

PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA  
UNIVERZITY PALACKÉHO V OLOMOUCI

Katedra optiky



**Prostorčasové diagramy  
v programu Geogebra**

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vypracoval:

Lukáš Slaměník

Studijní program:

B1701 Fyzika

Studijní obor:

Obecná fyzika a matematická fyzika

Forma studia:

Prezenční

Vedoucí bakalářské práce:

Mgr. Lukáš Richterek, Ph.D.

Práce odevzdána dne:

.....

## **Abstrakt**

Cílem práce bylo sestavení sady prostorčasových diagramů (Minkowského, Loedelových a Brehmových) pro vybrané děje a efekty speciální teorie relativity pomocí volně dostupného programu Geogebra. Diagramy umožňují snadnou změnu vybraných parametrů a výstup může posloužit jako pomůcka k výuce speciální teorie relativity.

FACULTY OF SCIENCE  
PALACKY UNIVERSITY OLOMOUC

Department of optics



# Spacetime diagrams in Geogebra

BACHELOR THESIS

Author:	Lukáš Slaměník
Course of study:	B1701 Physics
Field of study:	General physics and mathematical physics
Form of study:	Full-time
Thesis Supervisor:	Mgr. Lukáš Richterek, Ph.D.

## **Abstract**

The aim of the work was to construct a set of spacetime diagrams (Minkowski, Loedel and Brehm ones) for selected processes and effects of the special theory of relativity using the freely available program Geogebra. The diagrams allow easy change of selected parameters and the output can serve me as a supplemental tool for teaching the special theory of relativity.

## **Poděkování**

Nejdříve bych rád poděkoval vedoucímu mé bakalářské práce Mgr. Lukáši Richterkovi, Ph.D. za podnětné rady a odbornou pomoc, kterou mi poskytoval při zpracovávání mé bakalářské práce a za čas, který mi věnoval. Rád bych poděkoval také své rodině a všem přátelům, kteří mě při vytváření této práce podpořili, a bez jejichž pomoci by nebylo možné práci dokončit.

## **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci napsal samostatně s využitím výše uvedené literatury. Souhlasím s tím, aby práce byla používána pro účely výuky a prezentována na webových stránkách katedry optiky.

V Olomouci dne .....

.....

Podpis

## Obsah

1. Úvod.....	1
2. Teorie relativity .....	2
3. Einsteinovy postuláty, prostoročasové souřadnice .....	2
4. Transformační rovnice.....	4
4.1. Galileovy transformační rovnice .....	4
4.2. Lorentzovy transformační rovnice.....	7
5. Prostoročasové diagramy .....	10
5.1. Minkowského prostoročasové diagramy.....	10
5.2. Loedelovy prostoročasové diagramy .....	12
5.3. Brehmovy prostoročasové diagramy .....	13
6. Relativnost současnosti .....	15
6.1. Současné události v $\mathcal{S}$ .....	15
6.1.1. Minkowského diagram pro současné události v $\mathcal{S}$ .....	16
6.1.2. Loedelův diagram pro současné události v $\mathcal{S}$ .....	17
6.1.3. Brehmův diagram pro současné události v $\mathcal{S}$ .....	18
6.2. Současné události v $\mathcal{S}'$ .....	20
6.2.1. Minkowského diagram pro současné události v $\mathcal{S}'$ .....	20
6.2.2. Loedelův diagram pro současné události v $\mathcal{S}'$ .....	21
6.2.3. Brehmův diagram pro současné události v $\mathcal{S}'$ .....	22
7. Dilatace času.....	23
7.1. Soumítné události v $\mathcal{S}$ – Dilatace času z $\mathcal{S}$ do $\mathcal{S}'$ .....	26
7.1.1. Minkowského diagram pro soumítné události v $\mathcal{S}$ .....	26
7.1.2. Loedelův diagram pro soumítné události v $\mathcal{S}$ .....	28
7.1.3. Brehmův diagram pro soumítné události v $\mathcal{S}$ .....	29
7.2. Soumítné události v $\mathcal{S}'$ – Dilatace času z $\mathcal{S}'$ do $\mathcal{S}$ .....	30
7.2.1. Minkowského diagram pro soumítné události v $\mathcal{S}'$ .....	30
7.2.2. Loedelův diagram pro soumítné události v $\mathcal{S}'$ .....	31
7.2.3. Brehmův diagram pro soumítné události v $\mathcal{S}'$ .....	32
8. Kontrakce délky.....	33
8.1. Současné události v $\mathcal{S}$ – kontrakce délky z $\mathcal{S}'$ do $\mathcal{S}$ .....	37
8.1.1. Minkowského diagram pro současné události v $\mathcal{S}$ .....	37
8.1.2. Loedelův diagram pro současné události v $\mathcal{S}$ .....	38

8.1.3.	Brehmův diagram pro současné události v $\mathcal{S}$ .....	39
8.2.	Současné události v $\mathcal{S}'$ – kontrakce délky z $\mathcal{S}$ do $\mathcal{S}'$ .....	40
8.2.1.	Minkowského diagram pro současné události v $\mathcal{S}'$ .....	40
8.2.2.	Loedelův diagram pro současné události v $\mathcal{S}'$ .....	41
8.2.3.	Brehmův diagram pro současné události v $\mathcal{S}'$ .....	42
9.	Závěr .....	44
10.	Seznam obrázků .....	45
11.	Literatura .....	47

# 1. Úvod

V rámci mé bakalářské práce se zabývám jednotlivými základními jevy speciální teorie relativity (např. dilatace času, kontrakce délky), které jsou znázorněny v diagramu (Minkowského, Brehmovy a Loedelovy) pomocí volně dostupného programu Geogebra. Na začátku mé bakalářské práce jsou připomenuty základní myšlenky speciální teorie relativity, pojem vztažné soustavy i dva výchozí postuláty – postulát relativity a rychlosti světla. Dále jsou v mé bakalářské práci uvedeny důležité termíny, jako je interval, událost, čtyřvektor, prostoročasové souřadnice, jejichž význam je následně vysvětlen (také připomeneme hodnotu rychlosti světla  $c$ ). Dále se zabývám Galileovou transformací, tj. Galileovými transformačními rovnicemi, pomocí nichž lze libovolnou událost  $U$ , která je v klidové inerciální vztažné soustavě  $S$  popsána pomocí souřadnic  $x, y, z, t$ , vyjádřit v nějaké jiné inerciální vztažné soustavě  $S'$ , která se vůči  $S$  pohybuje konstantní rychlostí  $\vec{v}$ , pomocí souřadnic  $x', y', z', t$ . Avšak Galileovy transformační rovnice platí pouze tehdy, pokud se pohybujeme relativně malou rychlostí  $\vec{v}$ . Pokud se bude soustava  $S'$  vůči  $S$  pohybovat rychlostí blízkou rychlosti světla, pak musíme využít Lorentzovy transformační rovnice, které mám ve své bakalářské práci rovněž vyjádřené. Těžištěm práce jsou pak prostoročasové diagramy (Minkowského, Brehmovy a Loedelovy), jejichž konstrukce je popsána a vysvětlena v programu Geogebra. Následně se práce zabývá jednotlivými ději speciální teorie relativity, které jsou postupně vykresleny v programu Geogebra. Odkazy na jednotlivé diagramy jsou uvedeny v bakalářské práci a měly by být volně dostupné.



## 2. Teorie relativity

Teorii relativity můžeme chápat jako sadu dvou fyzikálních teorií, které byly vytvořeny Albertem Einsteinem, které můžeme rozdělit na:

1. Speciální teorie relativity
2. Obecná teorie relativity

Základy speciální teorie relativity, která byla vytvořena Albertem Einsteinem, vznikla v roce 1905 v článku „O elektrodynamice pohybujících se těles“ [1]. Speciální teorie relativity, zkráceně jen STR, se zabývá navzájem pohybujícími se soustavami, které se pohybují konstantní rychlostí. Tyto soustavy nazýváme jako *inerciální vztažné soustavy*. Naproti tomu, obecná teorie relativity, zkráceně jen OTR, je oproti speciální teorii relativity složitější, protože se zabývá soustavami, které se vůči sobě pohybují zrychleně. Obecná teorie relativity vznikla v roce 1915 a zahrnuje i popis gravitace [2].

V dřívější době (asi 200 let nazpátek) se předpokládalo, že pomocí Newtonových rovnic můžeme popsat veškeré děje, avšak není tomu úplně tak. Jeden z prvních, kdo zjistil, že tyto rovnice úplně nevyhovují (viz děje, které probíhají při rychlostech blízkých rychlostech světla), byl Albert Einstein, který dokázal tento problém vyřešit.

Z druhého Newtonova zákona plyne, že [3]

$$F = \frac{d(mv)}{dt}, \quad (1)$$

kde hmotnost  $m$  je konstantní veličina. Nyní však víme, že tomu tak není, že hmotnost tělesa závisí na jeho rychlosti. Tedy čím rychleji se těleso pohybuje, tím větší má hmotnost. Hmotnost tělesa pak můžeme napsat ve tvaru [2]

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2)$$

kde  $m_0$  je klidová hmotnost tělesa a  $c$  je rychlost světla, jehož hodnota je rovna [7]

$$c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (3)$$

## 3. Einsteinovy postuláty, prostoročasové souřadnice

Speciální teorie relativity je založena na dvou důležitých Einsteinových postulátech [4]

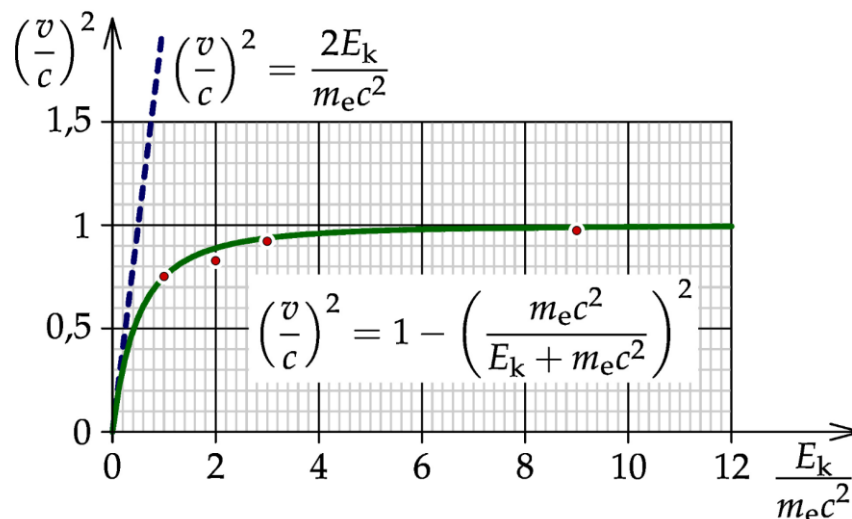
1. Fyzikální zákony jsou stejné pro pozorovatele ve všech inerciálních vztažných soustavách. Žádná soustava není preferována (Postulát relativity).

- Rychlost světla ve vakuu má stejnou velikost  $c$  ve všech směrech a ve všech inerciálních vztažných soustavách, nezávislou na rychlosti zdroje (Postulát rychlosti světla).

Postulát rychlosti světla můžeme formulovat ještě následovně [4]:

V přírodě existuje mezní rychlost  $c$ , která je ve všech směrech a všech inerciálních vztažných soustavách stejně velká. Touto rychlostí se například pohybuje světelný paprsek ve vakuu, nebo všechny částice, které mají nulovou klidovou hmotnost. Z toho tedy vyplývá, že každá částice, která má nenulovou hmotnost, nemůže této rychlosti nikdy dosáhnout. To samé platí i pro informace; se nemůže šířit rychlostí větší, než je mezní rychlost světla.

Mezní rychlost  $c$  byla experimentálně prokázána v roce 1964 experimentem Bertozziho [5], který se zabýval urychlováním elektronů (obrázek 1). Tyto elektrony byly urychlovány na různé rychlosti, kdy největší z nich dosáhla nejméně na 0,999 999 999 95 rychlosti světla. Mezní rychlost světla  $c$  byla přesně definovaná jako (3).



**Obrázek 1:** Závislost druhých mocnin rychlosti elektronu k rychlosti světla na kinetické energii elektronů (naměřené hodnoty poměru druhých mocnin rychlosti elektronu k rychlosti světla jsou znázorněny na obrázku 1 pomocí červených teček) [5]

V rámci této práce se budeme zabývat měřením událostí pro různé pozorovatele v různých inerciálních vztažných soustavách. Každou událost můžeme zobrazit jako bod v prostoročasovém diagramu, který odpovídá nějakému místu v prostoru a času, a je určen 4 souřadnicemi (třemi prostorovými souřadnicemi a jednou souřadnicí časovou) [7]. Poloha události  $U$  je pak určena pomocí čtyřvektoru, což nám vyjadřuje *prostoročasový interval* – období vzdálenosti mezi dvěma událostmi v prostoročase (v našem případě vzdálenost události  $U$  od počáteční události  $A$ , která je určena rovnicemi  $ct = x = y = z = 0$ ). Pokud budeme přecházet k jiné soustavě, pak se interval mezi dvěma událostmi zachovává (tj. pokud

znázorníme 2 události v prostoročasovém diagramu s osami  $x$  a  $ct$  pro soustavu  $S$  a  $x'$  a  $ct'$  pro soustavu  $S'$ , pak platí  $\Delta x^2 - c\Delta t^2 = \Delta x'^2 - c\Delta t'^2$ ). Každý pozorovatel, který je vázán na svou vztažnou inerciální soustavu, může události přiřadit souřadnice i čas. Protože v relativitě jsou prostor a čas spolu vzájemně provázány, budeme tyto souřadnice nazývat jako *prostoročasové souřadnice*. Tedy pokud nastane nějaká událost A, pak každý pozorovatel přiřadí této události jiné prostoročasové souřadnice podle své vlastní inerciální vztažné soustavy. Jestliže dvě události mají v dané inerciální vztažné soustavě stejné časové souřadnice, ale rozdílné prostorové souřadnice, pak tyto události nazýváme jako *současné*. Jestliže dvě události mají v dané inerciální vztažné soustavě stejné prostorové souřadnice, ale jiné časové souřadnice, pak tyto události nazýváme jako *soumítné* [2].

Zde ale narazíme na problém. Uvažujme dvě události A a B, které nastanou ve stejnou dobu v 10:00 v nějaké vztažné soustavě (události jsou současné, ale ne soumítné). Mějme pozorovatele, který se nachází od události A ve vzdálenosti 5 km a od události B ve vzdálenosti 10 km. Pro tohoto pozorovatele, který se nachází od událostí A a B v těchto vzdálenostech, nenastanou tyto dvě události současně a ani v 10:00. Pro tohoto pozorovatele nastane nejdříve událost A a poté událost B. Je to způsobeno tím, že světlo musí nejdříve tuto vzdálenost k pozorovateli urazit. Proto aby pozorovatel určil správně, kdy tyto události nastaly, musí od své naměřené hodnoty času dobu pohybu světla odečíst. Tento pokus bylo možné provést tak, že jsme měli jednoho pozorovatele v dané inerciální vztažné soustavě, který se nacházel v těchto vzdálenostech od události A a B. Měl u sebe dvoje hodiny, které byly zesynchronizovány. To znamená, že ve stejnou dobu 10 hodin, obě hodiny ukazovaly stejný čas: 10 hodin. Jakmile nastala událost A a B, pozorovatel si zaznamenal časy na těchto hodinách [4].

Dále se budeme zabývat ději, jako je například kontrakce délky, relativita času a současnosti. Tyto děje si pak i graficky znázorníme v programu GEOGEBRA [8], kde využijeme Minkowského, Loedelovy a Brehmovy prostoročasové diagramy.

## 4. Transformační rovnice

### 4.1. Galileovy transformační rovnice

Uvažujme událost  $U$  v inerciální vztažné soustavě  $S$ , kterou můžeme popsat pomocí souřadnic  $x, y, z, t$ . Pak pro transformační rovnice souřadnic  $x, y, z, t$  události  $U$  v inerciální vztažné soustavě  $S$  do nějaké jiné inerciální vztažné soustavy  $S'$ , kterou můžeme popsat pomocí souřadnic  $x', y', z', t'$ , a která se pohybuje rychlostí  $v$  vůči soustavě  $S$  v kladném směru osy  $x$  platí, že

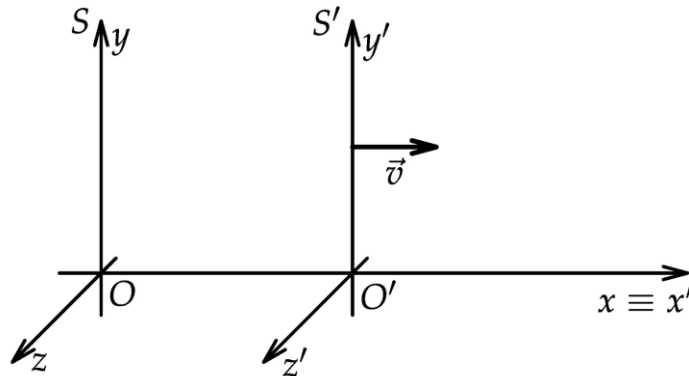
$$t' = t, \tag{4}$$

$$x' = x - vt, \tag{5}$$

$$y' = y, \quad (6)$$

$$z' = z. \quad (7)$$

Tyto transformační rovnice nazýváme jako *Galileovy transformační rovnice* [9 – 10].



**Obrázek 2:** Nákres vzájemné polohy soustav  $S$  a  $S'$ , kdy soustava  $S'$  se pohybuje vůči soustavě  $S$  rychlostí  $v$  v kladném směru osy  $x$

Pokud budeme přecházet ze soustavy  $S'$  do soustavy  $S$ , pak můžeme použít tzv. *inverzní Galileovy transformační rovnice*.

