Univerzita Palackého v Olomouci
Přírodovědecká fakulta
Katedra experimentální fyziky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Analýza vlastností souboru úloh vybraných ročníků Fyzikální olympiády

Vypracoval:	**Jana Michalcová**
Studijní program:	B1701 Fyzika
Studijní obor:	1701R003 Fyzika se zaměřením na vzdělávání
Forma studia:	Prezenční
Vedoucí diplomové práce:	Mgr. Lukáš Richterek, Ph.D.
Termín odevzdání práce:	květen 2020

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou bakalářskou práci vypracovala samostatně pod vedením Mgr. Lukáše Richterka, Ph.D. a že jsem použila zdrojů, které cituji a uvádím v seznamu použitých pramenů.

V Olomouci dne 2. června 2020

. . . .

Jana Michalcová

Poděkování

Na tomto místě bych ráda poděkovala panu Mgr. Lukášovi Richterkovi, Ph.D. za odborné vedení mé bakalářské práce, za cenné rady, ochotu a čas, který mi věnoval při tvorbě práce.

Bibliografická identifikace

Jméno a příjmení autora	Jana Michalcová
Název práce	Analýza vlastností souboru úloh vybraných ročníků Fyzikální olympiády
Typ práce	Bakalářská
Pracoviště	Katedra experimentální fyziky
Vedoucí práce	Mgr. Lukáš Richterek, Ph.D.
Rok obhajoby práce	2020
Abstrakt	Tato bakalářská práce se zabývá analýzou vlastností vybraných soutěžních ročníků Fyzikální olympiády. Cílem práce je vytvořit tematicky členěnou sbírku úloh pro krajská kola kategorie E a k jednotlivým úlohám vyhodnotit základní charakteristiky položkové analýzy a analýzy vlastností testu jako celku. Statistický rozbor je proveden na základě výsledků řešitelů kraje Olomouckého, Karlovarského a kraje Praha od 56. do 60. ročníků. Z výsledků analýzy vlastností jednotlivých úloh vyplývá, že většina úloh vyhovuje nastaveným kritériím. Výsledky analýzy vlastností ročníků jako celku ve většině případů poukazují na rozdílnost v bodovém hodnocení řešitelů. Závěrečná kapitola obsahuje sbírku úloh od 51. do 60. ročníku Fyzikální olympiády.
Klíčová slova	fyzikální úloha, obtížnost úlohy, citlivost úlohy, analýza nenormovaných odpovědí, reliabilita
Počet stran	77
Počet příloh	1
Jazyk	český

Bibliographical identification

Autor's first name and surname	Jana Michalcová
Title	Features Analysis of the Physics Olympiad Tasks of Selected Years
Type of thesis	Bachelor
Department	Department of Experimental Physics
Supervisor	Mgr. Lukáš Richterek, Ph.D.
The year of presentation	2020
Abstract	This bachelor thesis deals with the properties analysis of the selected competition editions of the Physics Olympiad. In the main, the goal of this thesis is to create the collection of tasks for regional rounds of the category E, which is divided thematically. Moreover, the further aim is both to evaluate basic characteristics of the item analysis for individual tasks and to analyze overall features of test. Basic statistical analysis is performed on the basis of the participants results in the following regions: Olomouc Region, Carlsbad Region and Prague Region from the 56th to the 60th Physics Olympiad. In most of the cases, the overall results of these editions show the differences in the point evaluation system of solvers. At the end, the finally chapter contains the collection of tasks from the 51th to the 60th edition of Physics Olympiad.
Keywords	physics problem, difficulty index, discrimination index, analysis of non-standard answers, reliability
Number of pages	77
Number of appendices	1
Language	czech

Obsah

Úvod

Cílem této práce bylo sestavit tematicky členěnou sbírku úloh krajských kol vybraných minulých ročníků Fyzikální olympiády kategorie E a k jednotlivým úlohám doplnit údaje o obtížnosti na základě statistického zpracování za alespoň dva kraje. Z pozice budoucího učitele fyziky je pro mě zpracování takového statistického rozboru velmi cennou zkušeností. Bakalářská práce je rozdělena na čtyři kapitoly.

První kapitola je zaměřena na metodiku řešení fyzikálních úloh. V rámci této kapitoly se nejprve zabýváme definicí pojmu fyzikální úloha a jejím významem ve výuce fyziky. Zvláště velkou pozornost věnujeme popisu jednotlivých kroků strategie řešení fyzikálních úloh. Na závěr této kapitoly si uvedeme pravidla správného zaokrouhlování výsledků. Jako hlavní zdroj informací týkající se této problematiky mi posloužila publikace (Svoboda, Kolářová, 2006).

V druhé kapitole jsou objasněny pojmy, které budeme potřebovat pro statistické zpracování vlastností soutěžních ročníků Fyzikální olympiády, k nimž přistupujeme jako ke speciálnímu případu didaktického testu, a tudíž budeme využívat také stejné charakteristiky. Kapitola je rozdělena na dvě hlavní části. První část se zabývá analýzou vlastností jednotlivých položek didaktického testu a její aplikací na úlohy s váženým skórováním. Druhá část je pak zaměřena na analýzu vlastností testu jako celku. Jako hlavní zdroj, ze kterého jsem čerpala informace, uvádím publikaci (Chráska, 2016).

Třetí kapitola se zabývá zpracováním výsledků získaných z analýzy vlastností soutěžních ročníků Fyzikální olympiády. Interpretace výsledků je provedena jak z pohledu analýzy vlastností jednotlivých soutěžních úloh, tak z pohledu analýzy vlastností soutěžních ročníků jako celku.

Čtvrtá část je již zaměřena na sbírku úloh Fyzikální olympiády krajských kol kategorie E. Úlohy jsou rozděleny podle tématu na základě obsahu sbírek Karla Bartušky (1997). U každé úlohy je také stanovena a vyznačena obtížnost. Autory jednotlivých úloh neuvádím. Všechny úlohy jsou k dispozici na webové stránce `fyzikalniolympiada.cz`.

Snažila jsem se, aby má práce byla napsána co nejsrozumitelněji. Z tohoto důvodu se v této práci věnujeme pouze těm tématům, která jsou nezbytně nutná pro pochopení dané problematiky. Zároveň dbáme na to, aby každý nově zavedený pojem byl popsán na konkrétním příkladu. Přílohou bakalářské práce je i excelovský soubor zahrnující všechny provedené statistiky.

Kapitola 1

Metodika řešení fyzikálních úloh

1.1 Fyzikální úloha

Nezbytnou součástí výuky fyziky jsou fyzikální úlohy. Dle E. Svobody a R. Kolářové (2006, s. 119) lze fyzikální úlohu definovat následovně: „*Fyzikální úloha je formulace požadavku na činnost žáka, kterou žák provádí za daných podmínek a předpokladů, a to poměrně složitou a bohatě strukturovanou aktivitou, která přispívá ke správnému chápání podstaty fyzikálních jevů a příčinných souvislostí mezi těmito jevy.*“

U fyzikální úlohy tak není důležité určit pouze výsledek, ale podstatný je i samotný proces, kterým se žáci k výsledku dopracovali. V procesu řešení úloh totiž získávají nové vědomosti a zároveň procvičují již dříve probrané učivo (Kalhous, 2000). Při řešení fyzikálních úloh tak mohou pochopit fyzikální veličiny a jednoduché vztahy mezi nimi, což vede k porozumění jednoduchých fyzikálních zákonů. Úlohy přispívají k rozvoji fyzikálního myšlení, a to formou osvojení, prohloubení, zpřesnění a rozšíření poznatků. Žák se učí překonávat překážky a ověřuje si úroveň svých znalostí (Svoboda, Kolářová, 2006). Úlohy by dále měly rozvíjet schopnost spolupracovat, dovednost pracovat s literaturou, vybrat vhodné metody práce a získávat osobní vlastnosti, především soustředěnost, cílevědomost, svědomitost a systematičnost (Kalhous, 2000).

Dle výzkumu (Meškan, 2013) je řešení úloh hned po opakování učiva druhou nejméně oblíbenou činností ve výuce fyziky. V takovém případě je pro učitele velmi obtížné dosáhnout u žáků tvůrčího procesu. Jelikož ale procvičování úloh zaujímá ve výuce fyziky nenahraditelnou roli, nelze se této aktivitě vyhnout. Vhodně zvoleným tématem, které je pro žáka zajímavé a aktuální, však můžeme docílit zájmu o probírané učivo a zároveň žáky aktivně zapojit do výuky. Další způsob, jak žáky motivovat, je začlenit do zadání úlohy humor (Meškan, 2013). Fyzikální úlohy tak plní vedle funkce poznávací také funkci výchovnou, kontrolní a motivační (Svoboda, Kolářová, 2006).

1.2 Strategie řešení fyzikálních úloh

Z rozboru fyzikálních úloh, které odevzdali řešitelé Fyzikální olympiády, se dospělo k závěru, že jednou z příčin neúspěchu byla chybějící nebo chybná strategie řešené úlohy (Volf, 1998). Mnohým řešitelům Fyzikální olympiády a žákům obecně by k dosažení lepších výsledků pomohlo řídit se určitým postupem. Jeden z dlouholetých zadavatelů a organizátorů Fyzikální olympiády, Ivo Volf, představil ve své publikaci (Volf, 1998, s. 7) vhodnou strategii skládající se z deseti kroků:

1. pozorné čtení textu,

2. zápis textu,
3. náčrt situace,
4. fyzikální analýza situace,
5. obecné řešení úlohy,
6. určení jednotky výsledku,
7. řešení pro dané jednotky,
8. konstrukce grafu,
9. diskuse řešení,
10. stanovení odpovědi.

Výše uvedené kroky jsou sestaveny tak, aby je bylo možné použít pro většinu úloh zadaných s konkrétními číselnými hodnotami. Je však důležité mít na paměti, že úlohy se od sebe mohou lišit a striktní dodržování zmíněných bodů by mohlo řešitele zdržovat při řešení. Kupříkladu u úloh, kde se využívá aritmetické řešení, není nezbytné konstruovat graf (Volf, 1998). V následujících podkapitolách jsou jednotlivé kroky popsány podrobněji.

1.2.1 Pozorné čtení textu

Aby žák správně vyřešil úlohu, musí porozumět všem pojmům, které jsou v úloze uvedeny, a zároveň pochopit problém (fyzikální situaci), který se po něm chce vyřešit. Proto je důležité, aby si žák pozorně přečetl zadání úlohy. V případě nejasností nejlépe několikrát za sebou. Řešitel by měl zvlášť velkou pozornost věnovat těm pojmům, jejichž znalost je nezbytná pro úspěšné vyřešení úlohy, tzv. *opěrným slovům*. Ta nemusí být vždy v textu slovně vyjádřená. V tom případě je nutné provést abstrakci dané situace (Svoboda, Kolářová, 2006). Pojem „opěrné slovo“ vysvětlíme na následujícím příkladu.

Příklad 1: *Petr při svém tréninku na hasiče vyšplhá každý den 30 metrů na laně. Jaký bude jeho výkon, vyleze-li tuhle vzdálenost za 2 minuty konstantní rychlostí? Petrova hmotnost je 70 kg.*

V tomto příkladu jsou opěrnými slovy: vzdálenost, čas vyšplhání, hmotnost lezce, konstantní rychlost a hledaný výkon. Těmto pojmům musí žák věnovat prvotní pozornost. Ostatní slova jsou sice pro popis situace nezbytná, pro řešení úlohy však podstatná nejsou (Svoboda, Kolářová, 2006).

1.2.2 Zápis zadání úlohy

Zápis úlohy navazuje na čtení textu. Všechny fyzikální veličiny se zapisují smluvenými značkami a vyjadřují se v základních jednotkách. Z formálního hlediska lze výše uvedenou úlohu zapsat dvěma způsoby (Svoboda, Kolářová, 2006).

a) Zadané veličiny se píšou vedle sebe do řádku a hledané veličiny jsou od nich odděleny středníkem.

   $s = 30$ m, $t = 2$ min, $m = 30$ kg, $v =$ konst.; $P = ?$

b) Zadané veličiny se píšou pod sebou a hledané veličiny jsou od nich odděleny vodorovnou čárou.

   $s = 30$ m

   $t = 2$ min $= 120$ s

   $m = 30$ kg

   $v =$ konst.

   $P = ?$

1.2.3 Náčrt situace

Při rozboru fyzikálních úloh byla zjištěna souvislost mezi krokem „obecné řešení úlohy“ a „náčrt situace“. Ve většině případů, kdy si žák situaci načrtl, došel také ke správnému řešení. Naopak při absenci tohoto kroku úloha nebyla často správně vyřešena. Pomocí jednoduchého obrázku či schématu si řešitel dokáže zadanou situaci lépe představit a zorientovat se v textu. V náčrtu mohou být vyjádřeny údaje, které jsou zadané nebo potřebné pro vyřešení úlohy (Volf, 1998). Nákres může být i součástí zadání úlohy. Jedná se zpravidla o situace, kdy je slovní popis příliš složitý nebo zdlouhavý a vedl by čtenáře ke ztrátě pozornosti. Dále se náčrt používá při vysvětlení fyzikálních situací, se kterými se žák do té doby nesetkal (Svoboda, Kolářová, 2006).

1.2.4 Fyzikální analýza situace

Fyzikální rozbor situace je nejobtížnější a nejdůležitější etapou strategie. U některých úloh může být způsob řešení zjevný hned na první pohled. U složitějších úloh však musí řešitel proniknout do problematiky a ujasnit si způsob, kterým bude dále pokračovat. Musí si v hlavě rozebrat, které veličiny a zákony bude při řešení používat. Dovednost analyzovat fyzikální úlohy vychází ze zkušeností. Pokud je ve výuce fyziky rozbor úloh pravidelnou součástí, je u žáků více pravděpodobné, že příště dokážou danou úlohu samostatně vyřešit. Vzhledem k úrovni vědomostí řešitele se počítá s idealizací fyzikálních dějů. Například při pohybu se zanedbává tření a u zdroje napětí se neuvažuje vnitřní odpor (Svoboda, Kolářová, 2006).

Při rozboru úlohy se doporučuje, aby si žák kladl následující otázky: Jakou fyzikální situací se úloha zabývá? Jaký fyzikální děj probíhá a za jakých podmínek? Jaké veličiny jsou v úloze zadané a které hledáme? Jaké vztahy jsou mezi zadanými a hledanými veličinami? Jaké zákony lze použít? Jakým způsobem lze pomocí vztahů určit hledané veličiny (Bartuška, 1997)?

1.2.5 Obecné řešení úlohy

Při obecném řešení se hledá vztah mezi zadanými a hledanými veličinami. Na jedné straně rovnice se nachází hledaná veličina a na straně druhé jsou vyjádřeny známé veličiny a konstanty. Všechny fyzikální úlohy se řeší nejprve obecně, aby se dospělo ke zjednodušení tvaru a některé veličiny se mohly pokrátit. Pomocí obecného řešení si také žák procvičuje závislosti mezi veličinami v různých tvarech. Výhodou je i výsledný výpočet se zadanými hodnotami, jelikož se vylučuje možnost provedení numerické chyby v dílčích operacích (Svoboda, Kolářová, 2006).

1.2.6 Určení jednotky výsledku

Určení jednotky hledané veličiny slouží ke kontrole správnosti obecného řešení. Pokud se řešiteli nepodaří najít odpovídající jednotku výsledku, znamená to, že vycházel z chybného základního vztahu nebo že provedl chybu v průběhu algebraických operací. Z tohoto důvodu se tato etapa označuje jako „rozměrová zkouška“. Jednotku výsledku určíme tak, že nejprve zapíšeme zadané veličiny a konstanty pomocí jednotek v základním tvaru. Následně výsledek srovnáme s jednotkou, která náleží příslušné veličině v soustavě SI (Volf, 1998). Jak vypadá zápis rozměrové zkoušky, je znázorněno na příkladu odporu vodiče. Pro obecný vztah odporu vodiče platí $R = \rho \cdot \frac{l}{S}$. Rozměrová zkouška pak bude vypadat následovně:

$$R = \Omega \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{m}^{-2} = \Omega \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{m}^{-2} = \Omega.$$

Výsledek rozměrové zkoušky potvrdil jednotku odporu, kterou je jeden ohm. Na tomto příkladu si žák ověřil, že délka vodiče se nachází v čitateli a průřez vodiče ve jmenovateli, a ne naopak. Veličiny s jednotkou jedna se nazývají bezrozměrné veličiny. U některých bezrozměrných veličin se jednotka 1 nahrazuje specifickými názvy. Například pro rovinný úhel se používá název radián (rad) (Svoboda, Kolářová, 2006).

1.2.7 Výpočet s danými hodnotami

Po získání obecného výsledku následuje číselný výpočet. Toho řešitel dosáhne tak, že do obecného vztahu dosadí číselné hodnoty daných veličin a následně matematicky vyjádří konečný výsledek. Zápis výpočtu lze provést třemi základními způsoby.

a) Do obecného řešení se dosazují hodnoty daných veličin i jejich jednotek:

$$a = \frac{v}{t} = \frac{20\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}}{4\,\mathrm{s}} = 5\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}.$$

b) Do obecného řešení se dosazují pouze číselné hodnoty daných veličin bez jednotek a za celý výraz se připíše výsledná jednotka

$$a = \frac{v}{t} = \frac{20}{4}\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2} = 5\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}.$$

c) Hledaná veličina se vyznačí do lomené závorky $\{\}$. Do obecného řešení se dosazují pouze číselné hodnoty veličin. Pod tento zápis se pak hledaná veličina napíše s jednotkou a bez závorky (Svoboda, Kolářová, 2006).

$$\{a\} = \frac{v}{t} = \frac{20}{4} = 5$$

$$a = 5\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}.$$

Způsoby zápisu výpočtu zmiňujeme zvláště proto, abychom poukázali na „nešvar“, ke kterému dochází nejen na základních a středních školách, ale i na školách vysokých. Z exaktního hlediska musí mít výrazy za rovnítkem stejnou číselnou hodnotu a stejnou jednotku včetně násobků a dílů jednotek, např. $100\,\mathrm{m} = 0{,}1\,\mathrm{km}$. Za nesprávný zápis se tedy považuje $a = \frac{v}{t} = \frac{20}{4} = 5\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ nebo $a = \frac{v}{t} = \frac{20}{4} = 5\,[\mathrm{m\cdot s^{-2}}]$, jelikož není splněna podmínka rovnosti a zápis jednotky v hranatých závorkách nemá žádný význam. Kvůli jednoduchosti se proto nejčastěji používá číselný zápis typu b) (Svoboda, Kolářová, 2006).

1.2.8 Konstrukce grafů

Kromě obecného řešení a výpočtu může být součástí zadání úlohy také požadavek sestrojit graf. Nejedná se tedy o náčrt situace, ale o jeden z úkolů úlohy. Může být chápán také jako požadavek nakreslit schéma zapojení elektrického obvodu nebo schéma uspořádání zařízení (Svoboda, Kolářová, 2006). Konstrukce grafu se využívá zejména v úlohách, které popisují jednoduchou závislost mezi veličinami. Učitel si zadáním grafu může ověřit, jestli žák správně pochopil základní podstatu fyzikálních dějů. Podobně to platí i pro soutěžní úlohy Fyzikální olympiády.

Vhodnými příklady začlenění grafu do zadání úlohy mohou být: závislost proudu na změně odporu, V-A charakteristika, $p-V$, $p-T$ a $V-T$ diagram pro děje v plynech nebo závislost tlaku na ploše působení.

1.2.9 Diskuse řešení a odpověď

V diskusi řešení se porovnává výsledek se skutečností. Při porovnání se vychází z tabelovaných hodnot ve fyzikálních tabulkách, případně z osobních zkušeností. Pokud se hodnota výsledku výrazně odlišuje od tabelované hodnoty, došlo k chybě při obecném řešení nebo byly zadány nereálné vstupní údaje. Diskuse tedy slouží jako kontrola správnosti řešení (Svoboda, Kolářová, 2006).

Odpověď je zpravidla složena z obecného řešení a číselné hodnoty hledané fyzikální veličiny s jednotkou. Pokud je v zadání úlohy úkol sestrojit graf, schéma nebo obrázek, měl by se vyskytovat i v odpovědi. U některých úloh může být vyjádření číselné hodnoty pouze částí odpovědi, která je nezbytná pro její nalezení. Kupříkladu pokud je zadáním úlohy zjistit, který ze zadaných kovů má nejmenší hustotu, musí řešitel nejprve vypočítat hustotu pro všechny kovy a následně je seřadit podle velikosti. Před formulací odpovědi je proto užitečné znovu si zopakovat zadání úlohy (Svoboda, Kolářová, 2006).

1.3 Zaokrouhlování výsledků

Při zápisu výsledku je důležité, aby řešitel dbal na zaokrouhlování. Konečný výsledek by neměl mít větší počet platných číslic, než měly výchozí veličiny. Pokud by například délka běžecké dráhy byla 100 metrů a čas běžce 15 s, kalkulačka by jeho rychlost vypočítala jako:

$$v = \frac{100}{15}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} = 1{,}6666666667\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

Tento výsledek není správně zapsaný, protože má větší počet platných číslic než veličiny, ze kterých vychází. Platnými číslicemi se rozumí všechny číslice od první zleva, která není nulová, do poslední zapsané číslice vpravo. Přičemž nuly za číslicemi, které jsou za desetinnou čárkou, se považují za platné číslice (0,930 má 3 platné číslice), ale nuly za desetinnou čárkou před první číslicí se tak za platné nepovažují (0,0002 má jednu platnou číslici). Počet platných míst však není to samé jako počet desetinných míst. Například výsledky 725,5 g a 0,7255 kg jsou vyjádřené na 4 platné číslice, přičemž mají odlišný počet desetinných míst. Při početních operacích se zaokrouhlování čísel řídí následujícími pravidly:

a) Při sčítání, odečítání, násobení a dělení se výsledek zaokrouhluje tak, aby měl stejný počet desetinných míst, jako má číslo s nejmenším počtem desetinných míst:

$$1{,}15 + 6{,}4 + 2{,}345 \doteq 9{,}9 \text{ nebo } \frac{0{,}345 \cdot 75}{100} \doteq 0{,}26.$$

b) Při kombinaci početních operací se dílčí výsledky zapisují s větším počtem platných míst, a teprve při konečném výsledku se zaokrouhlí na počet desetinných míst, jaké má číslo s nejmenším počtem desetinných míst (fyzikalniolympiada.cz):

$$(1{,}15 + 6{,}4 + 2{,}345) \cdot \frac{0{,}345 \cdot 75}{100} = 9{,}895 \cdot 0{,}25875 = 2{,}56033125 \doteq 2{,}6.$$

Ve fyzikálních úlohách se veličiny teplota, délka, hmotnost, čas, elektrický proud, napětí apod. často zapisují pouze s jednou platnou číslicí: 7 °C, 5 m, 3 kg, 9 s, 1 A, 4 V apod. Považuje se ovšem za vhodnější zapisovat je na dvě platné číslice, tedy 7,0 °C, 5,0 m, 3,0 kg, 9,0 s, 1,0 A, 4,0 V (Svoboda, Kolářová, 2006). Toto pravidlo je většinou dodržováno i v úlohách Fyzikální olympiády.

Kapitola 2

Analýza vlastností didaktického testu

Aby didaktický test spolehlivě měřil vědomosti žáků, je třeba u něj změřit vlastnosti, které vypovídají o jeho kvalitě. O vlastnostech testu lze rozhodnout pouze při ověřování většího počtu testovaných osob. Pro určení kvality didaktického testu se posuzují nejen vlastnosti jednotlivých položek testu, ale i vlastnosti testu jako celku (Chráska, 2016).

2.1 Analýza vlastností položek testu

Mezi nejdůležitější vlastnosti položky testu patří obtížnost úlohy, citlivost úlohy a analýza nenormovaných odpovědí (Jeřábek, Bílek, 2010). V následujících podkapitolách popíšeme zmíněné charakteristiky a zaměříme se na jejich aplikaci u položek s váženým skórováním.

2.1.1 Obtížnost položky

Obtížnost úlohy je možné vypočítat pomocí hodnoty obtížnosti Q nebo indexu obtížnosti P. *Hodnota obtížnosti* Q vyjadřuje procentuální zastoupení žáků, kteří úlohu vyřešili chybně nebo ji úplně vynechali vzhledem k celkovému počtu testovaných, tedy

$$Q = \frac{n_n}{n} \cdot 100\,\%,$$

kde n_n je počet žáků, kteří úlohy vyřešili chybně nebo ji vynechali a n je celkový počet testovaných. *Index obtížnosti* P udává procentuální zastoupení žáků, kteří úlohu vypočítali správně vzhledem k celkovému počtu testovaných, tedy

$$P = \frac{n_s}{n} \cdot 100\,\%,$$

kde n_s je počet žáků, kteří úlohu vyřešili správně a n je celkový počet testovaných. Je zřejmé, že veličiny se navzájem doplňují do 100, lze tedy mezi nimi vyjádřit vztah:

$$Q + P = 100\,\%.$$

O tom, jestli má úloha vysokou obtížnost, vypovídají nízké hodnoty indexu obtížnosti P a naopak vysoké hodnoty obtížnosti Q. Za velmi obtížné se považují ty úlohy, jejichž index obtížnosti P je nižší než 20 %, a naopak velmi jednoduché úlohy jsou ty, které mají hodnotu P vyšší než 80 %. Úlohy s indexem nad 80 % mohou být v testu použity pro zvýšení motivace žáků. Za nejvhodnější se považují ty úlohy, které mají index okolo 50 % (Chráska, 2016). Existuje celá řada kritérií, v jakém rozmezí by se hodnota obtížnosti či index obtížnosti položky měly pohybovat. Dle publikace (Ding a kol., 2005) je tímto rozmezím 30 až 90 %.

Dle (Vafková, 2015) se obtížnost u položek s váženým skórováním určuje pomocí obecného indexu obtížnosti:

$$P = \frac{\overline{x}}{x_m} \cdot 100\,\%, \tag{2.1}$$

kde $\overline{x}$ je aritmetický průměr získaných bodů ze všech testovaných a x_m je maximální možný počet bodů, který lze za danou úlohu získat. Výpočet indexu obtížnosti u položky s váženým skórováním demonstrujeme na následujícím příkladu:

Příklad 2: *V Karlovarském kraji se 59. ročníku Fyzikální olympiády kategorie E zúčastnilo celkem 10 studentů. Z první úlohy testu nazvané „Na půlnoční" byly bodové zisky žáků 10, 8, 10, 10, 10, 10, 10, 7, 1 a 3. Z úlohy žáci mohli získat maximálně 10 bodů. Jaký je index obtížnosti úlohy?*

Řešení:
Nejprve musíme vypočítat průměrný bodový zisk položky:

$$\overline{x} = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 7 + 1 \cdot 8 + 6 \cdot 10}{10} = 7{,}9.$$

Maximální počet bodů za položku je 10 bodů, $x_m = 10$. Následně dosadíme do vztahu (2.1):

$$P = \frac{\overline{x}}{x_m} \cdot 100 = \frac{7{,}9}{10} \cdot 100 = 79\,\%.$$

Index obtížnosti zadané úlohy činí 79 %. Úloha se tedy nachází v intervalu optimální obtížnosti.

2.1.2 Citlivost položky

Další důležitou vlastnosti položky je její citlivost. Citlivost položky lze chápat jako schopnost úlohy rozlišovat mezi žáky s lepšími a žáky s horšími vědomostmi (Jeřábek, Bílek, 2010). K rozlišení žáků mezi ty s „lepšími" a „horšími" vědomostmi se využívá celkových výsledků z testu. Koeficient citlivosti je možné vypočítat pomocí různých metod, přičemž všechny nabývají hodnot od -1 do 1. Jestliže koeficient nabývá hodnoty 0, úloha vůbec nerozlišuje žáky s lepšími a žáky s horšími vědomostmi.

Kladné hodnoty koeficientu znamenají, že úloha zvýhodňuje žáky s lepšími vědomostmi. Jinými slovy řečeno: lepších výsledků v úloze dosahují ti studenti, kteří mají z testu lepší celkové bodové ohodnocení. Naopak úloha se zápornou hodnotou koeficientu zvýhodňuje žáky s horšími vědomostmi (s horšími výsledky testu). Takových hodnot se dosahuje například v úlohách, které jsou příliš složitě formulovány nebo v případě, kdy si žáci mohou volit různé strategie řešení. Koeficient citlivosti by se měl pohybovat vždy v kladných hodnotách (Chráska, 2016).

Jednou z možností, jak určit koeficient citlivosti u úloh s váženým skórováním, je diskriminace RIT. Tento koeficient se určuje pomocí Pearsonova korelačního koeficientu, který vyjadřuje vztah mezi bodovým ziskem z úlohy a celkovým bodovým ziskem z testu. *Pearsonův korelační koeficient* lze zapsat jako:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(h_i - \overline{h})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(h_i - \overline{h})^2}}, \tag{2.2}$$

kde x_i je bodový zisk dané položky i-tého testovaného, $\overline{x}$ je bodový průměr dosažený v dané položce, h_i je bodový zisk i-tého testovaného v celém testu a $\overline{h}$ je bodový průměr dosažený v celém testu (Vafková, 2015). Dle publikace (Chráska, 2016) by měl Pearsonův korelační koeficient nabývat minimální hodnoty 0,40. K demonstraci výpočtu Pearsonova korelačního koeficientu použijeme zadání výše zmíněného příkladu. Bodové zisky žáků z položky a z celého testu jsou zobrazeny v tab. 2.1.

Tabulka 2.1: Bodové zisky žáků z položky a testu

x_i	h_i	x_i	h_i
10	38	10	20
8	33	10	20
10	30	7	17
10	25	1	9
10	20	3	3

Řešení:

Nejprve vypočítáme průměrný bodový zisk položky $\overline{x}$ a z celého testu $\overline{h}$:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{10+8+10+10+10+10+10+7+1+3}{10} = 7{,}9$$

a

$$\overline{h} = \frac{\sum_{i=1}^{n} h_i}{n} = \frac{38+33+30+25+20+20+20+17+9+3}{10} = 21{,}5.$$

Vypočteme součet čtverců odchylek bodů položky od aritmetického průměru $\overline{x}$ a součet čtverců odchylek bodů z celého testu od aritmetického průměru $\overline{h}$, tj.:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = (10 - 7{,}9)^2 + ... + (3 - 7{,}9)^2 = 98{,}9$$

a

$$\sum_{i=1}^{n}(h_i - \overline{h})^2 = (38 - 21{,}5)^2 + ... + (3 - 21{,}5)^2 = 1014{,}5.$$

Dále provedeme součet násobků odchylek bodů i-té položky s odchylkami bodů z celého i-tého testu: $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(h_i - \overline{h}) = (10 - 7{,}9)(38 - 21{,}5) + ... + ...(3 - 7{,}9)(3 - 21{,}5) = 232{,}5$. Nakonec dosadíme do vztahu (2.2):

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(h_i - \overline{h})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(h_i - \overline{h})^2}} = \frac{232{,}5}{\sqrt{98{,}9}\sqrt{1014{,}5}} = 0{,}734 \doteq 0{,}73.$$

Pearsonův korelační koeficient pro příklad 2 nám vyšel 0,73. Mezi bodovým ziskem z úlohy a celkovým bodovým ziskem z testu byla prokázána silná závislost. Jednoduše se dá Pearsonův korelační koeficient také vypočítat v Excelu pomocí funkce CORREL.

2.1.3 Analýza nenormovaných odpovědí

Vedle obtížnosti a citlivosti je další důležitou vlastností položky analýza nenormovaných odpovědí. Jedná se o rozbor odpovědí vynechaných nebo nesprávných.

Pokud má úloha větší počet vynechaných odpovědí, je nutné zjistit, proč tomu tak je. Mezi nejčastější příčiny se řadí neznalost učiva, nepochopení zadání úlohy nebo nedostatek času na řešení. Zvýšenou pozornost je nutné věnovat těm úlohám, jejichž počet vynechaných odpovědí přesáhne 30 − 40 %. U uzavřených úloh se doporučuje zvýšit pozornost již od 20 % (Chráska, 2016).

Rozbor nesprávných odpovědí lze provést pro úlohy uzavřené i otevřené. Při rozboru nesprávných odpovědí u uzavřených úloh se kontroluje, jestli žáci opravdu vybírají ze všech nabídnutých možností. Kontrolují se tzv. distraktory neboli nesprávné nabídky. Pokud se v úloze najde takový distraktor, který si nikdo nezvolil, měl by se z úlohy odstranit. V případě otevřených úloh je analýza nesprávných odpovědí komplikovanější. Musí se rozhodnout, jestli si jedná o chybu základní nebo vedlejší. Základní chyby jsou způsobené neznalostí učiva, zatímco vedlejší chyby jsou zapříčiněné náhodnými vlivy, kterými jsou například přehlédnutí, nepřesnost, numerická chyba ve výpočtu apod. Úlohy, které mají větší počet chyb vedlejších než hlavních, by se měly z testu vyřadit (Chráska, 2016).

