 + \\ &+ r^2\, d\Omega^2. \end{aligned} \tag{3.77}$$

Abychom mohli sestrojit „embedding diagram“, $z$ opět musí být reálná funkce, a tedy musí platit podmínka

$$\frac{32M^3}{r} \left[1 - \left(\frac{dv}{du}\right)^2\right] \left[\frac{r}{8M^2} \frac{\exp\left(\frac{r}{2M}\right)}{u - v\,\frac{dv}{du}}\right]^2 \exp\left(-\frac{r}{2M}\right) \geq 1,$$

kterou můžeme upravit na konečný tvar

$$\frac{r}{2M} \left[1 - \left(\frac{dv}{du}\right)^2\right] \exp\left(\frac{r}{2M}\right) \geq \left(u - v\,\frac{dv}{du}\right)$$

pro každé $r$.

❑ ❑ ❑

**Úloha 14.**

Dokažte, že metrika

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{4}{9}\left[\frac{9M}{2(r-t)}\right]^{\frac{2}{3}} dr^2 + \left[\frac{9M}{2}(r-t)^2\right]^{\frac{2}{3}} d\Omega^2,$$

která je zdánlivě nestacionární, protože složky metrického tenzoru závisí na čase, je statická. Ukažte, že se v podstatě jedná o Schwarzschildovu metriku.

*Řešení:*

Abychom se vyhnuli nedorozumění, formálně přepíšeme rovnici metriky v proměnných $z$, $w$ $(r \to z\ ,\ t \to w)$

$$ds^2 = -dw^2 + \frac{4}{9}\left[\frac{9M}{2(z-w)}\right]^{\frac{2}{3}} dz^2 + \left[\frac{9M}{2}(z-w)^2\right]^{\frac{2}{3}} d\Omega^2. \tag{3.78}$$

Máme dokázat, rovnice (3.78) je rovnicí Schwarzschildovy metriky. V rovnici Schwarzschildovy metriky

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \dfrac{2M}{r}\right)} dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right) \tag{3.79}$$

je u $d\Omega^2$ koeficient $r^2$.

Zaveďme proto novou souřadnici $r$ vztahem

$$r = \left[\frac{9M}{2}(z-w)^2\right]^{\frac{1}{3}}. \tag{3.80}$$

Z rovnice (3.80) vyjádříme $w$ a vypočteme $dw$

$$w = z - \sqrt{\frac{2r^3}{9M}} \tag{3.81}$$

$$dw = dz - \sqrt{\frac{2r}{M}}. \tag{3.82}$$

Vztahy (3.80), (3.81) a (3.82) dosadíme do rovnice (3.78), kterou lze po úpravě zapsat ve tvaru

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dz^2 + 2\sqrt{\frac{r}{2M}}\, dz dr - \frac{r}{2M}\, dr^2 + r^2\, d\Omega^2. \tag{3.83}$$

Nyní se pokusíme tuto rovnici metriky diagonalizovat. Zavedeme novou souřadnici $t$ a funkci $F(r)$ pomocí vztahu

$$z = t + F(r). \tag{3.84}$$

Odtud potom

$$dz = dt + F'(r)\, dr \tag{3.85}$$

a oba tyto vztahy dosadíme do rovnice (3.83). Potom

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\,[dt + F'(r)\,dr]^2 + 2\sqrt{\frac{r}{2M}}\,[dt + F'(r)\,dr] - \frac{r}{2M}\,dr^2 + r^2\,d\Omega^2.$$

Tuto rovnici můžeme dále upravit na tvar

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\,dt^2 + 2\left[-\left(1 - \frac{2M}{r}\right)F'(r) +\right. \\ &+ \left.\sqrt{\frac{r}{2M}}\right]\,drdt + \left[F'(r)\left[-\left(1 - \frac{2M}{r}\right)F'(r) +\right.\right. \\ &+ \left.\left. 2\sqrt{\frac{r}{2M}}\right] - \frac{r}{2M}\right]\,dr^2 + r^2\,d\Omega. \end{aligned} \tag{3.86}$$