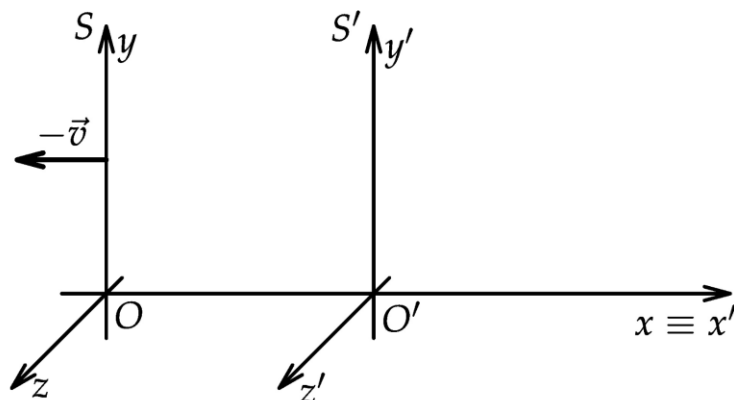
Pro náš případ, kdy se soustava  $S'$  pohybuje vůči soustavě  $S$  rychlostí  $v$  v kladném směru osy  $x$ , nebo-li soustava  $S$  se pohybuje vůči soustavě  $S'$  rychlostí  $-v$  v kladném směru osy  $x'$  dostáváme

$$t = t', \quad (8)$$

$$x = x' + vt', \quad (9)$$

$$y = y', \quad (10)$$

$$z = z'. \quad (11)$$



**Obrázek 3:** Nákres vzájemné polohy soustav  $S$  a  $S'$ , kdy soustava  $S$  se pohybuje vůči soustavě  $S'$  rychlostí  $-v$  v kladném směru osy  $x'$

Pokud budeme uvažovat situaci, kdy počátky souřadnic soustav  $S$  a  $S'$  jsou vůči sobě posunuty v libovolném směru o libovolnou vzdálenost a osy jsou vůči sobě natočeny o libovolný úhel  $\varphi$ , kdy vektor rychlosti  $\vec{v}$  jedné soustavy vůči druhé má libovolný směr, pak hovoříme o tzv. *obecných Galileových transformačních rovnicích*.

Uvažujme nyní hmotný bod  $A$ , který se bude vzhledem k soustavě  $S$  pohybovat rychlostí  $\vec{u}$ . Pak pro rychlost  $u'$  hmotného bodu  $A$  vůči soustavě  $S'$  dostáváme (opět uvažujeme situaci, kdy se soustava  $S'$  pohybuje vůči soustavě  $S$  konstantní rychlostí  $v$  v kladném směru osy  $x$ )

$$u'_x = \frac{dx'}{dt} = u_x - v, \quad (12)$$

$$u'_y = \frac{dy'}{dt} = u_y, \quad (13)$$

$$u'_z = \frac{dz'}{dt} = u_z. \quad (14)$$

Pro odvození těchto rovnic využijeme vztahů (5)-(7). Uvažujme klidovou soustavu  $S$ , ve které se pohybuje částice  $P$  rychlostí  $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ . Z mechaniky víme, že pro rychlosti jednotlivých složek platí následující rovnice

$$u_x = \frac{dx}{dt}, \quad (15)$$

$$u_y = \frac{dy}{dt}, \quad (16)$$

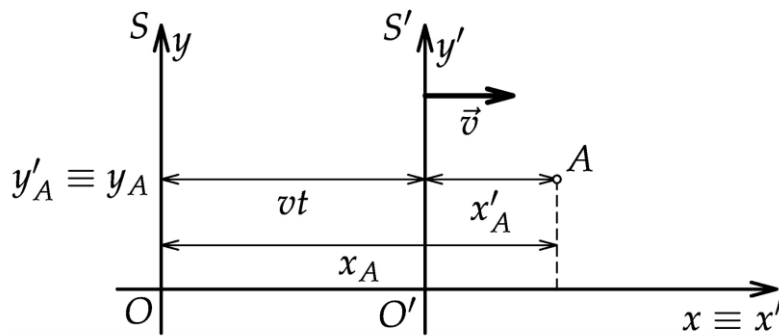
$$u_z = \frac{dz}{dt}. \quad (17)$$

Pak pro částici  $P$ , která se pohybuje rychlostí  $\vec{u}' = (u'_x, u'_y, u'_z)$  v soustavě  $S'$  dostáváme rovnice (12) – (14).

$$u'_x = \frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{d(vt)}{dt} = u_x - v,$$

$$u'_y = \frac{dy'}{dt} = \frac{dy}{dt} = u_y,$$

$$u'_z = \frac{dz'}{dt} = \frac{dz}{dt} = u_z.$$



**Obrázek 4:** Nákres vzájemné polohy soustav  $S$  a  $S'$ , kdy soustava  $S$  se pohybuje vůči soustavě  $S'$  rychlostí  $v$  v kladném směru osy  $x$ , znázornění hmotného bodu  $A$  a jeho souřadnic

Galielovy transformace jsou velice užitečné v klasické fyzice, avšak v teorii relativity, kdy se zabýváme rychlostmi blízkými rychlosti světla  $c$ , jsou tyto rovnice nesprávné. Proto abychom mohli určit souřadnice  $x', y', z', t'$  nějaké události  $U$  v inerciální vztažné soustavě  $S'$ , která se pohybuje rychlostí  $\vec{v}$  v kladném směru osy  $x$  vzhledem k inerciální vztažné soustavě  $S$ , ve které je událost  $U$  popsána pomocí souřadnic  $x, y, z, t$ , musíme použít tzv. *speciální Lorentzovy transformační rovnice* [13].

## 4.2. Lorentzovy transformační rovnice

Uvažujme událost  $U$  v inerciální vztažné soustavě  $S$ , kterou můžeme popsat pomocí souřadnic  $x, y, z, t$ . Pak pro transformační rovnice souřadnic  $x, y, z, t$  události  $U$  v inerciální vztažné soustavě  $S$  do nějaké jiné inerciální vztažné soustavy  $S'$ , kterou můžeme popsat pomocí souřadnic  $x', y', z', t'$ , a která se pohybuje rychlostí  $v$  vůči soustavě  $S$  v kladném směru osy  $x$  platí, že [11]

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (18)$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (19)$$

$$y' = y, \quad (20)$$

$$z' = z. \quad (21)$$

Pro jednoduchost zavádíme *bezrozměrnou rychlost*  $\beta$  a tzv. *Lorentzův faktor*  $\gamma$ , pro které platí následující vztahy [12]

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad (22)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (23)$$

Pak speciální Lorentzovy transformační rovnice, zkráceně Lorentzovy transformace (18)-(21) můžeme zapsat ve tvaru

$$t' = \gamma \left( t - \frac{\beta x}{c} \right), \quad (24)$$

$$x' = \gamma(x - vt), \quad (25)$$

$$y' = y, \quad (26)$$

$$z' = z. \quad (27)$$

Nyní uvažujme opačnou situaci, kdy nás budou zajímat souřadnice  $x, y, z, t$  události  $U$  v inerciální vztažné soustavě  $S$ , která se pohybuje rychlostí  $-v$  v kladném směru osy  $x'$  vzhledem k inerciální vztažné soustavě  $S'$ , ve které je událost  $U$  popsána pomocí souřadnic  $x', y', z', t'$ . Pak platí:

$$t = \gamma \left( t' + \frac{\beta x'}{c} \right), \quad (28)$$

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad (29)$$

$$y = y', \quad (30)$$

$$z = z'. \quad (31)$$

Tyto rovnice nazýváme jako *inverzní speciální Lorentzovy transformační rovnice*.

Transformaci času v Lorentzových transformačních rovnicích můžeme zapsat ještě následujícím způsobem, který je pro nás vhodnější

$$ct' = \gamma(ct - \beta x), \quad (32)$$

a pro inverzní

$$ct = \gamma(ct' + \beta x'), \quad (33)$$

Speciální Lorentzovy transformační rovnice ve směru  $x$  lze zapsat rovněž pomocí maticového zápisu, který má následující tvar [13]

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Pokud přecházíme z inerciální vztažné soustavy  $S$  do inerciální vztažné soustavy  $S'$ , která se vůči této soustavě pohybuje konstantní rychlostí  $v$  v kladném směru osy  $x$ , pak je tato transformace určena maticí  $\mathbf{A}$ .

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (35)$$



Jestliže se druhá inerciální soustava nepohybuje vůči první inerciální soustavě v kladném směru osy  $x$ , ale pohybuje se obecně v libovolném směru, používáme obecnou Lorentzovu transformaci, kterou maticově můžeme zapsat jako [13]

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta_x \gamma & -\beta_y \gamma & -\beta_z \gamma \\ -\beta_x \gamma & 1 + (\gamma - 1) \frac{\beta_x^2}{\beta^2} & (\gamma - 1) \frac{\beta_x \beta_y}{\beta^2} & (\gamma - 1) \frac{\beta_x \beta_z}{\beta^2} \\ -\beta_y \gamma & (\gamma - 1) \frac{\beta_x \beta_y}{\beta^2} & 1 + (\gamma - 1) \frac{\beta_y^2}{\beta^2} & (\gamma - 1) \frac{\beta_y \beta_z}{\beta^2} \\ -\beta_z \gamma & (\gamma - 1) \frac{\beta_x \beta_z}{\beta^2} & (\gamma - 1) \frac{\beta_y \beta_z}{\beta^2} & 1 + (\gamma - 1) \frac{\beta_z^2}{\beta^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (36)$$

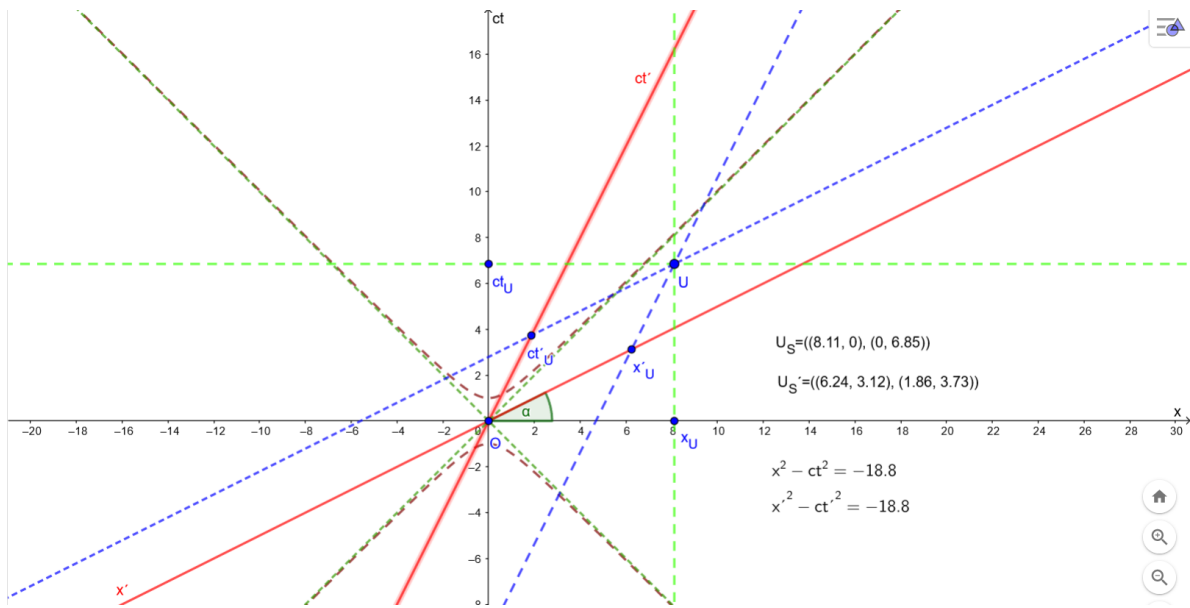
kde  $\beta$  je bezrozměrná rychlost definovaná rovnicí (22),  $\beta_x, \beta_y, \beta_z$  jsou složky bezrozměrné rychlosti (tj.  $\beta_x = \frac{v_x}{c}, \beta_y = \frac{v_y}{c}, \beta_z = \frac{v_z}{c}$ ) a  $\gamma$  je Lorentzův faktor, definovaný pomocí rovnice (23).

## 5. Prostorčasové diagramy

Poprvé byly zavedeny v roce 1908 Minkowským. Jedná se o grafické znázornění jevů, jako je například dilatace času, kontrakce délky a mnoho dalších, které souvisí s přechodem mezi inerciálními vztažnými soustavami, ve speciální teorii relativity v prostoru a čase. Jak už název napovídá, jedná se o propojení času s prostorem, tj. vodorovná osa odpovídá prostoru a vertikální osa odpovídá času [14]. Jednotlivé události znázorňujeme pomocí bodu v daném prostorčasovém diagramu, kdy vzdálenost mezi dvěma událostmi nazýváme jako interval. Souřadnice těchto událostí pak určíme pomocí příslušných rovnoběžek a jejich průsečíkem s osami. Obecně lze říci, že časoprostorový diagram nám vytváří jakýsi svět, ve kterém se uskutečňuje pohyb objektu, který je znázorněn pomocí světové čáry [14].

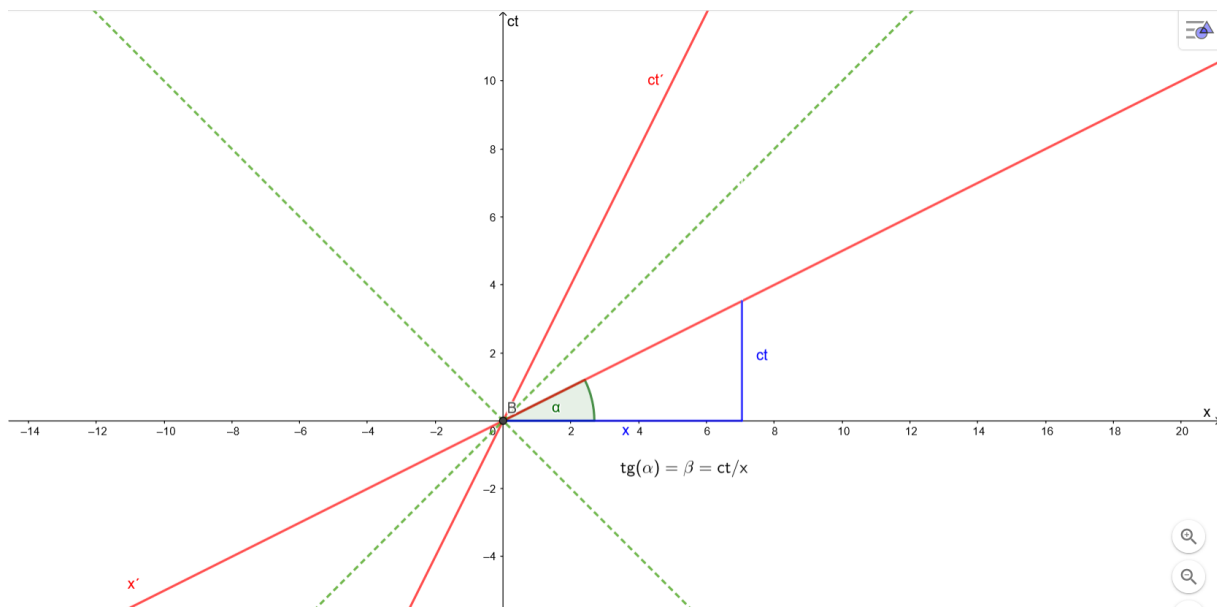
### 5.1. Minkowského prostorčasové diagramy

Osa  $x$  zůstává nezměněna, osa  $y$  vyjadřuje čas, tedy  $ct$ . Osa  $x'$  je definovaná jako  $ct_1 = \beta x$  a osa  $ct'$  je definovaná jako  $ct_2 = \frac{x}{\beta}$ . Osa  $x'$  svírá úhel  $\alpha$  s osou  $x$ , přičemž platí, že  $\beta = \tan(\alpha)$ .  $\beta$  je tedy bezrozměrná rychlost, definovaná vztahem (22). V našem případě je  $\beta$  parametr, který si na začátku zvolíme mezi hodnotou 0 – 1 a pomocí posuvníku můžeme měnit jeho hodnotu. Na obrázek 5 můžeme vidět sestavení Minkowského prostorčasového diagramu pro  $\beta = 0,5$ , kdy zelené čáry nám představují tzv. světočáry (svírají s osou  $x$  úhel  $45^\circ$ ). Dále zde můžeme vidět libovolně zvolenou událost  $U$ . Pomocí příslušných rovnoběžek a jejich průsečíků s osami najdeme souřadnice události  $U$  v soustavě  $S$  a  $S'$ . Spočítáme příslušné vzdálenosti, tj. vzdálenosti bodu  $O$  od bodů  $ct_U, ct'_U, x_U$  a  $x'_U$ . Abychom určili správné vzdálenosti v soustavě  $S'$  musíme vypočítané vzdálenosti přepočítat pomocí kalibrační hyperboly, jejíž rovnice je dána jako  $(ct^2 - x^2 = 1)$  [16].



**Obrázek 5:** Minkowského prostoročasový diagram pro  $\beta = 0,5$

**Link:** <https://www.geogebra.org/classic/qajjrkaw>



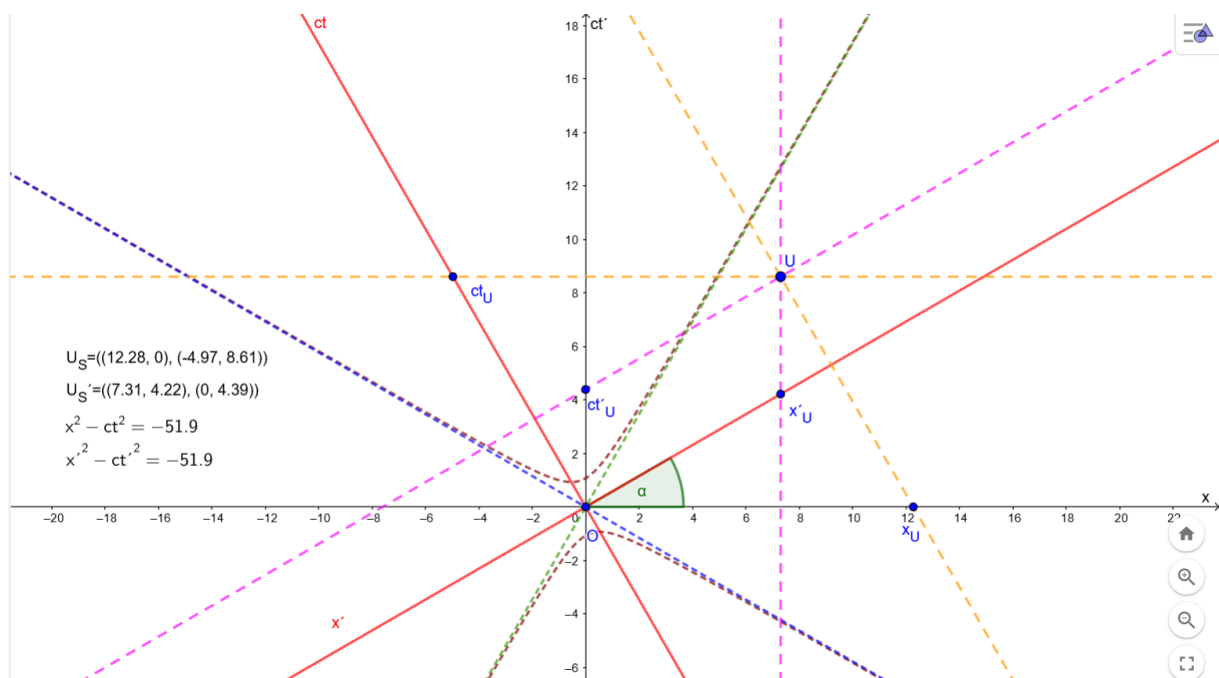
**Obrázek 6:** Prokázání, že  $\beta = \tan(\alpha)$

**Link:** <https://www.geogebra.org/classic/xhm8yv89>

Platnost vztahu (32) pro  $ct' = 0$  je důsledkem, že  $\beta = \tan(\alpha) = \frac{ct}{x}$  (Obrázek 6).