2.2 Analýza vlastností testu jako celku

Doposud jsme si ukázali, jaké vlastnosti lze analyzovat u jednotlivých položek testu. Pro určení kvality testu však záleží také na celkovém posouzení testu. Mezi nejdůležitější vlastnosti testu jako celku řadíme validitu a reliabilitu. Podrobněji se budeme těmto charakteristikám věnovat v následujících podkapitolách.

2.2.1 Validita

Validita neboli platnost je nejdůležitější vlastností testu. Říká nám, jestli test doopravdy ověřuje ty znalosti, které by ověřovat měl. Určit validitu však není jednoduché. Pro její posouzení je nutné znát vnější kritéria, se kterými ji lze srovnat. Proto se posouzení validity testu vkládá do rukou odborníků. Podle požadovaného kritéria lze validitu rozlišit na obsahovou, predikční a souběžnou (Chráska, 2016).

Obsahová validita testu porovnává, jak moc se shoduje obsah testu s obsahem vyučování. Tedy jestli naplňuje cíle zkoušeného učiva. Predikční validita se používá především u testů studijních předpokladů. Posuzuje, na základě kterých vědomostí a dovedností lze předpovídat budoucí úspěšnost ve studiu (Chráska, 2016). Souběžná validita porovnává obsah testu s jinými údaji o testovaných, které mají stejnou kvalitu např. klasifikace (scio.cz).

Validita testu je ovlivňována jak na straně zadavatele, tak na straně žáka. Na straně zadavatele může dojít ke komplikované a nejasné formulaci zadání nebo k výběru úloh s nízkou či naopak velkou obtížností. U žáků může být validita testu zase ovlivněna opisováním, nepřesností, zbrklostí, ale také strachem z neúspěchu (scio.cz).

2.2.2 Reliabilita

Další důležitou vlastností testu je reliabilita. Jedná se o komplexní termín, který nejlépe vystihují pojmy přesnost a spolehlivost. Za přesný test se považuje takový, který je zatížen minimálním počtem chyb s co nejmenší závažností. Jak už bylo dříve řečeno, k chybám v testu může dojít různými způsoby. Mezi ty nejčastější patří vysoká a nízká obtížnost testu či krátký čas na jeho vypracování. Druhý pojem, který vystihuje reliabilitu, je spolehlivost. Ta zaručuje opakovatelnost testu. Pokud bychom opakovali test na stejném vzorku žáků, měli bychom také dospět ke stejným výsledkům. Test by se měl opakovat v krátkém časovém intervalu (Jeřábek, Bílek, 2010).

Míra reliability se vyjadřuje pomocí koeficientu, který může nabývat hodnot od 0 do 1. Hodnota 0 vyjadřuje nulovou reliabilitu testu, naopak hodnota 1 značí maximální reliabilitu. U testů s velkým počtem otázek se vyžaduje koeficient reliability alespoň 0,8, u testů s malým počtem otázek je požadováno alespoň 0,6 (Jeřábek, Bílek, 2010).

Existuje mnoho způsobů, jak reliabilitu vypočítat. Mezi nejčastější metody, u kterých se využívá opakovaného testování, jsou test-retest a metoda ekvivalentních forem. U metody test-retest žáci řeší stejný test dvakrát po sobě v intervalu několika hodin. Nevýhodou této metody je, že si žáci své předešlé odpovědi pamatují, a tudíž mají tendenci odpovídat stejně bez hlubšího zamyšlení. Nelze vyloučit také možnost, že si žáci výsledky zjistí od svých kolegů v průběhu přestávky mezi testy. U metody ekvivalentních forem testu žáci opět řeší dva testy po sobě v krátkém intervalu. Tato metoda však nezkoumá zcela stejné testy, ale pouze podobné, čímž se eliminují nedostatky z metody test-retest (Vafková, 2015).

V případě, kdy není možné sestavit dvě ekvivalentní či stejné formy testu, lze reliabilitu určit jako výši závislosti mezi jednotlivými úlohami pomocí tzv. Cronbachova alfa. Cronbachovo alfa je metoda určení reliability na základě výpočtu vnitřní konzistence testu (homogenity), která je dána vztahem:

$$\alpha = \frac{k}{k-1}\left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{k} s_{x_i}^2}{s_h^2}\right), \tag{2.3}$$

kde k je počet položek v testu, $s_{x_i}^2$ je rozptyl bodů z i-té položky a s_h^2 je rozptyl celkového počtu bodů z testu (Vafková, 2015). Postup výpočtu Cronbachova α vysvětlíme v následujícím příkladu.

Příklad 3: *Test krajského kola Fyzikální olympiády kategorie E se skládá ze čtyř fyzikálních úloh. V Karlovarském kraji se 59. ročníku fyzikální olympiády kategorie E zúčastnilo celkem 10 studentů. Bodové zisky z jednotlivých úloh jsou vyobrazeny v tab. 2.2.*

Řešení: Nejprve si musíme vypočítat rozptyl bodů jednotlivých položek a bodů z celého testu:

$$s_{x_{i1}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_{i1} - \overline{x}_1\right)^2}{n} = 9{,}89$$

a

$$s_{x_{i2}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_{i2} - \overline{x}_2\right)^2}{n} = 15{,}56$$

a

$$s_{x_{i3}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_{i3} - \overline{x}_3\right)^2}{n} = 11{,}85$$

a

$$s_{x_{i4}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_{i4} - \overline{x}_4\right)^2}{n} = 14{,}49$$

a

$$s_h^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(h_i - \overline{h}\right)^2}{n} = 101{,}45.$$

Tabulka 2.2: Bodové zisky žáků z položek a z celého testu

Ú1 x_{i1}	**Ú2** x_{i2}	**Ú3** x_{i3}	**Ú4** x_{i4}	**Celkem** h_i
10	8	10	10	38
8	6	10	9	33
10	10	10	0	30
10	8	7	0	25
10	8	2	0	20
10	2	8	0	20
10	0	10	0	20
7	0	10	0	17
1	0	8	0	9
3	0	0	0	3

Test se skládá celkem ze čtyř úloh, tedy $k = 4$. Nakonec dosadíme do vztahu (2.3):

$$\alpha = \frac{k}{k-1}\left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{k} s_{x_i}^2}{s_h^2}\right) = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{9{,}89 + 15{,}56 + 11{,}85 + 14{,}49}{101{,}45}\right) \doteq 0{,}65.$$

Hodnota Cronbachova α je přibližně 0,65. Test lze tedy považovat za homogenní. Jednoduše můžeme rozptyl jednotlivých položek vypočítat také pomocí excelovské funkce VAR.P.

Kapitola 3

Analýza vlastností soutěžních ročníků Fyzikální olympiády

Statistický rozbor úloh fyzikální olympiády pro krajská kola kategorie E jsme provedli na základě výsledků kraje Olomouckého, Karlovarského a kraje Praha. Tyto kraje byly zvoleny z důvodu, že mají své výsledky dostupné na webových stránkách. Avšak ne všechny ročníky fyzikální olympiády jsou na nich zveřejněné.
Nejvíce zveřejněných ročníků má Olomoucký kraj. Výsledkové listiny tohoto kraje jsou dostupné až do 49. ročníku (2007/2008) na webové stránce `fo.upol.cz`. Výsledky kraje Praha jsou dohledatelné na stránkách `praha.fyzikalniolympiada.cz` do 54. ročníku (2012/2013) vyjma následujícího, 55. ročníku. Nejméně zveřejněných výsledkových listin má Karlovarský kraj. Na webové stránce `kvary.fyzikalniolympiada.cz` jsou zpřístupněny výsledky řešitelů pouze do 56. ročníku (2014/2015). Z tohoto důvodu dále provádíme analýzu soutěžních úloh pro všechny zmíněné kraje pouze do tohoto ročníku.

3.1 Analýza vlastností jednotlivých soutěžních úloh

V rámci položkové analýzy jsme zjišťovali nejdůležitější vlastnosti úlohy: obtížnost položky, citlivost položky a analýzu nenormovaných odpovědí. Obtížnost úlohy jsme stanovili pomocí indexu obtížnosti P, který je dán vztahem (2.1). Platí, že s rostoucí hodnotou indexu P klesá obtížnost úlohy. Citlivost položky jsme určili pomocí Pearsonova korelačního koeficientu (2.2). S rostoucí hodnotou Pearsonova korelačního koeficientu roste i citlivost položky. Pro analýzu nenormovaných odpovědí jsme použili relativní podíl počtu žáků, kteří z úlohy získali 0 bodů. Před interpretací výsledků je vhodné připomenout, v jakém rozmezí by se vlastnosti položky měly pohybovat. Vyhovující hodnoty jsou shrnuty v tab. 3.1.

Tabulka 3.1: Vyhovující hodnoty vlastností položek

vlastnost položky	**vyhovující parametr**
index obtížnosti P	$30 - 90$ %
Pearsonův korelační koeficicent	$> 0{,}4$
analýza nenormovaných odpovědí	< 30 %

Pro stanovení vyhovujícího intervalu obtížnosti úlohy jsme vycházeli z publikace (Ding a kol., 2005), kde bylo rozmezí stanoveno na základě mezinárodního otevřeného testu. Pro naše účely je toto rozmezí nejvhodnější. Úlohami o hodnotách blížících se k 90 % můžeme žáky motivovat k řešení dalších příkladů. Zároveň by nemělo být cílem úlohy, aby úspěšnost vyřešení klesla pod 30 %. U výsledků nenormovaných odpovědí je důležité mít na paměti, že se jedná nejen o úlohy vynechané, ale také o úlohy chybně vyřešené s hodnocením 0 bodů, jelikož z výsledkové listiny nebylo možné tyto úlohy rozlišit. Výsledky položkové analýzy pro jednotlivé soutěžní úlohy jsou znázorněny v tab. 3.2.

Tabulka 3.2: Vyhovující hodnoty vlastností položek

ročník	**úloha**	**Index obtížnosti** P **(%)**	**Pearsonův koeficicent**	**Nenormované odpovědi (%)**	**vyhovuje/ nevyhovuje**
FO60	E3-1	68	0,79	6	vyhovuje
	E3-2	67	0,80	7	vyhovuje
	E3-3	75	0,84	1	vyhovuje
	E3-4	74	0,75	1	vyhovuje
FO59	E3-1	85	0,57	0	vyhovuje
	E3-2	52	0,72	8	vyhovuje
	E3-3	73	0,40	9	vyhovuje
	E3-4	45	0,74	26	vyhovuje
FO58	E3-1	88	0,45	0	vyhovuje
	E3-2	89	0,76	2	vyhovuje
	E3-3	72	0,71	0	vyhovuje
	E3-4	62	0,66	5	vyhovuje
FO57	E3-1	46	0,70	12	vyhovuje
	E3-2	59	0,80	2	vyhovuje
	E3-3	50	0,67	5	vyhovuje
	E3-4	43	0,63	0	vyhovuje
FO56	E3-1	73	0,67	0	vyhovuje
	E3-2	64	0,63	4	vyhovuje
	E3-3	21	0,70	40	nevyhovuje
	E3-4	30	0,64	42	nevyhovuje

Z tabulky vyplývá, že většina úloh vyhovuje našim kritériím. Pouze dvě úlohy z 56. ročníku tato kritéria nesplňují. Jedná se o úlohu FO56E3-3 s názvem Drátěný čtverec a úlohu FO56E3-4 s názvem Ohřívání vody v kamnech. První úloha je aplikována na učivo spojování rezistorů a druhá na tepelnou výměnu. Obě úlohy mají vysoký počet nenormovaných odpovědí, což ovlivnilo i výslednou hodnotu indexu obtížnosti. U úlohy FO56E3-3 je index obtížnosti pouhých 21 %, a tím pádem nevyhovuje ani tomuto požadavku. Při hlubším zkoumání jsme zjistili, že úlohy byly problémové pro všechny tři kraje. Výsledky jsou znázorněny v tab. 3.3.

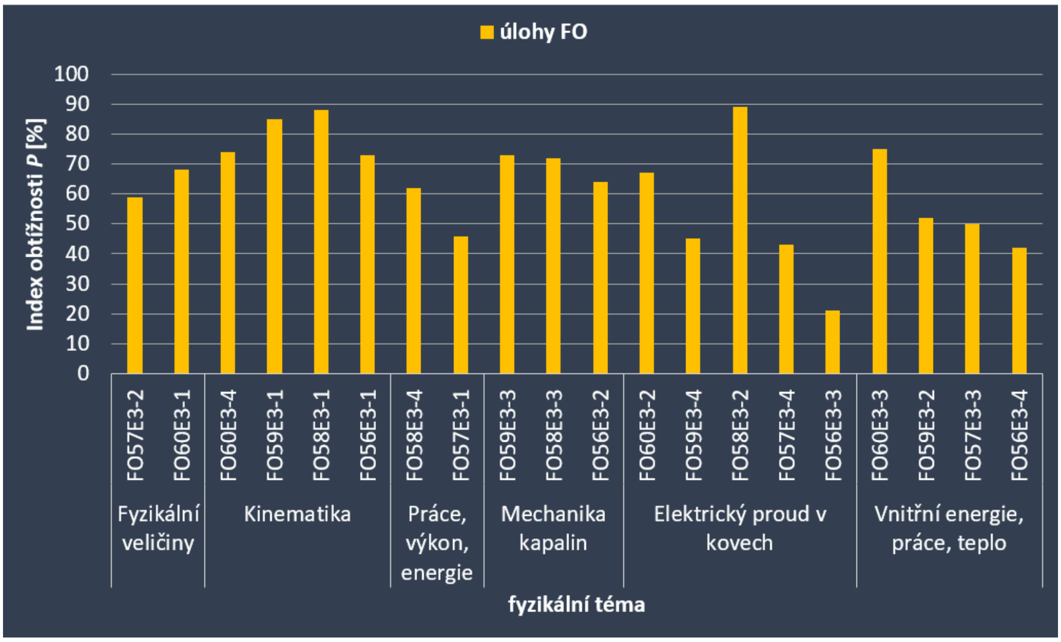
Z tabulky je zřejmé, že všechny tři kraje mají pro obě úlohy velmi nízké hodnoty indexu obtížnosti P. Hodnota indexu se pohybuje v rozmezí od 4 % do 41 %. Zvláště velkou pozornost bychom měli věnovat nenormovaným odpovědím Karlovarského kraje, jejichž relativní počet dosahuje téměř 90 %. Například u úlohy FO56E3-3 (Drátěný čtverec) získali nenulový bodový zisk pouze 2 žáci z 16. U úlohy FO56E3-4 (Ohřívání vody v kamnech) to byli pouze 3 žáci z 16. Ostatní kraje sice nemají tak vysoké hodnoty nenormovaných odpovědí, bodové zisky z příkladů jsou však nízké a pohybují se v průměru pod 4 body.

Tabulka 3.3: Vlastnosti položek úlohy 3 a 4 ročníku FO56E3

Úloha	Vlastnost položky	Ol. kraj	kraj Praha	KV kraj
FO56E3-3	index P	23 %	34 %	4 %
	nenorm. odpovědi	11 %	28 %	88 %
FO56E3-4	index P	41 %	33 %	15 %
	nenorm. odpovědi	0 %	50 %	81 %

Přestože hodnoty vlastností úloh nevyhovují nastaveným kritériím, jsou zahrnuty ve sbírce jako úlohy vyžadující hlubší zamyšlení. Jak už bylo dříve zmíněno, řešením fyzikálních úloh se žáci učí překonávat překážky a podle výsledků řešitelů obě úlohy touto překážkou jsou. Úlohy budou ve sbírce rozpoznatelné označením vykřičníku v závorkách (!) u názvu úlohy.

Vypočítané hodnoty indexu P mohou být užitečné také pro srovnání obtížnosti mezi jednotlivými fyzikálními tématy. Porovnání je znázorněné na obr. 3.1.



Obrázek 3.1: Indexy obtížnosti úloh FO seřazené podle tématu

Z grafu lze vyčíst, že v každém zkoumaném ročníku se objevila úloha na řešení elektrického proudu v kovech. Úlohy spadající do tohoto tématu mají nejmenší průměrnou hodnotu indexu obtížnosti, $P \doteq 53\,\%$. Je však patrné, že úlohy z tohoto okruhu učiva nemají hodnoty indexu zastoupeny rovnoměrně. Nachází se zde jak úloha s nejmenší hodnotou indexu, tak s hodnotou největší. Naopak, přibližně stejné hodnoty indexu lze najít u úloh týkajících se učiva kinematiky. Tyto úlohy mají největší průměrný index obtížnosti, $P \doteq 80\,\%$. Lze tedy usuzovat, že žáci si s úlohami o pohybu umí nejlépe poradit a mají toto učivo nejlépe zažité.

3.2 Analýza vlastností soutěžních ročníků jako celku

V rámci analýzy vlastností soutěžních ročníků jako celku jsme zjišťovali reliabilitu testu. Ta většinou vyjadřuje spolehlivost a přesnost testu. Pro stanovení spolehlivosti však musíme mít k dispozici dva stejné nebo podobné testy, které žáci řeší v krátkém časovém intervalu za sebou. Pro určení přesnosti testu je zapotřebí určit závažnost chyb. Avšak ani jednu z těchto informací jsme neměli k dispozici. V takovém případě lze reliabilitu vypočítat pomocí Cronbachova α. Tento koeficient určuje reliabilitu jako vnitřní homogenitu (konzistenci) testu. Jednoduše řešeno: čím vyšší je hodnota Cronbachova α, tím více jsou výsledky žáků srovnatelné. U testů s malým počtem otázek by měla reliabilita nabývat minimální hodnoty 0,6 (Jeřábek, Bílek, 2010). Hodnoty koeficientu α jsme vypočítali pomocí vzorce (2.3). Výsledky jsou znázorněny v tab. 3.4.

Tabulka 3.4: Hodnoty Cronbachova α pro jednotlivé ročníky

Ročník	**Cronbachovo α**
60.	0,79
59.	0,42
58.	0,52
57.	0,63
56.	0,55

Z tabulky vyplývá, že 60. ročník má nejvyšší vnitřní konzistenci úloh, $\alpha = 0{,}79$. Tento výsledek ukazuje na homogenitu výsledků. Žáci získávali srovnatelná bodová ohodnocení v jednotlivých úlohách. Naopak, nejnižší hodnota Cronbachova α je u 59. ročníku, $\alpha = 0{,}42$. Tento výsledek ukazuje na určitou heterogenitu, tedy na rozdílnost v bodovém hodnocení žáků. Nízké hodnoty Cronbachova $\alpha < 0{,}79$ z tab. 3.4 jsou v rámci předmětu fyzika pochopitelné. Musíme si uvědomit, že fyzika je rozsáhlá exaktní věda, která zkoumá rozmanité zákonitosti přírodních jevů. Každý řešitel tak může preferovat jinou oblast této vědy, tématický celek, popř. typ úloh.

Kapitola 4

Sbírka úloh Fyzikální olympiády

Sbírka úloh Fyzikální olympiády je vytvořena z úloh krajského kola kategorie E od 51. do 60. ročníku. Všechny úlohy jsou označeny ročníkem, pořadím úlohy v ročníku, názvem úlohy a indexem obtížnosti P. Od 56. do 60. ročníku je index obtížnosti vyhodnocen na základě výsledků kraje Olomouckého, Karlovarského a kraje Praha. Zbylé ročníky jsou vyhodnoceny pouze na základě výsledků kraje Olomouckého. Úlohy jsou v rámci témat seřazeny od úloh s vyšším indexem obtížnosti (méně obtížné úlohy) po úlohy s nižším indexem obtížnosti (obtížnější úlohy). V případě, že je index obtížnosti menší než 30 %, považuje se úloha za velmi obtížnou a je označena vykřičníkem v závorkách (!) u názvu úlohy. Pokud je hodnota indexu obtížnosti vyšší než 90 %, jedná se o velmi lehkou úlohu a ve sbírce bude rozpoznatelná označením plus v závorkách (+) u názvu úlohy. Úlohy jsou seřazeny podle tématu na základě sbírek Karla Bartušky (1997).

4.1 Fyzikální veličiny

1: FO54E2: Těžba dřeva **[75 %]**

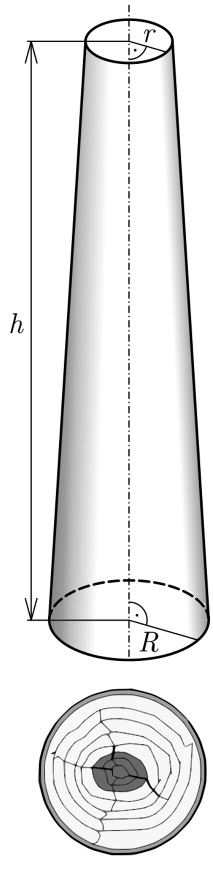
Při kácení získali majitelé lesa celkem 60 kmenů, které oklestili a zkrátili na délku 16 m. Průměr kmenů na širším konci byl 44 cm, na užším jen 24 cm. Hustota suchého dřeva je 480 kg/m^3, mokrého dřeva 640 kg/m^3. Stahováním dřeva se kmeny dostaly až k cestě, která vede po břehu řeky.

a) Určete objem a hmotnost jednoho kmenu, jestliže kmen představuje komolý kužel (viz obr. 4.1), jehož objem vypočítáme ze vztahu $V = \frac{1}{3}\pi h\,(R^2 + Rr + r^2)$.

b) Při stahování kmenů k cestě se užívá páru koní nebo traktoru, přičemž se kmen sune po podloží. Jak velkou silou je nutno kmen přesunovat po trávě nebo jehličí, je-li součinitel smykového tření 0,25?

c) Majitelé se rozhodli převést na pilu kmeny na vozech s tahačem; šířka vozu mezi opěrnými sloupy je 2,10 m, na sebe lze nastavět jen pět vrstev kmenů. Do délky vozu se kmeny vejdou jen jednou. Jaká je hmotnost jednoho nákladu? Stačí dva vozy?

d) Majitelé zvažovali, zda by nešlo kmeny splavit po řece. Vytvořili by tedy vor (kmeny by byly spojeny lany nebo latěmi s hřebíky). Jak velkou částí svého objemu by se kmeny ponořily do vody, když by byly vory sestaveny ze suchých kmenů (určete pomocí procentní hodnoty ponořené části kmenů vzhledem k celkovému objemu). Jak by se situace s ponořením změnila, když by dřevo ve vodě zvlhlo?



Obr. 4.1:
K úloze FO54E2

Řešení:

a) Poloměry kruhových stran kmene jsou $R = 44/2\,\text{cm} = 0{,}22$ m, $R = 24/2\,\text{cm} = 0{,}12$ m Objem jednoho kmenu je

$$V = \frac{1}{3}\pi h\left(R^2 + Rr + r^2\right) = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 16\cdot\left(0{,}22^2 + 0{,}22\cdot 0{,}12 + 0{,}12^2\right)\ \text{m}^3 \doteq 1{,}5\,\text{m}^3.$$

Hmotnost kmene je dána vztahem $m = \varrho V$, pro suchý kmen vychází $m_\text{s} = \varrho_\text{s} V = 1{,}5\cdot 480\,\text{kg} = 720\,\text{kg}$. Hmotnost mokrého kmene pak byla $m_\text{m} = \varrho_\text{m} V = 1{,}5\cdot 640\,\text{kg} = 960\,\text{kg}$. **2 body**

b) Země působí na kmen tíhovou silou $F_\text{G} = mg$. Proti pohybu působí země silou třecí $F_\text{t} = fmg$. Na kmen je třeba působit minimálně stejně velikou silou $F = fmg$, pro suchý kmen vychází $F_1 = fm_\text{s}g = 0{,}25\cdot 720\cdot 10\,\text{N} = 1{,}8\,\text{kN}$, pro mokrý kmen vychází $F_2 = fm_\text{m}g = 0{,}25\cdot 960\cdot 10\,\text{N} = 2{,}4\,\text{kN}$. **2 body**

c) Do délky vozu se kmeny vejdou právě jednou, do výšky lze dát pět vrstev, do šířky se vejde při dobrém narovnání (střídají se užší a širší konce $(0{,}24 + 0{,}44 + 0{,}24 + {} + 0{,}44 + 0{,}24 + 0{,}44)\,\text{m} = 2{,}04$ m) až 6 kmenů, při horším narovnání (všechny širší konce na jedné straně vozu $(0{,}44 + 0{,}44 + 0{,}44 + 0{,}44)\,\text{m} = 1{,}76$ m) jen 4 kmeny. Při dobrém narovnání se vejde do jednoho vozu celkem $6\cdot 5 = 30$ kmenů o celkové hmotnosti 21.6 t (pro suché dřevo). K odvezení 60 kmenů proto stačí dva vozy, budou oba zcela naplněny. Při horším narovnání se vejde do jednoho vozu celkem

$4 \cdot 5 = 20$ kmenů o celkové hmotnosti 14,4 t (opět pro suché dřevo). Dva vozy pak nestačí, musíme použít 3 vozy. **3 body**

d) Pro plovoucí kmen bude platit, že velikost tíhové síly, kterou působí Země na kmen o objemu V a hustotě ϱ, je stejná, jako velikost vztlakové síly, kterou působí voda o hustotě ϱ_v. Pro objem ponořené části tělesa V_p platí

$$F_\mathrm{G} = F_\mathrm{vz}, \qquad V\varrho g = V_\mathrm{p}\varrho_\mathrm{v} g,$$
$$\frac{V_\mathrm{p}}{V} = \frac{\varrho}{\varrho_\mathrm{v}}.$$

Pro suché dřevo vychází

$$\frac{V_\mathrm{p}}{V} = \frac{\varrho_\mathrm{s}}{\varrho_\mathrm{v}} = \frac{480\,\mathrm{kg/m^3}}{1\,000\,\mathrm{kg/m^3}} = 48\,\%,$$

pro mokré dřevo

$$\frac{V_\mathrm{p}}{V} = \frac{\varrho_\mathrm{m}}{\varrho_\mathrm{v}} = \frac{640\,\mathrm{kg/m^3}}{1\,000\,\mathrm{kg/m^3}} = 64\,\%,$$

3 body

2: FO60E3-1: Na meteorologické stanici **[68 %]**

Na meteorologické stanici provádějí pravidelné měření sněhových srážek. Používají k tomu srážkoměr, nádobu válcového tvaru s plochou dna $S = 200\,\mathrm{cm^2}$ a výškou $d = 40\,\mathrm{cm}$. Během jednoho bezvětrného dne padal sníh svisle dolů rychlostí $v = 0{,}6\,\mathrm{m/s}$. Za dobu $t = 6{,}0$ hodin nepřetržitého sněžení napadl do prázdného srážkoměru sníh do výšky $h = 15\,\mathrm{cm}$ a hmotnost napadlého sněhu byla $m = 0{,}45\,\mathrm{kg}$.

a) Jaká byla hustota ϱ_0 napadlého sněhu ve srážkoměru?

b) Určete, jaká byla hustota sněhu ve vzduchu v $\mathrm{g/m^3}$ během sněžení, tj. hmotnost sněhu v $1\,\mathrm{m^3}$ během sněžení.

Hmotnost vzduchu v $1\,\mathrm{m^3}$ do výsledků nezapočítávejte.

Řešení:

a) Objem sněhu v nádobě je

$$V_0 = Sh = 200\,\mathrm{cm^2} \cdot 15\,\mathrm{cm} = 3\,000\,\mathrm{cm^3}.$$

Pro hustotu sněhu ve srážkoměru tak vychází

$$\varrho_0 = \frac{m}{V_0} = \frac{450\,\mathrm{g}}{3\,000\,\mathrm{cm^3}} = 0{,}150\,\mathrm{g/cm^3} = 150\,\mathrm{kg/m^3}.$$ **3 body**

b) Nejprve určíme celkový objem V, ze kterého sníh napadl do srážkoměru při rychlosti $v = 0{,}6\,\mathrm{m/s} = 60\,\mathrm{cm/s}$ za čas $6\,\mathrm{h} = 6 \cdot 3\,600\,\mathrm{s} = 21\,600\,\mathrm{s}$; dostáváme

$$V = SH = Svt = 200\mathrm{cm^2} \cdot 60\mathrm{cm/s} \cdot 21\,600\mathrm{s} = 259\,200\,000\mathrm{cm^3} = 259{,}2\mathrm{m^3}.$$ **4 body**

Pro hustotu padajího sněhu pak platí

$$\varrho = \frac{m}{V} = \frac{450\,\mathrm{g}}{259{,}2\,\mathrm{m^3}} \doteq 1{,}736\,1\,\mathrm{g/m^3} \doteq 1{,}7\,\mathrm{g/m^3}.$$ **3 body**

3: FO52E3-4: Překládání **[62 %]**

Představte si, že máte roli papíru o gramáži $125\,\mathrm{g/m^2}$ a šířce 120 cm, délka rozbaleného papíru je 166 m. Papír přeložíte napůl, rozříznete a získáte dvojitý papír o délce 83 m. Potom opět přeložíte dvojitý papír napůl a rozříznete (při větší tloušťce papíru musíte rozřezávat po částech). Získáte tak „štůsek“ balicího papíru o výšce h.

a) Jaká je hmotnost papíru v roli? Je-li tloušťka balicího papíru o udané gramáži 0,155 mm, určete hustotu tohoto balicího papíru.

b) Kolikrát by bylo nutno papír z role přeložit a rozříznout, aby vznikly v obchodě balicí papíry o přibližném obsahu $1\ \mathrm{m^2}$? Jak vysoký by byl štůsek těchto papírů, umístěných na stole?

c) Mezi dvěma zdířkami je připojen drát o délce 120 m. Drát vezmete, přepůlíte a oba dráty připojíte znovu paralelně k původním zdířkám. Pak oba dráty znovu přepůlíte a výsledné kratší dráty připojíte k původním zdířkám. Tento postup zopakujete ještě třikrát. Po každém novém připojení určete výsledný odpor drátů mezi zdířkami. Při řešení využijte vztahu z úloh o odporu kovového vodiče.

Řešení:

Označme pro papír o gramáži (plošné hustotě) $\sigma = 125\,\mathrm{g/m^2} = 0{,}125\,\mathrm{kg/m^2}$ délku role $l = 166$ m a šířku $d = 120$ cm $= 1{,}2$ m.

a) Celková plocha papíru v roli je $S = d \cdot l = 199{,}2\,\mathrm{m^2}$, celková hmotnost pak bude $m = \sigma \cdot S = 24{,}9\,\mathrm{kg}$. Je-li tloušťka listu papíru $h = 0{,}155\,\mathrm{mm} = 0{,}000\,155\,\mathrm{m}$, bude celkový objem $V = S \cdot h = 0{,}030\,876\,\mathrm{m^3}$. Pro hustotu pak platí $\varrho = m/V = 806\,\mathrm{kg/m^3}$. **4 body**

b) Po každém přeložení bude obsah poloviční, proto po prvním přeložení a rozříznutí bude obsah získaných dvou kusů papíru $S_1 = 99{,}6\ \mathrm{m^2}$, po druhém $S_2 = 49{,}8\ \mathrm{m^2}$, po třetím $S_3 = 24{,}9\ \mathrm{m^2}$, po čtvrtém $S_4 = 12{,}45\ \mathrm{m^2}$, po pátém $S_5 = 6{,}225\ \mathrm{m^2}$, po šestém $S_6 = 3{,}112\,5\,\mathrm{m^2}$, po sedmém $S_7 = 1{,}556\,25\,\mathrm{m^2}$, po osmém $S_8 = 0{,}778\,125\,\mathrm{m^2}$. Podmínku zadání proto splňuje nejlépe 8 přeložení a rozříznutí papíru. Při každém rozříznutí získáme 2 kusy, po osmi 2^8 kusů, takže výsledná výška naskládaných kusů papíru bude $h' = h \cdot 2^8 = 0{,}000\,155 \cdot 2^8 = 39{,}68$ mm. **3 body**

c) Pro odpor drátu platí

$$R = R'\frac{l}{S},$$

kde l je délka drátu, S je jeho průřez a R' je odpor drátu o délce 1 m a průřezu 1 mm. Po přepůlení drátu, kdy se objem zachovává, bude $l_1 = l/2$, $S_1 = 2S$, takže výsledný odpor

$$R_1 = R'\frac{l_1}{S_1} = R'\frac{\frac{l}{2}}{2S} = \frac{R}{4}.$$

Podobně vychází $R_2 = R_1/4 = R/4^2 = R/16$, $R_3 = R_2/4 = R/4^3 = R/64$, $R_4 = R_3/4 = R/4^4 = R/256$, $R_5 = R_4/4 = R/4^5 = R/102\,4$. **3 body**

4: FO57E3-2: Dva sudy **[59 %]**

Na podezdívce jsou vedle sebe umístěny dva sudy na zachycení dešťové vody. První sud má hmotnost 68 kg, průměr 92 cm a vejde se do něj 760 l vody. Druhý má stejnou výšku a poloviční průměr. Oba sudy jsou vyrobeny z téhož plechu stejné tloušťky, oba jsou nahoře otevřené a dole u dna jsou spojeny trubkou s uzávěrem.

a) Určete objem druhého sudu.

b) Určete hmotnost druhého sudu.

c) Druhý sud je až po okraj naplněný dešťovou vodu, první je prázdný. Po otevření uzávěru začne protékat voda do prvního sudu. Určete konečnou výšku hladiny.
d) Jak se změnila polohová energie vody? Jak se tato změna projevila?