Aby byla metrika diagonální, musí být koeficient u smíšeného členu $drdt$ roven nule. To znamená, že

$$2\left[-\left(1 - \frac{2M}{r}\right)F'(r) + \sqrt{\frac{r}{2M}}\right]\,drdt = 0$$

a tedy

$$F'(r) = \frac{\sqrt{\frac{r}{2M}}}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}. \tag{3.87}$$

Jestliže tento vztah dosadíme do rovnice (3.86), potom po úpravě můžeme psát

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\,dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} + r^2\,d\Omega^2,$$

což je obvyklý tvar Schwarzschildovy metriky (v křivočarých souřadnicích), která popisuje statický prostoročas.

*Poznámka*: Původní souřadnice $z$, $w$ v rovnici (3.78) se nazývají Lemaitrovy souřadnice. Jejich časová souřadnice $w$ značí vlastní čas pozorovatele, který volně padá v radiálním směru. Přitom každý takový pozorovatel se pohybuje podél křivky $z =$ konstanta.

❑ ❑ ❑

**Úloha 15.**

Dokažte, že všichni pozorovatelé z příkladu 14, pro něž platí $\Delta z = 0$, volně padají v radiálním směru a všichni mají nulovou energii (tzn., že padají z nekonečna s nulovou počáteční rychlostí).

*Řešení:*

Souřadnicově stacionární pozorovatel, pro něhož platí $\Delta z = 0$, se podle rovnice (3.84) pohybuje podél křivky $z =$ konstanta[8]

Z rovnice (3.85) v příkladu 14 vyplývá

$$0 = dz = dt + F'(r)\, dr.$$

Odtud potom

$$dt = -F'(r)\, dr = -\frac{\sqrt{\dfrac{r}{2M}}}{\left(1 - \dfrac{2M}{r}\right)}\, dr$$

a po úpravě

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{\left(1 - \dfrac{2M}{r}\right)^2}{\dfrac{r}{2M}} = \frac{2M}{r}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2. \tag{3.88}$$

Srovnáme-li rovnici (3.88) s rovnicí (3.5) z příkladu 3, vidíme, že při volbě $u_0 = 1$ (to je případ částice, která padá volný pádem z nekonečna) se obě rovnice shodují. Tedy všichni pozorovatelé za daných podmínek volně padají a jejich energie na jednotku klidové hmotnosti je v nekonečnu přesně rovna 1 ( viz příklad 4 b) ).

❑ ❑ ❑

---

[8] Z rovnice (3.87)plyne, že

$$F(r) = \left(2M + \frac{r}{3}\right)\sqrt{\frac{r}{M}} - 4M \arctan\sqrt{\frac{r}{2M}},$$

kde $r$ a $M$ jsou konstanty

# Kapitola 4

# Gravitační čočky

**Úloha 1.**

Na základě modelu tzv. logaritmické čočky (tj. čočky, jejíž tloušťka závisí na logaritmu vzdálenosti od středu čočky ) studujte pomocí Fermatova principu vlastnosti gravitačních čoček.

*Řešení:*

Při zobrazení gravitační čočkou jde o zobrazení velmi vzdálených objektů (například kvazarů, galaxií, ...) velmi hmotnými objekty. Gravitační pole obklopující tento objekt (galaxii, černou díru), může vytvořit jeden nebo více obrazů zdroje světla.

Fermatův princip říká (viz příklad 12), že světelné paprsky se mezi dvěma pevně zvolenými body (pozorovatel, żdroj světla) podél časově extrémní dráhy, tj. dráhy, pro niž platí:

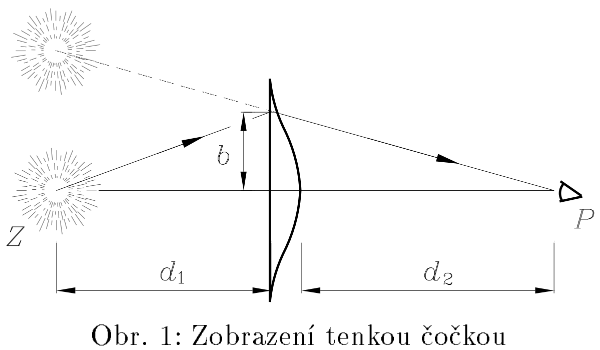
$$\delta \int dt = 0 \tag{4.1}$$

Nechť se paprsek šíří prostředím s indexem lomu $n(r)$. Jeho rychlost potom je $v = \dfrac{1}{n}$ a rovnici (4.1) můžeme zapsat ve tvaru

$$\delta \int n \, ds = 0 \tag{4.2}$$

To znamená, že optická dráha je extrémní a světelné paprsky se ve vakuu šíří přímočaře.