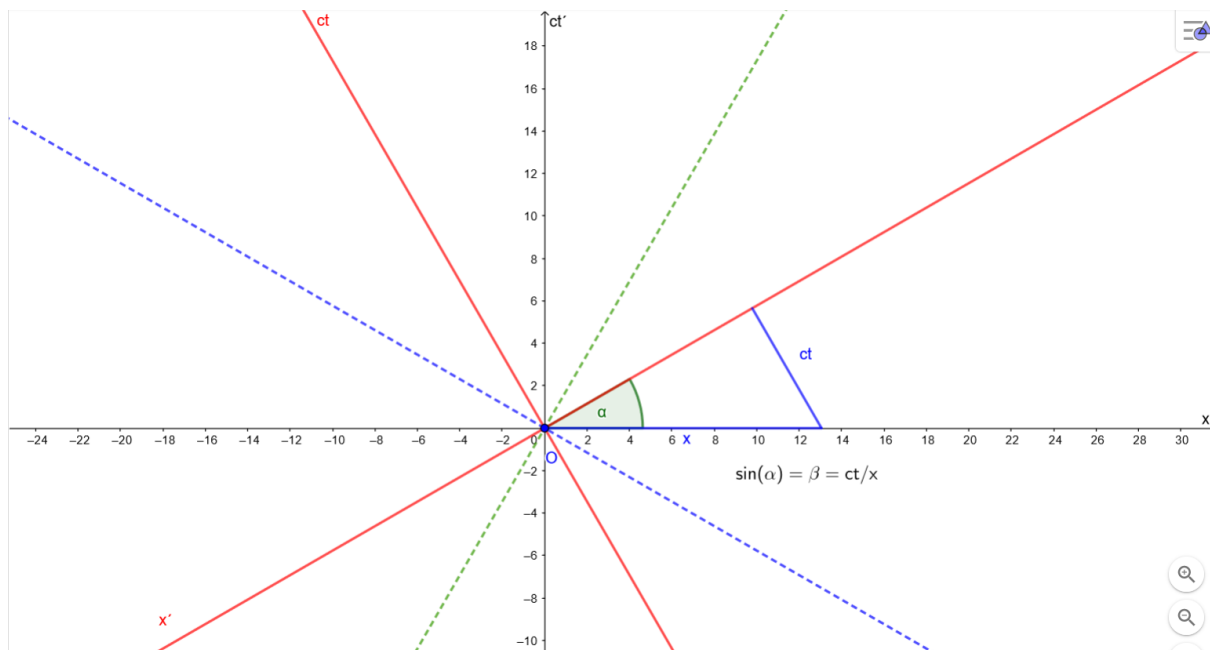
## 5.2. Loedelovy prostoročasové diagramy

U Loedelových diagramů je sestavení trošku jiná oproti Minkowského diagramu. Osa  $x$  nám opět představuje osu  $x$ , avšak narozdíl od osy  $y$ , která nám představovala u Minkowského diagramu osu  $ct$ , tak zde nám představuje osu  $ct'$ . Osa  $x'$  je definovaná jako  $ct' = \tan(\sin^{-1}(\beta))x$  a osa  $ct$  je kolmá na osu  $x'$ . Osa  $x'$  svírá úhel  $\alpha$  s osou  $x$ , přičemž platí, že  $\beta = \sin(\alpha)$ .  $\beta$  je tedy bezrozměrná rychlost, definovaná vztahem (22). V našem případě je  $\beta$  parametr, který si na začátku zvolíme mezi hodnotou 0-1 a pomocí posuvníku můžeme měnit jeho hodnotu. Na Obrázek 7 můžeme vidět sestavení Loedelova prostoročasového diagramu pro  $\beta = 0,5$ , kdy zelená a modrá čára nám představují tzv. světočáry (zelená je definovaná jako osa úhlu mezi  $x'$  a  $ct'$ , a modrá je kolmá na zelenou). Dále zde můžeme vidět libovolně zvolenou událost  $U$ . Pomocí příslušných rovnoběžek a jejich průsečíků s osami najdeme souřadnice události  $U$  v soustavě  $S$  a  $S'$ . Spočítáme příslušné vzdálenosti, tj. vzdálenosti bodu  $O$  od bodů  $ct_U$ ,  $ct'_U$ ,  $x_U$  a  $x'_U$ . Rovnice hyperboly je daná jako  $ct^2 - x^2 = 1$ , která je pootočená doleva o úhel  $\omega$ , což je úhel mezi zelenou světočárou (první kvadrant) a osou  $ct'$ . Vzdálenosti nemusíme přepočítávat, protože jsou jednotky na všech osách stejné [15].



**Obrázek 7:** Loedelův prostoročasový diagram pro  $\beta = 0,5$

**Link:** <https://www.geogebra.org/classic/myyfwvd2>



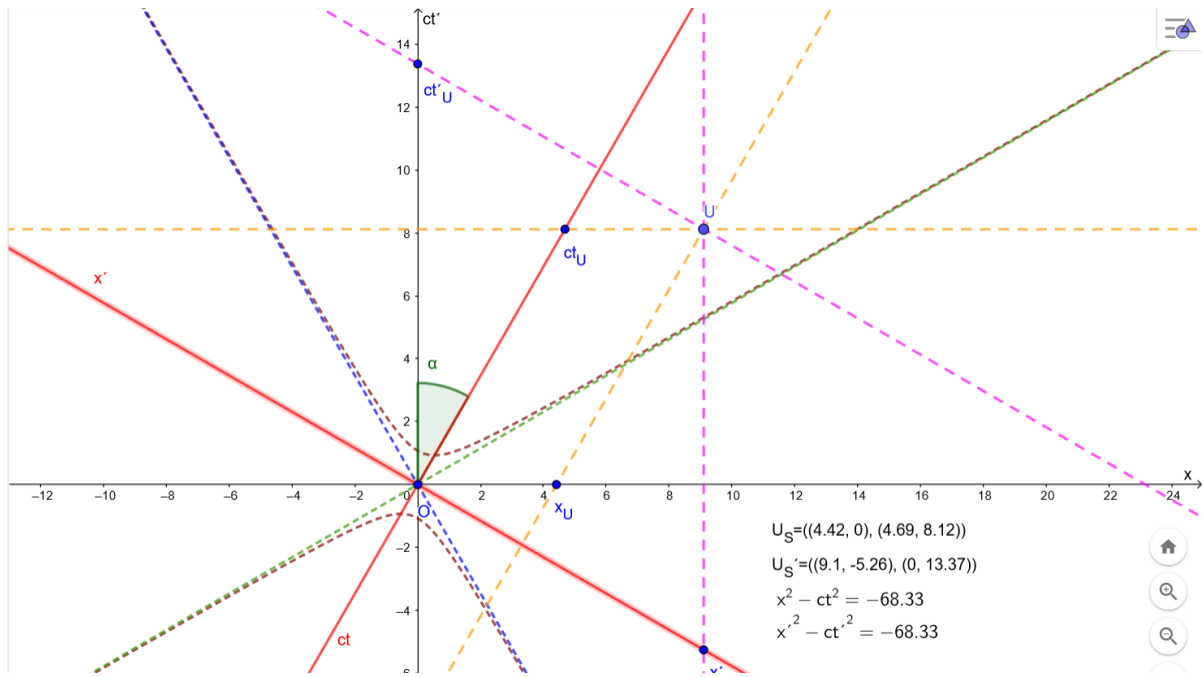
**Obrázek 8:** Prokázání, že  $\beta = \sin(\alpha)$

**Link:** <https://www.geogebra.org/m/xfnqghx8>

Platnost vztahu (32) pro  $ct' = 0$  je důsledkem, že  $\beta = \sin(\alpha) = \frac{ct}{x}$  (Obrázek 8).

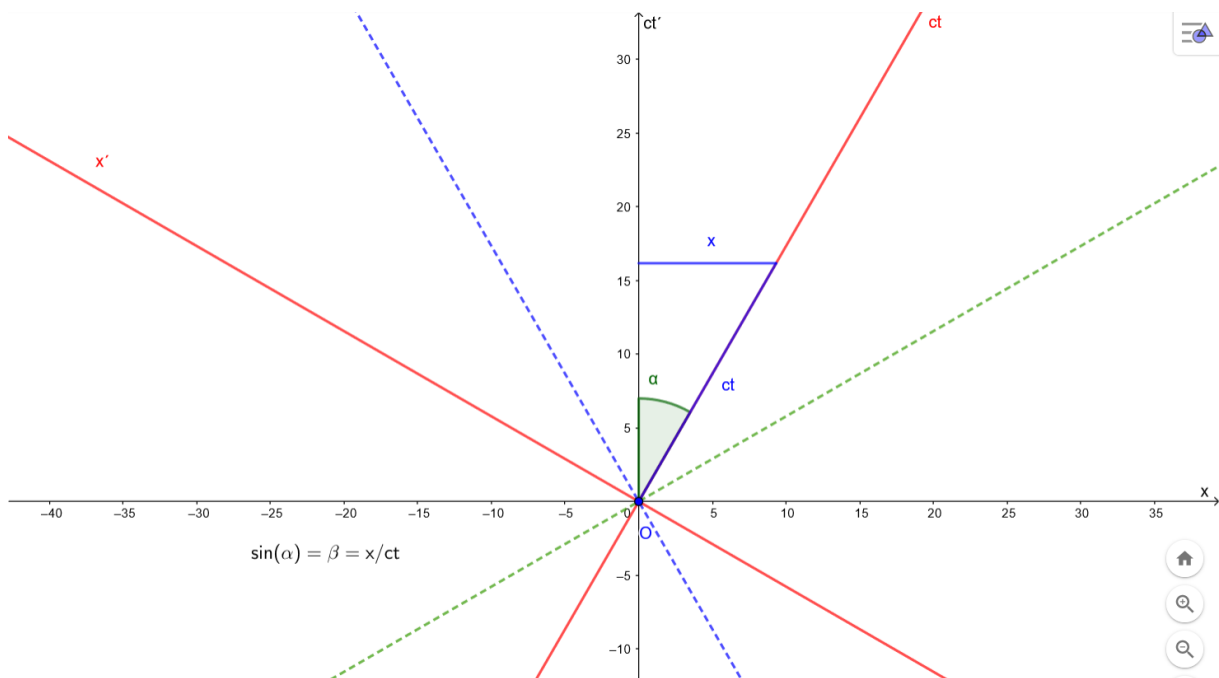
### 5.3. Brehmovy prostoročasové diagramy

U Brehmova prostoročasového diagramu to je tak, že osa  $x$  nám opět představuje osu  $x$  a osa  $y$  nám představuje osu  $ct'$ . Osa  $ct$  je definovaná jako  $ct' = \frac{x}{\tan(\sin^{-1}(\beta))}$  a osa  $x'$  je kolmá na osu  $ct$ . Osa  $x'$  svírá úhel  $\alpha$  s osou  $x$ , přičemž platí, že  $\beta = \sin(\alpha)$ , kde  $\beta$  je opět bezrozměrná rychlost, definovaná vztahem (22). V našem případě je  $\beta$  parametr, který si na začátku zvolíme mezi hodnotou 0-1 a pomocí posuvníku můžeme měnit jeho hodnotu. Na Obrázek 9 můžeme vidět sestavení Brehmova prostoročasového diagramu pro  $\beta = 0,5$ , kdy zelená a modrá čára nám představují tzv. světočáry (zelená je definovaná jako osa úhlu mezi  $ct$  a  $x$ , a modrá je kolmá na zelenou). Dále zde můžeme vidět libovolně zvolenou událost  $U$ . Pomocí příslušných rovnoběžek a jejich průsečíků s osami najdeme souřadnice události  $U$  v soustavě  $S$  a  $S'$ . Spočítáme příslušné vzdálenosti, tj. vzdálenosti bodu  $O$  od bodů  $ct_U$ ,  $ct'_U$ ,  $x_U$  a  $x'_U$ . Rovnice hyperboly je daná jako  $ct^2 - x^2 = 1$ , která je pootočená doprava o úhel  $\omega$ , což je úhel mezi zelenou světočárou (první kvadrant) a osou  $x$ . Vzdálenosti nemusíme přepočítávat, protože jsou jednotky na všech osách stejné [12].



**Obrázek 9:** Brehmův prostoročasový diagram pro  $\beta = 0,5$

**Link:** <https://www.geogebra.org/classic/u4e8jgzt>



**Obrázek 10:** Prokázání, že  $\beta = \sin(\alpha)$

**Link:** <https://www.geogebra.org/classic/xgqd4ngv>

## 6. Relativnost současnosti

Uvažujme dva pozorovatele, kteří pozorují dvě nezávislé události. Necht' první pozorovatel (například Slávek) zjišťuje, že tyto dvě nezávislé události nastanou v jeho inerciální vztažné soustavě ve stejném čase. Necht' druhý pozorovatel (například Sylva) se nachází v nějaké jiné inerciální vztažné soustavě, která se pohybuje rychlostí  $\vec{v}$  vzhledem k soustavě Slávka. Otázka nyní je taková, zda i Sylva zjistí, že tyto dvě události nastaly současně v její inerciální vztažné soustavě [4].

Odpověď na tuto otázku je v obecném případě záporná, Sylva nezjistí, že tyto dvě nezávislé události nastaly v její inerciální vztažné soustavě ve stejném čase, protože současnost není absolutním pojmem, ale pouze pojmem relativním, který závisí na vztažné soustavě, v níž se pozorovatel nachází.

Z Lorentzových transformačních rovnic víme (kdy soustava  $S$  se pohybuje rychlostí  $-\vec{v}$  vzhledem k soustavě  $S'$  v kladném směru osy  $x$ ), že čas se transformuje podle rovnice (28).

Jestliže nastanou dvě události současně v různých místech soustavy  $S'$ , pak  $\Delta x' \neq 0$ . Z toho vyplývá, že pokud máme tedy dvě události současně v soustavě  $S'$ , nebudou současně v soustavě  $S$ . Pro časový interval v soustavě  $S$  mezi těmito dvěma událostmi pak platí

$$\Delta t = \gamma \frac{v \Delta x'}{c^2}. \quad (37)$$

Pro obrácenou transformaci pak dostáváme

$$\Delta t' = \gamma \frac{v \Delta x}{c^2}. \quad (38)$$

Pro naše výpočty však bude vhodnější použít tyto rovnice v následujícím tvaru:

$$c \Delta t = \gamma \beta \Delta x' \quad (39)$$

$$c \Delta t' = \gamma \beta \Delta x \quad (40)$$

Nyní se budeme zabývat současnými událostmi, nejdříve v soustavě  $S$ , poté v soustavě  $S'$ . Relativnost současnosti si znázorníme pomocí jednotlivých diagramů, jako jsou Minkowského, Loedelovy a Brehmovy diagramy v programu Geogebra.

### 6.1. Současné události v $S$

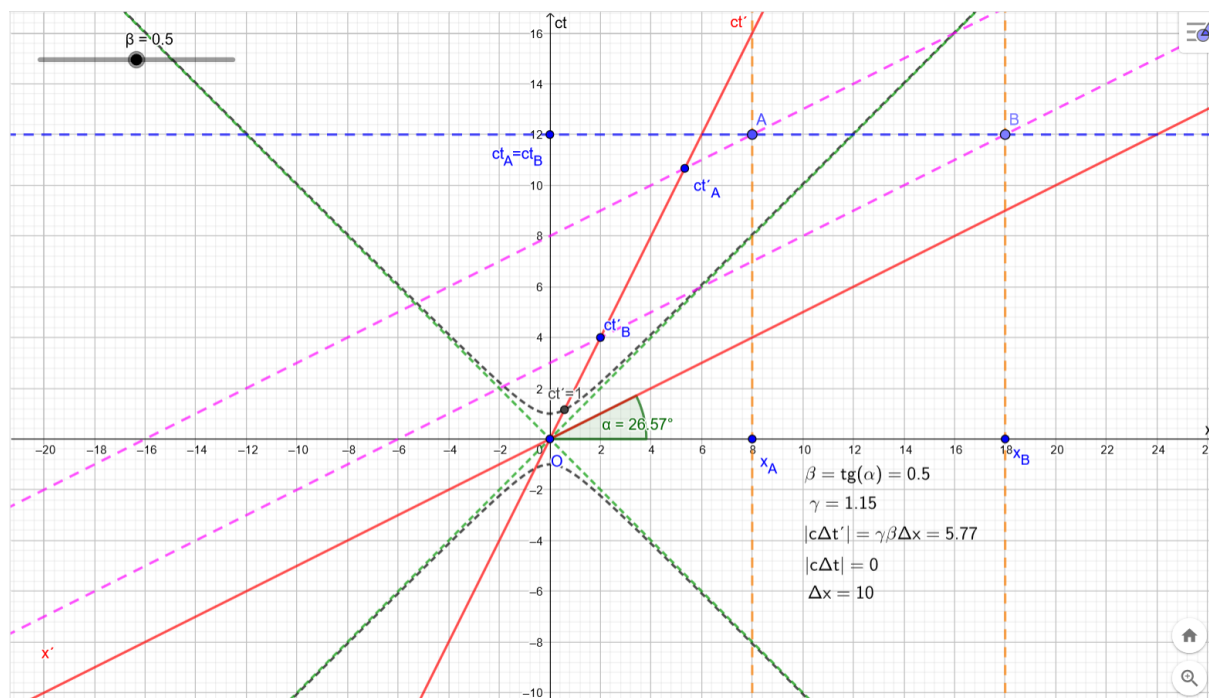
Budeme se zabývat dvěma událostmi, které budou v soustavě  $S$  současné, tj.  $ct_A = ct_B$ , ale nebudou současné v soustavě  $S'$ , tj.  $ct'_A \neq ct'_B$ . Dále bude platit, že tyto události nebudou v soustavě  $S$  souměrné, tj.  $x_A \neq x_B$ .