Hustota vody $\varrho_v = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}$.

Řešení:

Označme objem prvního sudu $V_1 = 760\,\mathrm{l}$, jeho hmotnost $m_1 = 68\,\mathrm{kg}$ a průměr jeho dna $d_1 = 92$ cm; jeho poloměr pak vyjde $r_1 = d_1/2 = 46$ cm. Průměr druhého sudu podle zadání je $d_2 = d_1/2 = 46$ cm, poloměr $r_2 = r_1/2 = 23$ cm.

a) Plošný obsah dna roste s druhou mocninou průměru či poloměru. Dno druhého sudu má poloviční průměr, tudíž čtvrtinový plošný obsah. Při stejné výšce je též objem druhého sudu čtvrtinový, tedy $V_2 = V_1/4 = 760\,\mathrm{l}/4 = 190\,\mathrm{l}$.
Jiný způsob řešení: Objem prvního sudu je $V_1 = \pi r_1^2 h$. Ze vzorce plyne výška sudu

$$h = \frac{V_1}{\pi r_1^2} = \frac{0{,}760\,\mathrm{m^3}}{\pi\cdot(0{,}46\,\mathrm{m})^2} \doteq 1{,}14\,\mathrm{m} = 114\,\mathrm{cm}.$$

Objem druhého sudu je $V_2 = \pi r_2^2 h = \pi\cdot(0{,}23\,\mathrm{m})^2\cdot 1{,}14\,\mathrm{m} \doteq 0{,}189\,\mathrm{m^3} \doteq 190\,\mathrm{l}$. Výsledek se díky zaokrouhlování může o něco lišit od výsledku prvního řešení.
2 body

b) Povrch prvního sudu je

$$S_1 = \pi r_1^2 + 2\pi r_1 h = \pi r_1^2 + 2\pi r_1\frac{V_1}{\pi r_1^2} = \pi r_1^2 + 2\frac{V_1}{r_1} = \pi\,(0{,}46\,\mathrm{m})^2 + 2\cdot\frac{0{,}76\,\mathrm{m^3}}{0{,}46\,\mathrm{m}} \doteq 3{,}97\,\mathrm{m^2}.$$

Povrch druhého sudu je

$$S_2 = \pi r_2^2 + 2\pi r_2 h = \pi r_2^2 + 2\pi r_2\frac{V_1}{\pi r_1^2} = \pi\left(\frac{r_1}{2}\right)^2 + 2\frac{r_1}{2}\frac{V_1}{r_1^2} =$$
$$= \pi\left(\frac{r_1}{2}\right)^2 + \frac{V_1}{r_1} = \pi\,(0{,}23\,\mathrm{m})^2 + \frac{0{,}76\,\mathrm{m^3}}{0{,}46\,\mathrm{m}} \doteq 1{,}82\,\mathrm{m^2}.$$

Hmotnost sudu je přímo úměrná jeho povrchu, tedy

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{S_2}{S_1}, \qquad \Longrightarrow \qquad m_2 = \frac{S_2}{S_1}m_1 = \frac{1{,}82\,\mathrm{m^3}}{3{,}97\,\mathrm{m^3}}\cdot 68\,\mathrm{kg} \doteq 31\,\mathrm{kg}.$$
3 body

c) Celý objem vody se nacházel nad dnem druhého sudu, nyní nad oběma dny. Plošný obsah dna prvního sudu je 4krát větší, plošný obsah obou den 5krát větší než obsah dna druhého sudu. Proto bude výška 5krát menší, tj. přibližně 23 cm. **2 body**

d) Výška těžiště vodního tělesa nad dnem se zmenšila z $h/2$ na $1/5\cdot h/2 = h/10$, tj. o $\Delta h = h/2 - h/10 = 4h/10$. Polohová energie vody se zmenšila o (hustota vody $\varrho_v = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}$)

$$\Delta E_p = m_v g\Delta h = V_2\varrho_v g\Delta h = 0{,}19\,\mathrm{m^3}\cdot 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}\cdot 10\,\mathrm{N/kg}\cdot\frac{4}{10}\cdot 1{,}14\,\mathrm{m} \doteq 870\,\mathrm{J}.$$

Polohová energie vody se přeměnila na vnitřní energii, čímž se nepatrně (a prakticky neměřitelně) zvýšila její teplota. **3 body**

4.2 Kinematika

4.2.1 Nerovnoměrný pohyb

5: FO54E1: Víkend na chatě (+)[**97** %]

Rodinná rada rozhodla, že se na víkend pojede na chatu. Rodiče pojedou autem po silnici a povezou zásoby potravin, děti Katka a Vašek pojedou na bicyklech po polních a lesních cestách a obě skupiny se nakonec sejdou až na chatě. Otec a matka nasedli v 10:30 do automobilu a v 11:45 se zastavili na parkovišti restaurace, které je od domova vzdáleno 75 km. Rozhodli se poobědvat a v 12:25 pokračovat dále na chatu. Bohužel se jim však nepodařilo automobil po obědě nastartovat, a proto se rozhodli dojít na chatu pěšky – na záda vzali nejnutnější zásoby potravin a vydali se v uvedený čas rychlostí 4,5 km/h polními a lesními cestami po trase 9,0 km. Katka s Vaškem vyrazili již v 10:00 průměrnou rychlostí 4,5 m/s a na chatu to měli po polních a lesních cestách celkem 65 km.

a) Kdo se dostal na chatu dříve, rodiče nebo děti?

b) Přítel Katky mohl vyrazit z místa bydliště (nedaleko Katčina) až v 11:30, ale jako sportovec jel stálou rychlostí 7,5 m/s. Dostihl dvojici cyklistů ještě předtím, než dorazili na chatu?

c) V 15:00 odjel otec se svým kamarádem-autoopravářem zpátky na parkoviště stejnou cestou, jakou přišli s matkou z parkoviště (nejvyšší povolená rychlost na této cestě je 30 km/h). Jestliže oprava trvala jenom 45 minut, za jakou minimální dobu se můžou oba muži vrátit na chatu?

Řešení:

a) Otec a matka vyrazili v 12:25 na chatu pěšky rychlostí 4,5 km/h po trase 9,0 km. Cesta jim tedy trvala čas $t_1 = 9/4{,}5\,\text{h} = 2\,\text{h}$ a na chatu dorazili ve 14:25. Katka a Vašek vyrazili v 10:00 rychlostí 4,5 m/s a museli urazit 65 km = 65 000 m. Cesta jim tedy trvala $t_2 = 65\,000/4{,}5\,\text{s} = 14\,444\,\text{s} \doteq 4\,\text{h}$. Dorazili tak ve 14:00, dříve než rodiče. **4 body**

b) Přítel vyrazil v 11:30 rychlostí 7,5 m/s a musel urazit 65 km = 65 000 m. Cesta mu tedy trvala dobu $t_3 = 65\,000/7{,}5\,\text{s} = 8\,667\,\text{s} \doteq 2{,}4\,\text{h}$. Na chatu by uvedenou rychlostí přijel asi v čase $11{,}5\,\text{h} + 2{,}4\,\text{h} = 13{,}9\,\text{h}$, tj. ve 13:54, což znamená, že Katku dojel ne moc daleko od chaty (čas setkání vychází 13:45 minut, 15 min neboli 900 s by Katka ujela $4{,}5 \cdot 900\,\text{m} = 4\,050\,\text{m}$, takže přítel ji dohonil asi 4 km před chatou). **3 body**

c) Délka cesty tam a zpět je 18,0 km a povolená rychlost na cestě je nejvýše 30 km/h, doba opravy byla 45 min = 0,75 h. Celková doba, za kterou se mohli nejdříve vrátit na chatu vychází

$$t_4 = \frac{18}{30}\,\text{h} + 0{,}75\,\text{h} = 1{,}35\,\text{h} = 1\,\text{h}\,21\,\text{min}.$$

Tatínek s opravářem se mohou vrátit nejdříve v 16 h 21 min. **3 body**

6: FO58E3-1: Na pohyblivých schodech [88 %]

Dráha pohyblivých schodů pražského metra ve stanici Náměstí Míru měří zdola nahoru $s = 43$ m. Schody se mohou pohybovat rychlostí od $v_1 = 0{,}28$ m/s do $v_2 = 0{,}55$ m/s. Při jejich poruše musel Tomáš jít pěšky. Cesta nahoru mu trvala dobu $t_\text{h} = 70$ s, cesta dolů $t_\text{d} = 55$ s.

a) Jak dlouho trvá jízda cestujícímu stojícímu na pohyblivých schodech při jejich nejmenší a při jejich největší rychlosti? Označme hledané časy t_1 a t_2.

b) Jak dlouho bude Tomášovi cesta trvat, půjde-li ve směru pohybu schodů směrem nahoru stejnou rychlostí, jako kdyby schody byly v klidu? Určete časy t_3 a t_4 pro chůzi nahoru a časy t_5 a t_6 pro chůzi dolů vždy pro případ největší i nejmenší rychlosti pohybu schodů.

c) Jednou šel Tomáš po vypnutých schodech směrem nahoru, a když byl právě v jejich polovině, schody se rozjely nejmenší rychlostí směrem dolů. Jak dlouho (čas t_7) mu trvala cesta vzhůru, jestliže pokračoval dál v chůzi?

d) Jindy šel Tomáš po vypnutých schodech směrem nahoru, a když byl právě v jejich polovině, schody se rozjely nejmenší rychlostí také směrem nahoru. Jak dlouho (čas t_8) mu tentokrát trvala cesta po schodech, jestliže pokračoval dál v chůzi?

Číselné výsledky zaokrouhlujte na 2 platné cifry.

Řešení:

a) Pro hledané časy platí

$$t_1 = \frac{s}{v_1} = \frac{43\,\mathrm{m}}{0{,}28\,\mathrm{m/s}} \doteq 153{,}57\,\mathrm{s} \doteq 150\,\mathrm{s}, \quad t_2 = \frac{s}{v_2} = \frac{43\,\mathrm{m}}{0{,}55\,\mathrm{m/s}} \doteq 78{,}182\,\mathrm{s} \doteq 78\,\mathrm{s}.$$

2 body

b) Rychlost Tomáše na klidných schodech směrem nahoru vychází

$$v_\mathrm{h} = \frac{s}{t_\mathrm{h}} = \frac{43\,\mathrm{m}}{70\,\mathrm{s}} \doteq 0{,}614\,29\,\mathrm{m/s} \doteq 0{,}61\,\mathrm{m/s}.$$

Půjde-li Tomáš směrem nahoru, pak doby jeho výstupů při rychlostech schodů v_1 a v_2 budou

$$t_3 = \frac{s}{v_1 + v_\mathrm{h}} = \frac{s}{v_1 + \dfrac{s}{t_\mathrm{h}}} = \frac{st_\mathrm{h}}{v_1 t_\mathrm{h} + s} = \frac{43\,\mathrm{m} \cdot 70\,\mathrm{s}}{0{,}28\,\mathrm{m/s} \cdot 70\,\mathrm{s} + 43\,\mathrm{m}} \doteq 48{,}083\,\mathrm{s} \doteq 48\,\mathrm{s},$$

$$t_4 = \frac{s}{v_2 + v_\mathrm{h}} = \frac{s}{v_2 + \dfrac{s}{t_\mathrm{h}}} = \frac{st_\mathrm{h}}{v_2 t_\mathrm{h} + s} = \frac{43\,\mathrm{m} \cdot 70\,\mathrm{s}}{0.55\,\mathrm{m/s} \cdot 70\,\mathrm{s} + 43\,\mathrm{m}} \doteq 36{,}933\,\mathrm{s} \doteq 37\,\mathrm{s}.$$

2 body

Rychlost Tomáše na klidných schodech směrem dolů vychází

$$v_\mathrm{d} = \frac{s}{t_\mathrm{d}} = \frac{43\,\mathrm{m}}{55\,\mathrm{s}} \doteq 0{,}781\,82\,\mathrm{m/s} \doteq 0{,}78\,\mathrm{m/s}.$$

Půjde-li Tomáš směrem dolů, pak doby jeho sestupů při rychlostech schodů v_1 a v_2 budou

$$t_5 = \frac{s}{v_1 + v_\mathrm{d}} = \frac{s}{v_1 + \dfrac{s}{t_\mathrm{d}}} = \frac{st_\mathrm{h}}{v_1 t_\mathrm{d} + s} = \frac{43\,\mathrm{m} \cdot 55\,\mathrm{s}}{0{,}28\,\mathrm{m/s} \cdot 55\,\mathrm{s} + 43\,\mathrm{m}} \doteq 40{,}497\,\mathrm{s} \doteq 40\,\mathrm{s},$$

$$t_6 = \frac{s}{v_2 + v_\mathrm{d}} = \frac{s}{v_2 + \dfrac{s}{t_\mathrm{d}}} = \frac{st_\mathrm{d}}{v_2 t_\mathrm{d} + s} = \frac{43\,\mathrm{m} \cdot 55\,\mathrm{s}}{0{,}55\,\mathrm{m/s} \cdot 55\,\mathrm{s} + 43\,\mathrm{m}} \doteq 32{,}287\,\mathrm{s} \doteq 32\,\mathrm{s}.$$

2 body

c) Pro celkovou dobu chůze můžeme napsat

$$t_7 = \frac{t_\mathrm{h}}{2} + \frac{\dfrac{s}{2}}{v_\mathrm{h} - v_1} = \frac{t_\mathrm{h}}{2} + \frac{s}{2\left(\dfrac{s}{t_\mathrm{h}} - v_1\right)} = \frac{t_\mathrm{h}}{2} + \frac{st_\mathrm{h}}{2\,(s - v_1 t_\mathrm{h})}$$

$$= \frac{70\,\mathrm{s}}{2} + \frac{43\,\mathrm{m} \cdot 70\,\mathrm{s}}{2 \cdot (43\,\mathrm{m} - 0{,}28\,\mathrm{m/s} \cdot 70\,\mathrm{s})} \doteq 99{,}316\,\mathrm{s} \doteq 99\,\mathrm{s}.$$

2 body

d) Pro celkovou dobu chůze můžeme v tomto případě psát

$$t_8 = \frac{t_\mathrm{h}}{2} + \frac{\frac{s}{2}}{v_\mathrm{h} + v_1} = \frac{t_\mathrm{h}}{2} + \frac{s}{2\left(\frac{s}{t_\mathrm{h}} + v_1\right)} = \frac{t_\mathrm{h}}{2} + \frac{s t_\mathrm{h}}{2\,(s + v_1 t_\mathrm{h})}$$

$$= \frac{70\,\mathrm{s}}{2} + \frac{43\,\mathrm{m}\cdot 70\,\mathrm{s}}{2\cdot(43\,\mathrm{m} + 0{,}28\,\mathrm{m/s}\cdot 70\,\mathrm{s})} \doteq 59{,}042\,\mathrm{s} \doteq 59\,\mathrm{s}.$$ **2 body**

Poznámka: V částech b)–d) doporučujeme tolerovat drobné odchylky numerických výsledků na místě poslední platné cifry, pokud řešitelé dosazují zaokrouhlené hodnoty rychlostí v_h a v_d.

7: FO51E3-1: Spěšný vlak na trati komplikované opravami [86 %]

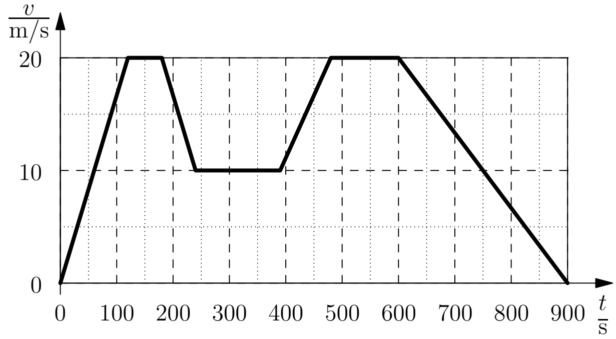
Spěšný vlak vyjel v 8:00 ze stanice Počáteční, pohyboval se rovnoměrně zrychleně, tj. jeho rychlost se zvětšovala lineárně s časem, a po době 2,0 min dosáhl vlak rychlosti 72 km/h. Touto stálou rychlostí jel potom dále po trati 1 200 m a po další 1,0 min snižoval rovnoměrně rychlost na 36 km/h, aby projel úsek trati o délce 1 500 m, kde se prováděly opravy. Poté, co projel tímto úsekem, zvýšil svou rychlost na 72 km/h za další 1,5 min, stálou rychlostí projel 2 400 m a začal ekonomicky brzdit tak, že po době 5,0 min se právě zastavil ve stanici Následující.

a) Určete úseky, jimiž vlak projížděl rovnoměrně, a doby, po které se pohyboval.
b) Nakreslete graf změn rychlosti v závislosti na probíhajícím čase.
c) V kolik hodin přijel vlak do stanice Následující a jak je tato stanice vzdálena od stanice Počáteční?
d) Jakou průměrnou rychlostí se vlak pohyboval po celé trase pohybu?

Řešení:

Nejprve si provedeme přehled zadaných i hledaných informací, nutných pro graf, dráhu v úsecích, kde vlak zrychluje nebo zpomaluje spočítáme pomocí průměrné rychlosti v daném úseku, tj. $s_\mathrm{i} = v_{\mathrm{p\,i}} \cdot t_\mathrm{i}$. Pro každý úsek značí v_z rychlost na začátku, v_k rychlost na konci a v_p průměrnou rychlost, tučně jsou v tabulce vytištěny hodnoty, které bylo třeba dopočítat.

Úsek	$\frac{t}{\mathrm{s}}$	$\frac{v_\mathrm{z}}{\mathrm{m/s}}$	$\frac{v_\mathrm{k}}{\mathrm{m/s}}$	$\frac{v_\mathrm{p}}{\mathrm{m/s}}$	$\frac{s}{\mathrm{m}}$
1	120	0	20	**10**	**1 200**
2	**60**	20	20	20	1 200
3	60	20	10	**15**	**900**
4	**150**	10	10	10	1 500
5	90	10	20	**15**	**1 350**
6	**120**	20	20	20	2 400
7	300	20	0	**10**	**3 000**



a) Rovnoměrně se vlak pohybuje na 2., 4. a 6. úseku, doby jízdy jsou v tabulce. **2 body**
b) Grafem $v = v(t)$ je lomená čára sestrojená z úseček. **3 body**
c) Doba jízdy byla 900 s = 15 min, do stanice Následující přijel vlak v 8:15. Celková dráha je 11 550 m. **3 body**

d) Průměrná rychlost $v_p = 11\,550/900 = 12{,}8\,\mathrm{m/s} = 46{,}1\,\mathrm{km/h}$. **2 body**

8: FO59E3-1: Na půlnoční [85 %]

Tři přátelé vyrazili ze svých vesnic do městečka na půlnoční mši. Emil jde obvyklou rychlostí $v_1 = 5{,}00\,\mathrm{km/h}$ tak, aby došel přesně. Cestou ale přijde sněhová vánice, která ho donutí snížit rychlost na $v_2 = 3{,}00\,\mathrm{km/h}$. Emil tak přijde o $t = 30{,}0$ minut pozdě.

a) Kdy začala vánice?

b) Jak daleko je jeho vesnice od městečka, jestliže Emilovi cesta trvala celkem přesně dvě hodiny?

c) Pavel šel z vesnice vzdálené od městečka $d = 8{,}00\,\mathrm{km}$ a vyšel z domova ve 22:30 h tak, aby dorazil přesně. Jakou rychlostí v_3 vyrazil na cestu a o kolik minut přišel pozdě, když ve vánici musí jít také rychlostí v_2?

d) Michal vyrazil na cestu rychlostí $v_4 = 6{,}00\,\mathrm{km/h}$ a vyšel z domova také ve 22:30 h tak, aby dorazil přesně. Jak daleko je od městečka jeho vesnice a jaké bylo jeho zpoždění, když kvůli vánici šel také rychlostí v_2?

Řešení:

a) Během trvání vánice Emil ujde vzdálenost s. Kdyby nebyla vánice, urazil by tuto vzdálenost za dobu $t_1 = s/v_1$, ve vánici mu to bude trvat dobu $t_1' = s/v_2$. Rozdíl těchto časů je $t = 30$ minut $= 0{,}5$ h, tedy

$$t = \frac{s}{v_2} - \frac{s}{v_1}; \qquad s = \frac{t}{\dfrac{1}{v_2} - \dfrac{1}{v_1}} = \frac{0{,}5\,\mathrm{h}}{\dfrac{1}{3\,\mathrm{km/h}} - \dfrac{1}{5\,\mathrm{km/h}}} = 3{,}75\,\mathrm{km}.$$

Vánice tedy přišla, když byl Emil ve vzdálenosti $s = 3{,}75$ km. Tuto vzdálenost ve vánici ušel za dobu $t_1' = s/v_2 = 3{,}75\,\mathrm{km}/(3\,\mathrm{km/h}) = 1{,}25$ h. Do městečka došel 30 minut po půlnoci, tj. v 0:30 h, vánice tedy začala o hodinu a čtvrt dříve, ve 23:15 h. **3 body**

b) Emil přišel o 0,5 h později, původně plánoval na cestu čas $T = 2\,\mathrm{h} - 0{,}5\,\mathrm{h} = 1{,}5$ h. Městečko je tedy od jeho vesnice vzdáleno

$$s_c = v_1 T = 5\,\mathrm{km/h} \cdot 1{,}5\,\mathrm{h} = 7{,}5\,\mathrm{km}.$$ **1 bod**

c) Pavel plánoval na chůzi čas $t_2 = 24{:}00 - 22{:}30 = 1{,}5$ h. Rychlost Pavla měla být podle plánu $v_3 = d/t_2 = 8\,\mathrm{km}/1{,}5\,\mathrm{h} = 16/3\,\mathrm{h} \doteq 5{,}333\,3$ h. Touto rychlostí šel jen do 23:15 h, tj. po dobu $t_3 = 45\,\mathrm{min} = 0{,}75\,\mathrm{h} = 3/4\,\mathrm{h}$. Za tu dobu urazil vzdálenost $d_1 = v_3 t_3 = 16/3\,\mathrm{km/h} \cdot 3/4\,\mathrm{h} = 4$ km. Ušel tedy polovinu cesty, druhou polovinu šel rychlostí v_2 za dobu

$$t_3' = \frac{d - d_1}{v_2} = \frac{d}{2v_2} = \frac{8\,\mathrm{km/h}}{2 \cdot 3\,\mathrm{km/h}} = \frac{4}{3}\,\mathrm{h} = 1\,\mathrm{h}\ 20\,\mathrm{min}.$$

Místo o půlnoci tedy přijde do městečka ve 23 h 15 min + 1 h 20 min, tj. 35 minut po půlnoci v čase 0:35 h. **3 body**

d) Michalova vesnice je ve vzdálenosti

$$s_4 = v_4 t_2 = 6\,\mathrm{km/h} \cdot 1{,}5\,\mathrm{h} = 9\,\mathrm{km}.$$

Do začátku vánice ušel vzdálenost

$$s_5 = v_4 t_3 = 6\,\mathrm{km/h} \cdot \frac{3}{4}\,\mathrm{h} = 4{,}5\,\mathrm{km},$$

tj. také polovinu cesty. Druhou polovinu cesty jde poloviční rychlostí, bude mu tedy trvat dvakrát tak dlouho, tedy dobu $t_4 = 1{,}5$ h neboli 1 h a 30 minut. Do městečka tedy dojde v čase 23 h 15 min + 1 h 30 min, tj. 45 minut po půlnoci v čase 0:45 h. **3 body**

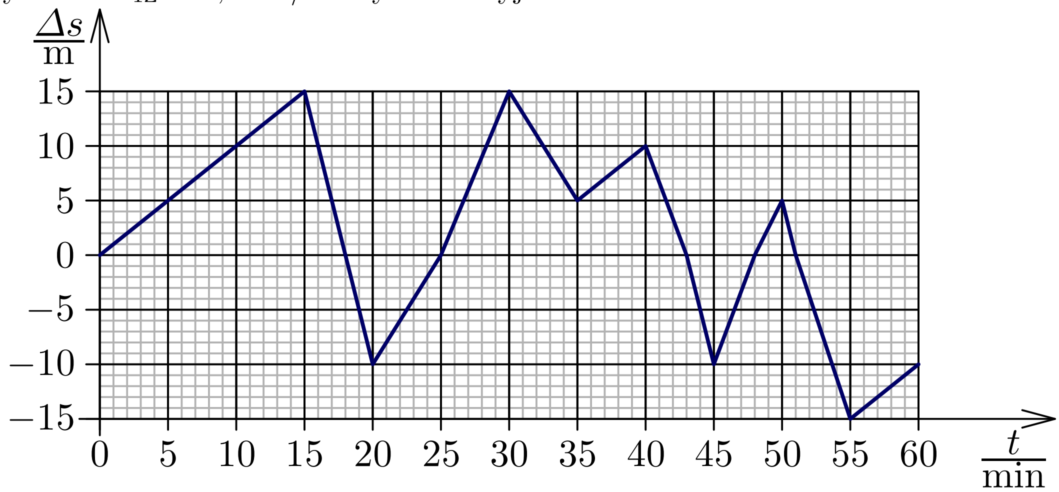
9: FO60E3-4: Závody chodců [74 %]

Martin a Zdeněk spolu závodili v chůzi. Martin byl v cíli první za přesně $t = 60$ minut. Vzdálenost Δs mezi oběma kamarády se během závodu měnila tak, jak je ukázáno na obrázku 4.2.

a) Kolikrát předešel během závodu Martin Zdeňka a kolikrát předešel Zdeněk Martina? V kolikáté minutě závodu to vždy bylo?

b) O jakou hodnotu se liší průměrné rychlosti Martina a Zdeňka pro uvažovaných 60 minut?

c) Jakou rychlostí šel Martin prvních $t_1 = 15$ minut, šel-li Zdeněk během této doby rychlostí $v_{1Z} = 5{,}4$ km/h? Výsledek vyjádřete v metrech za minutu.



Obrázek 4.2: Graf k zadání úlohy FO60E3-4

Řešení:

a) K předejití chodců dochází vždy, když $\Delta s = 0$ m. Protože byl Martin v cíli dříve, odpovídá záporná hodnota Δs situaci, když je Martin před Zdeňkem (jako v cíli), kladná hodnota, když je Zdeněk před Martinem. Martin tak předešel Zdeňka celkem 3× v časech 18 min, 43 min a 51 min. Zdeněk Martina předešel 2×, v časech 25 min a 48 min. **4 body**

b) Z posledních hodnot v grafu vidíme, že když je Martin už v cíli, Zdeňkovi zbývá ještě $\Delta s = 10$ m $= 0{,}01$ km. Rozdíl průměrných rychlostí během času $t = 60$ min $=$ 1 h $= 3\,600$ s tak vychází

$$v_{pM} - v_{pZ} = \frac{\Delta s}{t} = \frac{0{,}01\ \mathrm{km}}{1\ \mathrm{h}} = 0{,}01\ \mathrm{km/h} = \frac{10\ \mathrm{m}}{3\,600\ \mathrm{s}} \doteq 0{,}002\,777\,8\ \mathrm{m/s} \doteq 0{,}002\,8\ \mathrm{m/s}.$$

3 body

c) V prvním úseku trvajícím $t_1 = 15$ min $= 0{,}25$ h $= 900$ s se pohyboval rychleji Zdeněk a urazil o $\Delta s_1 = 15$ m větší vzdálenost. Rozdíl průměrných rychlostí v prvních 15 minutách je proto

$$\Delta v = v_{1Z} - v_{1M} = \frac{\Delta s_1}{t_1} = \frac{15\ \mathrm{m}}{15\ \mathrm{min}} = 1\ \mathrm{m/min}.$$

Pokud byla rychlost Zdeňka $v_{1Z} = 5{,}4$ km/h $= 5\,400/60$ m/min $= 90$ m/min, dostáváme pro rychlost Martina

$$v_{1M} = v_{1Z} - \Delta v = 90\ \mathrm{m/min} - 1\ \mathrm{m/min} = 89\ \mathrm{m/min}.$$

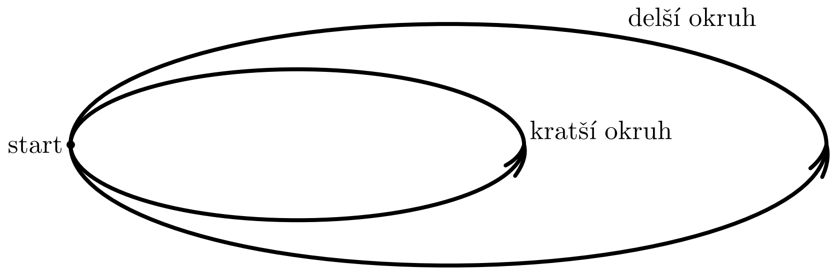
3 body

Poznámka: Vztah pro rozdíl průměrných rychlostí v části b) lze také odvodit ze skutečnosti, že Martin za dobu t ušel průměrnou rychlostí v_{pM} vzdálenost s (tu ze zadání nevyčteme), Zdeněk průměrnou rychlostí v_{pZ} pouze $s - \Delta s$. Pro rozdíl rychlostí pak dostáváme

$$v_{\mathrm{pM}} - v_{\mathrm{pZ}} = \frac{s}{t} - \frac{s - \Delta s}{t} = \frac{\Delta s}{t} = \frac{10\,\mathrm{m}}{60\,\mathrm{min}} \doteq 0{,}166\,67\,\mathrm{m/min} \doteq 0{,}17\,\mathrm{m/min}.$$

10: FO56E3–1: Inlajnisté **[73 %]**

Město postavilo dva okruhy pro inlajnisty – kratší o délce 400 m a delší o délce 1000 m. Oba okruhy začínají ve stejném místě (obr. 4.4). Adam jezdí po delší dráze a kolo ujede za 2 minuty, Barbora jezdí po kratší dráze rychlostí 5 m/s. Na trať vyjedou společně.



Obrázek 4.3: Okruhy pro inlajnisty

a) Za jak dlouho se poprvé setkají v místě startu a kolik kol každý z nich do té doby ujede?
b) Po krátké přestávce Adam začne jezdit po kratší dráze a Barbora po delší dráze. Za jak dlouho se poprvé setkají v místě startu a kolik kol každý z nich do té doby ujede?
c) Druhý den se k Adamovi, který jezdí po delší dráze, a Barboře, která jezdí po kratší dráze, přidá Daniel, který začne na delší dráze a pravidelně střídá delší a kratší dráhu. Projetí delšího okruhu mu trvá 3 minuty 20 s. Všichni tři vyrazí na trať současně. Kdy se Daniel poprvé setká v místě startu s Adamem a kdy se poprvé setká v místě startu s Barborou? Jakou vzdálenost přitom musí každý z nich ujet?
d) Pro druhý den zakreslete do jednoho grafu závislosti polohy všech tří závodníků na čase. Uvažte, jak se v grafu projeví, že po projetí celého okruhu se vždy ocitnou zase v místě startu. Zvolte vhodný rozsah hodnot, aby z grafu byly patrné místo a čas setkání Daniela s Adamem i s Barborou v místě startu.