Předpokládejme, že mezi zdrojem světla (Z) a pozorovatelem (P) je umístěn gravitující objekt, který tvarem připomíná tenkou čočku. Nechť paprsek prochází čočkou ve




Obr. 1: Zobrazení tenkou čočkou

vzdálenosti $b$ od jejího středu. Splňuje-li tato dráha podmínku (4.2), potom je stacionární a pozorovatel uvidí obraz zdroje (Z') ve směru naznačeném na obrázku 1.

Označme $t_G$ tzv. geometrický čas, tj. čas, který paprsek potřebuje k průchodu po této dráze. Potom

$$t_G = \sqrt{d_1^2 + b^2} + \sqrt{d_2^2 + b^2},$$

což lze pro paraxiální paprsky aproximovat (tj. pro $b \ll d_1$, $b \ll d_2$). Pak

$$t_G \sim d_1 + d_2 + \frac{b^2}{2D}, \tag{4.3}$$

kde $D = \dfrac{d_1\, d_2}{d_1 + d_2}$.

Paprsek ovšem vyžaduje určitý časový interval na samotný průchod čočkou. Tento čas označíme $t_l$ a vypočteme podle vztahu

$$t_l = (n-1)\, \Delta s(b), \tag{4.4}$$

kde $n$ je index lomu čočky a $\Delta s(b)$ její tloušťka ve vzdálenosti $b$ od středu.

Celá dráha je potom extremální, jestliže platí:

$$\frac{dt_C}{db} = \frac{d(t_G + t_l)}{db} = \left[\frac{b}{D} + (n-1)\,\frac{d\Delta s(b)}{db}\right] = 0, \tag{4.5}$$

což můžeme přepsat ve tvaru

$$\frac{d\Delta s(b)}{db} = -\frac{b}{(n-1)\, D} \tag{4.6}$$

Tato rovnice je splněna pro všechny paraxiální paprsky, vyhovuje-li průřez čočky vztahu

$$\Delta s(b) = \Delta s(0) - \frac{b^2}{2(n-1)D} \tag{4.7}$$

Potom všechny paraxiální paprsky vycházející ze zdroje Z ve vzdálenosti $d_1$ od čočky konvergují ve vzdálenosti $d_2$ a poměr $D = \dfrac{d_1\, d_2}{d_1 + d_2}$ určuje ohniskovou vzdálenost čočky.

Uvažujme nyní čočku, jejíž vzhled je odlišný od tvaru tenké čočky. Potom ne všechny dráhy mezi body ve vzdálenosti $d_1$ a $d_2$ jsou stacionární a v důsledku Fermatova principu ne všechny paprsky vycházející ze zdroje Z dosáhnou pozorovatele P, který pak uvidí deformovaný obraz Z' zdroje Z.

Předpokládejme, že gravitující objekt mezi pozorovatelem a zdrojem má tvar logaritmické čočky s konstantním indexem lomu $n$, jejíž tloušťka závisí na logaritmu vzdálenosti $b$ podle vztahu

$$\Delta s(b) = k_1' \, \ln \frac{k_2}{b},$$

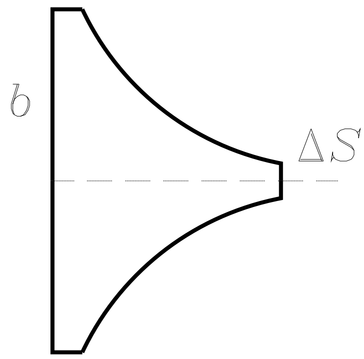
kde $k_1'$, $k_2$ jsou konstanty charakterizující čočku. Předpokládejme, že rozměry čočky jsou omezené, tj. $0 < b_{\min} \le b \le b_{\max}$ (viz obrázek 2)