### 6.1.1. Minkowského diagram pro současné události v $S$

#### Postup:

Sestrojíme Minkowského diagram jako na Obrázek 5. Zvolíme si dvě události, které budou současné v soustavě  $S$ , to znamená, že zvolíme událost  $A$  jako bod v Minkowském prostoročasovém diagramu, kterou necháme procházet rovnoběžku  $i$  s osou  $x$ . Na této přímce si zvolíme bod  $B$ . Průsečík přímky  $i$  s osou  $ct$  označíme jako  $ct_A = ct_B$ . Nyní necháme bodem  $A$  procházet rovnoběžku  $j$  s osou  $x'$ . Průsečík přímky  $j$  s osou  $ct'$  označíme jako  $ct'_A$ . Obdobně to uděláme pro bod  $B$ , tj. rovnoběžku  $k$  s osou  $x'$ . Průsečík přímky  $k$  s osou  $ct'$  označíme jako  $ct'_B$ . Nyní uděláme dvě rovnoběžky  $l, m$  s osou  $ct$ , kdy první z nich necháme procházet bodem  $A$  a druhou z nich necháme procházet bodem  $B$ . Průsečík přímky  $l$  s osou  $x$  označíme jako  $x_A$  a průsečík přímky  $m$  s osou  $x$  označíme jako  $x_B$ . Vypočítáme intervaly. Protože máme Minkowského diagram, musíme vzdálenost bodu  $ct'_A$  od  $ct'_B$  přepočítat pomocí kalibrační hyperboly, jejíž rovnice je ve tvaru  $ct^2 - x^2 = 1$ . To uděláme tak, že si spočteme vzdálenost počátku  $O$  od průsečíku hyperboly s osou  $ct'$ . Abychom dostali správnou vzdálenost bodu  $ct'_A$  od  $ct'_B$ , musíme tuto vzdálenost podělit vzdáleností počátku  $O$  od průsečíku hyperboly s osou  $ct'$ . Vypočítáme si  $\gamma$  pomocí rovnice (23). Vypočítáme si  $\gamma\beta\Delta x$  a zjistíme, že se rovná vzdálenosti bodu  $ct'_A$  od  $ct'_B$ , kdy tato vzdálenost je již přepočítaná pomocí kalibrační hyperboly. Tím jsme prokázali platnost vztahu (40).

Link: <https://www.geogebra.org/classic/d8vg4h76>



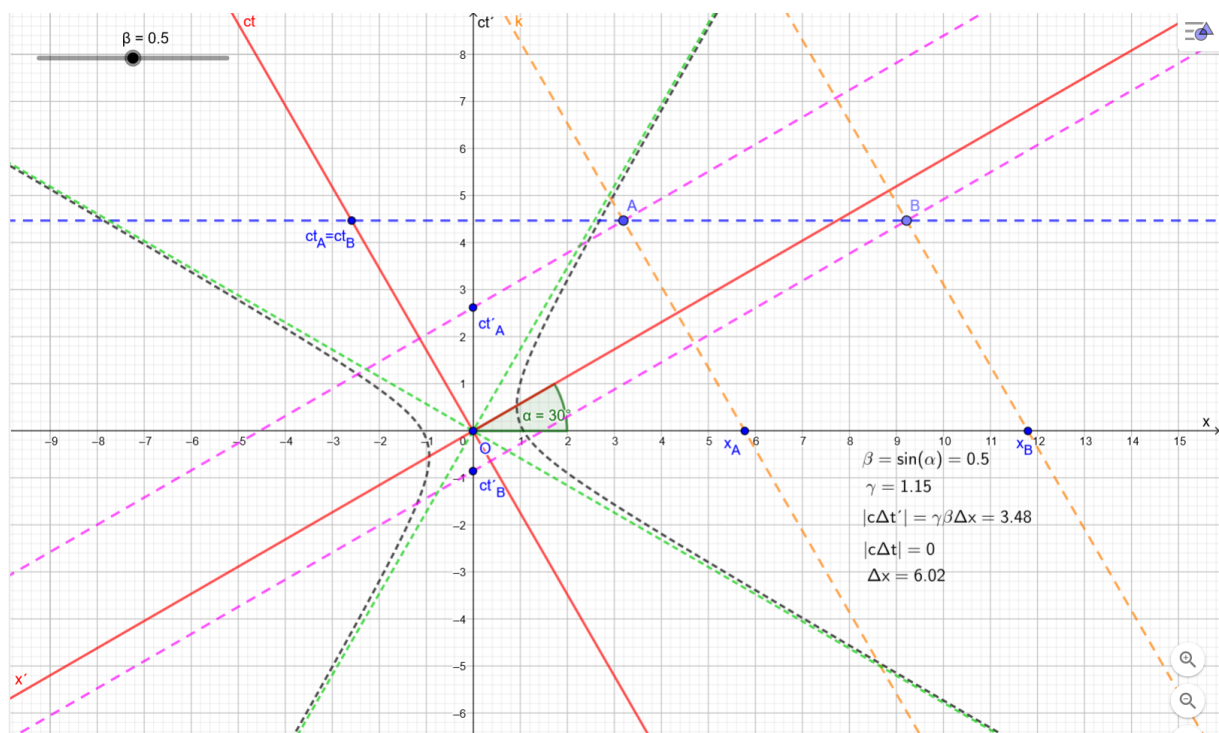
**Obrázek 11:** Minkowského prostoročasový diagram pro relativnost současnosti (současné události v soustavě  $S$ ) pro  $\beta = 0,5$

## 6.1.2. Loedelův diagram pro současné události v $S$

### Postup:

Sestrojíme Loedelův diagram jako na Obrázek 7. Zvolíme si dvě události, které budou současné v soustavě  $S$ , to znamená, že zvolíme událost  $A$  jako bod v Loedelově prostoročasovém diagramu, kterou necháme procházet rovnoběžku  $f$  s osou  $x$ . Na této přímce si zvolíme bod  $B$ . Průsečík přímky  $f$  s osou  $ct$  označíme jako  $ct_A = ct_B$ . Nyní necháme bodem  $A$  procházet rovnoběžku  $i$  s osou  $x'$ . Průsečík přímky  $i$  s osou  $ct'$  označíme jako  $ct'_A$ . Obdobně to uděláme pro bod  $B$ , tj. rovnoběžku  $j$  s osou  $x'$ . Průsečík přímky  $j$  s osou  $ct'$  označíme jako  $ct'_B$ . Nyní uděláme dvě rovnoběžky  $k, l$  s osou  $ct$ , kdy první z nich necháme procházet bodem  $A$  a druhou z nich necháme procházet bodem  $B$ . Průsečík přímky  $k$  s osou  $x$  označíme jako  $x_A$  a průsečík přímky  $l$  s osou  $x$  označíme jako  $x_B$ . Vypočítáme intervally. Dále si vypočítáme  $\gamma$  pomocí rovnice (23). Vypočítáme si  $\gamma\beta\Delta x$  a zjistíme, že se rovná vzdálenosti bodu  $ct'_A$  od  $ct'_B$ . Tím jsme prokázali platnost vztahu (40).

Link: <https://www.geogebra.org/classic/ezpcjfeq>

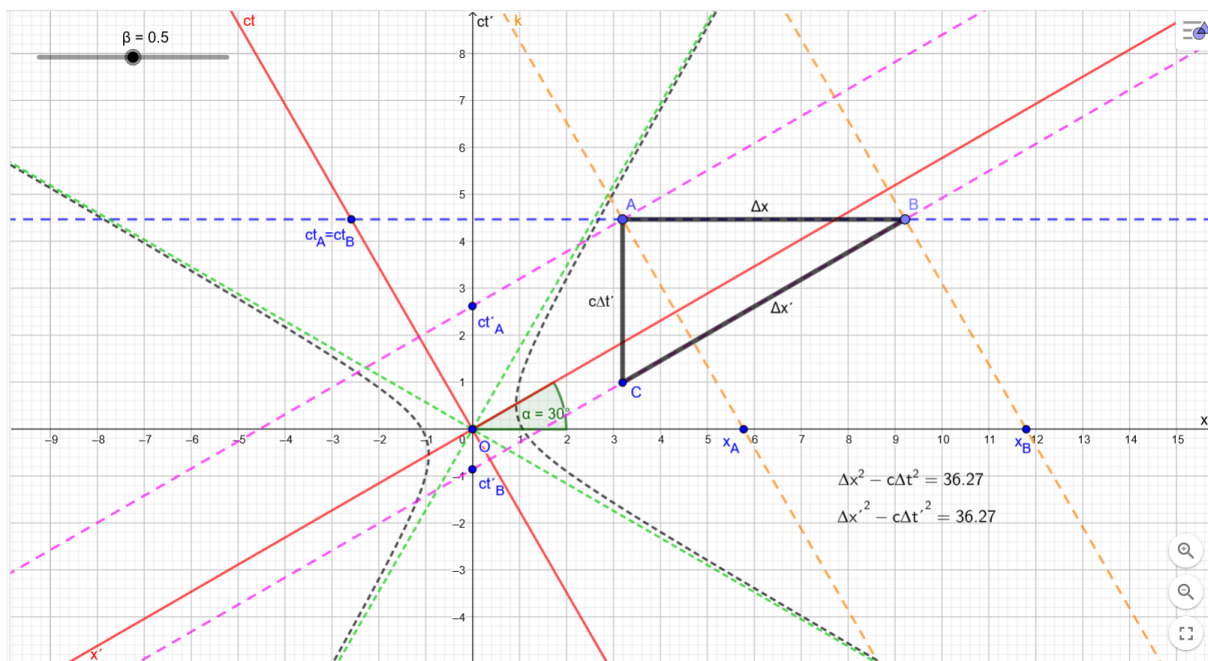


**Obrázek 12:** Loedelův prostoročasový diagram pro relativnost současnosti (současné události v soustavě  $S$ ) pro  $\beta = 0,5$

Nyní si ukážeme zachování intervalů

Link: <https://www.geogebra.org/classic/vzqgy4hb>





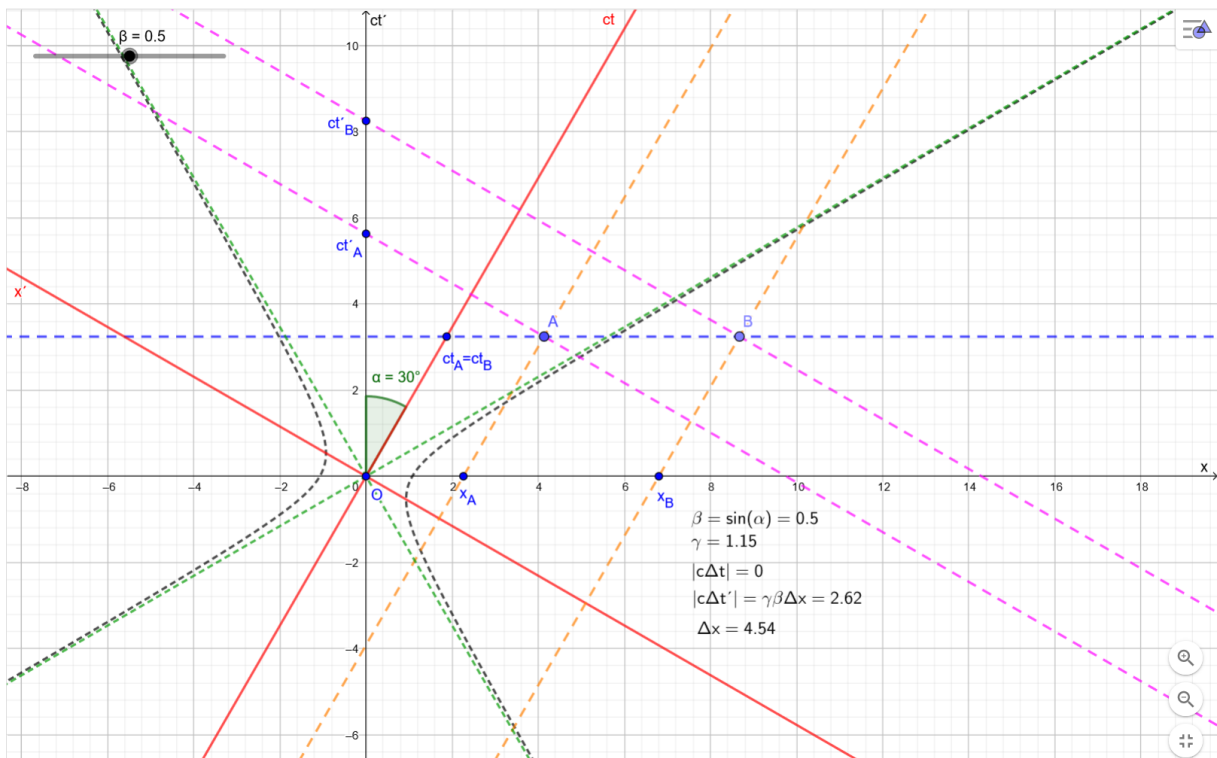
**Obrázek 13:** Zachování intervalů pro Loedelův prostoročasový diagram – relativnost současnosti (současné události v soustavě  $S$ ) pro  $\beta = 0,5$

### 6.1.3. Brehmův diagram pro současné události v $S$

#### Postup:

Sestrojíme Brehmův diagram jako na Obrázek 9. Zvolíme si dvě události, které budou současné v soustavě  $S$ , to znamená, že zvolíme událost  $A$  jako bod v Brehmově prostoročasovém diagramu, kterou necháme procházet rovnoběžku  $g$  s osou  $x$ . Na této přímce si zvolíme bod  $B$ . Průsečík přímky  $g$  s osou  $ct$  označíme jako  $ct_A = ct_B$ . Nyní necháme bodem  $A$  procházet rovnoběžku  $i$  s osou  $x'$ . Průsečík přímky  $i$  s osou  $ct'$  označíme jako  $ct'_A$ . Obdobně to uděláme pro bod  $B$ , tj. rovnoběžku  $j$  s osou  $x'$ . Průsečík přímky  $j$  s osou  $ct'$  označíme jako  $ct'_B$ . Nyní uděláme dvě rovnoběžky  $k, l$  s osou  $ct$ , kdy první z nich necháme procházet bodem  $A$  a druhou z nich necháme procházet bodem  $B$ . Průsečík přímky  $k$  s osou  $x$  označíme jako  $x_A$  a průsečík přímky  $l$  s osou  $x$  označíme jako  $x_B$ . Vypočítáme intervaly. Dále si vypočítáme  $\gamma$  pomocí rovnice (23). Vypočítáme si  $\gamma\beta\Delta x$  a zjistíme, že se rovná vzdálenosti bodu  $ct'_A$  od  $ct'_B$ . Tím jsme prokázali platnost vztahu (40).

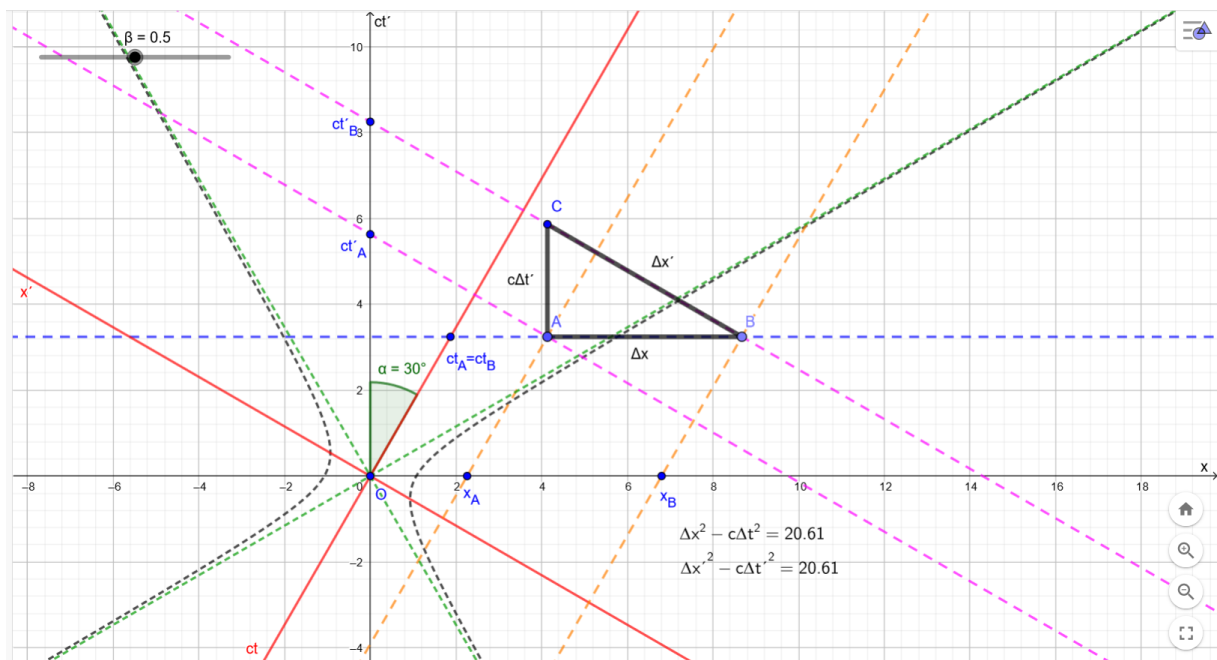
**Link:** <https://www.geogebra.org/classic/bxuuqmff>



**Obrázek 14:** Brehmův prostoročasový diagram pro relativnost současnosti (současné události v soustavě  $S$ ) pro  $\beta = 0,5$

Nyní si ukážeme zachování intervalů

Link: <https://www.geogebra.org/classic/hpvm7qfb>



**Obrázek 15:** Zachování intervalů pro Brehmův prostoročasový diagram – relativnost současnosti (současné události v soustavě  $S$ ) pro  $\beta = 0,5$