Řešení:

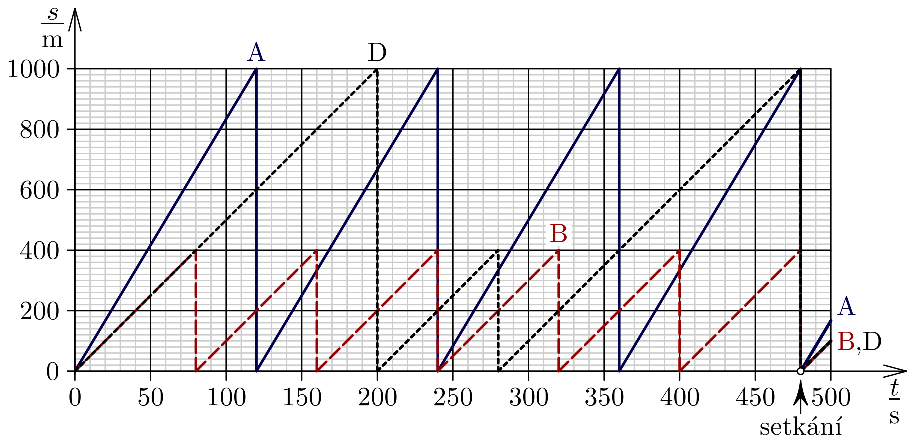
a) Adam projede delší okruh za 2 min = 120 s, Barbora kratší okruh za 400 m/5 m/s = 80 s. Poprvé se tedy potkají po 240 s. Adam přitom ujede 2 kola (vzdálenost $2 \cdot 1\,000\,\mathrm{m} = 2\,000\,\mathrm{m}$), Barbora 3 kola (vzdálenost $3 \cdot 400\,\mathrm{m} = 1\,200\,\mathrm{m}$). **2 body**
b) Adam ujede kratší dráhu za $120\,\mathrm{s} \cdot 400\,\mathrm{m}/1\,000\,\mathrm{m} = 48\,\mathrm{s}$. Barbora ujede delší kolo za $1\,000\,\mathrm{m}/5\,\mathrm{m/s} = 200\,\mathrm{s}$. Nejmenší společný násobek těchto časů pak bude 1 200 s; závodníci se poprvé potkají po 1 200 s a Adam ujede 25 kol (vzdálenost $25 \cdot 400\,\mathrm{m} = 1\,0000\,\mathrm{m}$), Barbora 6 kol (vzdálenost $6 \cdot 1\,000\,\mathrm{m} = 6\,000\,\mathrm{m}$). **2 body**
c) K řešení využijeme tabulku, kde zaznamenáme časy průjezdů všech tří přátel místem startu. Daniel ujede delší okruh za 3 min 20 s = 200 s, kratší okruh ujede za $200\,\mathrm{s} \cdot 400\,\mathrm{m}/1\,000\,\mathrm{m} = 80\,\mathrm{s}$, tj. za stejný čas jako Barbora.

	časy po projetí okruhů v sekundách					
	1.	2.	3.	4.	5.	6.
A	120	240	360	480	600	720
B	80	160	240	320	400	480
D	200	280	480	560	760	840

Všichni tři potkají u startu po 480 s. Adam ujede 4 kola a vzdálenost $4 \cdot 1\,000\,\mathrm{s} = 4\,000\,\mathrm{m}$, Barbora 6 kol a vzdálenost $6 \cdot 400\,\mathrm{m} = 2\,400\,\mathrm{m}$ a Daniel 2 delší a jedno kratší kolo, tj. vzdálenost $2 \cdot 1\,000\,\mathrm{m} + 400\,\mathrm{m} = 2\,400\,\mathrm{m}$ (stejnou jako Barbora).

3 body

d) Na základě hodnot v tabulce sestrojíme graf (viz obr. 4.4). **3 body**



Obrázek 4.4: Graf pohybu inlajnistů

11: FO55E3–1: Závody na táboře [65 %]

Na táboře uspořádali závod v triatlonu, jenž se skládal z plavání na trase 600 m, jízdě na kole 15 km a běžecké dráhy. Mezi chlapci se vítězem stal Pavel, který uplaval plavecký úsek za 20 min, trať cyklistické části zdolal průměrnou rychlostí 25 km/h a běžeckou trať uběhl průměrnou rychlostí 6,0 m/s za 12 min a 15 s. Nejlepší dívka Agáta uplavala předepsaný úsek za 18 min, na kole jela rychlostí jen 18 km/h a stejně dlouhou běžeckou trať uběhla průměrnou rychlostí 5,0 m/s.

a) Vypočítejte, jak dlouhý byl celý závod.

b) Za jak dlouho absolvovali Pavel a Agáta celou trať? Jaká byla jejich průměrná rychlost?

c) Graficky znázorněte závislost dráhy obou závodníků na čase $s(t)$.

d) Den předtím při tréninku vedoucí závodu Mirek absolvoval trasu obráceným směrem; běžeckou část uběhl odpočatý rychlostí 7,2 m/s, na kole dosáhl průměrné rychlosti 24 km/h a plaveckou trasu zvládl při mírné únavě za 24 min. Za jak dlouho absolvoval trénink? Graficky znázorněte závislost dráhy Mirka na čase do téhož grafu jako v úloze c).

Řešení:

a) Pro přehlednost jsou zadané údaje shrnuty v tabulce:

Jméno	Disciplína	Dráha	Rychlost	Doba
Pavel	Plavání	$s_1 = 600\,\mathrm{m}$	v_1	$t_1 = 20\,\mathrm{min}$
	Jízda na kole	$s_2 = 15\,\mathrm{km}$	$v_2 = 25\,\mathrm{km/h}$	t_2
	Běh	s_3	$v_3 = 6{,}0\,\mathrm{m/s}$	$t_3 = 12\,\mathrm{min}\,15\,\mathrm{s}$
Agáta	Plavání	$s_4 = 600\,\mathrm{m}$	v_4	$t_4 = 18\,\mathrm{min}$
	Jízda na kole	$s_5 = 15\,\mathrm{km}$	$v_5 = 18\,\mathrm{km/h}$	t_5
	Běh	s_3	$v_6 = 5{,}0\,\mathrm{m/s}$	t_6

Celkovou délku závodu je možné vypočítat z Pavlových údajů

$$s = s_1 + s_2 + s_3 = s_1 + s_2 + v_3 t_3 =$$
$$= 600\,\mathrm{m} + 15\,000\,\mathrm{m} + 6\,\mathrm{m/s} \cdot 735\,\mathrm{s} = 20\,010\,\mathrm{m} \doteq 20\,\mathrm{km}.$$

2 body

b) Doba, za kterou Pavel absolvoval závod, byla

$$t_\mathrm{p} = t_1 + t_2 + t_3 = t_1 + \frac{s_2}{v_2} + t_3 = \left(1200 + \frac{15}{25} \cdot 3\,600 + 735\right)\,\mathrm{s} = 4\,095\,\mathrm{s} \doteq 1{,}1\,\mathrm{h}.$$

Podobně pro Agátu

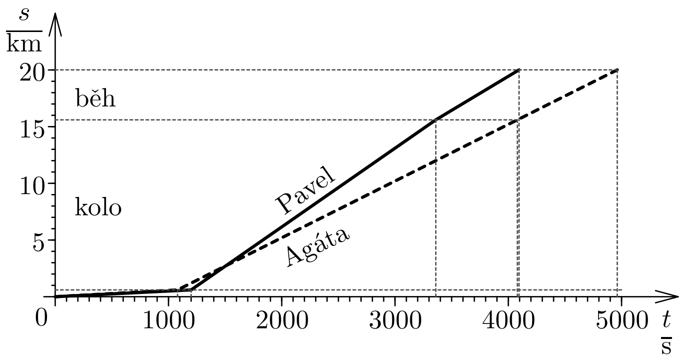
$$t_\mathrm{a} = t_4 + t_5 + t_6 = t_4 + \frac{s_2}{v_5} + \frac{v_3 t_3}{v_6} = \left(1080 + \frac{15}{18} \cdot 3\,600 + \frac{6 \cdot 735}{5}\right)\,\mathrm{s} = 4\,962\,\mathrm{s} \doteq 1{,}4\,\mathrm{h}.$$

Pro průměrné rychlosti vychází

$$v_\mathrm{p} = \frac{s}{t_\mathrm{p}} = \frac{20\,010}{4\,095}\,\mathrm{m/s} \doteq 4{,}9\,\mathrm{m/s}, \qquad v_\mathrm{a} = \frac{s}{t_\mathrm{a}} = \frac{20\,010}{4\,962}\,\mathrm{m/s} \doteq 4{,}0\,\mathrm{m/s}.$$

2 body

c) Grafické znázornění závislosti $s = s(t)$ je pro Pavla i Agátu zakresleno na obrázku.



3 body

d) Zadané údaje opět přehledně shrneme do tabulky:

Jméno	Disciplína	Dráha	Rychlost	Doba
Mirek	Běh	$s_\mathrm{m1} = 4410\,\mathrm{m}$	$v_\mathrm{m1} = 7{,}2\,\mathrm{m/s}$	t_m1
	Jízda na kole	$s_\mathrm{m2} = 15\,\mathrm{km}$	$v_\mathrm{m2} = 24\,\mathrm{km/s}$	t_m2
	Plavání	$s_\mathrm{m3} = 600\,\mathrm{m}$	v_m3	$t_\mathrm{3m} = 24\,\mathrm{min}$

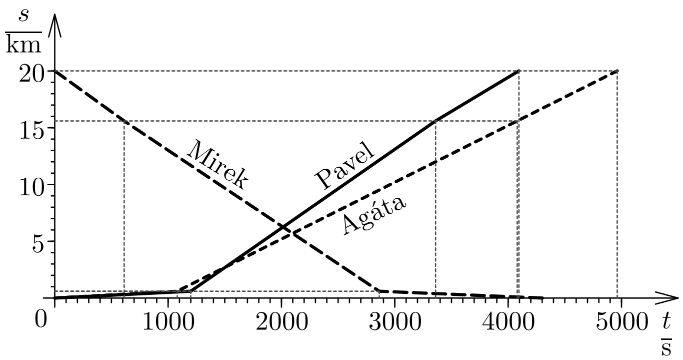
Dopočítáme zbývající údaje

$$t_\mathrm{m1} = \frac{s_\mathrm{m1}}{t_\mathrm{m1}} = \frac{4\,410\,\mathrm{m}}{7{,}2\,\mathrm{m/s}} = 612{,}5\,\mathrm{s}, \qquad t_\mathrm{m2} = \frac{s_\mathrm{m2}}{t_\mathrm{m2}} = \frac{15\,\mathrm{km}}{24\,\mathrm{km/h}} = 0{,}625\,\mathrm{h} = 2\,250\,\mathrm{s}.$$

Závod Mirek zvládl v čase

$$t_\mathrm{m} = t_\mathrm{m1} + t_\mathrm{m2} + t_\mathrm{m3} = 612{,}5\,\mathrm{s} + 2\,250\,\mathrm{s} + 24 \cdot 60\,\mathrm{s} \doteq 4\,300\,\mathrm{s} \doteq 1{,}2\,\mathrm{h}.$$

Grafy jsou na obrázku. **3 body**



12: FO53E3-1: Předjíždění vozidel **[61 %]**

Nákladní vozidlo přepravující část mostní konstrukce o délce 32 m a šířce 6 m je doprovázeno dvěma doprovodnými osobními automobily, z nichž jeden jede vpředu a druhý vzadu, takže vytvářejí kolonu o celkové délce 50 m. Kolona se pohybuje stálou rychlostí 45 km/h.

a) Po úzké ulici v uzavřené obci jede týmž směrem kloubový autobus o délce 18 m stálou rychlostí 54 km/h. Předjíždět začíná 25 m za kolonou a končí v okamžiku, kdy zadní část autobusu se dostane do vzdálenosti 15 m před první doprovodné vozidlo. Určete, jak dlouho trvá předjíždění, jakou dráhu při předjíždění urazí autobus a jakou dráhu kolona vozidel.

b) Za zcela stejných podmínek probíhá předjíždění kolony vozidel týmž kloubovým autobusem, ale v prostoru mimo uzavřenou obec, kdy autobus jede stálou rychlostí 90 km/h. Odpovězte na stejné otázky jako v bodu a).

c) Při předjíždění se stává vozovka neprůjezdnou pro vozidla jedoucí v protisměru. Jak daleko od kolony (tj. od prvního doprovodného automobilu) může být protijedoucí motocykl pohybující se rychlostí stejnou jako kloubový autobus, aby nebyl ohrožen při předjíždění kolony autobusem? Uvažte oba případy – pohyb v obci i mimo obec.

Řešení:

Označme rychlost autobusu $v_\mathrm{a} = 54\,\mathrm{km/h} = 15\,\mathrm{m/s}$, rychlost kolony $v_\mathrm{k} = 45\,\mathrm{km/h} = 12{,}5\,\mathrm{m/s}$.

a) Relativní rychlost autobusu oproti koloně je $\Delta v = v_\mathrm{a} - v_\mathrm{k} = 15\,\mathrm{m/s} - 12{,}5\,\mathrm{m/s} = 2{,}5\,\mathrm{m/s}$. Touto rychlostí musí přední část autobusu ujet vzdálenost $d = 25\,\mathrm{m} + 50\,\mathrm{m} + 15\,\mathrm{m} + 18\,\mathrm{m} = 108\,\mathrm{m}$. Doba předjíždění je $t = d/\Delta v = 108\,\mathrm{m}/2{,}5\,\mathrm{m/s} = 43{,}2\,\mathrm{s}$. Autobus za tuto dobu urazí vzdálenost $s_1 = v_\mathrm{a} \cdot t = 15\,\mathrm{m/s} \cdot 43{,}2\,\mathrm{s} = 648\,\mathrm{m}$, kolona urazí vzdálenost $s_2 = v_\mathrm{k} \cdot t = 12{,}5\,\mathrm{m/s} \cdot 43{,}2\,\mathrm{s} = 540\,\mathrm{m}$. **4 body**

b) Rychlost autobusu v tomto případě bude $v_\mathrm{a1} = 90\,\mathrm{km/h} = 25\,\mathrm{m/s}$. Podobně jako v předchozí části pak dopočítáme $\Delta v' = v_\mathrm{a1} - v_\mathrm{k} = 25\,\mathrm{m/s} - 12{,}5\,\mathrm{m/s} = 12{,}5\,\mathrm{m/s}$. Doba předjíždění je $t = d/\Delta v' = 108\,\mathrm{m}/12{,}5\,\mathrm{m/s} = 8{,}6\,\mathrm{s}$. Autobus za tuto dobu urazí vzdálenost $s_1 = v_\mathrm{a1} \cdot t = 25\,\mathrm{m/s} \cdot 8{,}6\,\mathrm{s} = 216\,\mathrm{m}$, kolona urazí vzdálenost $s_2 = v_\mathrm{k} \cdot t = 12{,}5\,\mathrm{m/s} \cdot 8{,}6\,\mathrm{s} = 108\,\mathrm{m}$. **3 body**

c) V 1. případě autobus při předjíždění urazí vzdálenost 648 m, ve 2. případě 216 m. Protijedoucí motocykl musí být minimálně ve dvojnásobné vzdálenosti od autobusu, než je dráha, kterou autobus urazí. Od začátku kolony musí být minimálně ve vzdálenosti zmenšené o délku kolony a vzdálenost autobusu za kolonou při začátku předjíždění; v 1. případě $l_1 = 2 \cdot 648\,\mathrm{m} - 50\,\mathrm{m} - 25\,\mathrm{m} = 1\,221\,\mathrm{m}$, ve 2. případě $l_2 = 2 \cdot 216\,\mathrm{m} - 50\,\mathrm{m} - 25\,\mathrm{m} = 357\,\mathrm{m}$. **3 body**

4.2.2 Rovnoměrný pohyb po kružnici

13: FO52E3-1: Pohyb londýnského kola **[73 %]**

V roce 1999 bylo na nábřeží řeky Temže v Londýně postaveno velké zábavné zařízení, nazvané The London Eye – Londýnské oko (u nás bychom řekli tzv. ruské kolo). Výška této atrakce je 135 m, po obvodu kola jsou umístěny kabinky pro návštěvníky. Celé kolo se otočí o 360° za dobu 32 min.

a) Stanovte rychlost obvodu kola vzhledem k nástupní ploše a určete, jak bezpečný je nástup či výstup „za jízdy".

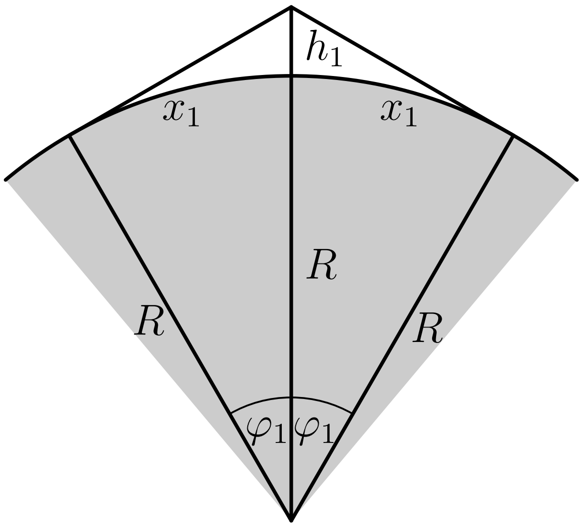
b) Okolí londýnského kola nemůžeme považovat za rovinné, ale předpokládáme, že místa na povrchu Země jsou umístěna na ideální kulové ploše o poloměru 6 370 km. Nakreslete vhodný obrázek Země v řezu a vypočtěte, do jaké vzdálenosti na kulovém povrchu Země lze vidět z kabinky, je-li v horní poloze.

c) V roce 2007 se začalo na nábřeží v Singapuru se stavbou ještě vyššího kola, jež dosahuje až do výše 165 m (viz obr. 4.5); doba jedné otočky je 35 min. Odpovězte na otázky a), b) i pro případ tohoto singapurského technického zařízení.

Obr. 4.5: Singapurské kolo

Řešení:

a) Označíme příslušné veličiny – výška londýnského kola $h_1 = 135$ m, poloměr $r_1 = 67{,}5$ m a doba jedné otočky $t_1 = 32$ m $= 1\,920$ s. Pro obvod kola o_1 a rychlost kabiny na obvodu v_1 pak platí $o_1 = 2\pi r_1 = 424{,}12$ m, $v_1 = o_1/t_1 = 2\pi r_1/t_1 = 0{,}22$ m/s $=$ 22 cm/s, což při nástupu za jízdy je ještě bezpečné. **2 body**



Obr. 4.6: K výpočtu vzdálenosti

b) Okolí londýnského kola podle zadaní nemůžeme považovat za rovinné, ale předpokládáme, že místa na povrchu Země jsou umístěna na ideální kulové ploše o poloměru 6 370 km (viz obr. 4.6). Předpokládáme, že výška atrakce je rovna výšce kabinky nad povrchem Země v horní poloze h_1. Udáváme-li úhel φ_1 v radiánech, lze psát $x_1 = R\varphi_1$, $\cos\varphi_1 = R/\,(R + h_1) = 0{,}999\,98$, $\varphi_1 = 0{,}006\,51\,\mathrm{rad} = 0{,}373°$. Odtud $x_1 =$ 41,5 km; jde však pouze o teoretickou hodnotu, ve skutečnosti je díky atmosférickým vlivům vidět na kratší vzdálenost. **4 body**

c) Pro singapurské kolo podle zadání máme $h_2 = 165$ m, $r_2 = 82{,}5$ m $t_2 = 35$ min $=$ 2 100 s. Dosazením do odvozených vztahů postupně dostáváme: obvod $o_2 = 2\pi r_2 =$ 518,36 m, $v_2 = 2\pi r_2/t_2 = 0{,}24$ m/s $= 24$ cm/s. Pro vzdálenost x_2 pak platí $x_2 = R\varphi_2$, $\cos\varphi_2 = R/\,(R + h_2) = 0{,}999\,97$, $\varphi_2 = 0{,}007\,20\,\mathrm{rad} = 0{,}412°$, $x_2 = 45{,}8$ km. **4 body**

Pozn.: Výpočet vzdálenosti, do které lze dohlédnout z vrcholu atrakce lze provést i bez použití funkce kosinus pomocí Pythagorovy věty, neboť délka oblouku kružnice se v rámci našeho odhadu pro $h_{1,2} \ll R$ příliš neliší od kratší odvěsny pravoúhlého trojúhelníka, lze proto psát

$$x_{1,2}^2 = (R + h_{1,2})^2 - R^2 = h_{1,2}\,(2R + h_{1,2}) \approx 2Rh_{1,2}.$$

Odtud $x_1 = \sqrt{2Rh_1} = 41{,}5\ \mathrm{km}$ a $x_2 = \sqrt{2Rh_2} = 45{,}8\ \mathrm{km}$.

4.3 Práce, výkon, energie

4.3.1 Mechanická práce a výkon

14: FO51E3-2: Pohyb automobilu **[79 %]**

Automobil se pohybuje po dálnici po trase o délce 45 km, jejíž nadmořská výška se skoro nemění, stálou rychlostí 108 km/h. Motor udržuje rovnoměrný pohyb tohoto automobilu, odporové síly proti pohybu závisejí na rychlosti podle vztahu $F_{\mathrm{od}} = kv^2$, kde číselná hodnota $k = 0{,}50$, jestliže sílu a rychlost vyjadřujeme v jednotkách mezinárodní soustavy SI.

a) Jakou velikost mají odporové síly proti pohybu?
b) Jakou práci musí vykonat motor automobilu, aby udržel vozidlo v rovnoměrném pohybu po dané trase?
c) Jaký je mechanický výkon automobilu při jízdě po dálnici?
d) Víte-li, že z tepla, které vznikne spálením benzinu ve válcích automobilu, se může na pohyb využít pouze 20 %, určete spotřebu benzinu při jízdě po dané trase. Výsledek vyjádřete obvyklým způsobem, tj. spotřebou benzinu na 100 km. Při dokonalém spálení 1 litru benzínu získáme 32 MJ tepla.
e) Automobily se po dálnici pohybují zpravidla rychlostí 126 km/h. Jak se přitom změní odpovědi na otázky a) až d)?
f) Technickými úpravami karoserie automobilu se hodnota součinitele k zmenšila na 0,40. Jak se změnily odpovědi na otázky a) až d)?

Řešení:

Označme veličiny: rychlost $v = 108\ \mathrm{km/h} = 30\ \mathrm{m/s}$, dráha $s = 45\ \mathrm{km} = 45\,000\ \mathrm{m}$, účinnost motoru $\eta = 20\,\% = 0{,}2$.

a) Odporová síla $F = kv^2 = 450\ \mathrm{N}$. **1 bod**
b) Vykonaná práce $W = Fs = 20{,}25\ \mathrm{MJ}$. **1 bod**
c) Okamžitý mechanický výkon $P = Fv = kv^3 = 13\,500\ \mathrm{W} = 13{,}5\ \mathrm{kW}$ **1 bod**
d) Z benzínu musíme získat $W/\eta = 20{,}25/0{,}2 = 5 \cdot 20{,}25 = 101{,}25\ \mathrm{MJ}$ tepla. Na to musíme spálit $101{,}25/32 = 3{,}16\ \mathrm{l}$ benzínu na dráze 45 km, to odpovídá spotřebě $100/45 \cdot 3{,}16 = 7{,}03\ \mathrm{l}$ na 100 km. **2 body**
e) Zvýšení rychlosti z $v = 30\ \mathrm{m/s}$ na $v_1 = 126\ \mathrm{km/h} = 35\ \mathrm{m/s}$ ovlivní odporovou sílu $F = kv_1^2 = 612{,}5\ \mathrm{N}$, vykonanou práci $W_1 = F_1 s = 27{,}56\ \mathrm{MJ}$, mechanický výkon (větší síla i rychlost) $P_1 = F_1 v_1 = kv_1^3 = 21{,}4\ \mathrm{kW}$, spotřeba 4,3 l na 45 km, tj. 9,6 l na 100 km. **3 body**
f) Tvarový součinitel ovlivňuje všechny uvedené veličiny, 0,40 je 80 % z původní hodnoty, hodnoty se sníží o 20 %. Pro nižší rychlost 30 m/s vychází postupně síla 360 N,

práce 16,2 MJ, výkon 10,8 kW; potřebné teplo 81 MJ, spotřeba 2,53 l na 45 km neboli 5,63 l na 100 km. Podobně pro rychlost 35 m/s vychází postupně síla 490 N, práce 22,05 MJ, výkon 17,12 kW; potřebné teplo 110,24 MJ, spotřeba 3,45 l na 45 km neboli 7,66 l na 100 km. **2 body**

15: FO52E3-3: Japonská jaderná elektrárna **[71 %]**

Japonská jaderná elektrárna Fukushima I s celkovým výkonem na elektrické části 4,6 GW patří mezi 25 největších jaderných elektráren světa. Japonsko má málo palivových surovin a krátké, na vodu nepříliš bohaté řeky, a proto jaderný program zajišťoval (bez ohledu na vyzkoušení atomových bomb v Hirošimě a Nagasaki) dostatek energetických zdrojů pro 128 miliónů obyvatel. V březnu letošního roku (2011) zemětřesení o intenzitě 9,0 Richterovy stupnice v blízkosti ostrova Honšú a následná vlna tsunami způsobila katastrofický stav na pobřeží, včetně lokality, kde je Fukushima I umístěna. Jaderná elektrárna může pracovat zpravidla bez přerušení provozu s výjimkou doby nezbytné údržby, kterou odhadneme časově na 25 % pro každý ze šesti reaktorů.

a) Kolik hodin ročně pracuje každý z reaktorů a kolik elektrické práce může elektrárna celkem dodat?

b) Stanovte roční spotřebu uhlí o výhřevnosti 12 MJ/kg, které by se používalo v tepelných elektrárnách téhož výkonu jako Fukushima I, je-li celková účinnost tepelné elektrárny 36 %. Dobu údržby neuvažujte.

c) Stanovte roční spotřebu lehkých topných olejů s výhřevností 42 MJ/kg v tepelných zařízeních, jež mohou využít tepla vzniklého spalováním na 90 %, kdybychom jimi chtěli nahradit uvedenou jadernou elektrárnu. Dobu údržby neuvažujte.

Řešení:

Označme celkový výkon elektrárny $P = 4{,}6\,\mathrm{GW}$.

a) Normální (nepřestupný) rok má 365 dní, tj. $365 \cdot 24 = 8\,760\,\mathrm{h}$. Z toho připadá 25 %, tj. 2 190 h na údržbu, a 75 % neboli $t = 6\,570\,\mathrm{h} = 23{,}652 \cdot 10^6\,\mathrm{s}$ na provoz. Celková dodaná energie (elektrická práce) potom vychází $W = Pt = 1{,}088 \cdot 10^{17}\,\mathrm{J} = 30{,}2\,\mathrm{TW}$. **4 body**

b) Neuvažujeme-li dobu údržby, bude celková doba $t' = 365\,\text{dní} = 8\,760\,\mathrm{h} = 3{,}153 \cdot 10^7\,\mathrm{s}$. Výkon elektrárny má být stejný, tj. $P = 4{,}6\,\mathrm{GW}$, dodaná elektrická práce za jeden rok $W' = Pt' = 1{,}45 \cdot 10^{17}\,\mathrm{J}$. Při výhřevnosti paliva $H_1 = 12\,\mathrm{MJ/kg}$ a účinnosti $\eta_1 = 36\,\%$ je potřeba

$$m = \frac{W'}{\eta_1 H_1} = 3{,}358 \cdot 10^{10}\,\mathrm{kg}.$$

3 body

c) Podobně jako v předcházejícím případě má být dodaná elektrická práce $W' = Pt' = 1{,}45 \cdot 10^{17}\,\mathrm{J}$. Při výhřevnosti paliva $H_2 = 42\,\mathrm{MJ/kg}$ a účinnosti $\eta_1 = 90\,\%$ je potřeba

$$m = \frac{W'}{\eta_2 H_2} = 3{,}838 \cdot 10^{9}\,\mathrm{kg}.$$

3 body

16: FO55E3–2: Spotřeba benzínu **[55 %]**

Když se ve válcích motoru dokonale spálí 1 l benzínu, získáme asi 33 MJ tepla, které se pro pohyb automobilu využije nejvýše z 22 %. Při jízdě automobilu po vodorovné přímé silnici působí proti pohybu především okolní vzduch odporovou silou, která závisí na rychlosti automobilu podle vztahu $F = kv^2$, kde konstanta k zahrnuje součinitel odporu vzduchu pro daný tvar automobilu, obsah příčného řezu automobilem a hustotu okolního vzduchu; všechny veličiny včetně rychlosti je nutno dosazovat v jednotkách mezinárodní soustavy SI.

a) Automobil jede po dálnici D11 a řidič-začátečník dosahuje stálé rychlosti 90 km/h, konstanta k je rovna $0{,}52\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{s}^2/\mathrm{m}^2$. Jak velká je odporová síla? Určete, jakou práci vykoná motor automobilu na trase 87 km a na trase 100 km. Jaká bude spotřeba benzínu na 87 km a na 100 km?
b) Zkušený řidič pojede za stejných podmínek po dálnici rychlostí 126 km/h. Jak se to projeví na době jízdy po dálnici, na velikosti odporové síly, na práci vykonané motorem v témž úseku trasy a na spotřebě benzínu na 87 km i na 100 km?
c) Úpravou technických parametrů se na automobilu téže značky, ale novější výroby dosáhlo zmenšení hodnoty konstanty k na $0{,}45\ \mathrm{N}\cdot\mathrm{s}^2/\mathrm{m}^2$, zdokonalením motoru se využitelnost benzínu zvýšila na 25 %. Jak se to projevilo na spotřebě benzínu? Kolik bude stát jízda auta po trase 100 km při uvedených rychlostech? Uvažujte jednotkovou cena za benzín 36,50 Kč/litr.