Pro tuto čočku platí:

$$\frac{d\Delta s}{db} = -\frac{k_1'}{b}$$

a po dosazení do rovnice (4.6) vidíme, že rovnost nastává pro

$$b = \sqrt{(n-1)k_1'\, D} = \sqrt{k_1\, D}, \tag{4.8}$$




Obr. 2: Logaritmická čočka

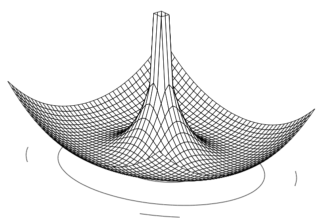
kde $k_1 = (n-1)k_{,1}$ . Leží-li střed čočky a na spojnici zdroje a pozorovatele, pak pozorovatel uvidí obraz zdroje ve tvaru kruhu kolem středu čočky s úhlovým poloměrem

$$\beta = \frac{b}{d_2} = \sqrt{k_1 \frac{d_1}{d_2\,(d_1+d_2)}}. \tag{4.9}$$

Paprsky, které tvoří tento obraz, odpovídají časově minimálním dráhám, protože :

- pro velká $b$ převládá zvětšení geometrického času,
- pro malá $b$ převládá časové zpoždění vlivem čočky.

Na obrázcích 3 a 4 je znázorněn celkový čas $t_C$ v závislosti na vzdálenosti $b$ a na úhlu $\theta$.

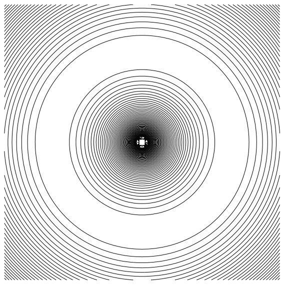


Obr. 3: Celkový čas $t_C$.

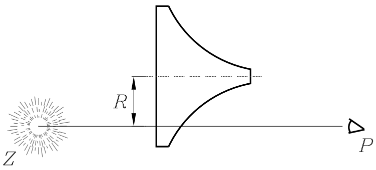
Nyní předpokládejme, že střed stejné logaritmické čočky leží v kolmé vzdálenosti $R$ od přímky PZ (viz obr. 5).

Potom geometrický čas pro paraxiální paprsky vypočteme podle vztahu

$$\begin{aligned} t_G &= \left(\sqrt{d_1^2+b^2}+\sqrt{d_2^2+b^2}\right) \sim \left(d_1+d_2+\frac{l^2}{2D}\right) = \\ &= \left[d_1+d_2+\frac{1}{2D}\left(b^2+R^2-2bR\cos\theta\right)\right], \end{aligned} \tag{4.10}$$



Obr. 4: „Vrstevnice“ pro předcházející graf - místa se stejným časem $t_C$.




Obr. 5: Spojnice zdroj-pozorovatel neprochází středem čočky.

kde $\theta$ je úhel mezi směry $R$ a $b$ (viz obr. 6). Čas potřebný k průchodu čočkou se nezmění:

$$t_l = (n-1)\Delta s(b) = (n-1)\, k_1' \ln \frac{k_2}{b} = k_1 \ln \frac{k_2}{b}, \tag{4.11}$$

tedy celkový čas je potom

$$t_C = t_G + t_l = \left[ d_1 + d_2 + \frac{1}{2D} \left( b^2 + R^2 - 2bR\cos\theta \right) \right] + k_1 \ln \frac{k_2}{b}, \tag{4.12}$$

a je nakreslen na obrázcích 7 a 8.