## 6.2. Současné události v $S'$

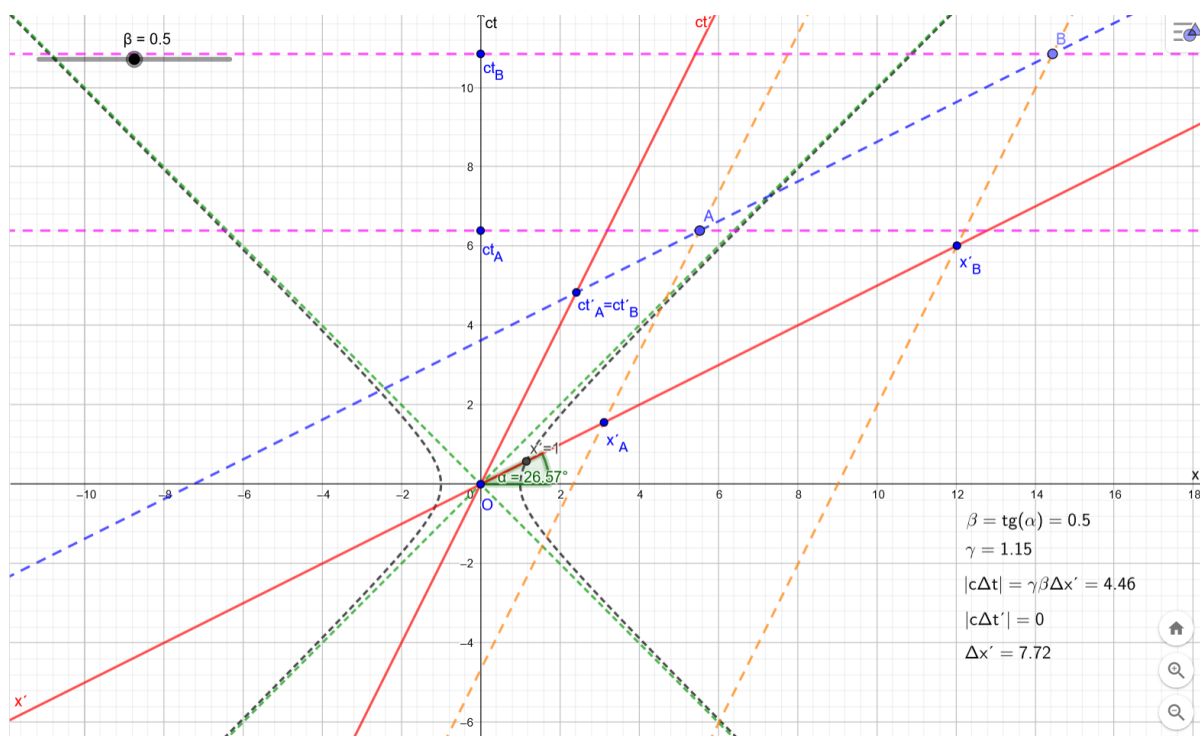
Budeme se zabývat dvěma událostmi, které budou v soustavě  $S'$  současné, tj.  $ct'_A = ct'_B$ , ale nebudou současné v soustavě  $S$ , tj.  $ct_A \neq ct_B$ . Dále bude platit, že tyto události nebudou v soustavě  $S'$  souměrné, tj.  $x'_A \neq x'_B$ .

### 6.2.1. Minkowského diagram pro současné události v $S'$

#### Postup:

Sestrojíme Minkowského diagram jako na Obrázek 5. Zvolíme si dvě události, které budou současné v soustavě  $S'$ , to znamená, že zvolíme událost  $A$  jako bod v Minkowském prostoročasovém diagramu, kterou necháme procházet rovnoběžku  $i$  s osou  $x'$ . Na této přímce si zvolíme bod  $B$ . Průsečík přímky  $i$  s osou  $ct'$  označíme jako  $ct'_A = ct'_B$ . Nyní necháme bodem  $A$  procházet rovnoběžku  $j$  s osou  $x$ . Průsečík přímky  $j$  s osou  $ct$  označíme jako  $ct_A$ . Obdobně to uděláme pro bod  $B$ , tj. rovnoběžku  $k$  s osou  $x$ . Průsečík přímky  $k$  s osou  $ct$  označíme jako  $ct_B$ . Nyní uděláme dvě rovnoběžky  $l, m$  s osou  $ct'$ , kdy první z nich necháme procházet bodem  $A$  a druhou z nich necháme procházet bodem  $B$ . Průsečík přímky  $l$  s osou  $x'$  označíme jako  $x'_A$  a průsečík přímky  $m$  s osou  $x'$  označíme jako  $x'_B$ . Vypočítáme intervaly. Protože máme Minkowského diagram, musíme vzdálenost bodu  $x'_A$  od  $x'_B$  přepočítat pomocí kalibrační hyperboly, jejíž rovnice je ve tvaru  $x^2 - ct^2 = 1$ . To uděláme tak, že si spočteme vzdálenost počátku  $O$  od průsečíku hyperboly s osou  $x'$ . Abychom dostali správnou vzdálenost bodu  $x'_A$  od  $x'_B$ , musíme tuto vzdálenost podělit vzdáleností počátku  $O$  od průsečíku hyperboly s osou  $x'$ . Vypočítáme si  $\gamma$  pomocí rovnice (23). Vypočítáme si  $\gamma\beta\Delta x'$  a zjistíme, že se rovná vzdálenosti bodu  $ct_A$  od  $ct_B$ , kdy tato vzdálenost je již přepočítaná pomocí kalibrační hyperboly. Tím jsme prokázali platnost vztahu (39).

Link: <https://www.geogebra.org/classic/hrd8vzg4>



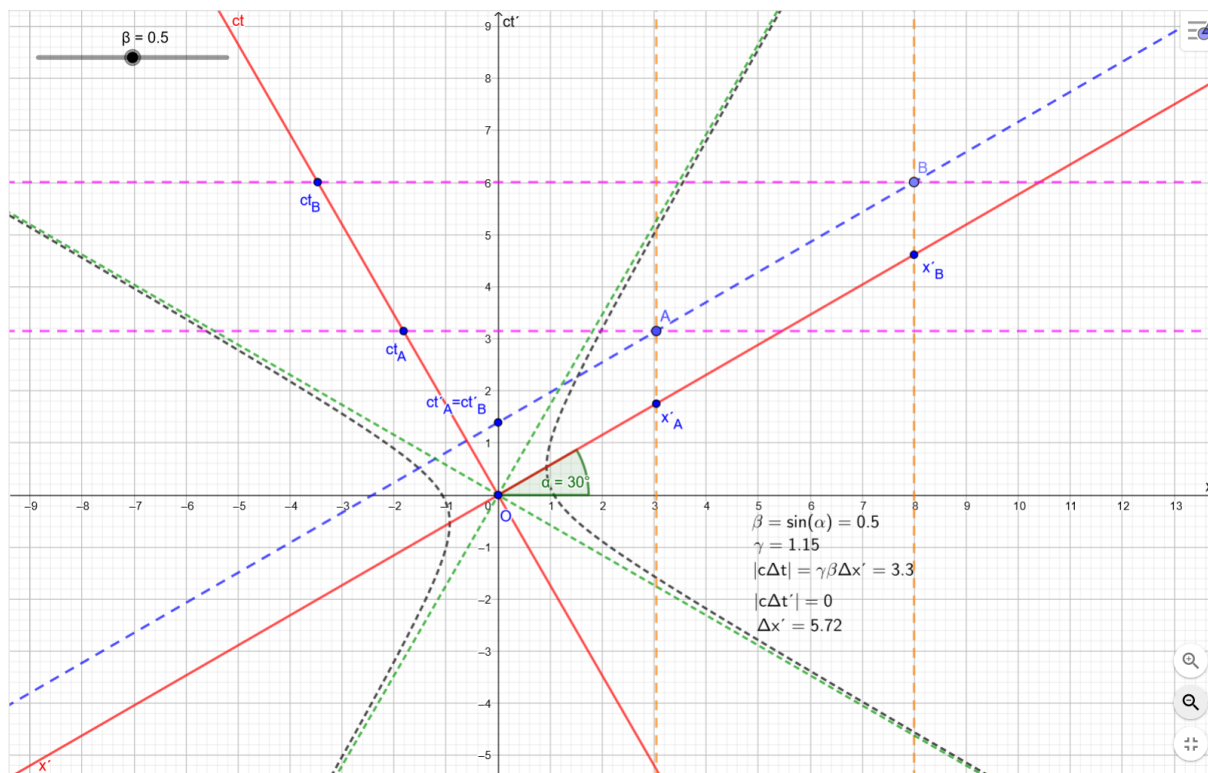
**Obrázek 16:** Minkowského prostoročasový diagram pro relativnost současnosti (současné události v soustavě  $S'$ ) pro  $\beta = 0,5$

### 6.2.2. Loedelův diagram pro současné události v $S'$

#### Postup:

Sestrojíme Loedelův diagram jako na Obrázek 7. Zvolíme si dvě události, které budou současné v soustavě  $S'$ , to znamená, že zvolíme událost  $A$  jako bod v Loedelově prostoročasovém diagramu, kterou necháme procházet rovnoběžku  $f$  s osou  $x'$ . Na této přímce si zvolíme bod  $B$ . Průsečík přímky  $f$  s osou  $ct'$  označíme jako  $ct'_A = ct'_B$ . Nyní necháme bodem  $A$  procházet rovnoběžku  $i$  s osou  $x$ . Průsečík přímky  $i$  s osou  $ct$  označíme jako  $ct_A$ . Obdobně to uděláme pro bod  $B$ , tj. rovnoběžku  $j$  s osou  $x$ . Průsečík přímky  $j$  s osou  $ct$  označíme jako  $ct_B$ . Nyní uděláme dvě rovnoběžky  $k, l$  s osou  $ct'$ , kdy první z nich necháme procházet bodem  $A$  a druhou z nich necháme procházet bodem  $B$ . Průsečík přímky  $k$  s osou  $x'$  označíme jako  $x'_A$  a průsečík přímky  $l$  s osou  $x'$  označíme jako  $x'_B$ . Vypočítáme intervaly. Dále si vypočítáme  $\gamma$  pomocí rovnice (23). Vypočítáme si  $\gamma\beta\Delta x'$  a zjistíme, že se rovná vzdálenosti bodu  $ct_A$  od  $ct_B$ . Tím jsme prokázali platnost vztahu (39).

**Link:** <https://www.geogebra.org/classic/gtd66ah7>



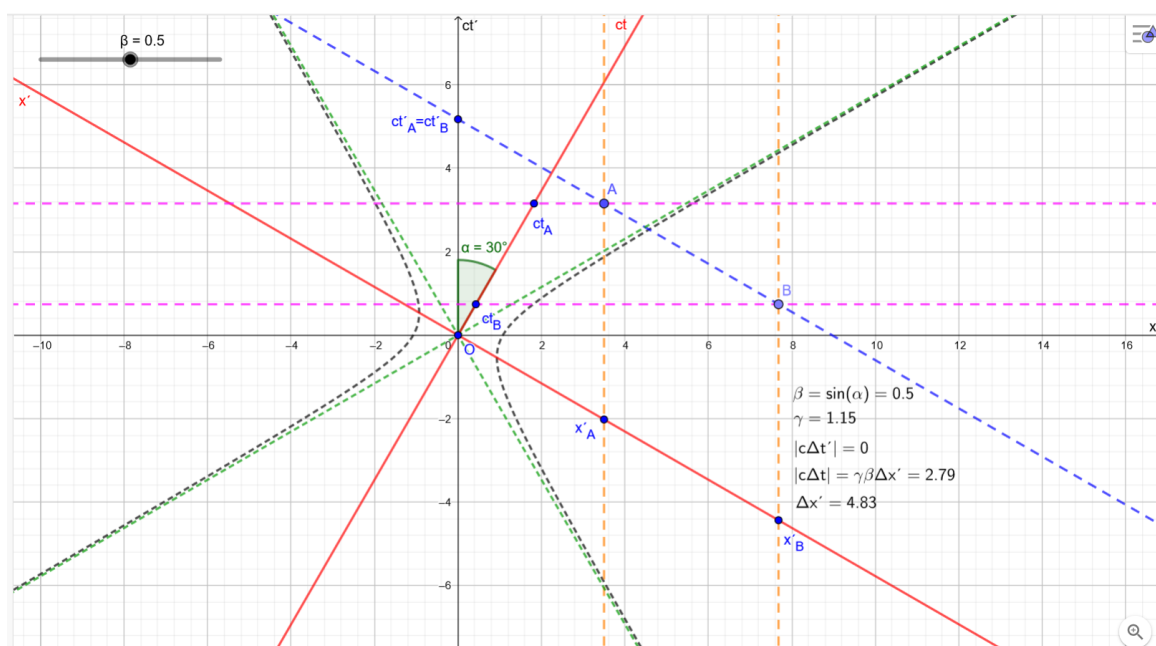
**Obrázek 17:** Loedelův prostoročasový diagram pro relativnost současnosti (současné události v soustavě  $S'$ ) pro  $\beta = 0,5$

### 6.2.3. Brehmův diagram pro současné události v $S'$

#### Postup:

Sestrojíme Brehmův diagram jako na Obrázek 9. Zvolíme si dvě události, které budou současné v soustavě  $S'$ , to znamená, že zvolíme událost  $A$  jako bod v Brehmově prostoročasovém diagramu, kterou necháme procházet rovnoběžku  $f$  s osou  $x'$ . Na této přímce si zvolíme bod  $B$ . Průsečík přímky  $f$  s osou  $ct'$  označíme jako  $ct'_A = ct'_B$ . Nyní necháme bodem  $A$  procházet rovnoběžku  $i$  s osou  $x$ . Průsečík přímky  $i$  s osou  $ct$  označíme jako  $ct_A$ . Obdobně to uděláme pro bod  $B$ , tj. rovnoběžku  $j$  s osou  $x$ . Průsečík přímky  $j$  s osou  $ct$  označíme jako  $ct_B$ . Nyní uděláme dvě rovnoběžky  $k, l$  s osou  $ct'$ , kdy první z nich necháme procházet bodem  $A$  a druhou z nich necháme procházet bodem  $B$ . Průsečík přímky  $k$  s osou  $x'$  označíme jako  $x'_A$  a průsečík přímky  $l$  s osou  $x'$  označíme jako  $x'_B$ . Vypočítáme intervaly. Dále si vypočítáme  $\gamma$  pomocí rovnice (23). Vypočítáme si  $\gamma\beta\Delta x'$  a zjistíme, že se rovná vzdálenosti bodu  $ct_A$  od  $ct_B$ . Tím jsme prokázali platnost vztahu (39).

**Link:** <https://www.geogebra.org/classic/ww6hnxf>

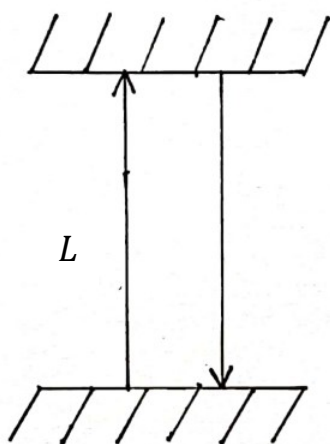


**Obrázek 18:** Brehmův prostoročasový diagram pro relativnost současnosti (současné události v soustavě  $S'$ ) pro  $\beta = 0,5$

## 7. Dilatace času

Dilatace času je fyzikální jev ve speciální teorii relativity, který se dá vysvětlit na modelu světelných hodin, a který je pozorován u všech objektů, které se vzhledem k pozorovateli pohybují velkou rychlostí (důsledek zákonů STR), nebo které jsou vzhledem k pozorovateli v silnějším gravitačním poli, nebo se pohybují zrychleně vzhledem k inerciální vztažené soustavě (důsledek zákonů OTR) [4], [2].

Světelné hodiny jsou tvořené dvěma rovnoběžnými zrcadly, která se od sebe nacházejí ve vzdálenosti  $L$ , kdy mezi těmito dvěma zrcadly v kolmém směru kmitá světelný paprsek od dolního zrcadla k hornímu a zpět.



**Obrázek 19:** Světelné hodiny tvořené dvěma rovnoběžnými zrcadly, která se nacházejí ve vzdálenosti  $L$ , mezi nimiž kmitá světelný paprsek

Jednu periodu světelných hodin pak můžeme zapsat jako,

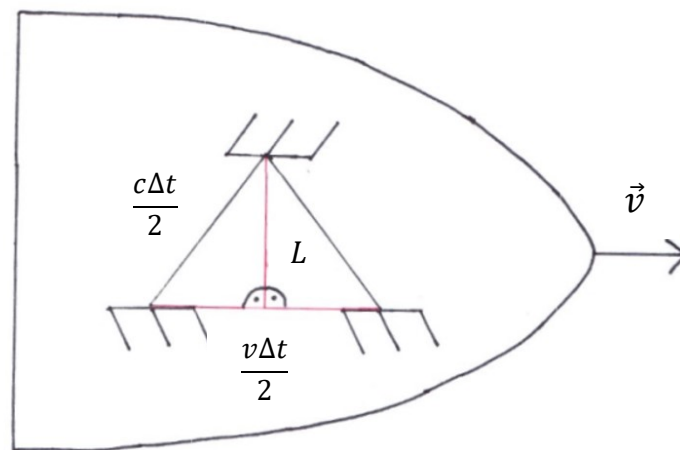
$$\Delta\tau = \frac{2L}{c}, \quad (41)$$

kde  $L$  je vzdálenost zrcadel a  $c$  je rychlost světelného paprsku.

Protože se paprsek pohybuje od dolního zrcadla k hornímu a nazpátek, proto celková dráha, kterou paprsek urazí je  $2L$ , proto se nám v rovnici (41) objevuje vzdálenost  $2L$ .

Tento čas naměří pozorovatel, který se nachází v soustavě, ve které jsou umístěny tyto světelné hodiny. Uvažujme, že tyto hodiny se nachází v raketě s kosmonautem, pak čas  $\Delta\tau$  můžeme nazvat jako „raketový čas“.

Uvažujme nyní druhého pozorovatele, který se nachází v klidové soustavě, vůči níž se raketa pohybuje rychlostí  $\vec{v}$ . Pak situace bude vypadat trochu jinak: Světelný paprsek se odrazí od dolního zrcadla a putuje směrem k hornímu, avšak než doputuje k hornímu zrcadlu, tak se raketa posune o  $v\frac{\Delta t}{2}$ . Tedy světelný paprsek se nebude pohybovat ve svislém směru, ale ve směru šikmém po přeponě  $c\frac{\Delta t}{2}$  pravoúhlého trojúhelníku, jehož odvěsny mají velikost  $v\frac{\Delta t}{2}$  a  $L$ , a kde  $\Delta t$  je perioda měřená v klidové soustavě. Poté se světelný paprsek odrazí od horního zrcadla a opět putuje v šikmém směru k dolnímu zrcadlu.