Řešení:

a) Při rychlosti $v_1 = 90\,\mathrm{km/h} = 25\,\mathrm{m/s}$ je odporová síla

$$F_\mathrm{a} = k_1 v_1^2 = 0{,}52 \cdot 25^2\,\mathrm{N} = 325\,\mathrm{N} \doteq 330\,\mathrm{N}$$

Při ujetí vzdálenosti $s_1 = 87\ \mathrm{km} = 87\,000\ \mathrm{m}$ vykoná motor práci $W_{1\mathrm{a}} = F_\mathrm{a} s_1 = 325\ \mathrm{N}\cdot 87\,000\ \mathrm{m} \doteq 28\ \mathrm{MJ}$. Podobně při ujetí vzdálenosti $s_2 = 100\ \mathrm{km} = 100\,000\ \mathrm{m}$ vykoná motor práci $W_{2\mathrm{a}} = F_\mathrm{a} s_2 = 325\,\mathrm{N}\cdot 100\,000\,\mathrm{m} \doteq 33\,\mathrm{MJ}$. Dokonalým spálením litru benzínu získáme $Q_1 = 33\ \mathrm{MJ/l}$ tepla, při účinnosti motoru $\eta_1 = 22\,\%$ však pouze $Q'_1 = \eta_1 Q_1 = 7{,}26\,\mathrm{MJ}$. Spotřeba benzínu v litrech na ujetí vzdálenosti 87 km pak vychází

$$V_{87\mathrm{a}} = \frac{W_{1\mathrm{a}}}{Q'_1} = \frac{W_{1\mathrm{a}}}{\eta_1 Q_1} = \frac{28}{0{,}22\cdot 33}\,\mathrm{l} \doteq 3{,}9\,\mathrm{l}.$$

Podobně pro vzdálenost 100 km získáváme

$$V_{100\mathrm{a}} = \frac{W_{2\mathrm{a}}}{\eta_1 Q_1} = \frac{33}{0{,}22\cdot 33}\,\mathrm{l} \doteq 4{,}5\,\mathrm{l}.$$

3 body

b) Zkušený řidič pojede za stejných podmínek po dálnici $v_2 = 126\ \mathrm{km/h} = 35\ \mathrm{m/s}$. Odporová síla vychází

$$F_\mathrm{b} = k_1 v_2^2 = 0{,}52 \cdot 35^2\,\mathrm{N} = 637\,\mathrm{N} \doteq 640\,\mathrm{N}$$

Při ujetí vzdálenosti $s_1 = 87\ \mathrm{km} = 87\,000\ \mathrm{m}$ vykoná motor práci $W_{1\mathrm{b}} = F_\mathrm{b} s_1 = 637\ \mathrm{N}\cdot 87\,000\ \mathrm{m} \doteq 55\ \mathrm{MJ}$. Podobně při ujetí vzdálenosti $s_2 = 100\ \mathrm{km} = 100\,000\ \mathrm{m}$ vykoná motor práci $W_{2\mathrm{b}} = F_\mathrm{b} s_2 = 637\,\mathrm{N}\cdot 100\,000\,\mathrm{m} \doteq 64\,\mathrm{MJ}$. Při účinnosti motoru $\eta_1 = 22\,\%$ pak podobně jako v části a) postupně dostaneme

$$V_{87\mathrm{b}} = \frac{W_{1\mathrm{b}}}{\eta_1 Q_1} = \frac{55}{0{,}22\cdot 33}\,\mathrm{l} \doteq 7{,}6\,\mathrm{l}, \qquad V_{100\mathrm{b}} = \frac{W_{2\mathrm{b}}}{\eta_1 Q_1} = \frac{64}{0{,}22\cdot 33}\,\mathrm{l} \doteq 8{,}8\,\mathrm{l}.$$

3 body

c) Využijeme stejné vzorce vztahy jako v částech a) a b). Postupně vychází

$$F_{3\mathrm{a}} = k_2 v_1^2 = 0{,}45 \cdot 25^2\,\mathrm{N} \doteq 281\,\mathrm{N}, \qquad F_{3\mathrm{b}} = k_2 v_2^2 = 0{,}45 \cdot 35^2\,\mathrm{N} \doteq 551\,\mathrm{N},$$
$$W_3 = F_{3\mathrm{a}} s_2 = 281\,\mathrm{N} \cdot 100\,000\,\mathrm{m} \doteq 28\,\mathrm{MJ},$$
$$W_3' = F_{3\mathrm{b}} s_2 = 551\,\mathrm{N} \cdot 100\,000\,\mathrm{m} \doteq 55\,\mathrm{MJ},$$
$$V_{100\mathrm{c}} = \frac{W_3}{\eta_2 Q_1} = \frac{28}{0{,}25 \cdot 33}\,\mathrm{l} \doteq 3{,}4\,\mathrm{l}, \qquad V_{100\mathrm{c}}' = \frac{W_3'}{\eta_2 Q_1} = \frac{55}{0{,}25 \cdot 33}\,\mathrm{l} \doteq 6{,}7\,\mathrm{l}.$$

Při rychlosti 90 km/h je rozdíl spotřeby $4{,}5\,\mathrm{l} - 3{,}4\,\mathrm{l} = 1{,}1\,\mathrm{l}$, ujetí trasy 100 km přijde na 124 Kč, při rychlosti 126 km/h činí rozdíl přibližně $8{,}8\,\mathrm{l} - 6{,}7\,\mathrm{l} = 2{,}1\,\mathrm{l}$ a trasa 100 km přijde na 245 Kč. **4 body**

17: FO53E3-3: Zvedání nákladu na svislém laně [54 %]

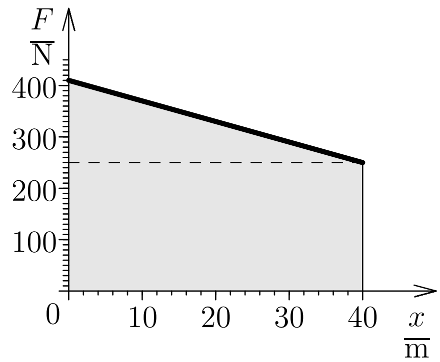
Dělník pracující na novostavbě ve výšce 14. podlaží zvedá smotek podlahové krytiny o hmotnosti 25 kg, upevněný na laně o délce 40,0 m, přičemž hmotnost jednoho metru lana je 400 g. Lano se postupně namotává na dřevěný válec o průměru 30 cm, dělník používá kliku o délce 60 cm (tzv. rumpál). Na počátku zvedání ležel smotek právě na zemi a lano bylo napnuté. Při řešení uvažujte tíhové zrychlení $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$.

a) Jakou silou by musel dělník zvedat lano s krytinou, kdyby je táhl směrem svisle vzhůru (bez rumpálu)? Výsledek zakreslete v grafu $F(x)$, kde F je síla, x výška zvednutí krytiny nad zemí v okolí domu.
b) Jakou práci musí dělník při zvedání nákladu vykonat? Použijte grafu z části a).
c) Dokážete určit práci pomocí změny potenciální energie nákladu a lana? Kolik vyjde?
d) Jakou silou působí dělník na kliku a jakou práci vykoná během prvního otočení válce kolem osy? O kolik přitom zvedne náklad?
e) Jestliže zvedání trvá 3,0 min, jaký je výkon dělníka?

Řešení:

a) Hmotnost celého lana je $m_\mathrm{l} = 40\,\mathrm{m} \cdot 0{,}4\,\mathrm{kg/m} = 16\,\mathrm{kg}$, hmotnost nákladu $m = 25\,\mathrm{kg}$. Bez pomoci rumpálu by musel dělník zvedat lano ze začátku silou $F_1 = (m + m_\mathrm{l}) \cdot g = (25\,\mathrm{kg} + 16\,\mathrm{kg}) \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} = 410\,\mathrm{N}$ a na konci silou $F_2 = mg = 25\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} = 250\,\mathrm{N}$. Graf $F = F(x)$ je na obr. 4.7.

2 body



Graf závislosti síly na výšce nad zemí

b) Práce je rovna obsahu plochy pod grafem $F = F(x)$ nebo můžeme měnící se sílu nahradit průměrnou silou

$$W = \frac{F_1 + F_2}{2} h = \frac{410\,\mathrm{N} + 250\,\mathrm{N}}{2} \cdot 40\,\mathrm{m} = 13{,}2\,\mathrm{kJ}.$$

Při použití rumpálu působí dělník sice 4× menší silou, ale po 4× větší dráze.

2 body

c) Těžiště nákladu je na počátku na zemi, musí se proto zvednout o výšku $h = 40\,\mathrm{m}$, lano má na počátku těžiště ve výšce $h/2$ nad zemí, zvedne se proto pouze o výšku $h/2$. Změna potenciální energie lana a krytiny pak vychází

$$\Delta E_\mathrm{p} = mgh + m_\mathrm{l} g \frac{h}{2} = (25\,\mathrm{kg} \cdot 40\,\mathrm{m} + 16\,\mathrm{kg} \cdot 20\,\mathrm{m}) \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} = 13{,}2\,\mathrm{kJ}.$$

2 body

d) Jestliže použije rumpál, je poloměr válce $r_1 = 30\text{ cm}/2 = 15\text{ cm}$, poloměr kliky $r_2 = 60\,\text{cm}$. Musí proto na začátku zvedat lano silou $F_1' = F_1 r_1/r_2 = F_1/4 = 102{,}5\,\text{N}$. Během prvního otočení se náklad zvedne o $h_1 = \pi d = \pi \cdot 0{,}3\text{ m} = 0{,}94\text{ m}$. Na konci bude mít lano délku $h - h_1 = 40\,\text{m} - 0{,}94\,\text{m} = 39{,}06\,\text{m}$ a hmotnost $m_1' = 0{,}4\,\text{kg/m} \cdot 39{,}06\text{ m} = 15{,}6\text{ kg}$. Dělník musí působit silou $F_2' = (m + m_1')\,g r_1/r_2 = 101{,}5\text{ N}$. Průměrná síla napínající lano s nákladem $F_{2\text{p}}$ bude 4× větší, tj. $F_{2\text{p}} = 408\text{ N}$. Vykonaná práce bude rovna

$$W = F_{2\text{p}} h_1 = 408\text{ N} \cdot 0{,}94\text{ m} = 384\text{ J}.$$

2 body

e) Výkon dělníka je dán podílem práce a času $t = 3\text{ min} = 180\text{ s}$, tedy $P = W/t = 13\,200\text{ J}/180\text{ s} = 73{,}3\text{ W}$. **2 body**

18: FO55E3–4: Starší pražské tramvaje **[48 %]**

Tramvaje T3 dlouhou dobu zajišťovaly v Praze městskou hromadnou dopravu. Pro tahovou sílu v nich byly instalovány 4 elektromotory, každý o výkonu 40 kW. Tramvaje dosahovaly na rovině rychlosti 63 km/h a přívod proudu byl zajištěn stejnosměrným vedením o napětí 600 V pomocí tzv. pantografu.

a) Určete proud procházející přívodními vodiči při plném výkonu elektromotorů, za předpokladu, že jejich účinnost je 100 %.

b) Na kolik přišla Dopravní podnik jízda po rovinném úseku o délce 15,0 km a rychlostí 63 km/h, jestliže podniku byla účtována sazba 3,70 Kč za 1 kWh, včetně DPH.

c) Jak velká byla tahová síla, kterou vyvíjela tramvaj T3 při výše uvedené rychlosti, byla-li účinnost převodních mechanismů 85 %?

d) Vyjádřete graficky, jak závisí tahová síla tramvaje při stálém výkonu na její rychlosti (při účinnosti převodních mechanismů 85 %).

Řešení:

a) Celkový výkon elektromotorů dohromady byl 160 kW. Při napětí je 600 V musí být proud, který prochází přívodním vodičem,

$$I = \frac{P}{U} = \frac{160\,000}{600}\text{ A} \doteq 270\text{ A}.$$

2 body

b) Rychlost tramvaje $v = 63\,\text{km/h} = 17{,}5\,\text{m/s}$. Celková spotřebovaná elektrická práce je $W = Pt$, kde $t = s/v = 15\,000/17{,}5\,\text{s} \doteq 860\,\text{s} = 14{,}3\text{ min}$. Potom $W = 160\,\text{kW} \cdot 860\,\text{s} \doteq 137\,\text{MJ}$.

Dále také $1\text{ J} = 1\text{ W}\cdots$ a $1\text{ kWh} = 3\,600\,000\text{ W}\cdots = 3\,600\,000\text{ J} = 3{,}6\text{ MJ}$. Potom $W = 137\,\text{MJ} = 137/3{,}6\,\text{kWh} = 38\,\text{kWh}$, což odpovídá ceně asi $38 \cdot 3{,}7\,\text{Kč} \doteq 140\,\text{Kč}$. Tramvaj však jede delší dobu, musí se rozjíždět a zastavovat, takže uvedená částka by byla podstatně větší. **3 body**

c) Pro aktivní výkon tramvaje platí

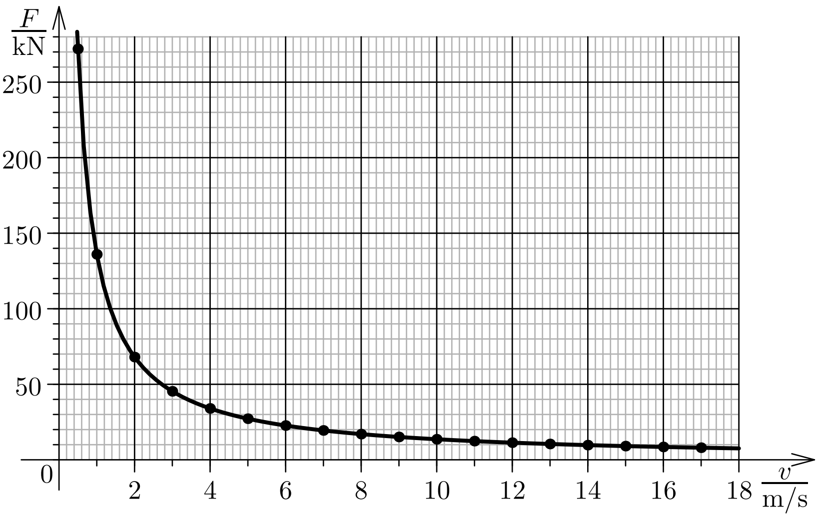
$$P_\text{t} = 0{,}85P = Fv; \qquad F = \frac{0{,}85 \cdot P}{v} = \frac{0{,}85 \cdot 160}{17{,}5}\,\text{kN} \doteq 7{,}8\,\text{kN}.$$

2 body

d) Nejprve je potřeba zvolit si některé hodnoty rychlosti tramvaje a dopočítat k nim tahovou sílu; například lze vyjít z hodnot v následující tabulce:

$\frac{v}{\mathrm{m/s}}$	0,5	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10	11	12	13	14	15	16	17
$\frac{F}{\mathrm{kN}}$	272	136	68,0	45,3	34	27,2	22,7	19,4	17,0	15,1	13,6	12,4	11,3	10,5	9,71	9,07	8,50	8,00

Graf závislosti $F(v) = \dfrac{136}{v}$ kN je na obrázku.



3 body

19: FO57E3-1: Přemísťování bedny **[46 %]**

Plnou bednu tvaru krychle s délkou hrany 40 cm s homogenním obsahem máme dopravit do vzdálenosti 2 m. Bednu můžeme buď posunovat nebo překlápět kolem hrany. Bedna má hmotnost 24 kg. Součinitel smykového tření mezi bednou a podlahou je 0,15.

a) Určete práci nutnou k přemístění bedny posunutím.
b) Určete práci nutnou k přemístění bedny překlápěním.
c) Při jakém součiniteli smykového tření by obě práce byly stejné?

Řešení:

Označme hranu bedny tvaru krychle $a = 40$ cm, vzdálenost, do které máme bednu přemístit $s = 2$ m, hmotnost bedny $m = 24$ kg, součinitel smykového tření $f = 0{,}15$.

(a) (b)

Obrázek 4.8: Přemísťování bedny (k úloze FO57E3-1)

a) Práce potřebná k posunutí bedny je

$$W = Fs = fmgs = 0{,}5 \cdot 24\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} \cdot 2\,\mathrm{m} = 72\,\mathrm{J}.$$ **2 body**

b) Při překlápění konáme práci jen do uvedení do rovnovážné polohy vratké, kdy je těžiště v nejvyšší poloze. Poté se bedna převrátí sama. Počáteční výška těžiště je $h_1 = a/2 = 20$ cm (viz obr. 4.8a). Konečnou výšku těžiště určíme jako polovinu úhlopříčky čtverce podle Pythagorovy věty (viz obr. 4.8b).

$$h_2 = \sqrt{h_1^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{(20\ \mathrm{cm})^2 + \left(\frac{40\ \mathrm{cm}}{2}\right)^2} \doteq 28{,}3\ \mathrm{cm}.$$

Těžiště zvětšilo svoji výšku nad podlahou o $h = h_2 - h_1 = 28{,}3\ \mathrm{cm} - 20\ \mathrm{cm} = 8{,}3\ \mathrm{cm} = 0{,}083\ \mathrm{m}$. **3 body**

Při jednom překlopení se tak vykonala práce, která je rovna přírůstku polohové energie bedny $E_1 = mgh = 24\ \mathrm{kg} \cdot 10\ \mathrm{N/kg} \cdot 0{,}083\ \mathrm{m} \doteq 19{,}9\ \mathrm{J}$. Při jednom překlopení se bedna zároveň přemístila o délku jedné hrany, tj. o 40 cm, k přemístění o vzdálenost $s = 2$ m je třeba bednu překlopit 5krát. Vykonaná práce je $W_1 = 5\,E_1 = 5 \cdot 19{,}9\ \mathrm{J} \doteq 100$ J. **2 body**

c) Vykonaná práce při překlápění musí být rovna práci při posunutí se změněným součinitelem smykového tření, tedy

$$f'mgs = 5\,mgh.$$

Z rovnice plyne

$$f' = \frac{5\,mgh}{mgs} = \frac{5\,h}{s} = \frac{5 \cdot 0{,}083\ \mathrm{m}}{2\ \mathrm{m}} \doteq 0{,}21.$$ **3 body**

4.3.2 Mechanická energie

20: FO58E3-4: Na stavbě **[62 %]**

Na staveništi zatloukali stavbaři ocelový kůl délky $d = 2{,}0$ m do země pomocí beranu o hmotnosti $m = 500$ kg (beran je těžké závaží, které pouštíme z výšky a které při dopadu na horní konec zaráží kůl do země). Při prvním nárazu, při němž dopadl beran na kůl z výšky $h = 3{,}0$ m (tj. 5,0 m nad zemí), vnikl do půdy do hloubky $s_1 = 30$ cm.

a) Jak velkou průměrnou odporovou silou F působila půda proti vnikání kůlu?

b) O jakou délku s_2 vnikne kůl do půdy při druhém nárazu, jestliže se velikost odporové síly nezmění a beran padá ze stejné výšky nad povrchem země?

c) Po kolikátém nárazu bude při nezměněných podmínkách do země zaražena přibližně polovina kůlu?

Uvažujte hodnotu tíhového zrychlení $g = 9{,}8\ \mathrm{N/kg} = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$.

Řešení:

a) Beran padá z výšky h, po dopadu na kůl se posune zároveň s kůlem ještě o délku s_1. Změna polohové energie beranu ΔE_{p1} je ekvivalentní práci W_1 vykonané při překonávání odporové síly F po dráze s_1, tedy práci $W_1 = Fs_1$. Z rovnosti

$$Fs_1 = mg\,(h + s_1)$$

určíme odporovou sílu

$$F = mg\,\frac{h + s_1}{s_1} = 500\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}8\ \mathrm{N/kg} \cdot \frac{3\ \mathrm{m} + 0{,}3\ \mathrm{m}}{0{,}3\ \mathrm{m}} = 5\,3900\ \mathrm{N} \doteq 54\ \mathrm{kN}.$$ **3 body**

b) Při druhém nárazu dopadne beran na kůl z výšky $h + s_1$ a posune kůl do země o délku s_2. Pro změnu polohové energie a práci odporové síly nyní můžeme psát

$$\Delta E_{p2} = mg\,(h + s_1 + s_2) = F s_2,$$

odkud po dosazení za F z části a) získáváme

$$mg\,(h + s_1 + s_2) = mg\,\frac{h + s_1}{s_1}\,s_2,$$

$$s_2 = s_1 \frac{(h + s_1)}{h} = 0{,}3\ \mathrm{m} \cdot \frac{3\ \mathrm{m} + 0{,}3\ \mathrm{m}}{3\ \mathrm{m}} = 0{,}33\ \mathrm{m} = 33\ \mathrm{cm}.$$ **3 body**

c) Po druhém nárazu vnikne do země část kůlu o celkové délce $s_1 + s_2 = 0{,}63$ m. Podobně jako v části b) určíme vzdálenost s_3, o kterou kůl pronikne dále do země po třetím nárazu; postupně odvodíme

$$mg\,(h + s_1 + s_2 + s_3) = F s_3,$$

$$mg\,(h + s_1 + s_2 + s_3) = mg\,\frac{h + s_1}{s_1}\,s_3,$$

$$s_3 = s_1 \frac{(h + s_1 + s_2)}{h} = 0{,}3\ \mathrm{m} \cdot \frac{3\ \mathrm{m} + 0{,}3\ \mathrm{m} + 0{,}33\ \mathrm{m}}{3\ \mathrm{m}} = 0{,}363\ \mathrm{m} \doteq 36\ \mathrm{cm}.$$

Po sečtení vidíme, že

$$s_1 + s_2 + s_3 \doteq 30\ \mathrm{cm} + 33\ \mathrm{cm} + 36\ \mathrm{cm} = 99\ \mathrm{cm},$$

což téměř odpovídá polovině délky kůlu $d/2 = 2\,\mathrm{m}/2 = 1\,\mathrm{m}$. Přibližně polovina kůlu bude zatlučena po třetím nárazu. **4 body**

Poznámka: Pokud řešitelé zdůvodní, že 99 cm po třetím nárazu je méně než polovina kůlu $d/2 = 1$ m a je tedy zapotřebí ještě jednoho nárazu beranu, doporučujeme uznat i takový závěr za správný.

4.4 Mechanika kapalin

4.4.1 Tlak v kapalinách

21: FO56E3–2: Tlak u dna nádoby [64 %]

Určete tlak u dna válcové nádoby o výšce $h = 1\,\mathrm{m}$ za následujících podmínek (uvažujte tíhové zrychlení $g = 10\,\mathrm{m/s^2} = 10\,\mathrm{N/kg}$ a atmosférický tlak $p_a = 100\,000$ Pa):

a) Válec je naplněn po okraj vodou o hustotě $\varrho_v = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}$.
b) Válec je naplněn po okraj rtutí o hustotě $\varrho_{Hg} = 13\,500\,\mathrm{kg/m^3}$.
c) Válec je naplněn vodou a rtutí o stejných hmotnostech.
d) Co se stane, když do válce s vodou a rtutí z části c) vhodíme malou ocelovou a malou dřevěnou kuličku?

Řešení:

a) Tlak na dně bude součtem atmosférického tlaku p_a a hydrostatického tlaku kapaliny v nádobě. Pro tlak na dně trubice proto platí

$$p_1 = p_a + h\varrho_v g = 100\,000\ \mathrm{Pa} + 1\ \mathrm{m} \cdot 1\,000\ \mathrm{kg/m^3} \cdot 10\ \mathrm{m/s^2} = 110\,000\ \mathrm{Pa} = 110\ \mathrm{kPa}.$$

2 body

b) Podobně při naplnění válce rtutí o hustotě $\varrho_{\mathrm{Hg}} = 13\,500\,\mathrm{kg/m^3}$ získáme

$$p_2 = p_\mathrm{a} + h\varrho_{\mathrm{Hg}}g = 100\,000\,\mathrm{Pa} + 1\,\mathrm{m}\cdot 13\,500\,\mathrm{kg/m^3}\cdot 10\,\mathrm{m/s^2} = 235\,000\,\mathrm{Pa} = 235\,\mathrm{kPa}.$$

2 body

c) Označme plochu dna nádoby S. Pro hmotnosti vody m_v a rtuti m_{Hg} v nádobě a jejich objemy V_v, V_{Hg} platí

$$m_\mathrm{v} = V_\mathrm{v}\varrho_\mathrm{v}; \qquad m_{\mathrm{Hg}} = V_{\mathrm{Hg}}\varrho_{\mathrm{Hg}}.$$

Podle zadání $m_\mathrm{v} = m_{\mathrm{Hg}}$, pro objemy a výšky, které zaplní rtuť a voda platí

$$\frac{V_\mathrm{v}}{V_{\mathrm{Hg}}} = \frac{Sh_\mathrm{v}}{Sh_{\mathrm{Hg}}} = \frac{h_\mathrm{v}}{h_{\mathrm{Hg}}} = \frac{\varrho_{\mathrm{Hg}}}{\varrho_\mathrm{v}} = 13{,}5.$$

a zároveň $h_\mathrm{v} + h_{\mathrm{Hg}} = h = 1\,\mathrm{m}$. **2 body**

Odtud pro výšky vody a rtuti získáváme

$$h_\mathrm{v} = h\frac{\varrho_{\mathrm{Hg}}}{\varrho_\mathrm{v} + \varrho_{\mathrm{Hg}}} = 1\,\mathrm{m}\cdot\frac{13\,500\,\mathrm{kg/m^3}}{1\,000\,\mathrm{kg/m^3} + 13\,500\,\mathrm{kg/m^3}} = 0{,}931\,\mathrm{m},$$

$$h_{\mathrm{Hg}} = h - h_\mathrm{v} = h\frac{\varrho_\mathrm{v}}{\varrho_\mathrm{v} + \varrho_{\mathrm{Hg}}} = 1\,\mathrm{m}\cdot\frac{1000\,\mathrm{kg/m^3}}{1\,000\,\mathrm{kg/m^3} + 13\,500\,\mathrm{kg/m^3}} = 0{,}069\,\mathrm{m}.$$

1 bod

Pro tlak u dna nádoby pak vychází

$$\begin{aligned} p &= p_\mathrm{a} + (h_\mathrm{v}\varrho_\mathrm{v} + h_{\mathrm{Hg}}\varrho_{\mathrm{Hg}})\,g = \\ &= 100\,000\,\mathrm{Pa} + \big(0{,}931\,\mathrm{m}\cdot 1\,000\,\mathrm{kg/m^3} + 0{,}069\,\mathrm{m}\cdot 13\,500\,\mathrm{kg/m^3}\big)\cdot 10\,\mathrm{m/s^2} = \\ &= 118\,620\,\mathrm{Pa} \doteq 119\,\mathrm{kPa}. \end{aligned}$$

1 bod

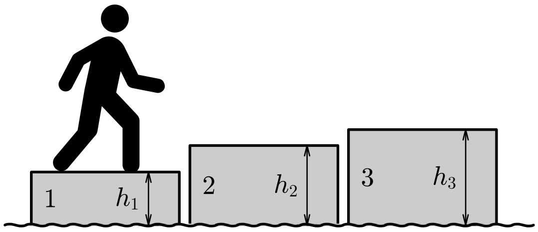
d) V tabulkách najdeme hustotu např. smrkového dřeva $\varrho_\mathrm{d} = 650\,\mathrm{kg/m^3}$ (ze zkušenosti víme, že hustota většiny druhů dřeva je menší než hustota vody) a oceli $\varrho_\mathrm{o} = 7\,850\,\mathrm{kg/m^3}$. Dřevěná kulička bude plavat na hladině vody (díky menší hustotě, bude voda v horní části nádoby a rtuť ve spodní) a ocelová na hladině mezi vodou a rtutí. Množství vody odpovídající objemu kuličky pod hladinou vody přitom z nádoby vyteče. **2 body**

Poznámka k hodnocení: Pokud řešitelé zapomenou započítat atmosférický tlak vzduchu, ale výpočet hydrostatického tlaku zvládnou bez chyby, měla by jim být započítána část bodového zisku, v části a) a b) vždy 1 bod a v části c) pokud správně určí poměr výšek a hydrostatické tlaky 3 body.

4.4.2 Archimédův zákon

22: FO59E3-3: Z jedné kry na druhou **[73 %]**

V klidném oceánu plavou tři ledové kry označené na obr. 4.9 čísly 1, 2 a 3. Kry mají přibližně tvar kvádrů se stejnými podstavami. Na kře 1 navíc stojí Eskymák (měřítko člověka a ledových ker na obrázku neodpovídá skutečnosti). Nad vodou vyčnívají části ker o výšce $h_1 = 5{,}0\,\mathrm{cm}$, $h_2 = 10\,\mathrm{cm}$ a $h_3 = 12\,\mathrm{cm}$.



Obrázek 4.9: Eskymák skáče z ledové kry na kru v úloze FO59E3-3

a) Když Eskymák přeskočí ze kry 1 na kru 2, ustálí se horní plochy těchto ker ve stejné výšce nad hladinou. V jaké výšce nad hladinou $h_{1\mathrm{a}}$, $h_{2\mathrm{a}}$ a $h_{3\mathrm{a}}$ budou horní plochy ker?
b) Potom Eskymák přeskočí ze kry 2 na kru 3. V jaké výšce nad hladinou $h_{1\mathrm{b}}$, $h_{2\mathrm{b}}$ a $h_{3\mathrm{b}}$ budou horní plochy ledových ker po ustálení rovnováhy v tomto případě?

Řešení:

a) Pro každou kru platí, že tíhová síla působící na kru (plus tíhová síla působící na člověka, jestliže stojí na kře) je rovna vztlakové síle působící na ponořenou část kry. Podle Archimédova zákona pro vztlakovou sílu platí

$$F_{\mathrm{vz}} = \varrho g V,$$

kde ϱ je hustota vody v oceánu, g tíhové (gravitační) zrychlení a V objem ponořené části kry, který můžeme vyjádřit vztahem $V = SH$, kde S je plocha podstavy a H výška ponořené části kry.
Odtud plyne, že výška H ponořené části kry je úměrná hmotnosti kry, případně součtu hmotností kry a Eskymáka, který na ní stojí. Přejde-li Eskymák z jedné kry na druhou, vynoří se první z vody o stejnou výšku, o jakou se naopak druhá ponoří pod vodu. **4 body**
Poznámka: Řešitelé mohou k tomuto závěru dospět různými cestami, doporučujeme uznat každé rozumné zdůvodnění.
Při přechodu ze kry 1 na kru 2 tedy získáváme vztah pro výšky částí ker nad vodou

$$h_1 + h_2 = h_{1\mathrm{a}} + h_{2\mathrm{a}}$$

a zároveň podle zadání po přeskoku budou horní podstavy ker 1 i 2 ve stejné výšce nad hladinou, takže $h_{1\mathrm{a}} = h_{2\mathrm{a}}$. Po dosazení do předcházející rovnice vychází

$$2h_{1\mathrm{a}} = h_1 + h_2, \quad h_{1\mathrm{a}} = h_{2\mathrm{a}} = \frac{h_1 + h_2}{2} = \frac{5\ \mathrm{cm} + 10\ \mathrm{cm}}{2} = 7{,}5\ \mathrm{cm}.$$

U třetí kry se nic nezmění, proto $h_{3\mathrm{a}} = h_3 = 12\ \mathrm{cm}$. **3 body**

b) Z předcházející části vidíme, že výška vynořené části se změní vždy o $h = h_{1\mathrm{a}} - h_1 = h_2 - h_{2\mathrm{a}} = 10\,\mathrm{cm} - 7{,}5\,\mathrm{cm} = 2{,}5\,\mathrm{cm}$. Po přeskoku ze kry 2 na kru 3 proto dostáváme

$$h_{2b} = h_{2a} + h = h_2 = 10\ \mathrm{cm}, \quad h_{3b} = h_3 - h = 12\ \mathrm{cm} - 2{,}5\ \mathrm{cm} = 9{,}5\ \mathrm{cm}.$$

U první kry se nic nezmění, $h_{1\mathrm{b}} = h_{1\mathrm{a}} = 7{,}5\ \mathrm{cm}$. **3 body**

23: FO58E3-3: Plovoucí pyramida **[72 %]**

Z velkého počtu malých, pravidelně uspořádaných kostek je slepena pyramida o deseti vrstvách (viz obr. 4.10).
a) Kolik kostek je v pyramidě?

Obrázek 4.10: Pyramida z kostek. (a) První tři vrstvy pyramidy při pohledu shora. (b) Celá pyramida z boku

b) Postavíme-li pyramidu na hladinu petroleje o hustotě $\varrho_1 = 800\,\mathrm{kg/m^3}$, ponoří se právě tři spodní vrstvy. Jaká by byla hustota ϱ_2 kapaliny, ve které by se ponořily právě dvě spodní vrstvy, a jaká by byla hustota kapaliny ϱ_3, ve které by se ponořila právě jedna, spodní vrstva kostiček?

c) Která vrstva se částečně namočí, ponoříme-li pyramidu do vody o hustotě $\varrho_\mathrm{v} = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}$, ale špičkou dolů? Kolik stejných kostek navíc budeme muset postavit na horní plochu, aby se tato vrstva namočila celá?

Řešení:

a) Celá pyramida obsahuje

$$n_\mathrm{k} = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 + 100 = 385\,\text{kostek}. \qquad \textbf{2 body}$$

b) Tři spodní vrstvy obsahují $n_1 = 64 + 81 + 100 = 245$ kostek; vztlaková síla je tedy rovna tíze kapaliny (petroleje) o stejném objemu. Podle Archimédova zákona je tato síla rovna tíze celé pyramidy

$$n_1 V_1 \varrho_1 g = mg, \tag{4.1}$$

kde V_1 je objem jedné kostky, ϱ_1 je hustota petroleje a m hmotnost celé pyramidy. Spodní dvě vrstvy obsahují $n_2 = 181$ kostek, spodní vrstva $n_3 = 100$ kostek. Pak pro druhou a třetí kapalinu dostáváme

$$n_2 V_1 \varrho_2 g = mg \tag{4.2}$$

$$n_3 V_1 \varrho_3 g = mg \tag{4.3}$$

Porovnáním vztahů (4.1) a (4.2) dostáváme

$$\varrho_2 = \frac{n_1}{n_2}\varrho_1 = \frac{245}{181} \cdot 800\,\mathrm{kg/m^3} \doteq 1\,083\,\mathrm{kg/m^3};$$

ze vztahů (4.1) a (4.3) podobně vychází

$$\varrho_3 = \frac{n_1}{n_3}\varrho_1 = \frac{245}{100} \cdot 800\,\mathrm{kg/m^3} = 1\,960\,\mathrm{kg/m^3}. \qquad \textbf{4 body}$$

c) Ve vodě se ponoří pod hladinu n kostek. Pak

$$n V_1 \varrho_\mathrm{v} g = mg. \tag{4.4}$$

Porovnáním vztahů (4.1) a (4.4) získáme

$$n\varrho_\mathrm{v} = 245\varrho_1 \qquad \Longrightarrow \qquad n = 245\frac{\varrho_1}{\varrho_\mathrm{v}} = \frac{245 \cdot 800\,\mathrm{kg/m^3}}{1\,000\,\mathrm{kg/m^3}} = 196.$$

Spodních sedm vrstev převrácené pyramidy obsahuje $1+4+9+16+25+36+49 = 140$ kostek, spodních osm vrstev $n_4 = 1+4+9+16+25+36+49+64 = 204$ kostek, částečně ponořená je tedy osmá vrstva. Aby se ponořila úplně, musíme na horní plochu postavit ještě n' nových kostek a celková hmotnost pyramidy i s kostkami navíc bude m'. S pomocí (4.4) postupně získáme

$$n_4 V_1 \varrho_{\mathrm{v}} g = m' g, \qquad n_4 \cdot \frac{mg}{196} = m' g,$$

$$\frac{m'}{m} = \frac{n_{\mathrm{k}} + n'}{n_{\mathrm{k}}} = \frac{n_4}{n} \qquad n' = n_{\mathrm{k}} \frac{n_4}{n} - n_{\mathrm{k}} = 385 \cdot \frac{204}{196} - 385 \doteq 16.$$

Musíme proto na horní plochu postavit ještě 16 kostek. **4 body**

24: FO55E3–3: Archeologický výzkum na dně jezera [40 %]

Potápěči zjistili, že na dně jezera v hloubce 12 m leží ve vodorovné poloze pískovcový sloup tvaru válce o výšce 8,0 m a kolmém příčném řezu o obsahu 0,75 m^2. Hustota vlhkého pískovce je 2 500 kg/m^3. Před zahájením výpočtů si k lepšímu pochopení nakreslete orientační obrázky, v nichž schematicky znázorníte řešenou situaci.

a) Určete hmotnost sloupu a hydrostatickou vztlakovou sílu, kterou na něj působí voda. Počítejte s hustotou vody $\varrho_{\mathrm{v}} = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}$ a s tíhovým zrychlením $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$.
b) Sloup byl těsně u kraje jedné podstavy omotán lanem a zvedán lanem jeřábu svisle vzhůru. Nejprve byl postaven ve vodě. Jak velkou maximální sílu musel vyvinout jeřáb při postavení sloupu?
c) Jak velkou silou působil jeřáb prostřednictvím lana na sloup při jeho zvednutí k hladině?
d) Jak velkou silou působil jeřáb prostřednictvím lana při zvedání, když byl sloup z vody zcela vytažen a zvedán, dokud spodní konec sloupu nebyl ve výšce 5 m nad hladinou vody?
e) Jak se měnila síla nutná ke zvedání při postupném vynořování sloupu z vody? Podle zjištěných údajů znázorněte graf závislosti velikosti síly v laně na výšce sloupu nad hladinou (zvolte sami, co bude výhodnější – zda výška nade dnem nebo nad hladinou vody apod.).
f) Na základě grafu z úlohy e) se pokuste stanovit práci, nutnou k vyzdvižení sloupu postaveného ve svislé poloze ze dna jezera do výšky 5 m nad hladinou.