Prstencové minimum je nahrazeno bodovým minimem, které neleží na spojnici PZ, a zároveň existuje sedlový bod na opačné straně píku, který odpovídá lokálnímu minimu na obr. 7. Oba body přitom můžeme nalézt analyticky, položíme-li $\dfrac{\partial t_C}{\partial b} = 0$ a $\dfrac{\partial t_C}{\partial \theta} = 0$. Potom

$$\frac{\partial t_C}{\partial \theta} = \frac{Rb}{D} \sin\theta = 0, \tag{4.13}$$

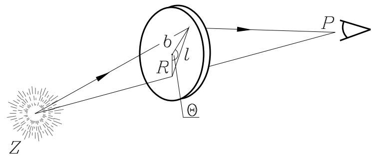
a rovnost je splněna pro $\theta = 0$ nebo pro $\theta = \pi$, dále

$$\frac{\partial t_C}{\partial b} = \frac{1}{D}(b - r\cos\theta) - \frac{k_1}{b} = \frac{1}{D}(b \mp R) - \frac{k_1}{b} = 0, \tag{4.14}$$

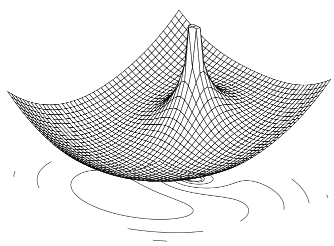
kde znaménko mínus odpovídá minimu pro $\theta = 0$ a znaménko plus sedlovému bodu $\theta = \pi$. Po vyřešení kvadratické rovnice (4.14) lze psát:

- minimum $t_C$ je v bodě

$$\theta = 0, \qquad b = \frac{R}{2} \left[ \sqrt{1 + \frac{4k_1 D}{R^2}} + 1 \right], \tag{4.15}$$




Obr. 6: Průchod světelného paprsku logaritmickou čočkou.



Obr. 7: Celkový čas $t_C$.

- sedlový bod $t_C$ je v bodě

$$\theta = \pi, \qquad b = \frac{R}{2}\left[\sqrt{1+\frac{4k_1 D}{R^2}} - 1\right]. \tag{4.16}$$

Čočka však může vyrobit také třetí obraz, který odpovídá maximální časové dráze přes střed čočky.

Nyní ověříme, nakolik je tento model gravitační čočky reálný.

Čas potřebný k tomu, aby paprsek prošel dráhu mezi dvěma pevně stanovenými body v gravitačním poli kulově symetrického tělesa o hmotnosti $M$ je

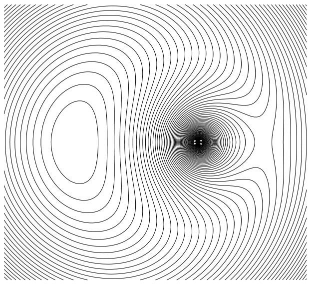
$$t = \int ds + \int \frac{2M}{r}\, ds \tag{4.17}$$

(je to součet „rovinného“ geometrického času a času potřebného na průchod čočkou; viz [9]).

Předpokládejme, že střed zobrazujícího objektu o hmotnosti $M$ (hvězdy, galaxie, ...) leží přesně na přímce PZ. Potom geometrický čas je stejný jako pro tenkou čočku (viz rovnice (4.3)). Druhý člen, gravitační příspěvek lze vypočítat úvahou, že se paprsky pohybují po přímkách, protože jejich odchylka je velmi malá. Nechť paprsek kolmo protíná rovinu obsahující zdroj ve vzdálenosti $b \ll d_1$, $b \ll d_2$ od zdroje. Pak

$$\begin{aligned} \int \frac{2M}{r}\, ds &= \int_{-d_1}^{d_1} \frac{2M}{\sqrt{x^2+b^2}}\, dx = 2M \ln\left[\frac{1}{b^2}(d_1+\sqrt{d_1^2+b^2})(d_2+\right. \\ &+ \left.\sqrt{d_2^2+b^2})\right] \sim 2M \ln\frac{4d_1\, d_2}{b^2} = 4M \ln\frac{2\sqrt{d_1\, d_2}}{b} \end{aligned} \tag{4.18}$$

Vidíme, že rovnice (4.18) přesně odpovídá rovnici (4.11), která popisuje čas potřebný pro průchod paprsku logaritmickou čočkou pro $k_1 = 4M$ a $k_2 = 2\sqrt{d_1\, d_2}$, a proto můžeme