**Obrázek 20:** Raketa pohybující se rychlostí  $\vec{v}$  vzhledem k druhému pozorovateli, který se nachází ve své klidové soustavě

Z pravoúhlého trojúhelníku pak pomocí Pythagorovy věty dostáváme:

$$\left(c\frac{\Delta t}{2}\right)^2 = \left(v\frac{\Delta t}{2}\right)^2 + L^2 \quad (42)$$

Po umocnění pak dostáváme

$$c^2 \frac{\Delta t^2}{4} = v^2 \frac{\Delta t^2}{4} + L^2 \quad (43)$$

Nyní převedeme rovnici tak, abychom na jedné straně měli  $\Delta t^2$  a na druhé zbytek

$$c^2 \frac{\Delta t^2}{4} - v^2 \frac{\Delta t^2}{4} = L^2 \quad (44)$$

Vynásobíme rovnici 4 a dostaneme

$$c^2 \Delta t^2 - v^2 \Delta t^2 = 4L^2 \quad (45)$$

Nyní z rovnice vytkneme  $\Delta t^2$

$$\Delta t^2 (c^2 - v^2) = 4L^2 \quad (46)$$

Celou rovnici podělíme  $(c^2 - v^2)$

$$\Delta t^2 = \frac{4L^2}{c^2 - v^2} \quad (47)$$

Rovnici (47) odmocníme, abychom dostali vyjádření pro  $\Delta t$

$$\Delta t = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}} \quad (48)$$

Z rovnice (48) vytkneme  $\frac{1}{c}$  a dostaneme

$$\Delta t = \frac{2L}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (49)$$

Z rovnice (41) si vyjádříme  $2L$ , tedy

$$2L = \Delta \tau c \quad (50)$$

a dosadíme do rovnice (49), dostaneme, že

$$\Delta t = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \Delta \tau > \Delta \tau. \quad (51)$$



Z čehož vyplývá, že čas v raketě plyne pomaleji (tedy kosmonaut v raketě bude stárnout pomaleji než pozorovatel, který se nachází v klidové soustavě, vůči níž se raketa pohybuje rychlostí  $\vec{v}$ ). Tento jev nazýváme jako dilatace času, kde  $\gamma$  je Lorentzův faktor definovaný pomocí rovnice (23).

Dilatace času plyne i z Lorentzových transformací (28). Uvažujme nyní dvě souměstné události, tj. nastávají v soustavě  $S'$  na stejném místě (tedy  $\Delta x' = x'_B - x'_A = 0$ ), ale v různých časech ( $\Delta t' = t'_B - t'_A \neq 0$ ), pak rovnice

$$\Delta t = \gamma \left( \Delta t' + \frac{v \Delta x'}{c^2} \right) \quad (52)$$

se redukuje na rovnici

$$\Delta t = \gamma \Delta t'. \quad (53)$$

Pro naše výpočty však bude vhodné použít tyto rovnice v následujícím tvaru:

$$c \Delta t = \gamma (c \Delta t' + \beta \Delta x') \quad (54)$$

$$c \Delta t = \gamma c \Delta t'. \quad (55)$$

Pokud budeme mít dvě souměstné události v soustavě  $S$  (tedy  $\Delta x = x_B - x_A = 0$ ), ale v různých časech ( $\Delta t = t_B - t_A \neq 0$ ), pak pro dilataci času platí vztah

$$c \Delta t' = \gamma c \Delta t. \quad (56)$$

Nyní se budeme zabývat souměstnými událostmi, nejdříve v soustavě  $S$ , poté v soustavě  $S'$ . Dilataci času si znázorníme pomocí jednotlivých diagramů, jako jsou Minkowského, Loedelovy a Brehmovy diagramy v programu Geogebra.

## 7.1. Souměstné události v $S$ – Dilatace času z $S$ do $S'$

Budeme se zabývat dvěma událostmi, které budou v soustavě  $S$  souměstné, tj.  $x_A = x_B$ , ale nebudou souměstné v soustavě  $S'$ , tj.  $x'_A \neq x'_B$ . Dále bude platit, že tyto události nebudou v soustavě  $S$  současné, tj.  $ct_A \neq ct_B$ .

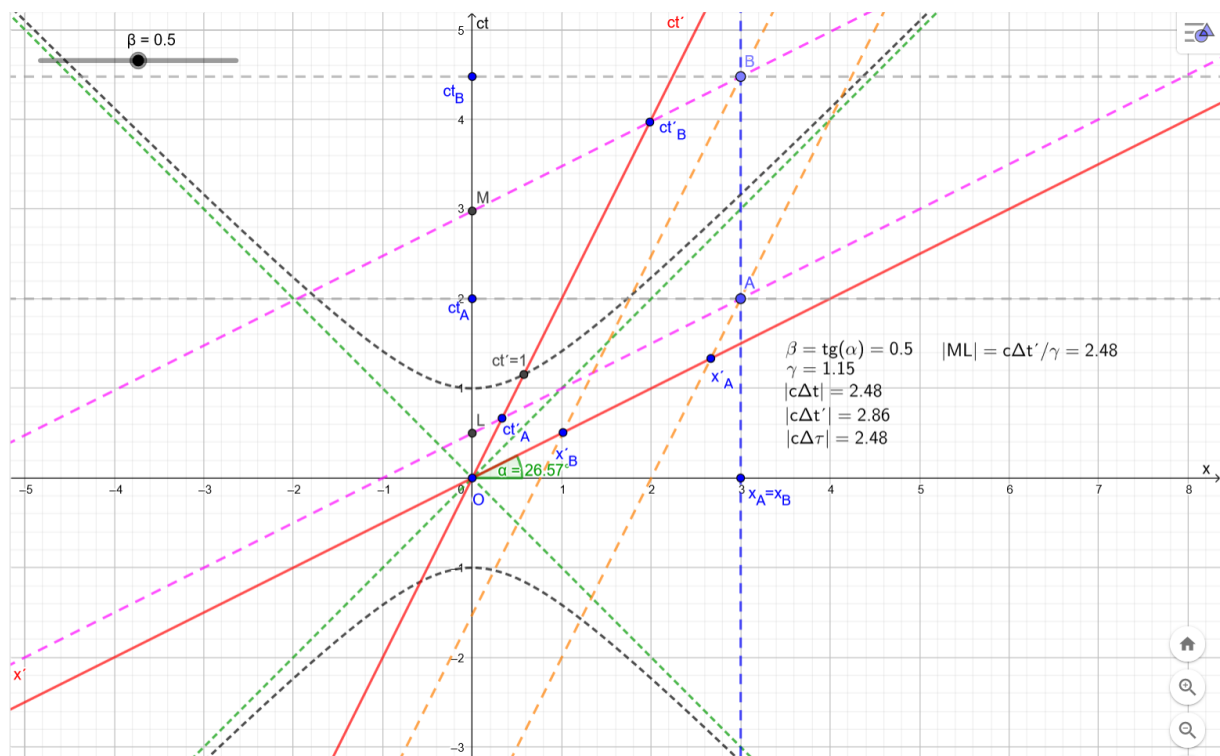
### 7.1.1. Minkowského diagram pro souměstné události v $S$

#### Postup:

Sestrojíme Minkowského diagram jako na Obrázek 5. Zvolíme si dvě události, které budou souměstné v soustavě  $S$ , to znamená, že zvolíme událost  $A$  jako bod v Minkowského

prostorčasovém diagramu, kterou necháme procházet rovnoběžku  $i$  s osou  $ct$ . Na této přímce si zvolíme bod  $B$ . Průsečík přímky  $i$  s osou  $x$  označíme jako  $x_A = x_B$ . Nyní necháme bodem  $A$  procházet rovnoběžku  $n$  s osou  $ct'$ . Průsečík přímky  $n$  s osou  $x'$  označíme jako  $x'_A$ . Obdobně to uděláme pro bod  $B$ , tj. rovnoběžku  $q$  s osou  $ct'$ . Průsečík přímky  $q$  s osou  $x'$  označíme jako  $x'_B$ . Nyní uděláme dvě rovnoběžky  $l, m$  s osou  $x'$ , kdy první z nich necháme procházet bodem  $A$  a druhou z nich necháme procházet bodem  $B$ . Průsečík přímky  $l$  s osou  $ct'$  označíme jako  $ct'_A$  a průsečík přímky  $m$  s osou  $ct'$  označíme jako  $ct'_B$ . Průsečík přímky  $l$  s osou  $ct$  označíme jako  $L$  a průsečík přímky  $m$  s osou  $ct$  označíme jako  $M$ . Uděláme další dvě rovnoběžky  $j, k$  s osou  $x$ . Průsečík přímky  $j$  s osou  $ct$  označíme jako  $ct_A$  a průsečík přímky  $k$  s osou  $ct$  označíme jako  $ct_B$ . Vypočítáme intervaly. Protože máme Minkowského diagram, musíme vzdálenost bodu  $ct'_A$  od  $ct'_B$  přepočítat pomocí kalibrační hyperboly, jejíž rovnice je ve tvaru  $ct^2 - x^2 = 1$ . To uděláme tak, že si spočteme vzdálenost počátku  $O$  od průsečíku hyperboly s osou  $ct'$ . Abychom dostali správnou vzdálenost bodu  $ct'_A$  od  $ct'_B$ , musíme tuto vzdálenost podělit vzdáleností počátku  $O$  od průsečíku hyperboly s osou  $ct'$ . Vypočítáme si  $\gamma$  pomocí rovnice (23). Vypočítáme si  $c\Delta t'/\gamma$  a zjistíme, že se rovná vzdálenosti bodu  $ct_A$  od  $ct_B$  a vzdálenosti bodu  $L$  od bodu  $M$ , kdy vzdálenost  $c\Delta t'$  je již přepočítaná pomocí kalibrační hyperboly. Tím jsme prokázali platnost vztahu (56).

Link: <https://www.geogebra.org/classic/vsrwvrfx>



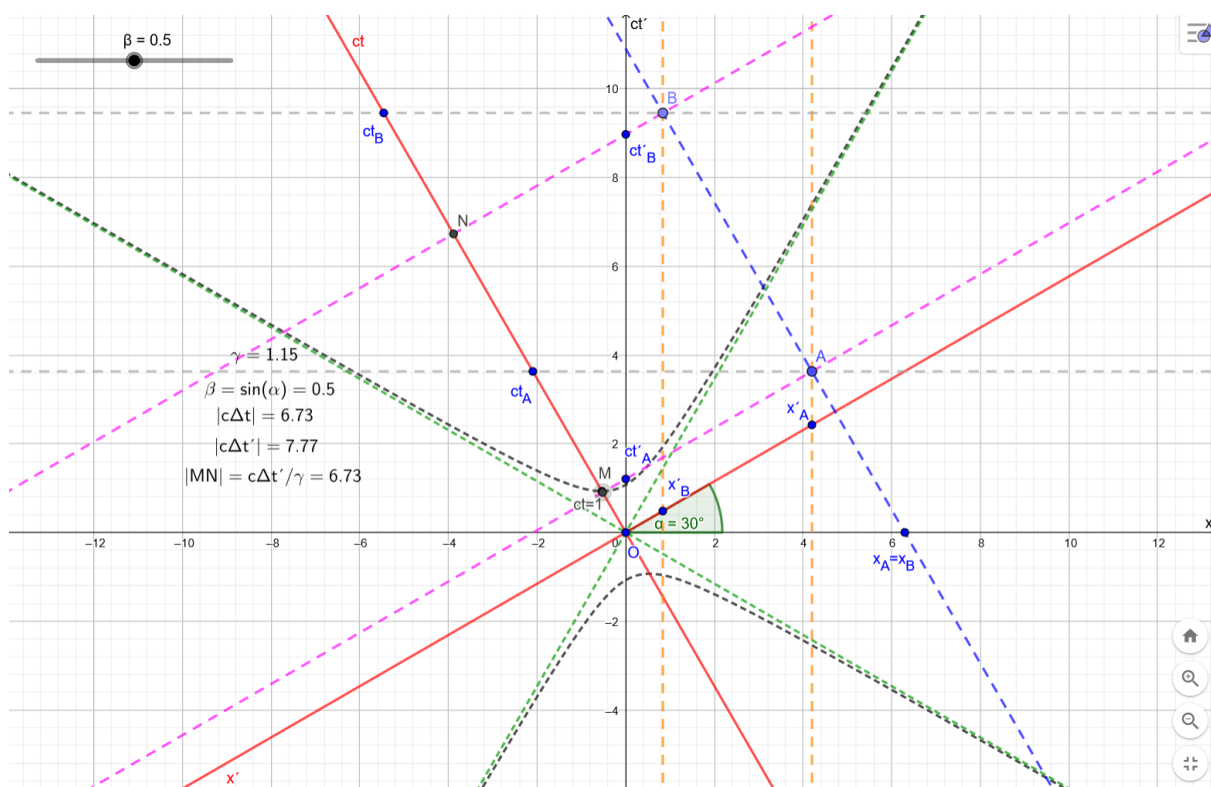
**Obrázek 21:** Minkowského prostorčasový diagram pro dilataci času (soumísné události v soustavě  $S$ ) pro  $\beta = 0,5$

## 7.1.2. Loedelův diagram pro soumísné události v $S$

### Postup:

Sestrojíme Loedelův diagram jako na Obrázek 7. Zvolíme si dvě události, které budou soumísné v soustavě  $S$ , to znamená, že zvolíme událost  $A$  jako bod v Loedelově prostoročasovém diagramu, kterou necháme procházet rovnoběžku  $g$  s osou  $ct$ . Na této přímce si zvolíme bod  $B$ . Průsečík přímky  $g$  s osou  $x$  označíme jako  $x_A = x_B$ . Nyní necháme bodem  $A$  procházet rovnoběžku  $i$  s osou  $ct'$ . Průsečík přímky  $i$  s osou  $x'$  označíme jako  $x'_A$ . Obdobně to uděláme pro bod  $B$ , tj. rovnoběžku  $j$  s osou  $ct'$ . Průsečík přímky  $j$  s osou  $x'$  označíme jako  $x'_B$ . Nyní uděláme dvě rovnoběžky  $m, n$  s osou  $x'$ , kdy první z nich necháme procházet bodem  $A$  a druhou z nich necháme procházet bodem  $B$ . Průsečík přímky  $m$  s osou  $ct'$  označíme jako  $ct'_A$  a průsečík přímky  $n$  s osou  $ct'$  označíme jako  $ct'_B$ . Průsečík přímky  $m$  s osou  $ct$  označíme jako  $M$  a průsečík přímky  $n$  s osou  $ct$  označíme jako  $N$ . Uděláme další dvě rovnoběžky  $k, l$  s osou  $x$ . Průsečík přímky  $k$  s osou  $ct$  označíme jako  $ct_A$  a průsečík přímky  $l$  s osou  $ct$  označíme jako  $ct_B$ . Vypočítáme intervaly. Vypočítáme si  $\gamma$  pomocí rovnice (23). Vypočítáme si  $c\Delta t'/\gamma$  a zjistíme, že se rovná vzdálenosti bodu  $ct'_A$  od  $ct'_B$  a vzdálenosti bodu  $M$  od bodu  $N$ . Tím jsme prokázali platnost vztahu (56).

Link: <https://www.geogebra.org/classic/fhdhm4zy>



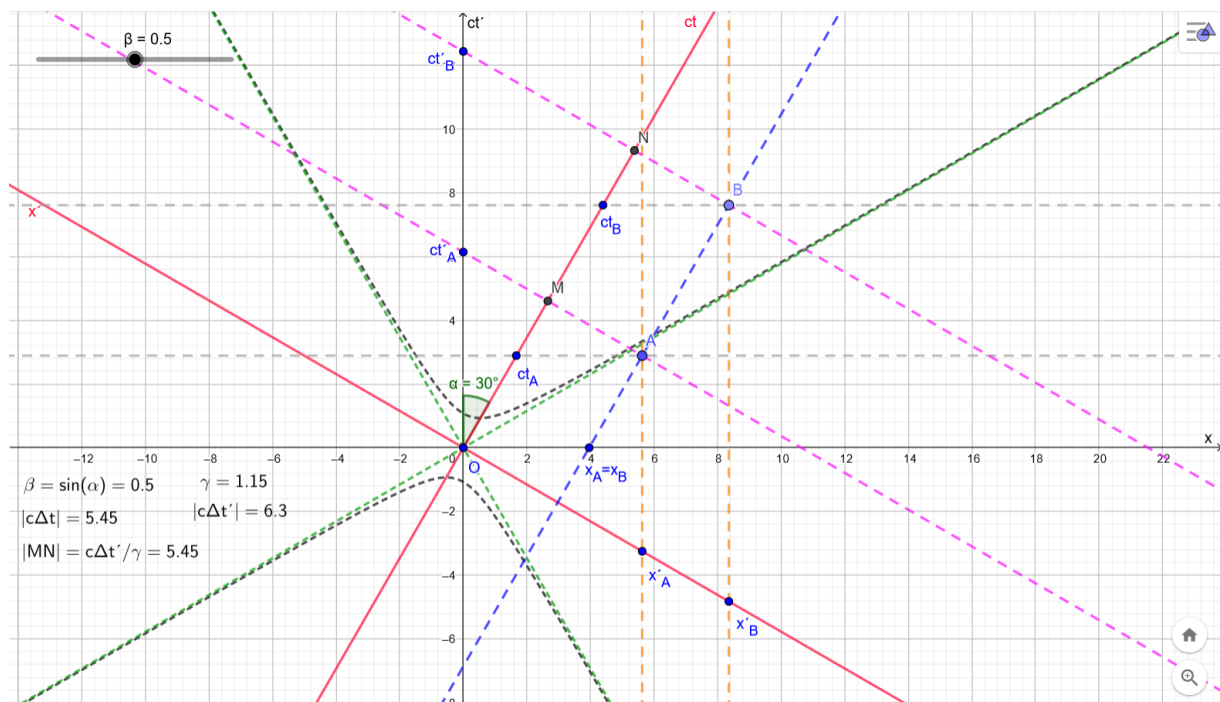
**Obrázek 22:** Loedelův prostoročasový diagram pro dilataci času (soumísné události v soustavě  $S$ ) pro  $\beta = 0,5$

### 7.1.3. Brehmův diagram pro soumísné události v $S$

#### Postup:

Sestrojíme Brehmův diagram jako na Obrázek 9. Zvolíme si dvě události, které budou soumísné v soustavě  $S$ , to znamená, že zvolíme událost  $A$  jako bod v Brehmově prostoročasovém diagramu, kterou necháme procházet rovnoběžku  $g$  s osou  $ct$ . Na této přímce si zvolíme bod  $B$ . Průsečík přímky  $g$  s osou  $x$  označíme jako  $x_A = x_B$ . Nyní necháme bodem  $A$  procházet rovnoběžku  $i$  s osou  $ct'$ . Průsečík přímky  $i$  s osou  $x'$  označíme jako  $x'_A$ . Obdobně to uděláme pro bod  $B$ , tj. rovnoběžku  $j$  s osou  $ct'$ . Průsečík přímky  $j$  s osou  $x'$  označíme jako  $x'_B$ . Nyní uděláme dvě rovnoběžky  $m, n$  s osou  $x'$ , kdy první z nich necháme procházet bodem  $A$  a druhou z nich necháme procházet bodem  $B$ . Průsečík přímky  $m$  s osou  $ct'$  označíme jako  $ct'_A$  a průsečík přímky  $n$  s osou  $ct'$  označíme jako  $ct'_B$ . Průsečík přímky  $m$  s osou  $ct$  označíme jako  $M$  a průsečík přímky  $n$  s osou  $ct$  označíme jako  $N$ . Uděláme další dvě rovnoběžky  $k, l$  s osou  $x$ . Průsečík přímky  $k$  s osou  $ct$  označíme jako  $ct_A$  a průsečík přímky  $l$  s osou  $ct$  označíme jako  $ct_B$ . Vypočítáme intervaly. Vypočítáme si  $\gamma$  pomocí rovnice (23). Vypočítáme si  $c\Delta t'/\gamma$  a zjistíme, že se rovná vzdálenosti bodu  $ct'_A$  od  $ct'_B$  a vzdálenosti bodu  $M$  od bodu  $N$ . Tím jsme prokázali platnost vztahu (56).