Řešení:

a) Hmotnost sloupu je $m = \varrho_{\mathrm{p}} V = \varrho_{\mathrm{p}} h S = 2\,500\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 8\,\mathrm{m} \cdot 0{,}75\,\mathrm{m^2} = 15\,000\,\mathrm{kg}$. Jestliže není sloup zcela „přimáčknutý“ ke dnu, poté na něho okolní voda působí hydrostatickou vztlakovou silou o velikosti

$$F_{\mathrm{vz}} = \varrho_{\mathrm{v}} V g = \varrho_{\mathrm{v}} h S g = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 8\,\mathrm{m} \cdot 0{,}75\,\mathrm{m^2} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} = 60\,\mathrm{kN}.$$

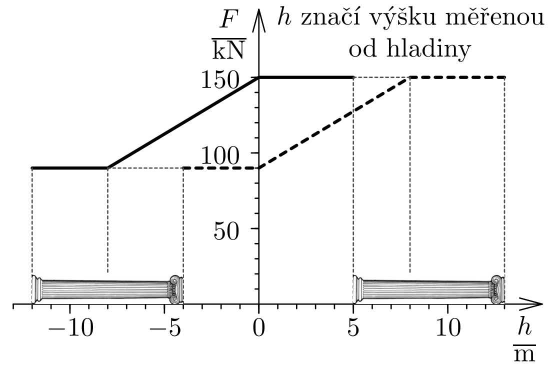
2 body

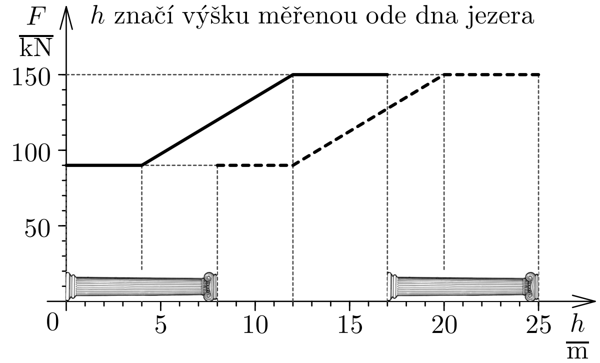
b) Pískovcový sloup budeme považovat za stejnorodé těleso. Na sloup působí v těžišti Země tíhovou silou $F_{\mathrm{G}} = mg = 15\,000\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} = 150\,\mathrm{kN}$. Působiště vztlakové síly $F_{\mathrm{vz}} = 60\,\mathrm{kN}$ je možné uvažovat také v těžišti. Jestliže je sloup ve vodorovné poloze, jeřáb na něho působí těsně u jedné podstavy směrem svisle vzhůru a lehce ho nadzvedl, poté dno jezera působí již jen na druhý konec sloupu, avšak stejně velikou silou, jako jeřáb. K nadzvednutí sloupu je potřeba síla nepatrně větší než $F = \frac{1}{2}(F_{\mathrm{G}} - F_{\mathrm{vz}}) = \frac{1}{2}(150\,\mathrm{kN} - 60\,\mathrm{kN}) = 45\,\mathrm{kN}$, kterou musí jeřáb působit na sloup při začátku zvedání. Čím je sloup více ve „stojaté“ poloze, tím větší silou působí dno a menší silou musí působit jeřáb. Tento detail řešit nebudeme. **2 body**

c) Když byl ještě sloup zcela ponořen, musel jeřáb působit silou $F_2 = F_{\mathrm{G}} - F_{\mathrm{vz}} = 150\,\mathrm{kN} - 60\,\mathrm{kN} = 90\,\mathrm{kN}$. **1 bod**

d) Jakmile sloup již nebyl zcela ponořen do vody, poté se síla, kterou musí působit jeřáb na sloup, zvětšuje, neboť vztlaková síla se zmenšuje. Po úplném vytažení z vody musí jeřáb působit silou $F_3 = F_G = 150\,\mathrm{kN}$. **1 bod**

e) Grafy pro různé možnosti (výška dolní postavy sloupu nade dnem, horní podstavy nade dnem, dolní podstavy sloupu nad hladinou a horní postavy na hladinou jsou na obrázcích).

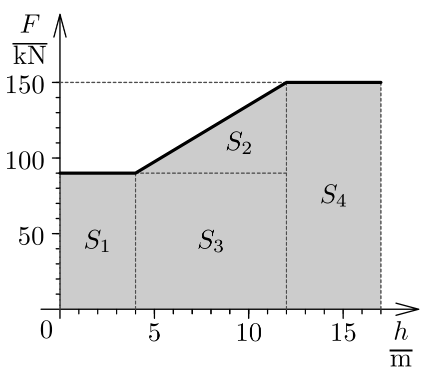




2 body

f) Práci je možné zjistit výpočtem obsahu „útvaru pod grafem". Pro jednoduchost vybereme graf, který začíná v počátku soustavy souřadné, např. pro výšku h dolní podstavy sloupu měřenou ode dna jezera.

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$
$$W = 4\,\mathrm{m} \cdot 90\,000\,\mathrm{N} + \frac{1}{2} \cdot 8\,\mathrm{m} \cdot 60\,000\,\mathrm{N} + 8\,\mathrm{m} \cdot 90\,000\,\mathrm{N} + 5\,\mathrm{m} \cdot 150\,000\,\mathrm{N} =$$
$$= 2\,070\,000\,\mathrm{J} \doteq 2\,\mathrm{MJ}$$



2 body

4.4.3 Hydrodynamika

25: FO54E3: Malá, avšak důležitá místnost [75 %]

V nejmenší domácí uzavřené místnosti (WC) je instalována nádoba na vodu, do které přitéká voda po dobu 50 s a po uvolnění odtoku se nádoba vyprázdní za dobu 10 s. Rozměry nádoby tvaru kvádru jsou ve vodorovném směru 4,00 dm a 12,5 cm. Nejvyšší hladina vody je 24,0 cm nad dnem nádoby, když voda vyteče, zůstane v nádobě zbytek vody o výšce 4,0 cm. Voda přitéká do nádoby trubicí, jejíž vnitřní průměr je 1,27 cm. Víme, že po dosažení nejvyšší hodnoty hladiny se přítok vody automaticky zastaví.

a) Kolik vody vyteče z nádoby při jednom spláchnutí a kolik vody musí zase natéci, než se přívod vody zastaví?

b) Předpokládáme-li, že hladina vody se při napouštění zvyšuje rovnoměrně s časem a během vytékání se rychlost vody poněkud mění (rychlost vytékání vody je dána vztahem $v = \sqrt{2gh}$, kde $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$ je tíhové zrychlení, h výška hladiny vody nad výtokovým otvorem). Načrtněte průběh změn hladiny vody při dvou po sobě následujících spláchnutích.

c) Jakou rychlostí přitéká voda do nádoby? Určete přítok v jednotkách l/min, $\mathrm{m^3/h}$ a také lineární rychlost vody v m/s.

d) Jednou se stalo, že se přítok vody kvůli vodnímu kameni nezastavil a voda záchodem protékala. Bohužel se to stalo právě ve chvíli, kdy v sobotu ráno v 8:00 h rodina odjela na chatu, a toto protékání nikdo nezaregistroval. Z chaty dorazila rodina až v neděli podvečer v 18:00 h. Kolik vody proteklo zbytečně záchodem? Určete i finanční ztrátu rodiny při taxe 72 Kč/$\mathrm{m^3}$ na vodném a stočném.

Řešení:

Rozměry nádoby převedeme na metry: 4,00 dm = 0,4 m, 12,5 cm = 0,125 m, 24 cm = 0,24 m, 4 cm = 0,04 m.

a) Objem vody, která vyteče při spláchnutí (respektive musí zase přitéci), vypočteme podle vztahu pro objem kvádr $V = 0{,}4 \cdot 0{,}125 \cdot (0{,}24 - 0{,}04)\ \mathrm{m^3} = 0{,}01\ \mathrm{m^3} = 10\ \mathrm{dm^3}$. **1 bod**

b) Maximální objem vody v nádobě je

$$V_{\max} = 0{,}4 \cdot 0{,}125 \cdot 0{,}24\ \mathrm{m^3} = 0{,}012\ \mathrm{m^3} = 12\ /\mathrm{dm^3},$$

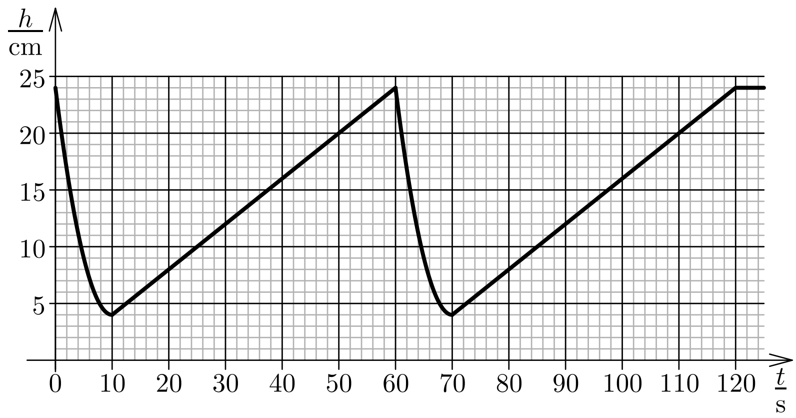
minimální objem vody v nádobě je

$$V_{\min} = 0{,}4 \cdot 0{,}125 \cdot 0{,}04\ \mathrm{m^3} = 0{,}002\ \mathrm{m^3} = 2\ \mathrm{dm^3}.$$

Čas napouštění je 50 s, rychlost napouštění můžeme považovat za konstantní. Čas vypouštění je 10 s, rychlost vypouštění je závislá na množství vody v nádobce. Na začátku je největší, ke konci je stále menší a menší. Závislost výšky hladiny vody v nádobce na čase je znázorněna na obr. 4.11. **3 body**

c) Rychlost přitékání vody do nádoby je dána poměrem objemu nateklé vody za určitou dobu a této doby. Za 50 s přiteče objem $V_{\max} - V_{\min} = 12\ \mathrm{dm^3} - 2\ \mathrm{dm^3} = 10\ \mathrm{dm^3} = 10\ \mathrm{l}$. Rychlost přitékání vody (přítok) je tedy

$$Q = \frac{10\ \mathrm{l}}{50\ \mathrm{s}} = 0{,}2\ \mathrm{l/s} = 60 \cdot 0{,}2\ \mathrm{l/min} = 12\ \mathrm{l/min} = \\ = 60 \cdot 12\ \mathrm{l/h} = 720\ \mathrm{l/h} = 0{,}720\ \mathrm{m^3/h}.$$



Obrázek 4.11: K řešení úlohy FO54E3 – průběh změn hladiny vody při dvou po sobě následujících spláchnutích

Vnitřní průměr trubice je 1,27 cm = 0,012 7 cm, obsah příčného průřezu přívodní trubice potom

$$S = \pi \frac{d^2}{4} \doteq 0{,}000\,13\,\mathrm{m}^2.$$

Přítok vody $Q = Sv = 0{,}2\,\mathrm{l/s} = 0{,}000\,2\,\mathrm{m^3/s}$ Pro lineární rychlost vody dostáváme $v = Q/S \doteq 1{,}5\,\mathrm{m/s}$. **3 body**

d) Za 1 s přiteče $0{,}000\,2\,\mathrm{m}^3$ vody. Od sobotního rána v 8:00 h do nedělního podvečera v 18:00 h uplynula doba celkem 34 h neboli $34 \cdot 3\,600\,\mathrm{s} = 122\,400\,\mathrm{s}$. Za celou tuto dobu protekl záchodem objem $V = 0{,}000\,2 \cdot 122\,400\,\mathrm{m}^3 \doteq 24{,}5\,\mathrm{m}^3$. Finanční ztrátu tak můžeme odhadnout na $24{,}5\,\mathrm{m}^3 \cdot 72\,\mathrm{Kč/m}^3 \doteq 1\,760\,\mathrm{Kč}$. **3 body**

4.5 Vnitřní energie, práce, teplo

4.5.1 Tepelná výměna

26: FO59E3-2: Tvorba páry **[52 %]**

V hliníkovém kotlíku hmotnosti $m_{\mathrm{Al}} = 800$ g se nachází $V = 2{,}0$ l vody o teplotě $t_1 = 20\,°\mathrm{C}$. Kotlík zahříváme na vařiči s příkonem $P_0 = 1\,500$ W. Účinnost zahřívání $\eta = 90\,\%$. Po čase $\tau = 10$ min bylo zahřívání přerušeno a kotlík z vařiče odstaven. Ztráty tepla do okolí zanedbáme.

a) Nakreslete graf závislosti teploty vody na čase.

b) V okamžiku, kdy bylo přerušeno zahřívání, vhodíme do kotlíku kovovou součástku o hmotnosti $m_{\mathrm{k}} = 435$ g, zahřátou na teplotu $t_3 = 900\,°\mathrm{C}$. Po skončení měření bylo zjištěno, že se 4,8 % vody z kotlíku přeměnilo na páru. Kolik procent vody z kotlíku se odpařilo ještě na vařiči a kolik po vhození kovové součástky?

c) Jakou měrnou tepelnou kapacitu má materiál, z něhož je vyrobena kovová součástka?

Měrná tepelná kapacita hliníku je $c_{\mathrm{Al}} = 0{,}90\,\mathrm{kJ/(kg \cdot °C)}$, měrná tepelná kapacita vody je $c = 4{,}2\,\mathrm{kJ/(kg \cdot °C)}$, hustota vody $\varrho = 1{,}0\,\mathrm{kg/dm^3}$, měrné skupenské teplo vypařování vody $l_{\mathrm{v}} = 2\,260\,\mathrm{kJ/kg}$.

Řešení:

a) K zahřátí vody na teplotu $t_2 = 100\,°\mathrm{C}$ musíme dodat teplo

$$Q_1 = mc\,(t_2 - t_1) = \varrho V c\,(t_2 - t_1) =$$
$$= 1{,}0\,\mathrm{kg/dm^3} \cdot 2\,\mathrm{dm^3} \cdot 4\,200\,\mathrm{J/(kg \cdot °C)} \cdot (100\,°\mathrm{C} - 20\,°\mathrm{C}) = 672\,000\,\mathrm{J}.$$

K zahřátí kotlíku musíme dodat teplo

$$Q_2 = m_{\mathrm{Al}} c_{\mathrm{Al}}\,(t_2 - t_1) =$$
$$= 0{,}80\,\mathrm{kg} \cdot 900\,\mathrm{J/(kg \cdot °C)} \cdot (100\,°\mathrm{C} - 20\,°\mathrm{C}) = 57\,600\,\mathrm{J}.$$

Zahřívání vody k bodu varu bude trvat dobu

$$\tau_1 = \frac{Q_1 + Q_2}{\eta P_0} = \frac{672\,000\,\mathrm{J} + 57\,600\,\mathrm{J}}{0{,}9 \cdot 1\,500\,\mathrm{W}} \doteq 540{,}44\,\mathrm{s} \doteq 540\,\mathrm{s} = 9\,\mathrm{min}.$$

Po dosažení teploty varu se další dodané teplo spotřebovává na přeměnu vody v páru a teplota se proto dále nezvyšuje. Graf závislosti teploty na čase je na obr. 4.12.

5 bodů

Obrázek 4.12: Graf závislosti teploty t na čase τ v úloze FO59E3-2

b) Za zbývající čas zahřívání $\tau_2 = \tau - \tau_1 = 10\,\mathrm{min} - 9\,\mathrm{min} = 1\,\mathrm{min} = 60\,s$ se odpaří voda o hmotnosti

$$m_1 = \frac{\eta P_0 \tau_2}{l_{\mathrm{v}}} = \frac{0{,}9 \cdot 1\,500\,\mathrm{W} \cdot 60\,\mathrm{s}}{2\,260\,000\,\mathrm{J/kg}} \doteq 0{,}035\,841\,\mathrm{kg} \doteq 36\,\mathrm{g},$$

tj. asi $0{,}036\,\mathrm{kg}/2\,\mathrm{kg} \doteq 0{,}018$, tedy asi $1{,}8\,\%$ původního množství vody. Při vhození kovové součástky se tedy odpařila ještě $4{,}8\,\% - 1{,}8\,\% = 3\,\%$ původního množství vody, což odpovídá hmotnosti $m_2 = 0{,}03 \cdot 2\,\mathrm{kg} = 0{,}06\,\mathrm{kg} = 60\,\mathrm{g}$ vody. **2 body**

c) Vhození kovové součástky způsobí odpaření vody o hmotnosti m_2 a musí proto platit

$$m_{\mathrm{k}} c_{\mathrm{k}}\,(t_3 - t_2) = m_2 l_{\mathrm{v}}.$$

Odtud vyjádříme

$$c_{\mathrm{k}} = \frac{m_2 l_{\mathrm{v}}}{m_{\mathrm{k}}\,(t_3 - t_2)} =$$
$$= \frac{0{,}060\,\mathrm{kg} \cdot 2\,260\,000\,\mathrm{J/kg}}{0{,}435\,\mathrm{kg} \cdot (900\,°\mathrm{C} - 100\,°\mathrm{C})} = 389{,}65\,\mathrm{J/(kg \cdot °C)} \doteq 390\,\mathrm{J/(kg \cdot °C)}.$$

3 body

V tabulkách bychom zjistili, že kovová součástka je patrně měděná.

27: FO56E3–4: Ohřívání vody na kamnech **(!)[30 %]**

Čtyři kamarádky vyrazily na hory. Do kuchyně na chatě se voda na pití i vaření musela nosit ve vědru. Při vaření čaje v sobotu večer odlila děvčata určité množství vody o hmotnosti m_1 do hrnce, ten pak postavila na velká kamna, v nichž udržovala oheň. Voda v hrnci začala vařit za dobu $\tau_1 = 24$ min. V tom okamžiku si jedna z nich uvědomila, že čaje by bylo pro všechny málo, proto nabrala z vědra ještě určité množství vody o hmotnosti m_2 a dolila do hrnce s vroucí vodou. Teplota vody v hrnci díky tomu poklesla o $\Delta t = 12\,°\mathrm{C}$ a za čas $\tau_2 = 4$ min začala znovu vřít.

a) Jaký je poměr m_1/m_2?

b) Jakou teplotu měla voda donesená ve vědru?

Ztráty tepla do okolí zanedbejte, předpokládejte, že tepelný příkon hrnce s vodou byl po celou dobu vaření konstantní. Uvažujte měrnou tepelnou kapacitu vody $4{,}2\,\mathrm{kJ/(kg \cdot °C)}$ a předpokládejte, že teplota varu vody byla 100 °C.

Řešení:

a) Abychom vodu o hmotnosti m_1 přivedli za čas τ_1 do varu, musíme jí dodat teplo

$$Q_1 = m_1 c\,(t_2 - t_1) = \tau_1 P, \tag{4.5}$$

kde c je měrná tepelná kapacita vody, t_1 je teplota vody ve vědru, $t_2 = 100\,°\mathrm{C}$ je teplota varu vody, P je tepelný výkon dodávaný kamny.
I vodu o hmotnosti m_2 později přilitou do hrnce je potřeba ohřát z teploty t_1 na teplotu varu vody t_2; pro potřebné teplo, jež musíme dodat za čas τ_2, platí

$$Q_2 = m_2 c\,(t_2 - t_1) = \tau_2 P. \tag{4.6}$$

Podělením rovnic (4.5) a (4.6) dostaneme poměr hmotností

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2}.$$ **4 body**

b) Podle kalorimetrické rovnice pro pokles teploty Δt po dolití studené vody platí

$$m_1 c \Delta t = m_2 c\,(t_2 - \Delta t - t_1)\,,$$ **2 body**

odkud dostáváme poměr

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{t_2 - \Delta t - t_1}{\Delta t}.$$ **2 body**

Odtud pak získáme hledanou teplotu vody ve vědru

$$t_1 = t_2 - \Delta t \left(1 + \frac{\tau_1}{\tau_2}\right) = 100\,°\mathrm{C} - 12\,°\mathrm{C} \cdot \left(1 + \frac{24\,\mathrm{min}}{4\,\mathrm{min}}\right) = 16\,°\mathrm{C}.$$

2 body

4.5.2 Kalorimetrická rovnice

28: FO51E3-3: Bazén pro rehabilitaci **[82 %]**

V lázních mají pro rehabilitaci pacientů malý bazén, v němž se provádí zdravotní cvičení. Rozměry dna bazénu jsou 4,8 m × 6,0 m, voda se do něj napouští do výšky 1,25 m. Přitékající voda má v přívodním potrubí se studenou vodou teplotu 15 °C, v potrubí s teplou vodou teplotu 80 °C. Pro cvičení se předpokládá, že voda má stálou teplotu 30 °C. Z hygienických důvodů se musí voda měnit vždy každý den brzy ráno, potrubí pro přítok vody umožňuje naplnění bazénu přesně za 120 min. Měrná tepelná kapacita vody je $4\,200\,\mathrm{J/(kg \cdot °C)}$.

a) Určete objem i hmotnost vody v bazénu po výměně vody.
b) Kolik vody studené a kolik teplé musí přitéci do bazénu, aby bylo dosaženo předepsané teploty? Určete minutový přítok teplé i studené vody.
c) Kdyby se během dne voda speciálně nepřihřívala, pak by se po době 2,0 h její teplota snížila o 2,5 °C. Jaký tepelný výkon musí mít přihřívací zařízení, aby se teplota vody udržovala na stálé hodnotě?
d) V rámci šetření byla nařízená teplota vody snížena na 27 °C, takže i teplotní ztráty se snížily na 1,0 °C za hodinu. Jak se změnily odpovědi na otázky a) až c)?

Řešení:

a) Objem bazénu $V = a \cdot b \cdot c = 36\ \mathrm{m}^3$ hmotnost vody při hustotě $\varrho = 1\,000\ \mathrm{kg/m^3}$ bude $m = \varrho \cdot V = 36\,000\ \mathrm{kg} = 36\ \mathrm{t}$. **1 bod**
b) Označme m_1 a m_2 hmotnosti, $t_1 = 80\ °\mathrm{C}$; $t_2 = 15\ °\mathrm{C}$ potřebnou hmotnost po řadě teplé a studené vody napuštěné do bazénu; $t = 30\ °\mathrm{C}$. Platí

$$m_1 + m_2 = 36\ \mathrm{t}, \quad m_1 c\,(t_1 - t) = m_2 c\,(t - t_2)\,,$$

kde $c = 4\,200\ \mathrm{J/(kg \cdot K)}$ je měrná tepelná kapacita vody, která se v kalorimetrické rovnici pokrátí. Pro poměr hmotností po dosazení dostaneme $50\,m_1 = 15\,m_2$, celková hmotnost se bude dělit v poměru $50 : 15 = 10 : 3$; musí se napustit asi $m_1 = 8{,}3\ \mathrm{t}$ teplé a $m_2 = 27{,}7\ \mathrm{t}$ studené vody, což odpovídá přítoku teplé vody asi $8300/120 = 69{,}2\ \mathrm{l/min}$ a studené vody asi $27\,700/120 = 231\ \mathrm{l/min}$. **2 body**
c) Při poklesu teploty unikne za dobu $\tau = 2\ \mathrm{h} = 7\,200\ \mathrm{s}$ do okolí teplo $Q = mc\Delta t = 36\,000 \cdot 4\,200 \cdot 2{,}5 = 378\ \mathrm{MJ}$. Přihřívací zařízení (průtokový boiler) musí zajistit stálou teplotu a musí mít tepelný výkon, který má tyto ztráty tepla kompenzovat, tj. minimálně $P = Q/\tau = 52{,}5\ \mathrm{kW}$. **4 body**
d) Objem z bodu a) se nemění, z kalorimetrické rovnice vychází

$$m_1' c\,(t_1 - t') = m_2' c\,(t' - t_2)\,,$$

odkud pro $t' = 27\ °\mathrm{C}$ plyne $53\,m_1' = 12\,m_2'$, zároveň stále platí $m_1' + m_2' = 36\ \mathrm{t}$; vychází hmotnosti $m_1 = 6{,}646\ \mathrm{t}$ teplé vody a $m_2 = 29{,}354\ \mathrm{t}$ studené vody; přítoky 55 l/min teplé a 245 l/min studené vody. Tepelné ztráty budou nyní $Q' = m \cdot c \cdot \Delta t' = 36\,000 \cdot 4\,200 \cdot 1 = 151{,}2\ \mathrm{MJ}$ za dobu $\tau' = 1\ \mathrm{h} = 3\,600\ \mathrm{s}$, přihřívací zařízení musí mít tepelný výkon $Q'/\tau' = 42\ \mathrm{kW}$. **3 body**

29: FO60E3-3: Fotbalové utkání [75 %]
Marek chtěl pozvat na sledování fotbalového utkání MS větší společnost. Aby v horkém dni zajistil dostatek občerstvení, nakoupil 40 skleněných čtvrtlitrových lahví hroznové a 25 plechovek pomerančové limonády. Plechovka je z hliníkového plechu a je v ní 0,33 litru limonády. Vše uložil do nové skříňové ledničky, která pracuje s chladícím výkonem $P = 210\ \mathrm{W}$. Před vložením do ledničky měl nákup teplotu $t_1 = 25\ °\mathrm{C}$. Hmotnost jedné prázdné lahve $m_{\mathrm{s1}} = 250\ \mathrm{g}$, hmotnost jedné prázdné plechovky $m_{\mathrm{p1}} = 13\ \mathrm{g}$.
a) Jak dlouho před začátkem utkání by musel Marek vložit nákup do chladničky, aby nápoje při podávání měly teplotu $t_\mathrm{v} = 7\ °\mathrm{C}$?
b) Kolik krychlových kostiček ledu o hraně $a = 1{,}5\ \mathrm{cm}$ a teplotě $t_\mathrm{l} = -18\ °\mathrm{C}$ by musel Marek vložit do sklenice se čtvrtlitrem limonády, kdyby chtěl nápoj ochladit na požadovanou teplotu bez použití ledničky? Tepelnou výměnu mezi sklenicí a okolím ani ochlazování sklenice neuvažujte.

Měrnou tepelnou kapacitu limonády můžeme považovat za rovnou měrné tepelné kapacitě vody $c_\mathrm{v} = 4{,}2\,\mathrm{kJ/(kg\cdot °C)}$. Měrná tepelná kapacita ledu $c_\mathrm{l} = 2{,}1\,\mathrm{kJ/(kg\cdot °C)}$, hliníku $c_\mathrm{Al} = 0{,}90\,\mathrm{kJ/(kg\cdot °C)}$, skla $c_\mathrm{s} = 2{,}6\,\mathrm{kJ/(kg\cdot °C)}$. Měrné skupenské teplo tání ledu je $l_\mathrm{t} = 334\,\mathrm{kJ/kg}$, hustota limonády je přibližně stejná jako hustota vody $\varrho_1 = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}$, hustota ledu je $\varrho_2 = 920\,\mathrm{kg/m^3}$.

Řešení:

a) Protože hmotnost 1 litru vody (a v našem případě i nápoje) při hustotě $\varrho_\mathrm{v} = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}$ je 1 kg, byla celková hmotnost nápojů odpovídat 40 čtvrtlitrům hroznové limonády po 0,25 kg a 25 „třetinkám“ pomerančové limonády po 0,33 kg, dohromady

$$m = (40\cdot 0{,}25\,\mathrm{kg} + 25\cdot 0{,}33\,\mathrm{kg}) = 18{,}25\,\mathrm{kg},$$

celková hmotnost skla

$$m_\mathrm{s} = 40\,m_\mathrm{s1} = 40\cdot 0{,}25\,\mathrm{kg} = 10\,\mathrm{kg},$$

celková hmotnost hliníkových plechovek

$$m_\mathrm{p} = 25\,m_\mathrm{p1} = 25\cdot 0{,}013\,\mathrm{kg} = 0{,}325\,\mathrm{kg}.$$

K ochlazení nápojů z teploty $t_1 = 25\,°\mathrm{C}$ na teplotu $t_\mathrm{v} = 7\,°\mathrm{C}$ je potřeba odebrat teplo

$$\begin{aligned} Q &= (mc_\mathrm{v} + m_\mathrm{s}c_\mathrm{s} + m_\mathrm{p}c_\mathrm{Al})\,(t_1 - t_\mathrm{v}) = \\ &= (18{,}25\cdot 4\,200 + 10\cdot 2\,600 + 0{,}325\cdot 900)\cdot(25-7)\ \mathrm{J} = 1\,852\,965\ \mathrm{J}. \end{aligned}$$

Toto teplo lednička při výkonu $P = 210\,\mathrm{W}$ odebere za čas

$$\tau = \frac{Q}{P} = \frac{1\,852\,965\ \mathrm{J}}{210\ \mathrm{W}} \doteq 8\,823{,}6\,\mathrm{s} \doteq 8\,800\,\mathrm{s} \doteq 150\,\mathrm{min}.$$

5 bodů

b) Označme hmotnost potřebného ledu m_l. Led se musí nejprve ohřát na teplotu tání $t_0 = 0\,°\mathrm{C}$, pak roztát a nakonec se voda z něj vzniklá musí ohřát na výslednou teplotu t_v. Teplo k tomu potřebné dodává nápoj ve sklenici, který chce Marek ochladit, o objemu 0,25 litru a tím o hmotnosti $m_\mathrm{v} = 0{,}25\,\mathrm{kg}$. Platí

$$m_\mathrm{l}\,[c_\mathrm{l}\,(t_0 - t_\mathrm{l}) + l_\mathrm{t} + c_\mathrm{v}\,(t_\mathrm{v} - t_0)] = m_\mathrm{v}c_\mathrm{v}\,(t_1 - t_\mathrm{v})\,.$$

Odtud vychází

$$\begin{aligned} m_\mathrm{l} &= \frac{m_\mathrm{v}c_\mathrm{v}\,(t_1 - t_\mathrm{v})}{c_\mathrm{l}\,(t_0 - t_\mathrm{l}) + l_\mathrm{t} + c_\mathrm{v}\,(t_\mathrm{v} - t_0)} = \\ &= \frac{0{,}25\,\mathrm{kg}\cdot 4\,200\,\mathrm{J/(kg\cdot °C)}\cdot(25\,°\mathrm{C} - 7\,°C)}{2\,100\,\mathrm{J/(kg\cdot °C)}\cdot[0\,°\mathrm{C} - (-18\,°\mathrm{C})] + 334\,\mathrm{kJ/kg} + 4\,200\,\mathrm{J/(kg\cdot °C)}\cdot(7\,°\mathrm{C} - 0\,°\mathrm{C})} \doteq \\ &\doteq 0{,}047\,109\,\mathrm{kg} \doteq 47\,\mathrm{g}. \end{aligned}$$

Jedna kostka ledu má hmotnost

$$m_2 = \varrho_2 V = \varrho_2 a^3 = 920\,\mathrm{kg/m^3}\cdot(0{,}015\,\mathrm{m})^3 = 0{,}003\,105\,\mathrm{kg} = 3{,}105\,\mathrm{g} \doteq 3{,}1\,\mathrm{g},$$

bylo by tedy zapotřebí

$$n = \frac{m_\mathrm{l}}{m_2} = \frac{47{,}109\,\mathrm{g}}{3{,}105\,\mathrm{g}} \doteq 15{,}172 \doteq 16$$

kostiček ledu (v tomto případě je rozumnější zaokrouhlit výsledek nahoru).