Obr. 8: „Vrstevnice“ pro předcházející graf - místa se stejným časem $t_C$.

opravdu použít výsledky, které jsme vypočetli pro logaritmickou čočku k nalezení obrazů vytvořených gravitační čočkou. V tomto případě pozorovatel uvidí prstenec o úhlovém průměru

$$\beta = \sqrt{\frac{4Md_1}{d_2\,(d_1+d_2)}}$$

a úhel ohybu $\alpha$ (viz obr. 1) splňuje rovnici

$$\alpha = \beta' + \beta = b\left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}\right) = \frac{b}{D}, \tag{4.19}$$

kde $D = \dfrac{d_1\,d_2}{d_1+d_2}$. Z rovnice (4.8) plyne

$$b = \sqrt{k_1\,D} = \sqrt{4MD}$$

a odtud $D = \dfrac{b^2}{4M}$ a po dosazení do rovnice (4.19) získáme

$$\alpha = \frac{4M}{b}$$

*Poznámka*: Všimněte si, že jsme ke stejnému výsledku dospěli v příkladě 9, položíme-li v rovnici (3.46) $\beta = 1$).

Jestliže zobrazující objekt leží ve vzdálenosti $R$ od přímky PZ (viz obr. 5), pak pozorovatel uvidí dva obrazy zdroje. První z nich odpovídá časově minimální dráze a leží v bodě

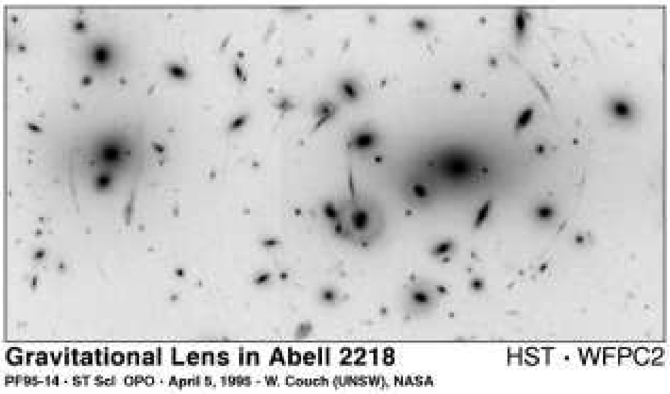
$$\theta = 0, \qquad b = \frac{R}{2}\left[\sqrt{1+\frac{16MD}{R^2}} + 1\right], \tag{4.20}$$

druhý odpovídá sedlové dráze a leží v bodě

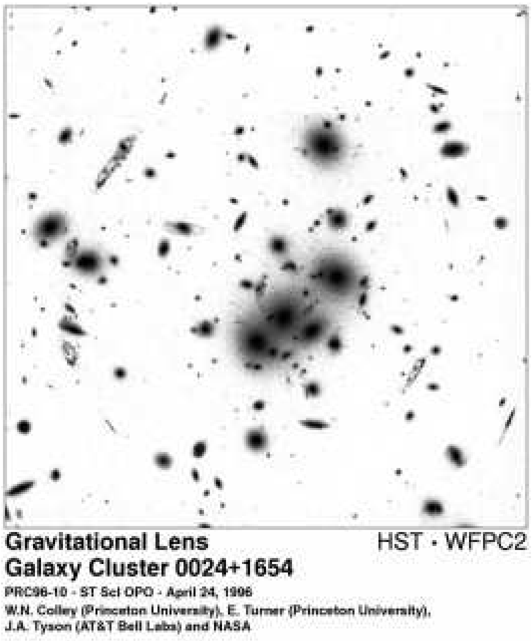
$$\theta = \pi, \qquad b = \frac{R}{2}\left[\sqrt{1+\frac{16MD}{R^2}} - 1\right]. \tag{4.21}$$

Pokud je zobrazující hmota dostatečně rozptýlená tak, aby byla „průhledná“ (může nastat v případě, že jde o galaxie, kupy galaxií,...), pak pozorovatel uvidí ještě třetí obraz poblíž středu čočky.