Link: <https://www.geogebra.org/classic/fmттkpmt>



**Obrázek 23:** Brehmův prostoročasový diagram pro dilataci času (soumísné události v soustavě  $S$ ) pro  $\beta = 0,5$

## 7.2. Soumístné události v $S'$ – Dilatace času z $S'$ do $S$

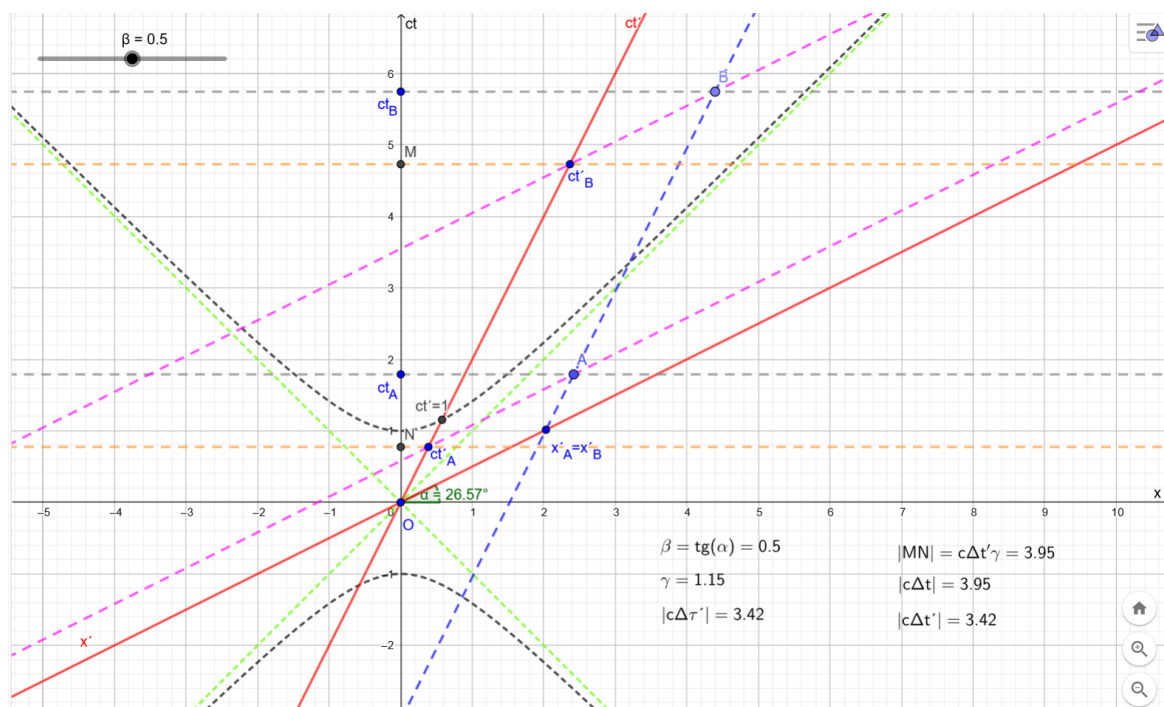
Budeme se zabývat dvěma událostmi, které budou v soustavě  $S'$  soumístné, tj.  $x'_A = x'_B$ , ale nebudou soumístné v soustavě  $S$ , tj.  $x_A \neq x_B$ . Dále bude platit, že tyto události nebudou v soustavě  $S'$  současné, tj.  $ct'_A \neq ct'_B$ .

### 7.2.1. Minkowského diagram pro soumístné události v $S'$

#### Postup:

Sestrojíme Minkowského diagram jako na Obrázek 5. Zvolíme si dvě události, které budou soumístné v soustavě  $S'$ , to znamená, že zvolíme událost  $A$  jako bod v Minkowském prostoročasovém diagramu, kterou necháme procházet rovnoběžku  $i$  s osou  $ct'$ . Na této přímce si zvolíme bod  $B$ . Průsečík přímky  $i$  s osou  $x'$  označíme jako  $x'_A = x'_B$ . Nyní uděláme dvě rovnoběžky  $l, m$  s osou  $x'$ , kdy první z nich necháme procházet bodem  $A$  a druhou z nich necháme procházet bodem  $B$ . Průsečík přímky  $l$  s osou  $ct'$  označíme jako  $ct'_A$  a průsečík přímky  $m$  s osou  $ct'$  označíme jako  $ct'_B$ . Uděláme další dvě rovnoběžky  $j, k$  s osou  $x$ . Průsečík přímky  $j$  s osou  $ct$  označíme jako  $ct_A$  a průsečík přímky  $k$  s osou  $ct$  označíme jako  $ct_B$ . Poté uděláme projekci bodů  $ct'_A$  a  $ct'_B$  na osu  $ct$ , tj. uděláme dvě rovnoběžky  $n, q$  s osou  $x$  a průsečíky těchto přímek s osou  $ct$  označíme jako  $M$  a  $N$ . Vypočítáme intervaly. Protože máme Minkowského diagram, musíme vzdálenost bodu  $ct'_A$  od  $ct'_B$  přepočítat pomocí kalibrační hyperboly, jejíž rovnice je ve tvaru  $ct^2 - x^2 = 1$ . To uděláme tak, že si spočteme vzdálenost počátku  $O$  od průsečíku hyperboly s osou  $ct'$ . Abychom dostali správnou vzdálenost bodu  $ct'_A$  od  $ct'_B$ , musíme tuto vzdálenost podělit vzdáleností počátku  $O$  od průsečíku hyperboly s osou  $ct'$ . Vypočítáme si  $\gamma$  pomocí rovnice (23). Vypočítáme si  $c\Delta t'\gamma$  a zjistíme, že se rovná vzdálenosti bodu  $ct_A$  od  $ct_B$  a vzdálenosti bodu  $M$  od bodu  $N$ , kdy vzdálenost  $c\Delta t'$  je již přepočítaná pomocí kalibrační hyperboly. Tím jsme prokázali platnost vztahu (55).

Link: <https://www.geogebra.org/classic/zfr2xn4e>



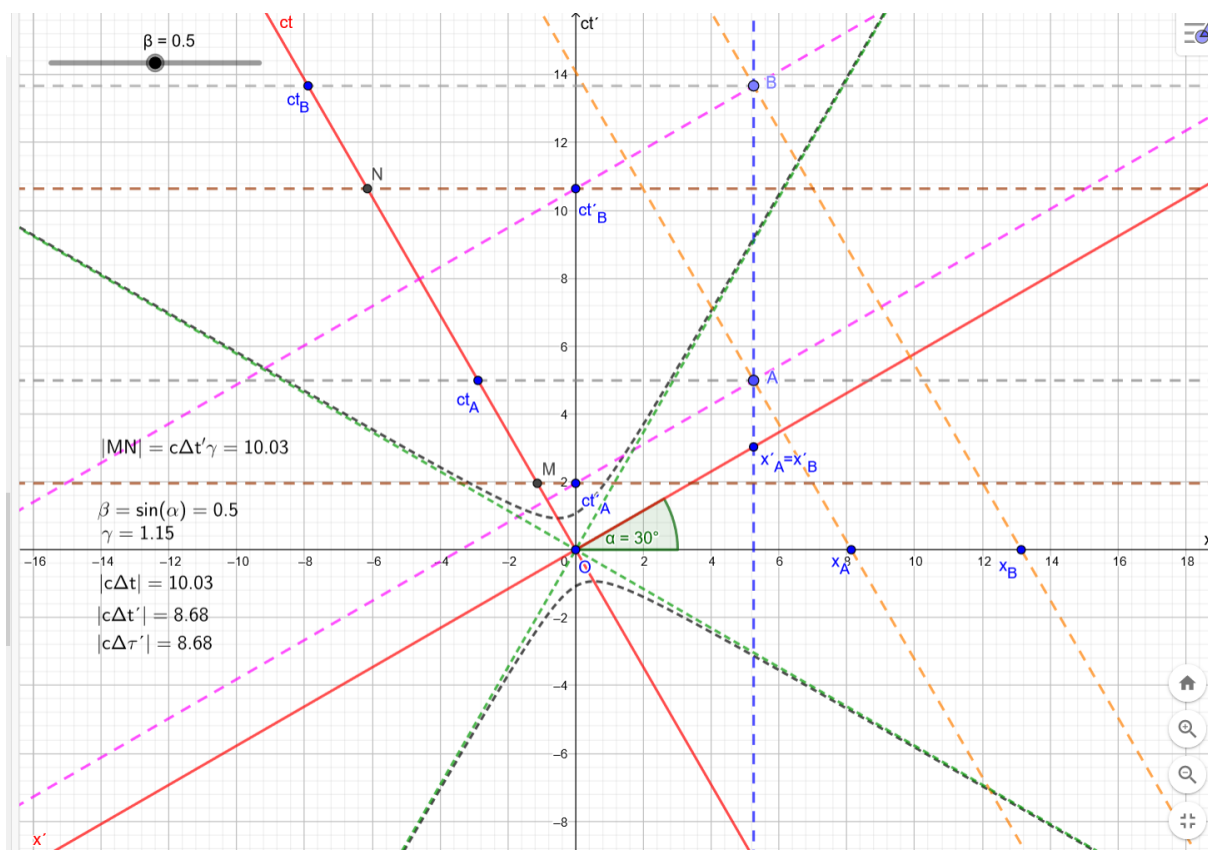
**Obrázek 24:** Minkowského prostoročasový diagram pro dilataci času (soumísné události v soustavě  $S'$ ) pro  $\beta = 0,5$

### 7.2.2. Loedelův diagram pro soumísné události v $S'$

#### Postup:

Sestrojíme Loedelův diagram jako na Obrázek 7. Zvolíme si dvě události, které budou soumísné v soustavě  $S'$ , to znamená, že zvolíme událost  $A$  jako bod v Loedelově prostoročasovém diagramu, kterou necháme procházet rovnoběžku  $g$  s osou  $ct'$ . Na této přímce si zvolíme bod  $B$ . Průsečík přímky  $g$  s osou  $x'$  označíme jako  $x'_A = x'_B$ . Nyní necháme bodem  $A$  procházet rovnoběžku  $i$  s osou  $ct$ . Průsečík přímky  $i$  s osou  $x$  označíme jako  $x_A$ . Obdobně to uděláme pro bod  $B$ , tj. rovnoběžku  $j$  s osou  $ct$ . Průsečík přímky  $j$  s osou  $x$  označíme jako  $x_B$ . Nyní uděláme dvě rovnoběžky  $m, n$  s osou  $x$ , kdy první z nich necháme procházet bodem  $A$  a druhou z nich necháme procházet bodem  $B$ . Průsečík přímky  $m$  s osou  $ct$  označíme jako  $ct_A$  a průsečík přímky  $n$  s osou  $ct$  označíme jako  $ct_B$ . Uděláme další dvě rovnoběžky  $k, l$  s osou  $x'$ . Průsečík přímky  $k$  s osou  $ct'$  označíme jako  $ct'_A$  a průsečík přímky  $l$  s osou  $ct'$  označíme jako  $ct'_B$ . Poté uděláme projekci bodů  $ct'_A$  a  $ct'_B$  na osu  $ct$ , tj. uděláme dvě rovnoběžky  $r, s$  s osou  $x$  a průsečíky těchto přímek s osou  $ct$  označíme jako  $M$  a  $N$ . Vypočítáme intervaly. Vypočítáme si  $\gamma$  pomocí rovnice (23). Vypočítáme si  $c\Delta t'\gamma$  a zjistíme, že se rovná vzdálenosti bodu  $ct_A$  od  $ct_B$  a vzdálenosti bodu  $M$  od bodu  $N$ . Tím jsme prokázali platnost vztahu (55).

**Link:** <https://www.geogebra.org/classic/q4pcxx3w>



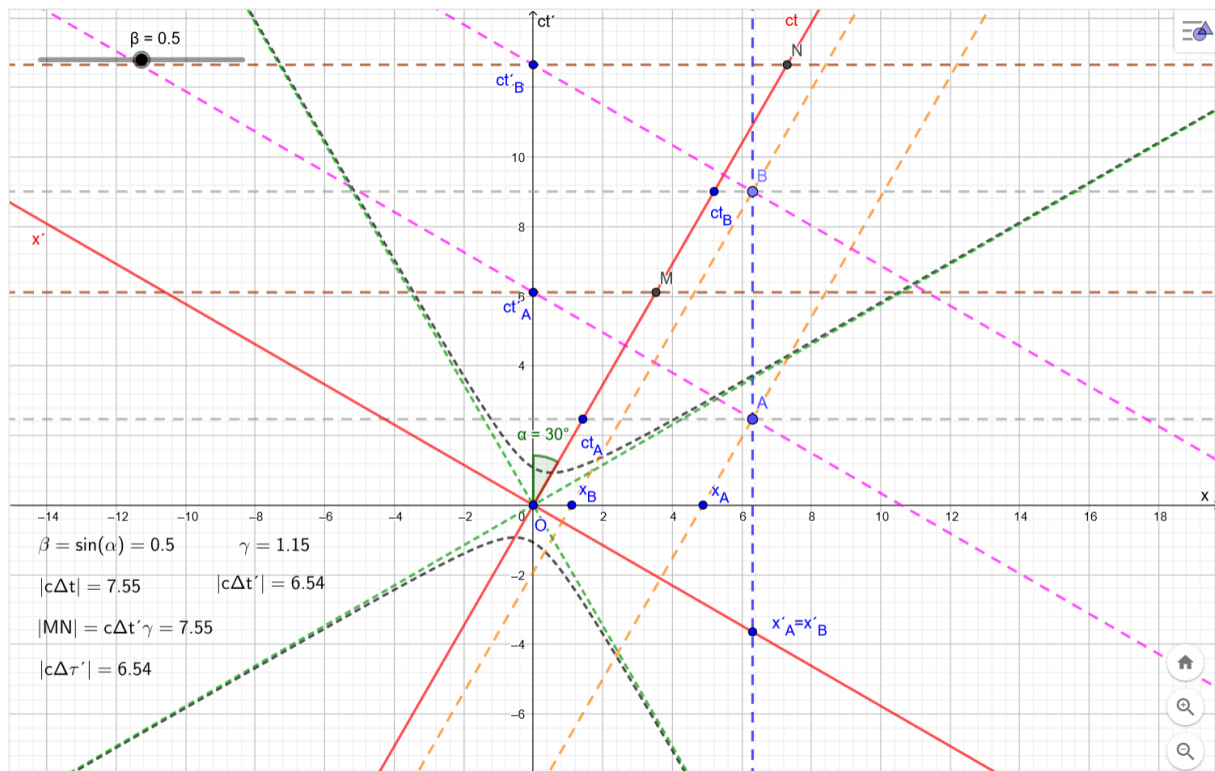
**Obrázek 25:** Loedelův prostorčasový diagram pro dilataci času (soumístné události v soustavě  $S'$ ) pro  $\beta = 0,5$

### 7.2.3. Brehmův diagram pro soumístné události v $S'$

#### Postup:

Sestrojíme Brehmův diagram jako na Obrázek 9. Zvolíme si dvě události, které budou soumístné v soustavě  $S'$ , to znamená, že zvolíme událost  $A$  jako bod v Brehmově prostorčasovém diagramu, kterou necháme procházet rovnoběžku  $g$  s osou  $ct'$ . Na této přímce si zvolíme bod  $B$ . Průsečík přímky  $g$  s osou  $x'$  označíme jako  $x'_A = x'_B$ . Nyní necháme bodem  $A$  procházet rovnoběžku  $i$  s osou  $ct'$ . Průsečík přímky  $i$  s osou  $x$  označíme jako  $x_A$ . Obdobně to uděláme pro bod  $B$ , tj. rovnoběžku  $j$  s osou  $ct$ . Průsečík přímky  $j$  s osou  $x$  označíme jako  $x_B$ . Nyní uděláme dvě rovnoběžky  $m, n$  s osou  $x'$ , kdy první z nich necháme procházet bodem  $A$  a druhou z nich necháme procházet bodem  $B$ . Průsečík přímky  $m$  s osou  $ct'$  označíme jako  $ct'_A$  a průsečík přímky  $n$  s osou  $ct'$  označíme jako  $ct'_B$ . Uděláme další dvě rovnoběžky  $k, l$  s osou  $x$ . Průsečík přímky  $k$  s osou  $ct$  označíme jako  $ct_A$  a průsečík přímky  $l$  s osou  $ct$  označíme jako  $ct_B$ . Poté uděláme projekci bodů  $ct'_A$  a  $ct'_B$  na osu  $ct$ , tj. uděláme dvě rovnoběžky  $r, s$  s osou  $x$  a průsečíky těchto přímek s osou  $ct$  označíme jako  $M$  a  $N$ . Vypočítáme intervaly. Vypočítáme si  $\gamma$  pomocí rovnice (23). Vypočítáme si  $c\Delta t'\gamma$  a zjistíme, že se rovná vzdálenosti bodu  $ct'_A$  od  $ct'_B$  a vzdálenosti bodu  $M$  od bodu  $N$ . Tím jsme prokázali platnost vztahu (55).