5 bodů

30: FO53E3-2: Zahřívání látek **[60 %]**

Michal se rozhodl, že při domácích experimentech začne k vážení používat ocelové matice o hmotnosti 15 g. Protože matice byly znečištěné a mastné, chtěl je vyčistit. Vzal si půl litru vody počáteční teploty 20 °C, kterou ohřál na 100 °C, a postupně do vody naházel 50 matic. Potom vodu znovu ohřál na původní teplotu před vhazováním matic a dřevěnou pinsetou na okurky je vyzvedával a postupně je po mírném oschnutí naházel do nádoby s chladnější vodou (s trochou odmašťovače) o objemu půl litru a původní teplotě 20 °C.

a) Je-li měrná tepelná kapacita oceli 460 J/(kg · °C) a pro vodu 4 200 J/(kg · °C), jak velké teplo je třeba k zahřátí vody z počáteční teploty na bod varu? Jaké teplo je třeba k ohřátí jedné matice z počáteční teploty na bod varu vody?
b) Jak klesne teplota vroucí vody při vhození jedné matice, padesáti matic?
c) Kolik tepla je nutno dodat soustavě voda + matice, aby získala opět teplotu 100 °C?
d) Jak se zvýší teplota závěrečné lázně (nádoby s chladnější vodou) po vhození jedné, deseti, padesáti matic?

Řešení:

Hmotnost objemu 0,5 l vody je $m_\mathrm{v} = 0{,}5\,\mathrm{kg}$.

a) K ohřátí vody je třeba teplo $Q_\mathrm{v} = m_\mathrm{v} c_\mathrm{v} \Delta t = 0{,}5\,\mathrm{kg} \cdot 4\,200\,\mathrm{J/(kg\cdot{}^\circ C)} \cdot (100\,^\circ\mathrm{C} - 20\,^\circ\mathrm{C}) = 168\,\mathrm{kJ}$, k ohřátí jedné matice $Q_\mathrm{m} = m_\mathrm{m} c_\mathrm{m} \Delta t = 0{,}015\,\mathrm{kg} \cdot 460\,\mathrm{J/(kg\cdot{}^\circ C)} \cdot (100\,^\circ\mathrm{C} - 20\,^\circ\mathrm{C}) = 552\,\mathrm{J}$. **3 body**

b) Podle kalorimetrické rovnice po vhození jedné matice platí

$$m_\mathrm{v} c_\mathrm{v} (t_{100} - t) = m_\mathrm{m} c_\mathrm{m} (t - t_{20}),$$
$$t = \frac{m_\mathrm{v} c_\mathrm{v} t_{100} + m_\mathrm{m} c_\mathrm{m} t_{20}}{m_\mathrm{v} c_\mathrm{v} + m_\mathrm{m} c_\mathrm{m}} =$$
$$= \frac{0{,}5\,\mathrm{kg} \cdot 4\,200\,\mathrm{J/(kg\cdot{}^\circ C)} \cdot 100\,^\circ\mathrm{C} + 0{,}015\,\mathrm{kg} \cdot 460\,\mathrm{J/(kg\cdot{}^\circ C)} \cdot 20\,^\circ\mathrm{C}}{0{,}5\,\mathrm{kg} \cdot 4\,200\,\mathrm{J/(kg\cdot{}^\circ C)} + 0{,}015\,\mathrm{kg} \cdot 460\,\mathrm{J/(kg\cdot{}^\circ C)}} = 99{,}7\,^\circ\mathrm{C}.$$

Podobně po vhození padesáti matic klesne teplota vody na

$$m_\mathrm{v} c_\mathrm{v} (t_{100} - t) = 50 m_\mathrm{m} c_\mathrm{m} (t - t_{20}), \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{m_\mathrm{v} c_\mathrm{v} t_{100} + 50 m_\mathrm{m} c_\mathrm{m} t_{20}}{m_\mathrm{v} c_\mathrm{v} + 50 m_\mathrm{m} c_\mathrm{m}} =$$
$$= \frac{0{,}5\,\mathrm{kg} \cdot 4\,200\,\mathrm{J/(kg\cdot{}^\circ C)} \cdot 100\,^\circ\mathrm{C} + 50 \cdot 0{,}015\,\mathrm{kg} \cdot 460\,\mathrm{J/(kg\cdot{}^\circ C)} \cdot 20\,^\circ\mathrm{C}}{0{,}5\,\mathrm{kg} \cdot 4\,200\,\mathrm{J/(kg\cdot{}^\circ C)} + 50 \cdot 0{,}015\,\mathrm{kg} \cdot 460\,\mathrm{J/(kg\cdot{}^\circ C)}} = 88{,}7\,^\circ\mathrm{C}.$$

2 body

c) K opětovnému ohřátí vody s padesáti maticemi na teplotu $t_{100} = 100\,^\circ\mathrm{C}$ je třeba teplo

$$Q = [m_\mathrm{v} c_\mathrm{v} + 50 m_\mathrm{m} c_\mathrm{m}] (t_{100} - t) =$$
$$= [0{,}5\,\mathrm{kg} \cdot 4\,200\,\mathrm{J/(kg\cdot{}^\circ C)} + 50 \cdot 0{,}015\,\mathrm{kg} \cdot 460\,\mathrm{J/(kg\cdot{}^\circ C)}] (100\,^\circ\mathrm{C} - 88{,}7\,^\circ\mathrm{C}) =$$
$$= 27{,}6\,\mathrm{kJ}.$$

3 body

d) Podobně jako v části b) použijeme kalorimetrickou rovnici. Po vhození jedné matice bude výsledná teplota

$$m_\mathrm{v} c_\mathrm{v} (t - t_{20}) = m_\mathrm{m} c_\mathrm{m} (t_{100} - t),$$
$$t = \frac{m_\mathrm{v} c_\mathrm{v} t_{20} + m_\mathrm{m} c_\mathrm{m} t_{100}}{m_\mathrm{v} c_\mathrm{v} + m_\mathrm{m} c_\mathrm{m}} =$$
$$= \frac{0{,}5\,\mathrm{kg} \cdot 4\,200\,\mathrm{J/(kg\cdot{}^\circ C)} \cdot 20\,^\circ\mathrm{C} + 0{,}015\,\mathrm{kg} \cdot 460\,\mathrm{J/(kg\cdot{}^\circ C)} \cdot 100\,^\circ\mathrm{C}}{0{,}5\,\mathrm{kg} \cdot 4\,200\,\mathrm{J/(kg\cdot{}^\circ C)} + 0{,}015\,\mathrm{kg} \cdot 460\,\mathrm{J/(kg\cdot{}^\circ C)}} = 20{,}3\,^\circ\mathrm{C}.$$

Podobně po vhození deseti matic

$$t = \frac{m_\mathrm{v} c_\mathrm{v} t_{20} + 10 m_\mathrm{m} c_\mathrm{m} t_{100}}{m_\mathrm{v} c_\mathrm{v} + 10 m_\mathrm{m} c_\mathrm{m}} =$$

$$= \frac{0{,}5\,\mathrm{kg} \cdot 4\,200\,\mathrm{J/(kg \cdot {}^\circ C)} \cdot 20\,{}^\circ\mathrm{C} + 10 \cdot 0{,}015\,\mathrm{kg} \cdot 460\,\mathrm{J/(kg \cdot {}^\circ C)} \cdot 100\,{}^\circ\mathrm{C}}{0{,}5\,\mathrm{kg} \cdot 4\,200\,\mathrm{J/(kg \cdot {}^\circ C)} + 10 \cdot 0{,}015\,\mathrm{kg} \cdot 460\,\mathrm{J/(kg \cdot {}^\circ C)}} = 22{,}5\,{}^\circ\mathrm{C};$$

po vhození padesáti matic

$$t = \frac{m_\mathrm{v} c_\mathrm{v} t_{20} + 50 m_\mathrm{m} c_\mathrm{m} t_{100}}{m_\mathrm{v} c_\mathrm{v} + 50 m_\mathrm{m} c_\mathrm{m}} =$$

$$= \frac{0{,}5\,\mathrm{kg} \cdot 4\,200\,\mathrm{J/(kg \cdot {}^\circ C)} \cdot 20\,{}^\circ\mathrm{C} + 50 \cdot 0{,}015\,\mathrm{kg} \cdot 460\,\mathrm{J/(kg \cdot {}^\circ C)} \cdot 100\,{}^\circ\mathrm{C}}{0{,}5\,\mathrm{kg} \cdot 4\,200\,\mathrm{J/(kg \cdot {}^\circ C)} + 50 \cdot 0{,}015\,\mathrm{kg} \cdot 460\,\mathrm{J/(kg \cdot {}^\circ C)}} = 31{,}3\,{}^\circ\mathrm{C}.$$

2 body

31: FO57E3-3: Ochlazení džusu ledem [50 %]

Za horkého letního dne dostala Hanka chuť na osvěžující studený džus. Krabici s džusem ovšem zapomněla dát do chladničky, musela proto použít kousek ledu. Do sklenice nejprve nalila 2,0 dl džusu o teplotě 19 °C.

a) Určete hmotnost ledu o teplotě 0 °C, který musí Hanka do sklenice vhodit, aby teplota klesla na 0 °C.

b) Určete hmotnost ledu o teplotě 0 °C, který musí do sklenice vhodit, aby teplota klesla o 1 °C.

c) Určete konečnou teplotu džusu, jestliže do něj Hanka vhodí kostku ledu o objemu 4,0 $\mathrm{cm^3}$.

Předpokládejte, že tepelná výměna probíhá pouze mezi džusem, vodou a ledem. Měrná tepelná kapacita vody a džusu je 4 200 J/(kg · °C), měrné skupenské teplo tání ledu 334 kJ/kg, hustota vody a džusu 1 000 $\mathrm{kg/m^3}$, hustota ledu 920 $\mathrm{kg/m^3}$.

Řešení:

a) Označme m_1 hmotnost džusu, $t_1 = 19\,{}^\circ\mathrm{C}$ počáteční teplotu džusu, m_2 hmotnost ledu, $t_0 = 0\,{}^\circ\mathrm{C}$ teplotu ledu a $l_\mathrm{t} = 334\,000\,\mathrm{J/kg}$ měrné skupenské teplo tání ledu. Led ke svému roztání spotřebuje teplo, které odevzdá džus při ochlazení na bod mrazu. Džus nebo voda o objemu 2 dl má hmotnost $m_1 = \varrho_\mathrm{v} V = 1000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 0{,}000\,2\,\mathrm{m^3} = 0{,}2\,\mathrm{kg}$. Platí rovnice

$$m_1 c\,(t_1 - t_0) = m_2 l_\mathrm{t},$$

v z níž získáváme

$$m_2 = \frac{m_1 c\,(t_1 - t_0)}{l_\mathrm{t}} = \frac{0{,}2\,\mathrm{kg} \cdot 4\,200\,\mathrm{J/(kg \cdot {}^\circ C)} \cdot (19\,{}^\circ\mathrm{C} - 0\,{}^\circ\mathrm{C})}{334\,000\,\mathrm{J/kg}} \doteq 0{,}048\,\mathrm{kg} = 48\,\mathrm{g}.$$

2 body

b) Džus při ochlazení odevzdá teplo, díky němuž led o hledané hmotnosti m_3 roztaje a z něj vzniklá voda zvýší teplotu džusu na konečnou hodnotu $t_2 = 18\,{}^\circ\mathrm{C}$. Platí rovnice

$$m_1 c\,(t_1 - t_2) = m_3 l_\mathrm{t} + m_3 c\,(t_2 - t_0)\,.$$

Odtud dostáváme

$$m_3 = \frac{m_1 c\,(t_1 - t_2)}{l_\mathrm{t} + c\,(t_2 - t_0)} = \frac{0{,}2\,\mathrm{kg} \cdot 4\,200\,\mathrm{J/(kg \cdot {}^\circ C)} \cdot (19\,{}^\circ\mathrm{C} - 18\,{}^\circ\mathrm{C})}{334\,000\,\mathrm{J/kg} + 4\,200\,\mathrm{J/(kg \cdot {}^\circ C)} \cdot (18\,{}^\circ\mathrm{C} - 0\,{}^\circ\mathrm{C})} \doteq$$

$$\doteq 0{,}002\,05\,\mathrm{kg} \doteq 2{,}1\,\mathrm{g}.$$

4 body

c) Džus při ochlazení odevzdá teplo, díky němuž led o objemu $V_L = 4{,}0\ \mathrm{cm}^3 = 0{,}000\,004\ \mathrm{m}^3$ roztaje a teplota vzniklé vody se zvýší na hledanou konečnou hodnotu t_4. Platí rovnice

$$m_1 c\,(t_1 - t_4) = \varrho_\mathrm{L} V_\mathrm{L} l_\mathrm{t} + \varrho_\mathrm{L} V_\mathrm{L} c\,(t_4 - t_0)\,.$$

Z rovnice vyjádříme

$$t_4 = \frac{m_1 c t_1 - \varrho_\mathrm{L} V_\mathrm{L} l_\mathrm{t}}{(m_1 + \varrho_\mathrm{L} V_\mathrm{L})\,c} =$$
$$= \frac{0{,}2\ \mathrm{kg}\cdot 4\,200\ \mathrm{J/(kg\cdot{}^\circ C)}\cdot 19\ {}^\circ\mathrm{C} - 920\ \mathrm{kg/m^3}\cdot 0{,}000\,004\ \mathrm{m^3}\cdot 334\,000\ \mathrm{J/kg}}{(0{,}2\ \mathrm{kg} + 920\ \mathrm{kg/m^3}\cdot 0{,}000\,004\ \mathrm{m^3})\cdot 4\,200\ \mathrm{J/(kg\cdot{}^\circ C)}} \doteq$$
$$\doteq 17\ {}^\circ\mathrm{C}.$$

4 body

4.6 Elektrický proud v kovech

4.6.1 Odpor kovového vodiče

32: FO54E4: Odpor vodiče **[72 %]**

Elektrický odpor drátu se dá vypočítat pomocí vztahu $R = \varrho l/S$, kde R je elektrický odpor, ρ je měrný elektrický odpor, který lze pro daný materiál nalézt v tabulkách, l je délka drátu a S je obsah příčného průřezu drátu. Odpor vychází v základních jednotkách, jestliže ostatní veličiny ve vzorci jsou také v základních jednotkách.

a) Vypočtěte elektrický odpor měděného drátu, jehož délka je 5 m, obsah příčného průřezu je $1\ \mathrm{mm}^2$ a měrný elektrický odpor je $1{,}7\cdot 10^{-8}\ \Omega/\mathrm{m}$.

b) Jak se změní celkový elektrický odpor drátu, jestliže ho rozdělíme na dvě stejné poloviny, které položíme vedle sebe a jejich konce spojíme tak, že po zapojení do obvodu jsou obě poloviny drátu vedle sebe paralelně?

c) Představte si případ, kdy hmotnosti dvou měděných drátů budou stejné, ale první drát bude dvakrát delší, než druhý. Kolikrát větší, nebo menší bude elektrický odpor prvního drátu, než druhého?

Řešení:

a) Po označení veličin, délky $l = 5\ \mathrm{m}$, obsahu příčného průřezu $S = 1\ \mathrm{mm}^2 = 1\cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^2$ a měrného elektrického odporu $\varrho = 1{,}7\cdot 10^{-8}\ \Omega/\mathrm{m}$, dosadíme do vztahu pro odpor drátu

$$R = \varrho\frac{l}{S} = 1{,}7\cdot 10^{-8}\frac{5}{1\cdot 10^{-6}}\ \Omega = 0{,}085\ \Omega.$$

1 bod

b) Při rozdělení drátu na dvě stejné poloviny, bude odpor jedné části drátu $R/2$. Jestliže dvě části k sobě spojíme paralelně, pro výsledný odpor R_c platí

$$\frac{1}{R_\mathrm{c}} = \frac{1}{\frac{R}{2}} + \frac{1}{\frac{R}{2}} = \frac{4}{R}, \qquad \Longrightarrow \qquad R_\mathrm{c} = \frac{R}{4} = 0{,}021\ \Omega.$$

K výsledku lze dojít také aplikací vzorce ze zadání. Na dráty vedle sebe se můžeme dívat jako na vodič poloviční délkou $l' = l/2$ a dvojnásobným příčným průřezem

$S' = 2S$. Výsledný odpor

$$R' = l'\frac{\varrho}{S'} = \frac{l}{2}\frac{\varrho}{2S} = \frac{1}{4}\varrho\frac{l}{S} = \frac{R}{4}$$

je čtyřikrát menší, než původní. **3 body**

c) Jsou-li hmotnosti drátů stejné a oba jsou z mědi, poté musí být stejné i jejich objemy. Je-li první drát dvakrát delší než druhý, potom jeho obsah příčného průřezu musí být poloviční. Bude-li odpor kratšího drátu R a délka delšího drátu je dvojnásobná než kratšího a jeho obsah příčného průřezu je poloviční než kratšího, poté se jedná o opačný případ než úloze b). Odpor delšího vodiče je tedy $4R$. **6 bodů**

33: FO52E3-2: Měděný drát [45 %]

Měděný drát o hmotnosti 3,0 kg a celkovém odporu 30 Ω je ve svitku ve skladu na polici. Odpor téhož drátu o průřezu 1 mm^2 a délky 1,0 m je 0,017 Ω; tuto hodnotu označíme R_1. Hustota mědi je 8 900 kg/m^3. Pro odpor drátu z materiálu popsaného hodnotou R_1, který má délku l v metrech a průřez S v mm^2, platí

$$R = R_1\frac{l}{S}.$$

a) Určete délku, průřez a průměr tohoto drátu.
b) Jak se změní odpor, jestliže vytahovací metodou prodloužíme drát na dvojnásobek?
c) Jak se změní odpor, jestliže se technologickým postupem, při kterém objem drátu zůstává stejný, průměr drátu zvětší (zmenší) dvakrát?

Řešení:

Označme hmotnost drátu $m = 3\,\mathrm{kg}$, jeho celkový odpor $R = 30\,\Omega$, hustotu mědi $\varrho_\mathrm{m} = 8\,900\,\mathrm{kg/m^3}$ a odpor drátu o průřezu $S_1 = 1\,\mathrm{mm^2}$ a délce $l_1 = 1\,\mathrm{m}$ jako $R_1 = 0{,}017\,\Omega$.

a) Pro odpor drátu platí $R = R_1 l/S$, kde průřez S je v mm^2, v případě, že S je v m^2 bude odpor $R = R_1 l/S \cdot 10^{-6}$. Pro objem V platí $V = m/\varrho_\mathrm{m} = Sl$. Platí proto

$$Sl = \frac{m}{\varrho_\mathrm{m}}; \qquad \frac{l}{S} = \frac{R}{R_1}\cdot 10^6.$$

Odtud

$$l = \sqrt{\frac{m}{\varrho_\mathrm{m}}\frac{R}{R_1}\cdot 10^6} = 771{,}3\,\mathrm{m},$$

$$S = \sqrt{\frac{m}{\varrho_\mathrm{m}}\frac{R_1}{R}\cdot 10^{-6}} = 4{,}37\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m^2} = 0{,}437\,\mathrm{mm^2}.$$

Pro průměr drátu d pak ze vztahu $S = \pi d^2/4$ vychází $d = \sqrt{4S/\pi} = 0{,}000\,746\,\mathrm{m} = 0{,}75\,\mathrm{mm}$. **4 body**

b) Při použití vytahovací metody bude délka drátu dvakrát větší, obsah průřezu drátu bude dvakrát menší, tj.

$$R' = R_1\frac{l'}{S'} = R_1\frac{2l}{\frac{S}{2}} = R_1\frac{4l}{S} = 4R = 120\,\Omega.$$

3 body

c) Průměr drátu má být dvakrát větší, obsah průřezu je proto čtyřikrát větší, objem zůstává stejný, délka je proto čtyřikrát menší a odpor

$$R'' = R_1 \frac{l''}{S''} = R_1 \frac{\frac{l}{4}}{4S} = R/16 = 1{,}88\,\Omega.$$

Pokud naopak bude průměr drátu dvakrát menší, bude obsah průřezu je čtyřikrát menší, objem zůstává stejný, délka proto bude čtyřikrát větší a odpor

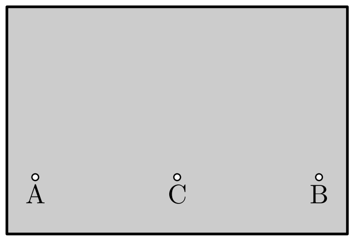
$$R''' = R_1 \frac{l'''}{S'''} = R_1 \frac{4l}{\frac{S}{4}} = 16R = 480\,\Omega.$$

3 body

4.6.2 Ohmův zákon

34: FO60E3-2: Černá skřííňka [67 %]

Na malé černé skříňce jsou tři zdířky A, B a C (obr. 4.14). Uvnitř skříňky jsou tři rezistory o hodnotách odporu $R_1 = 10\,\Omega$, $R_2 = 20\,\Omega$ a $R_3 = 40\,\Omega$ v neznámém zapojení. Připojením ohmmetru mezi zdířky A a B naměříme odpor $R_{\mathrm{AB}} = 28\,\Omega$ a mezi zdířkami je B a C odpor $R_{\mathrm{BC}} = 20\,\Omega$.



Obr. 4.13: Černá skříňka se zdířkami k zadání úlohy FO60E3-2

a) Jaký odpor naměříme mezi zdířkami A a C?
b) Jaký proud bude procházet každým rezistorem a jaké napětí bude na každém rezistoru, zapojíme-li ke zdířkám A a B ideální zdroj s elektromotorickým napětím $U = 12\,\mathrm{V}$?
c) Jaký bude celkový výkon po připojení zdroje?

Řešení:

a) Zdířky B a C jsou zřejmě připojeny k rezistoru R_2 s odporem $20\,\Omega$. Abychom mezi body A a B naměřili $R_{\mathrm{AB}} = 28\,\Omega$, musíme rezistory $R_1 = 10\,\Omega$ a $R_3 = 40\,\Omega$ zapojit paralelně. Pak bude jejich výsledný odpor

$$R_{\mathrm{AC}} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} = \frac{10\,\Omega \cdot 40\,\Omega}{10\,\Omega + 40\,\Omega} = 8\,\Omega.$$

Schéma zapojení mezi zdířkami je na obr. 4.14. **4 body**

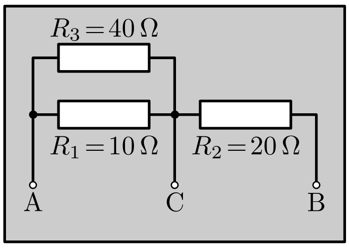
Poznámka: Rezistory R_1 a R_3 lze pochopitelně zaměnit, uznáno by mělo být i jakékoli ekvivalentní zapojení s upraveným propojením nebo větvením vodičů.

b) Po připojení zdroje bude obvodem procházet celkový proud

$$I = I_{\mathrm{AB}} = \frac{U}{R_{\mathrm{AB}}} = \frac{12\,\mathrm{V}}{28\,\Omega} = \frac{3}{7}\,\mathrm{A} \doteq 0{,}428\,57\,\mathrm{A} \doteq 430\,\mathrm{mA}.$$

Na rezistoru $R_2 = 20\,\Omega$ bude napětí

$$U_{\mathrm{BC}} = R_2 I = 20\,\Omega \cdot 0{,}428\,57\,\mathrm{A} = 8{,}571\,4\,\mathrm{V} \doteq 8{,}6\,\mathrm{V},$$



Obrázek 4.14: Zapojení rezistorů v černé skříňce v úloze FO60E3-2

na zbylých rezistorech mezi body A a C bude napětí

$$U_{\mathrm{AC}} = U - U_{\mathrm{BC}} = 12\,\mathrm{V} - 8{,}571\,4\,\mathrm{V} = 3{,}428\,6\,\mathrm{V} \doteq 3{,}4\,\mathrm{V}.$$

Rezistorem $R_1 = 10\,\Omega$ bude procházet proud

$$I_{10} = \frac{U_{\mathrm{AC}}}{R_1} = \frac{3{,}428\,6\,\mathrm{V}}{10\,\Omega} = 0{,}342\,86\,\mathrm{A} \doteq 340\,\mathrm{mA}$$

a rezistorem $R_3 = 40\,\Omega$ bude procházet proud

$$I_{40} = \frac{U_{\mathrm{AC}}}{R_3} = \frac{3{,}428\,6\,\mathrm{V}}{40\,\Omega} \doteq 0{,}085\,715\,\mathrm{A} \doteq 86\,\mathrm{mA}.$$ **4 body**

c) Celkový výkon po připojení zdroje vychází

$$P = \frac{U^2}{R_{\mathrm{AB}}} = \frac{(12\,\mathrm{V})^2}{28\,\Omega} \doteq 5{,}142\,9\,\mathrm{W} \doteq 5{,}1\,\mathrm{W}.$$ **2 body**

Poznámka: Výkon lze vypočítat také jako součin napětí a proudu

$$P = UI_{\mathrm{AB}} = 12\,\mathrm{V} \cdot 0{,}428\,57\,\mathrm{A} = 5{,}142\,9\,\mathrm{W} \doteq 5{,}1\,\mathrm{W}$$

nebo pomocí odporu a proudu

$$P = R_{\mathrm{AB}} I_{\mathrm{AB}}^2 = 28\,\Omega \cdot (0{,}428\,57\,\mathrm{A})^2 \doteq 5{,}142\,9\,\mathrm{W} \doteq 5{,}1\,\mathrm{W}.$$

35: FO57E3-4: Varná konvice [43 %]

Ruda s Vojtou si chtěli uvařit čaj v zahradním altánku. Jejich varná konvice má při napětí 230 V elektrický příkon 2,0 kW. Chlapci natáhli do altánku z domu ze zásuvky s napětím 230 V kabel délky 60 m s dvojicí měděných vodičů o průměru 1,5 mm.

a) Určete odpor spirály konvice a odpor kabelu.
b) Určete napětí na spirále konvice v altánku.
c) Určete elektrický příkon spirály konvice v altánku.
d) Kolik procent z celkové odebrané elektrické energie ze zásuvky tvoří ztráty energie v kabelu?

Měrný odpor mědi $\varrho = 0{,}018\,\Omega \cdot \mathrm{mm}^2/\mathrm{m}$.

Řešení:

Označme síťové napětí $U = 230\,\mathrm{V}$, příkon konvice $P_0 = 2\,000\,\mathrm{W}$, délku kabelu $l = 60\,\mathrm{m}$, průměr měděných vodičů $d = 1{,}5\,\mathrm{mm}$, měrný odpor mědi $\varrho = 0{,}018\,\Omega \cdot \mathrm{mm}^2/\mathrm{m}$, hledaný odpor spirály R_0, odpor kabelu R, napětí na spirále konvice U' a příkon odebíraný konvicí v altánku P_0'. Kabel s konvicí si lze představit jako dva sériově spojené rezistory s odpory R a R_0 připojené ke zdroji o napětí U.

a) Odpor kabelu je

$$R = \varrho\frac{2l}{S} = \varrho\frac{2l}{\pi\frac{d^2}{4}} = 0{,}018\,\Omega\cdot\mathrm{mm}^2/\mathrm{m}\cdot\frac{2\cdot 60\,\mathrm{m}}{\pi\frac{(1{,}5\,\mathrm{mm})^2}{4}} \doteq 1{,}2\,\Omega.$$ **2 body**

Odpor spirály vychází

$$R_0 = \frac{U^2}{P_0} = \frac{(230\,\mathrm{V})^2}{2\,000\,\mathrm{W}} \doteq 26{,}5\,\Omega.$$ **1 bod**

b) Napětí na spirále v altánku, kterou teče proud I, je

$$U' = R_0 I = R_0\frac{U}{R_0 + R} = \frac{26{,}5\,\Omega}{26{,}5\,\Omega + 1{,}2\,\Omega}\cdot 230\,\mathrm{V} \doteq 220\,\mathrm{V}.$$ **2 body**

c) Elektrický příkon spirály konvice v altánku vychází

$$P_0' = \frac{U'^2}{R_0} = \frac{(220\,\mathrm{V})^2}{26{,}5\,\Omega} \doteq 1\,800\,\mathrm{W}.$$

2 body

d) Pro ztrátový výkon v kabelu platí

$$P_\mathrm{z} = \frac{(U - U')^2}{R} = \frac{(230\,\mathrm{V} - 220\,\mathrm{V})^2}{1{,}2\,\Omega} \doteq 83\,\mathrm{W}.$$

Hledaný poměr ztrátového výkonu a celkového výkonu odebíraného ze sítě pak vychází

$$\frac{P_\mathrm{z}}{P_0' + P_\mathrm{z}} = \frac{83\,\mathrm{W}}{1\,800\,\mathrm{W} + 83\,\mathrm{W}} \doteq 0{,}044 = 4{,}4\,\%.$$

3 body

4.6.3 Spojování rezistorů

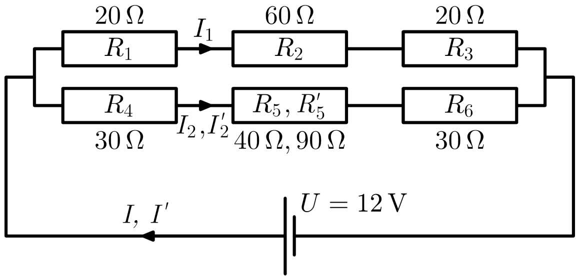
36: FO58E3-2: Elektrický obvod v laboratoři [89 %]

Při laboratorní práci si Mirek sestavil elektrický obvod, který měl ke zdroji o napětí 12 V připojeny dvě větve: v první větvi byly po řadě zařazeny rezistory o odporech $R_1 = 20\ \Omega$, $R_2 = 60\ \Omega$, $R_3 = 20\ \Omega$, ve druhé větvi rezistory $R_4 = 30\ \Omega$, $R_5 = 40\ \Omega$, $R_6 = 30\ \Omega$. U spojovacích vodičů odpor neuvažujeme.

a) Nakreslete elektrické schéma tohoto rozvětveného obvodu.
b) Určete výsledný odpor obvodu a proud ve vodičích spojujících uzly s póly zdroje.
c) Jaké napětí mohl Mirek změřit na jednotlivých rezistorech?
d) Rezistor $R_5 = 40\ \Omega$ se nějak poškodil a Mirek ho proto nahradil rezistorem $R_5' = 90\ \Omega$. Jaký je výsledný odpor obvodu a proud ve vodičích spojujících uzly s póly zdroje po nahrazení vadného rezistoru?

Řešení:

a) Jednoduchý nákres obvodu je na obr. 4.15.