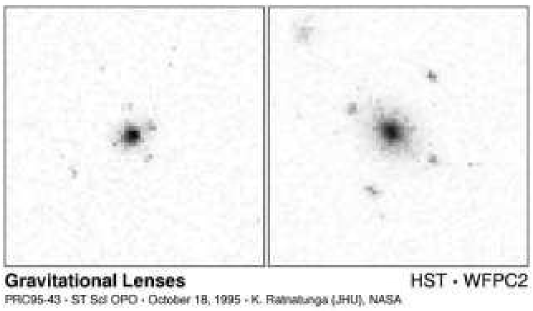
Nyní uvedeme snímky reálných gravitačních čoček tak, jak je zachytil Hubbleův vesmírný dalekohled. Tyto snímky jsou volně přístupné na Internetu na adrese http://www.stci.edu




Obr. 9: Tento snímek je velkolepým příkladem gravitační čočky. Díky vysokému rozlišení Hubbleova vesmírného dalekohledu zde můžeme pozorovat četné tenké oblouky, což jsou vlastně deformované obrazy vzdálených galaxií. (odhadem jsou tyto galaxie pětkrát až desetkrát dále než gravitující objekt). Tyto oblouky jsou ve skutečnosti až padesátkrát menší než nejmenší objekty pozorovatelné pozemskými dalekohledy.




Obr. 10: Další snímek zobrazuje kupu galaxií označenou $0024 + 1654$ (poblíž středu fotografie), která se nachází v souhvězdí Ryb ve vzdálenosti přibližně $5.10^9$ světelných let. Tato kupa svým gravitačním polem vytváří pět oddělených obrazů: první z nich je poblíž středu fotografie, další jsou na pozicích, které na hodinovém ciferníku odpovídají 2, 6, 7 a 8 hodinám. Odhaduje se, že původní galaxie jsou ve vzdálenosti dvakrát větší než gravitující těleso a že některé jsou v příčném řezu menší než 300 světelných let.




Obr. 11: Na této fotografii je zachycena nová třída gravitačních čoček, která zobrazuje vzdálené objekty ve tvaru „kříže“ (tj. všechny čtyři obrazy jsou umístěny symetricky kolem jasnější eliptické galaxie, která svým gravitačním polem tyto obrazy vytváří.)

# Literatura


[1] Barrow, J. D.: *Teorie všeho.* 1. vydání, Mladá fronta, Praha 1996.

[2] Bartsch, H. J.: *Matematické vzorce.* 1. vydání, SNTL, Praha 1983.

[3] Havel, V.: *Základy teorie relativity.* 1. vydání, PF, Plzeň 1979.

[4] Havelka, B., Tillich, J.: *Teorie relativity.* 1. vydání, SNTL, Praha 1964.

[5] Horský, J., Bartoň, S.: *Relativistický vesmír.* 1. vydání, Ando publishing, Brno 1997.

[6] Lightman, A. P., Press, W. H, Price, R. H.,Teukolsky, S. A.: *Problem book in relativity and gravitation.* First edition, Princeton University Press, Princeton, New Jersey 1975.

[7] Macháček, M.: Encyklopedie fyziky. 1. vydání, Mladá fronta, Praha 1995.

[8] Misner, Ch. W., Thorne, K. S., Wheeler, J. A.: *Gravitaion.* First edition, Freeman and Comp., San Francisco 1973.

[9] Nandor, M. J., Helliwell, T. M.:*Am. J. Phys.* **64**(1996), 45-49.

[10] Noga, M. a kol.: Teória relativity. 1. vydání, UK, Bratislava 1987.

[11] Rachůnek, J.: *Algebra a teoretická aritmetika I..* 3. vydání, UP, Olomouc 1991.

[12] Rektorys, K. a kol: *Přehled užité matematiky I..* 5. vydání, SNTL, Praha 1988.

[13] Tillich, J.: *Klasická mechanika.* 3. vydání, UP, Olomouc 1984.

[14] Vybíral, B.: *Základy teorie relativity.* 1. vydání, Gaudeamus, Hradec Králové 1996.

# Obsah