Obrázek 4.15: K úloze FO58E3-2 – schéma obvodu

2 body

b) Odpory ve větvích vycházejí $R_{v1} = R_1 + R_2 + R_3 = 100\ \Omega$, $R_{v2} = R_4 + R_5 + R_6 = 100\ \Omega$, celkový odpor

$$R = \frac{R_{v1}R_{v2}}{R_{v1} + R_{v2}} = \frac{100\ \Omega \cdot 100\ \Omega}{100\ \Omega + 100\ \Omega} = 50\ \Omega.$$

Pro celkový proud dostáváme

$$I = \frac{U}{R} = \frac{12\ \text{V}}{50\ \Omega} = 0{,}24\ \text{A} = 240\ \text{mA}.$$ **3 body**

c) Odpory obou větví jsou stejné, takže každou větví prochází proud $I_1 = I_2 = I/2 = 120\ \text{mA}$. Pro napětí na rezistorech dostáváme v první větvi

$$U_1 = I_1R_1 = 2{,}4\ \text{V}, \quad U_2 = I_1R_2 = 7{,}2\ \text{V}, \quad U_3 = I_1R_3 = 2{,}4\ \text{V}$$

(celkem 12 V), ve druhé větvi

$$U_4 = I_2R_4 = 3{,}6\ \text{V}, \quad U_5 = I_2R_5 = 4{,}8\ \text{V}, \quad U_6 = I_2R_6 = 3{,}6\ \text{V}$$

(celkem opět 12 V) **3 body**

d) Druhá větev má teď odpor

$$R'_{v2} = R_4 + R'_5 + R_6 = 150\ \Omega,$$

celkový odpor bude

$$R' = \frac{R_{v1}R'_{v2}}{R_{v1} + R'_{v2}} = \frac{100\ \Omega \cdot 150\ \Omega}{100\ \Omega + 150\ \Omega} = 60\ \Omega.$$

Pro celkový proud vychází

$$I' = \frac{U}{R'} = \frac{12\ \text{V}}{60\ \Omega} = 0{,}2\ \text{A} = 200\ \text{mA}.$$ **2 body**

37: FO51E3-4: Pokusy v laboratoři **[69 %]**

Deváťáci Michaela a Honza zůstali odpoledne po hodině fyziky v laboratoři a vyučující jim umožnil udělat několik pokusů. Měli k dispozici zdroj stálého elektrického napětí 6,0 V a tři zcela stejné rezistory o stejném odporu 24 Ω, jež mohli zapojit do obvodu libovolným způsobem. To také nakonec provedli, avšak nejprve si teoreticky vypočítali, jaké získají hodnoty napětí a proudu pro jednotlivé rezistory.

a) Nakreslete schémata možných zapojení, která Míša a Honza navrhli.

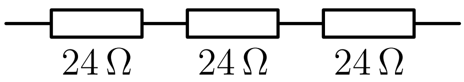
b) Proveďte příslušné výpočty hledaných fyzikálních veličin, jež stanovili.

c) Když potom jednotlivá zapojení sestavili, zjistili však, že výsledky jejich měření neodpovídají teoretickým výpočtům. Zeptali se vyučujícího a on jim prozradil, že jeden z rezistorů má odpor pouze $20\,\Omega$.
Jak se tato skutečnost mohla projevit při experimentování obou deváťáků, tj. jaké hodnoty napětí a proudu na jednotlivých odporech naměřili v různých zapojeních podle případů a) a b)?

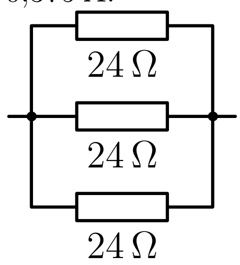
Řešení:

a) Nejprve nakreslíme schémata: tři rezistory o stejném odporu v sérii, tři rezistory zapojené paralelně, dvě možná zapojení sérioparalelní. **3 body**

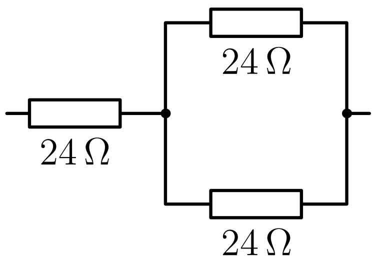
b) Stanovili výsledný odpor každé soustavy i proud, procházející nevětvenou částí obvodu: $72\,\Omega$, 0,083 A, $8\,\Omega$, 0,75 A, $36\,\Omega$, 0,167 A, $16\,\Omega$, 0,375 A.



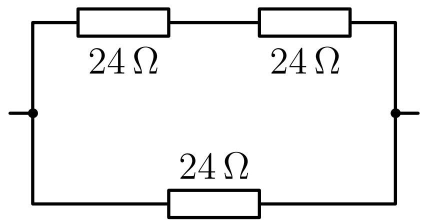
$R = 72\,\Omega$; $I = 83{,}3\,\mathrm{mA}$;
$U_1 = U_2 = U_3 = 2\,\mathrm{V}$;



$R = 8\,\Omega$; $I = 0{,}75\,\mathrm{A}$;
$I_1 = I_2 = I_3 = 0{,}25\,\mathrm{A}$
$U_1 = U_2 = U_3 = 6\,\mathrm{V}$;



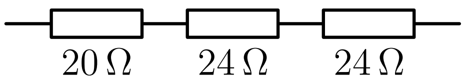
$R = 36\,\Omega$; $I = I_1 = 0{,}167\,\mathrm{A}$; $U_1 = 4\,\mathrm{V}$
$U_2 = U_3 = 2\,\mathrm{V}$; $I_2 = I_3 = 0{,}083\,\mathrm{A}$



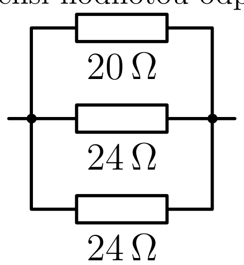
$R = 16\,\Omega$; $I = 0{,}375\,\mathrm{A}$; $U_1 = U_2 = 3\,\mathrm{V}$;
$U_3 = 6\,\mathrm{V}$; $I_1 = I_2 = 0{,}125\,\mathrm{A}$; $I_3 = 0{,}25\,\mathrm{A}$.

3 body

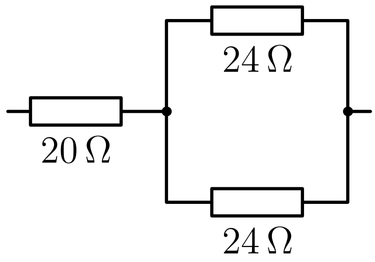
c) Jestliže je jeden rezistor o odporu $20\ \Omega$ a dva $24\ \Omega$, pak v zapojení sériovém a paralelním je jedno, který z rezistorů ve schématu vyměníme. Získáme hodnoty $68\,\Omega$, $7{,}5\,\Omega$, tomu odpovídají hodnoty proudu 0,088 A, 0,80 A. Při výzkumu v obou sérioparalelních obvodech může rezistor o odporu $20\,\Omega$ zaujmout dvě různé polohy; celkem je tedy šest možností k zapojení rezistoru s menší hodnotou odporu.



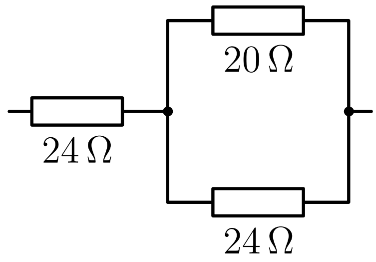
$R = 68\,\Omega$; $I = 0{,}088\,\mathrm{A}$; $U_1 = 1{,}76\,\mathrm{V}$;
$U_2 = U_3 = 2{,}12\,\mathrm{V}$;



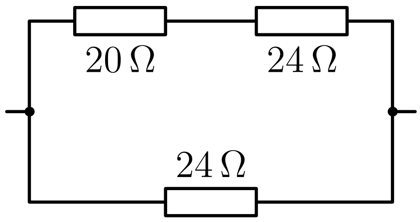
$R = 7{,}5\,\Omega$; $U = 6\,\mathrm{V}$; $I = 0{,}8\,\mathrm{A}$;
$I_1 = 0{,}3\,\mathrm{A}$; $I_2 = I_3 = 0{,}25\,\mathrm{A}$;



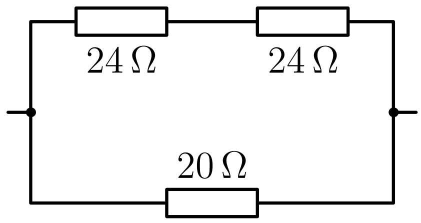
$R = 32\,\Omega$; $I = I_1 = 0{,}1875$ A;
$I_2 = I_3 = 0{,}09375$ A; $U_1 = 3{,}75$ V;
$U_2 = U_3 = 2{,}25$ V;



$R = 34{,}9\,\Omega$; $I = I_1 = 0{,}17$ A;
$I_2 = 0{,}094$ A; $I_3 = 0{,}078$ A; $U_1 = 4{,}12$ V;
$U_2 = U_3 = 1{,}88$ V;



$R = 15{,}5\,\Omega$; $I = 0{,}386$ A;
$I_1 = I_2 = 0{,}136$ A; $I_3 = 0{,}25$ A



$R = 14{,}1\,\Omega$; $U_1 = U_2 = 3$ V; $U_3 = 6$ V;
$I = 0{,}425$ A; $I_1 = I_2 = 0{,}125$ A;
$I_3 = 0{,}3$ A.

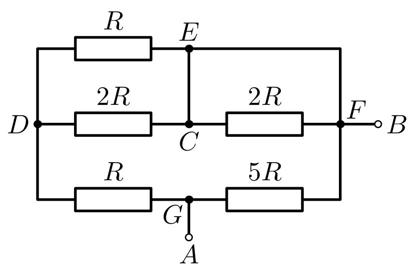
4 body

38: FO59E3-4: Obvod s rezistory [45 %]

Ve schématu na obrázku je hodnota odporu $R = 2\,\mathrm{k\Omega}$.

a) Jaký je celkový odpor části obvodu mezi body A a B?

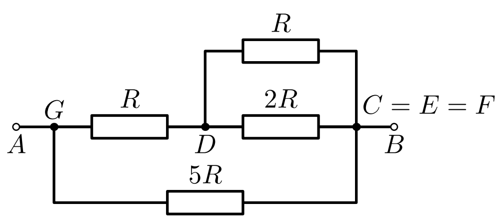
b) Určete proud protékající každým rezistorem a napětí na každém rezistoru, zapojíme-li k bodům A a B ideální zdroj napětí o velikosti $U_{\mathrm{AB}} = 12$ V.



Obrázek 4.16: Obvod s rezistory k úloze FO59E3-4

Řešení:

a) Protože rezistor $2R$ mezi body C a F je zkratovaný, nebude jím procházet žádný proud a nebude na něm žádné napětí. Proto můžeme schéma překreslit podle obr. 4.17. **2 body**



Obrázek 4.17: Překreslený obvod s rezistory k úloze FO59E3-4

Celkový odpor mezi body D a C vychází

$$R_{\mathrm{CD}} = \frac{R \cdot 2R}{R + 2R} = \frac{2}{3}R.$$

Horní větev z bodu G do bodu C pak bude mít celkový odpor $R_{\mathrm{GDF}} = R + 2R/3 = 5R/3$ a celkový odpor mezi body A a B bude

$$R_{\mathrm{AB}} = \frac{5R \cdot \frac{5}{3}R}{5R + \frac{5}{3}R} = \frac{\frac{25}{3}R}{\frac{20}{3}} = \frac{25}{20}R = \frac{5}{4} \cdot 2\,\mathrm{k\Omega} = 2{,}5\,\mathrm{k\Omega}. \qquad \textbf{2 body}$$

b) Celkový proud mezi body A a B vychází

$$I_{\mathrm{AB}} = \frac{U_{\mathrm{AB}}}{R_{\mathrm{AB}}} = \frac{U_{\mathrm{AB}}}{\frac{5}{4}R} = \frac{4}{5} \cdot \frac{12\,\mathrm{V}}{2\,000\,\Omega} = 4{,}8\,\mathrm{mA}.$$

Na rezistoru $R_{GF} = 5R$ je napětí stejné jako napětí zdroje $U_{\mathrm{AB}} = 12\,\mathrm{V}$ a prochází jím proud

$$I_{\mathrm{GF}} = \frac{U_{\mathrm{GF}}}{5R} = \frac{U_{\mathrm{AB}}}{5R} = \frac{12\,\mathrm{V}}{5 \cdot 2\,000\,\Omega} = 1{,}2\,\mathrm{mA}. \qquad \textbf{2 body}$$

Odpor horní větve je roven

$$R_{\mathrm{GDC}} = R + \frac{R \cdot 2R}{R + 2R} = \frac{5}{3}R$$

a rezistorem R mezi body G a D prochází proud

$$I_{\mathrm{GD}} = \frac{U_{\mathrm{GF}}}{R_{\mathrm{GDF}}} = \frac{U_{\mathrm{AB}}}{\frac{5}{3}R} = \frac{3}{5} \cdot \frac{12\,\mathrm{V}}{2\,000\,\Omega} = 3{,}6\,\mathrm{mA}.$$

Napětí na rezistoru pak bude

$$U_{\mathrm{GD}} = RI_{\mathrm{GD}} = R\frac{U_{\mathrm{AB}}}{\frac{5}{3}R} = \frac{3}{5}U_{\mathrm{AB}} = \frac{3}{5} \cdot 12\,\mathrm{V} = 7{,}2\,\mathrm{V}. \qquad \textbf{2 body}$$

Na část obvodu mezi body D a C pak připadá napětí $U_{\mathrm{DC}} = U_{\mathrm{AB}} - U_{\mathrm{GD}} = 12\,\mathrm{V} - 7{,}2\,\mathrm{V} = 4{,}8\,\mathrm{V}$. Rezistorem o odporu R prochází proud

$$I_1 = \frac{U_{\mathrm{DC}}}{R} = \frac{4{,}8\,\mathrm{V}}{2\,000\,\Omega} = 2{,}4\,\mathrm{mA},$$

rezistorem o odporu $2R$ pak proud

$$I_2 = \frac{U_{\mathrm{DC}}}{2R} = \frac{4{,}8\,\mathrm{V}}{2 \cdot 2\,000\,\Omega} = 1{,}2\,\mathrm{mA}.$$

Platí také $I_{\mathrm{GD}} = I_1 + I_2$. **2 body**

39: FO53E3-4: Napětí na potenciometru **(!)[28 %]**

Klasický potenciometr se skládá z vinutí z neizolovaného drátu, namotaného na keramickém válci o celkovém odporu 1 200 Ω. Vinutí připojené ke dvěma zdířkám (každá je na jedné straně válce) spojíme se zdrojem o napětí 12,0 V. Tzv. jezdec je připojen prostřednictvím měděné tyče zanedbatelného odporu na třetí zdířku (viz obr. 4.18). Když připojíme mezi zdířku z jezdce a zdířku z jednoho konce vinutí na válci voltmetr, můžeme pozorovat, jak se údaj voltmetru postupně mění – buď z hodnoty 0 V na hodnotu 12,0 V nebo opačně, z hodnoty 12,0 V klesá na nulu. Potom umístíme jezdec přesně doprostřed délky vinutí.

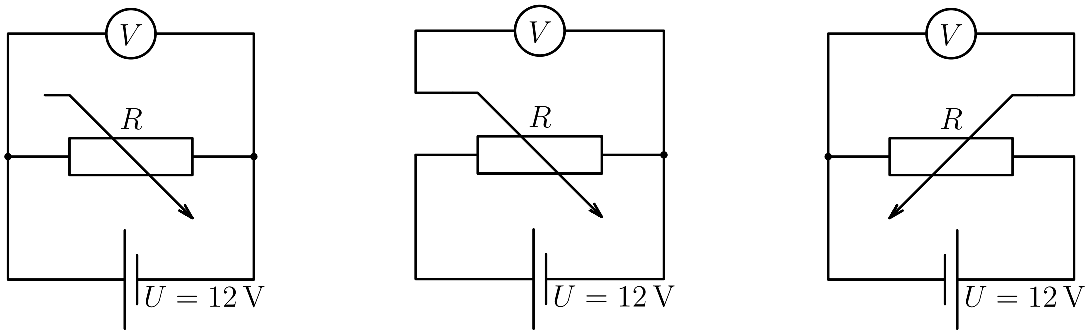
a) Nakreslete elektrické schéma obvodů, o kterých se v textu o potenciometru hovoří.
b) Zjistěte, jaký údaj ukazuje voltmetr, zvážíme-li, že má voltmetr velmi velký odpor.
c) Vypočtěte, jaký údaj ukáže voltmetr, když jeho tzv. vnitřní odpor (tj. odpor voltmetru jako elektrického rezistoru) bude malý, tj. $6\,000\,\Omega$.
d) Jaké napětí bude na rezistoru o odporu $100\ \Omega$, když ho připojíme mezi jezdce (umístěného uprostřed vinutí) a zdířku vycházející z jednoho konce vinutí, tedy místo voltmetru.

a) b)

Obrázek 4.18: Potenciometr a jeho schematická značka

Řešení:

a) Jednotlivá zapojení jsou na obr. 4.19. **3 body**



a) b) c)

Obrázek 4.19: Různá zapojení potenciometru

b) Voltmetrem téměř neprochází proud (viz obr. 4.20a), měří proto úbytek napětí na rezistoru o odporu $R/2$, tedy $U_1 = U/2 = 6\ \mathrm{V}$. **2 body**

c) Má-li voltmetr menší odpor, měří napětí odpovídající zapojení odporů $R/2 = 1\,200\ \Omega/2 = 600\ \Omega$ a $R_\mathrm{v} = 6\,000\ \Omega$ vedle sebe (viz obr. 4.20b). Pro výsledný odpor platí

$$\frac{1}{R_\mathrm{c}} = \frac{1}{R/2} + \frac{1}{R_\mathrm{v}} \quad \Longrightarrow \quad R_\mathrm{c} = \frac{6\,000\ \Omega \cdot 600\ \Omega}{600\ \Omega + 6\,000\ \Omega} = 545\ \Omega.$$

Napětí $12\ \mathrm{V}$ se pak bude dělit v poměru odporů $R/2 = 600\ \Omega$ a $R_\mathrm{c} = 545\ \Omega$, takže voltmetr naměří

$$U_1 = 12\ \mathrm{V}\frac{545\ \Omega}{545\ \Omega + 600\ \Omega} \doteq 5{,}7\ \mathrm{V}.$$

2 body

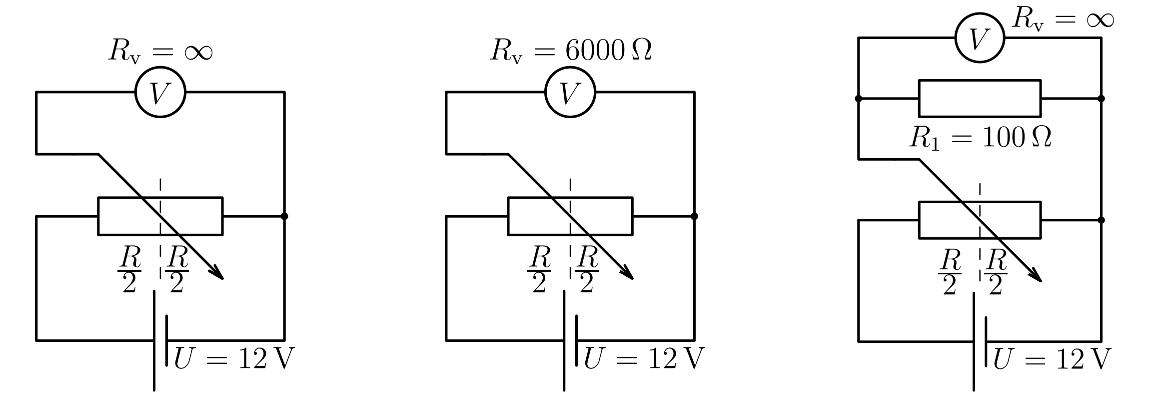
d) Řešení je podobné předchozí části (obr. 4.20c), napětí na rezistoru odpovídá paralelnímu zapojení rezistorů s odpory $R/2 = 600\,\Omega$ a $R_1 = 100\,\Omega$. Pro výsledný odpor platí

$$\frac{1}{R_\mathrm{c}} = \frac{1}{R/2} + \frac{1}{R_1} \quad \Longrightarrow \quad R_\mathrm{c} = \frac{600\ \Omega \cdot 100\ \Omega}{600\ \Omega + 100\ \Omega} = 86\ \Omega.$$

Napětí 12 V se pak bude dělit v poměru odporů $R/2 = 600\,\Omega$ a $R_\mathrm{c} = 86\,\Omega$, takže voltmetr naměří

$$U_1 = 12\,\mathrm{V}\frac{86\,\Omega}{86\,\Omega + 600\,\Omega} \doteq 1{,}5\,\mathrm{V}.$$

3 body



a) Měření voltmetrem s velkým odporem

b) Měření voltmetrem s malým odporem

c) Měření voltmetrem při zapojení dalšího odporu

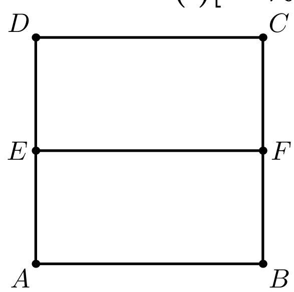
Obrázek 4.20: Zapojení při měření napětí

40: FO56E3–3: Drátěný čtverec **(!)[21 %]**

Z odporového drátu, jehož 1 m má odpor 24 Ω, byl vytvořen čtverec $ABCD$ o straně 10 cm se střední příčkou EF (obr. 4.21). Jaký proud bude procházet vodičem EF a jaké teplo se uvolní ve všech vodičích dohromady za 1 minutu, připojíme-li zdroj o napětí $U = 4{,}5\,\mathrm{V}$:

a) k bodům A a B;

b) k bodům A a D.



Obr 4.21: Drátěný čtverec

Řešení:

a) Odpor jedné strany čtverce bude $R = 2{,}4\,\Omega$. Připojíme-li zdroj k bodům A a B, bude odpor části EFCD mezi body E a F

$$\frac{1}{R_\mathrm{EF}} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{R} = \frac{3}{2R}, \qquad R_\mathrm{EF} = \frac{2}{3}R$$

a celkový odpor mezi body AB

$$\frac{1}{R_\mathrm{AB}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\frac{2}{3}R + R} = \frac{1}{R} + \frac{3}{5R} = \frac{8}{5R}, \qquad R_\mathrm{AB} = \frac{5}{8}R = 1{,}5\,\Omega. \qquad \textbf{2 body}$$

Přívodními vodiči pak prochází proud $I = U/R_\mathrm{AB} = 4{,}5\,\mathrm{V}/1{,}5\,\Omega = 3$ A a ve všech vodičích se za čas $t = 1$ min $= 60$ s uvolní celkem teplo

$$Q = R_\mathrm{AB}I^2t = \frac{U^2}{R_\mathrm{AB}}t = \frac{(4{,}5\,\mathrm{V})^2}{1{,}5\,\Omega}\cdot 60\,\mathrm{s} = 810\,\mathrm{J}. \qquad \textbf{2 body}$$

Nejprve určíme proud mezi body A a E. Celkový proud I se dělí v opačném poměru vzhledem k odporům

$$\frac{I_{\mathrm{AB}}}{I_{\mathrm{AE}}} = \frac{R_{\mathrm{AE}}}{R_{\mathrm{AB}}} = \frac{R_{\mathrm{EF}} + R}{R} = \frac{\frac{2}{3}R + R}{R} = \frac{5}{3}; \quad \Longrightarrow \quad I_{\mathrm{AB}} = \frac{5}{3}I_{\mathrm{AE}}.$$

Protože současně také $I_{\mathrm{AE}}+I_{\mathrm{AB}} = 8I_{\mathrm{AE}}/3 = 3\mathrm{A}$ je vychází $I_{\mathrm{AE}} = 3{\cdot}3/8\,\mathrm{A} = 1{,}125\mathrm{A}$. Tento proud se dále větví a platí

$$I_{\mathrm{EF}} + I_{\mathrm{EDCF}} = 1{,}125\ \mathrm{A}, \qquad \frac{I_{\mathrm{EDCF}}}{I_{\mathrm{EF}}} = \frac{R_{\mathrm{EF}}}{R_{\mathrm{EDCF}}} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}.$$

Odtud dostáváme

$$I_{\mathrm{EF}} + \frac{1}{2}I_{\mathrm{EF}} = \frac{3}{2}I_{\mathrm{EF}} = 1{,}125\ \mathrm{A}, \qquad I_{\mathrm{EF}} = \frac{2}{3} \cdot 1{,}125\ \mathrm{A} = 0{,}75\ \mathrm{A}.$$ **3 body**

b) Při připojení zdroje k bodům A a D nebude vzhledem k symetrii obvodu mezi body E a F procházet žádný proud $I_{\mathrm{EF}} = 0\ \mathrm{A}$. **1 bod**
Pro celkový odpor zapojení R_{AD} bude platit

$$\frac{1}{R_{\mathrm{AD}}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{3R} = \frac{4}{3R}, \qquad R_{\mathrm{AD}} = \frac{3}{4}R = 1{,}8\,\Omega.$$

Přívodními vodiči pak prochází proud $I = U/R_{\mathrm{AD}} = 4{,}5\,\mathrm{V}/1{,}8\,\Omega = 2{,}5\,\mathrm{A}$ a ve všech vodičích se za čas $t = 60\,\mathrm{s}$ uvolní celkem teplo

$$Q = R_{\mathrm{AD}}I^2t = \frac{U^2}{R_{\mathrm{AD}}}t = \frac{(4{,}5\ \mathrm{V})^2}{1{,}8\ \Omega} \cdot 60\,\mathrm{s} = 675\ \mathrm{J}.$$ **2 body**

Rejstřík

Závěr

Cílem mé bakalářské práce bylo sestavit tematicky členěnou sbírku úloh Fyzikální olympiády krajských kol kategorie E a k jednotlivým úlohám doplnit údaje o obtížnosti na základě statistické analýzy za alespoň dva kraje. Práce je rozdělena na čtyři kapitoly.

V první kapitole jsme uvedli základní poznatky týkající se metodiky řešení fyzikálních úloh. Hlavní část této kapitoly byla věnována popisu jednotlivých kroků strategie řešení fyzikálních úloh.

V druhé kapitole jsme se zabývali nástroji, které lze použít pro analýzu jednotlivých položek didaktického testu a pro analýzu testu jako celku. V rámci položkové analýzy jsme zavedli následující pojmy: obtížnost položky, citlivost položky a nenormované odpovědi. U obtížnosti a citlivosti položky jsme podrobněji popsali metody, které lze využít u úloh s váženým skórováním. Jako vhodnou metodu u obtížnosti položky tak uvádíme obecný index obtížnosti P a u citlivosti položky tzv. Pearsonův korelační koeficient. V rámci analýzy testu jako celku jsme vysvětlili pojmy validita a reliabilita testu. Jako hlavní nástroj reliability jsme uvedli koeficient Cronbachova α, který určuje reliabilitu jako vnitřní konzistenci (homogenitu) testu.

Třetí kapitola byla věnována statistickému rozboru úloh krajského kola kategorie E od 56. do 60. ročníku na základě výsledků kraje Olomouckého, Karlovarského a kraje Praha. Rozbor byl proveden jak z pohledu analýzy vlastností jednotlivých soutěžních úloh, tak z pohledu analýzy vlastností soutěžních ročníků jako celku.

Výsledky položkové analýzy byly pozitivní. Zjistili jsme, že téměř všechny úlohy vyhovovaly našim kritériím. Pouze dvě úlohy tato kritéria nesplňovaly. Při rozboru obou úloh bylo hned na první pohled patrné, že si žáci s jejich řešením nevěděli rady. Obě úlohy měly vysoký počet nenormovaných odpovědí, což se promítlo i na výsledných hodnotách indexu obtížnosti P. Dále jsme z výsledků položkové analýzy dospěli k závěru, že si žáci nejlépe umí poradit s úlohami zabývající se kinematikou.

V rámci analýzy vlastností soutěžních ročníků jako celku jsme určovali reliabilitu pomocí koeficientu Cronbachova α. U většiny ročníků poukazovaly hodnoty na určitou heterogenitu testu, tedy na rozdílnost v bodovém hodnocení žáků. Nízké hodnoty Cronbachova α nejsou v rámci Fyzikální olympiády nijak překvapivé. Ročníky jsou sestavy z úloh ověřující různé oblasti předmětu fyziky, a každý žák tak může preferovat jinou oblast nebo typ úloh.

Poslední kapitola již byla zaměřena na sbírku úloh Fyzikální olympiády. Sbírka byla vytvořena z úloh krajského kola kategorie E od 51. do 60. ročníku. Ke všem úlohám byla vyčíslena hodnota indexu obtížnosti P. Od 56. do 60. ročníku byl index obtížnosti vyhodnocen na základě výsledků kraje Olomouckého, Karlovarského a kraje Praha. Zbylé ročníky byly posouzeny pouze na základě výsledků kraje Olomouckého. Hodnoty indexu obtížnosti se pohybují v rozmezí od 21 % do 97 %. Sbírku tak tvoří úlohy různé obtížnosti, což považujeme za žádoucí. Úlohy byly v tématech seřazeny od těch s vyšším indexem obtížnosti (méně obtížné úlohy) po úlohy s nižším indexem obtížnosti (obtížnější). V případě, že byla hodnota indexu obtížnosti menší než 30 % nebo větší než 90 %, byly úlohy ve sbírce označeny symbolem u názvu úlohy.

Věřím, že sbírka najde uplatnění při přípravě řešitelů na fyzikální soutěže (především pochopitelně Fyzikální olympiádu) v dalších letech a může nabídnout učitelům i dalším zájemcům materiál pro práci s nadanějšími žáky nad rámec řešení úloh v učebnicích. Sbírka může být dále doplňována a rozšiřována a mohla by se stát základem pro ucelenější sbírku úloh pro věkovou kategorii druhého stupně ZŠ.

Literatura

[1] BARTUŠKA, Karel. *Sbírka řešených úloh z fyziky pro střední školy I.* Praha, Prometheus, 1997.

[2] BARTUŠKA, Karel. *Sbírka řešených úloh z fyziky pro střední školy II.* Praha, Prometheus, 1997.

[3] BARTUŠKA, Karel. *Sbírka řešených úloh z fyziky pro střední školy III.* Praha, Prometheus, 1998.

[4] BARTUŠKA, Karel. *Sbírka řešených úloh z fyziky pro střední školy IV.* Praha, Prometheus, 2000.

[5] DING, Lin, et al. Evaluating an electricity and magnetism assessment tool: Brief electricity and magnetism assessment. *Physical review special Topics-Physics education research*, 2006, **2**(1), 010105. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.2.010105.

[6] FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDA. *Pravidla zapisování čísel a zaokrouhlování ve fyzikálních úlohách.* [online, cit. 21. 4. 2020]. Dostupné z: `http://fo.upol.cz/soubory/fo_zaokrouhlovani.pdf`.

[7] FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDA. *Archiv zadání a řešení soutěžních úloh FO 1997-2019.* [online, cit. 21. 4. 2020]. Dostupné z: `http://fyzikalniolympiada.cz/archiv/zadani-a-reseni`.

[8] FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDA. *Výsledky krajských kol FO v Olomouckém kraji.* [online, cit. 21. 4. 2020]. Dostupné z: `http://fo.upol.cz/archivkk.html`.

[9] FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDA KARLOVY VARY. *Výsledkové listiny.* [online, cit. 21. 4. 2020]. Dostupné z: `http://kvary.fyzikalniolympiada.cz/vysledky/`.

[10] FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDA PRAHA. *Výsledkové listiny.* [online, cit. 21. 4. 2020]. Dostupné z: `http://praha.fyzikalniolympiada.cz/vysledky/`.

[11] CHRÁSKA, Miroslav. *Metody pedagogického výzkumu.* Praha, Grada Publishing, a.s., 2016.

[12] JEŘÁBEK, Ondřej; BÍLEK, Martin. *Teorie a praxe tvorby didaktických testů.* 1. vyd. Olomouc, Univerzita Palackého v Olomouci, 2010. 91 s.

[13] KALHOUS, Zdeněk; OBST, Otto. *Školní didaktika.* Olomouc, Univerzita Palackého, 2000.

[14] LAZNOVÁ, Veronika, et al. *Subjektivní vnímání náročnosti fyzikálních úloh učiteli a studenty*. Diplomová práce. Plzeň, Západočeská univerzita v Plzni, 2017. [online, cit. 18. 4. 2020]. Dostupné z: `https://dspace5.zcu.cz/handle/11025/27934`.

[15] MEŠKAN, Václav. *Didaktické aspekty rozvoje kreativity ve výuce fyziky na základní škole*. Disertační práce. Plzeň, Západočeská univerzita v Plzni, 2013. [online, cit. 19. 4. 2020]. Dostupné z:`https://kof.zcu.cz/st/dis/meskan/Disertace-Meskan.pdf`.

[16] SCIO. *Validita testu*. [online, cit. 20. 4. 2020]. Dostupné z: `https://www.scio.cz/o-vzdelavani/teorie-a-metodika-testu/odborna-cast/validita-testu/`.

[17] SVOBODA, Emanuel; KOLÁŘOVÁ Růžena. *Didaktika fyziky základní a střední školy: vybrané kapitoly*. Praha, Karolinum, 2006.

[18] VAFKOVÁ, Lada. *Položková analýza v systému STATISTICA*. Bakalářská práce. Brno, Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, 2015. [online, cit. 19. 4. 2020]. Dostupné z: `https://is.muni.cz/th/t350m/Plny_text_BP.pdf`.

[19] VOLF, I. *Metodika řešení úloh ve výuce fyziky na základní škole*. Hradec Králové, MAFY, 1998.