**Link:** <https://www.geogebra.org/classic/t3meb5vn>



**Obrázek 26:** Brehmův prostorčasový diagram pro dilataci času (soumístné události v soustavě  $S'$ ) pro  $\beta = 0,5$

## 8. Kontrakce délky

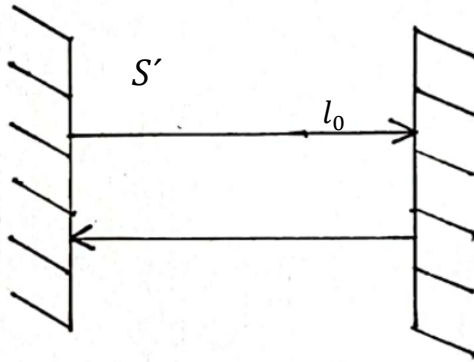
Pro popis tohoto jevu využijeme model světelných hodin, které jsou otočené o  $90^\circ$  oproti dilataci času. Světelný paprsek se bude pohybovat ve směru pohybuující se vztažné soustavy. Uvažujme pozorovatele, který se nachází v klidové soustavě, což je soustava se světelnými hodinami uvnitř rakety. Světelný paprsek se pohybuje od zadního zrcadla k přednímu, tam se odrazí a vrací se zpět. Jednu periodu světelných hodin pak můžeme zapsat jako

$$\Delta\tau = \frac{2l_0}{c}, \quad (57)$$

kde  $l_0$  je vzdálenost mezi dvěma zrcadly.

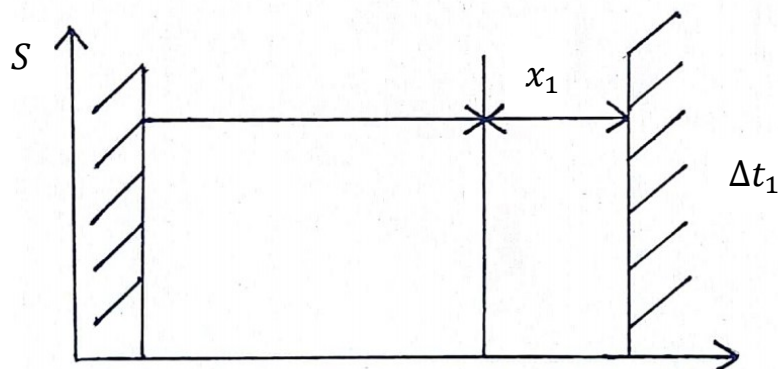
Protože se paprsek pohybuje od zadního zrcadla k přednímu a nazpátek, proto celková dráha, kterou paprsek urazí je  $2l_0$ , proto se nám v rovnici (57) objevuje  $2l_0$ .



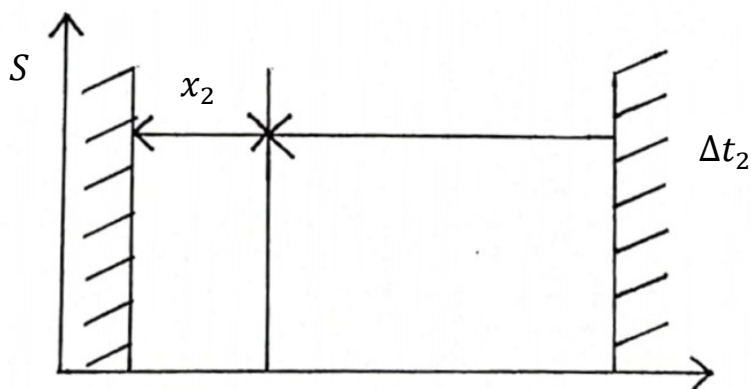


**Obrázek 27:** Světelné hodiny tvořené dvěma rovnoběžnými zrcadly, které se nachází ve vzdálenosti  $l_0$ , mezi nimiž kmitá světelný paprsek

Uvažujme nyní druhého pozorovatele, který se nachází v klidové soustavě, vůči níž se raketa pohybuje rychlostí  $\vec{v}$ . Pak situace bude vypadat trochu jinak: Světelný paprsek putuje od zadního zrcadla směrem k přednímu zrcadlu, ale protože se raketa pohybuje, tak se přední zrcadlo posune o nějakou vzdálenost  $x_1$  směrem dopředu, což je způsobeno tím, že se pozorovatel nachází ve své klidové soustavě, vůči níž se raketa pohybuje. Světelný paprsek se odrazí od předního zrcadla a putuje zpět k zadnímu zrcadlu. Při své cestě k zadnímu zrcadlu se opět raketa pohybuje, tedy vzdálenost, kterou musí světelný paprsek urazit k zadnímu zrcadlu, je o nějakou vzdálenost  $x_2$  menší (protože zadní zrcadlo jde k světelnému paprsku naproti), než kdybychom se nacházeli v klidové soustavě rakety, a tedy raketa by se nepohybovala. Vzdálenosti  $x_1$  a  $x_2$  nejsou stejně velké, musíme je vyjádřit pomocí dráhy, kterou urazil světelný paprsek a času, který na to potřeboval.



**Obrázek 28:** Pohyb světelného paprsku od zadního zrcadla k přednímu zrcadlu v klidové soustavě druhého pozorovatele, vůči němuž se raketa pohybuje rychlostí  $\vec{v}$  v kladném směru osy  $x$



**Obrázek 29:** Pohyb světelného paprsku od předního zrcadla k zadnímu zrcadlu v klidové soustavě druhého pozorovatele, vůči němuž se raketa pohybuje rychlostí  $\vec{v}$  v kladném směru osy  $x$

Pro pohyb k přednímu zrcadlu bude platit následující vztah

$$c\Delta t_1 = l + v\Delta t_1 \quad (58)$$

Tedy celková dráha, kterou urazil paprsek k přednímu zrcadlu, je dána součtem vzdáleností těchto dvou zrcadel a vzdálenosti, kterou urazila raketa za dobu  $\Delta t_1$ .

Pro pohyb zpět k zadnímu zrcadlu bude platit následující vztah

$$c\Delta t_2 = l - v\Delta t_2 \quad (59)$$

Tedy celková dráha, kterou urazil paprsek zpět k zadnímu zrcadlu, je dána rozdílem vzdáleností těchto dvou zrcadel a vzdálenosti, kterou urazila raketa za dobu  $\Delta t_2$ .

Jedna perioda světelných hodin je dána jako součet těchto dvou intervalů, které světelný paprsek potřeboval při cestě od zadního zrcadla k přednímu a od předního zrcadla k zadnímu. Z rovnic (58) a (59) si vyjádříme vzdálenost  $l$ , dostaneme

$$c\Delta t_1 - v\Delta t_1 = l \quad (60)$$

$$c\Delta t_2 + v\Delta t_2 = l \quad (61)$$

Z rovnice (60) vytkneme  $\Delta t_1$  a dostaneme

$$\Delta t_1 = \frac{l}{c - v} \quad (62)$$

Z rovnice (61) vytkneme  $\Delta t_2$  a dostaneme

$$\Delta t_2 = \frac{l}{c + v} \quad (63)$$

Celkový čas je pak dán jako

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{l}{c - v} + \frac{l}{c + v} \quad (64)$$

Rovnici (64) upravíme na společný jmenovatel a dostaneme

$$\Delta t = \frac{l(c - v) + l(c + v)}{c^2 - v^2} = \frac{2lc}{c^2 - v^2} = \frac{2lc}{c^2 \left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]} = \frac{2l}{c \left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]} \quad (65)$$

Z dilatace času (53) víme, že platí

$$\Delta t = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (66)$$

Rovnice (65) a (66) spolu porovnáme

$$\frac{2l}{c \left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]} = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (67)$$

Dosadíme rovnici (57) do rovnice (67) a dostaneme

$$\frac{2l}{c \left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]} = \frac{2l_0}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (68)$$

Pomocí úprav rovnice (68) dojdeme ke vztahu pro kontrakci délky, která má následující tvar [17]

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{l_0}{\gamma} < l_0. \quad (69)$$

Nyní se budeme zabývat současnými událostmi, nejdříve v soustavě  $S$ , poté v soustavě  $S'$ . Dilataci času si znázorníme pomocí jednotlivých diagramů, jako jsou Minkowského, Loedelovy a Brehmovy diagramy v programu Geogebra.

## 8.1. Současné události v $S$ – kontrakce délky z $S'$ do $S$

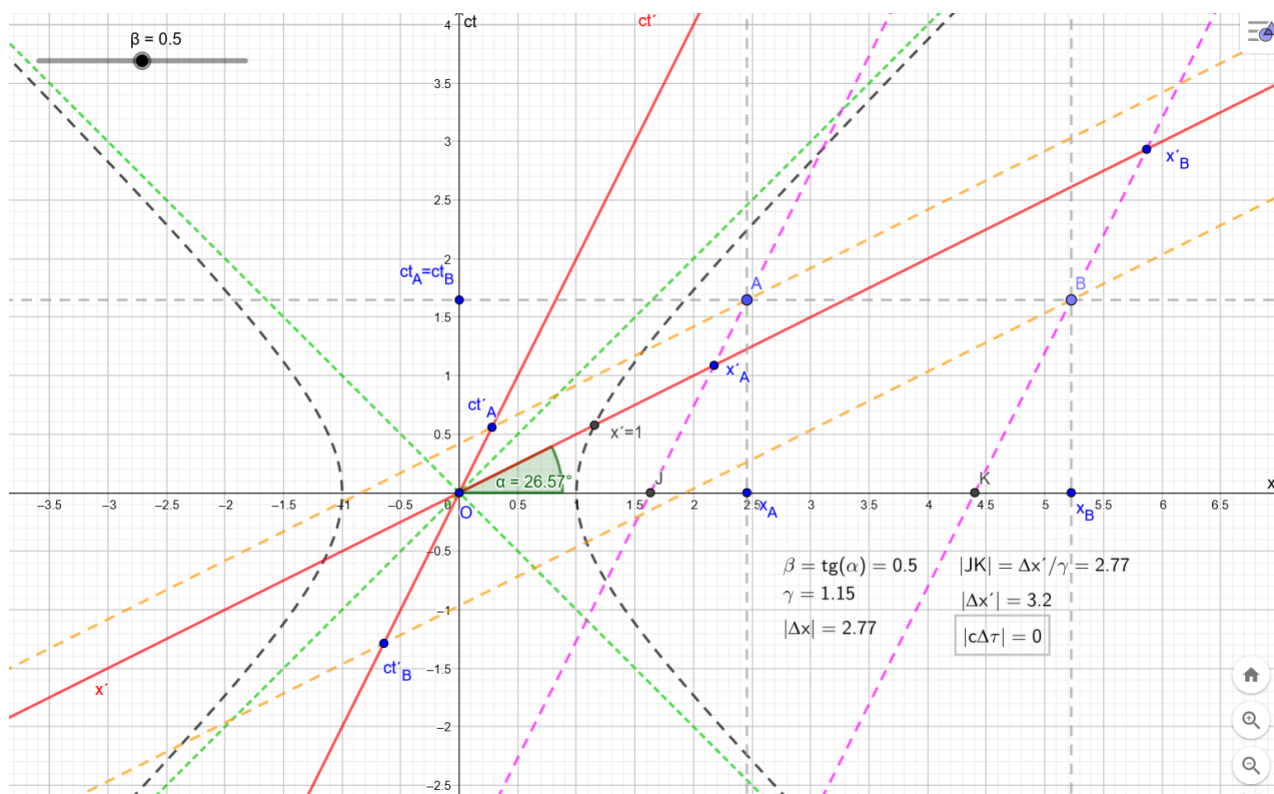
Budeme se zabývat dvěma událostmi, které budou v soustavě  $S$  současné, tj.  $ct_A = ct_B$ , ale nebudou současné v soustavě  $S'$ , tj.  $ct'_A \neq ct'_B$ . Dále bude platit, že tyto události nebudou v soustavě  $S$  souměrné, tj.  $x_A \neq x_B$ .

### 8.1.1. Minkowského diagram pro současné události v $S$

#### Postup:

Sestrojíme Minkowského diagram jako na Obrázek 5. Zvolíme si dvě události, které budou současné v soustavě  $S$ , to znamená, že zvolíme událost  $A$  jako bod v Minkowského prostoročasovém diagramu, kterou necháme procházet rovnoběžku  $j$  s osou  $x$ . Na této přímce si zvolíme bod  $B$ . Průsečík přímky  $j$  s osou  $ct$  označíme jako  $ct_A = ct_B$ . Nyní necháme bodem  $A$  procházet rovnoběžku  $n$  s osou  $x'$ . Průsečík přímky  $n$  s osou  $ct'$  označíme jako  $ct'_A$ . Obdobně to uděláme pro bod  $B$ , tj. rovnoběžku  $q$  s osou  $x'$ . Průsečík přímky  $q$  s osou  $ct'$  označíme jako  $ct'_B$ . Nyní uděláme dvě rovnoběžky  $l, m$  s osou  $ct'$ , kdy první z nich necháme procházet bodem  $A$  a druhou z nich necháme procházet bodem  $B$ . Průsečík přímky  $l$  s osou  $x'$  označíme jako  $x'_A$  a průsečík přímky  $m$  s osou  $x'$  označíme jako  $x'_B$ . Průsečík přímky  $l$  s osou  $x$  označíme jako  $J$  a průsečík přímky  $m$  s osou  $x$  označíme jako  $K$ . Uděláme další dvě rovnoběžky  $i, k$  s osou  $ct$ . Průsečík přímky  $i$  s osou  $x$  označíme jako  $x_A$  a průsečík přímky  $k$  s osou  $x$  označíme jako  $x_B$ . Vypočítáme intervaly. Protože máme Minkowského diagram, musíme vzdálenost bodu  $x'_A$  od  $x'_B$  přepočítat pomocí kalibrační hyperboly, jejíž rovnice je ve tvaru  $x^2 - ct^2 = 1$ . To uděláme tak, že si spočteme vzdálenost počátku  $O$  od průsečíku hyperboly s osou  $x'$ . Abychom dostali správnou vzdálenost bodu  $x'_A$  od  $x'_B$ , musíme tuto vzdálenost podělit vzdáleností počátku  $O$  od průsečíku hyperboly s osou  $x'$ . Vypočítáme si  $\gamma$  pomocí rovnice (23). Vypočítáme si  $\Delta x'/\gamma$  a zjistíme, že se rovná vzdálenosti bodu  $x_A$  od  $x_B$  a vzdálenosti bodu  $J$  od bodu  $K$ , kdy vzdálenost  $\Delta x'$  je již přepočítaná pomocí kalibrační hyperboly. Tím jsme prokázali platnost vztahu (69).

**Link:** <https://www.geogebra.org/classic/jsn5shfz>



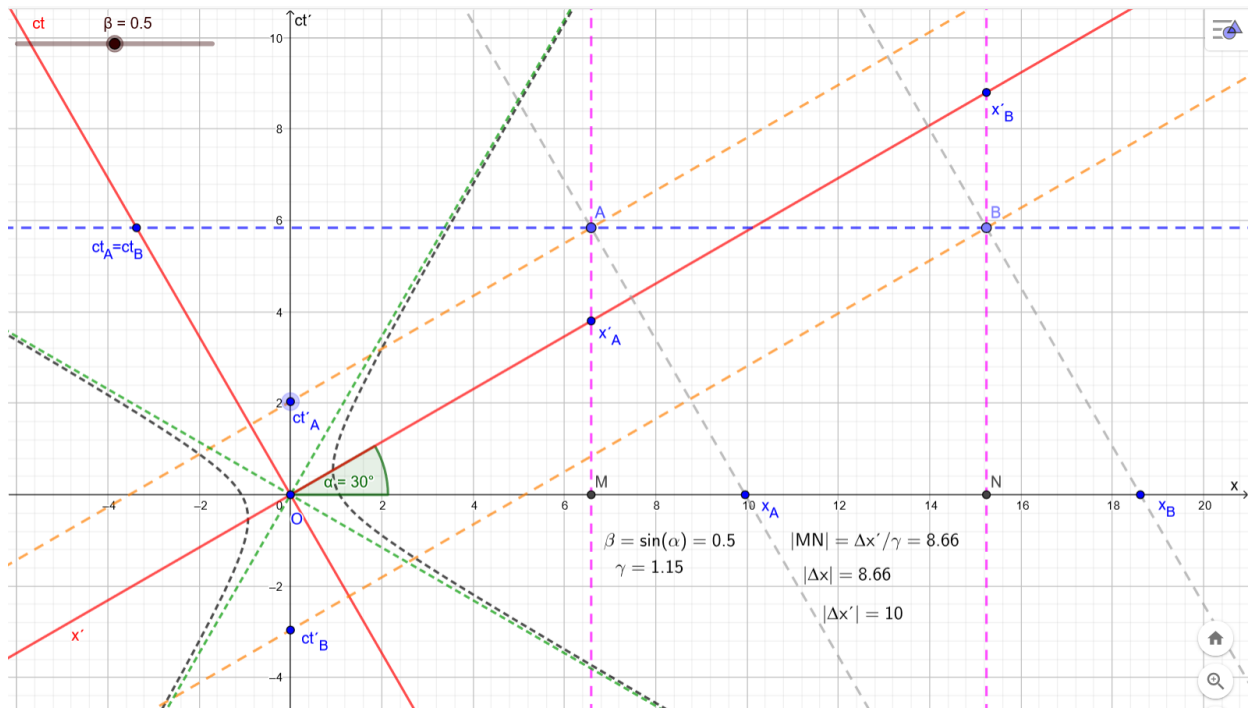
**Obrázek 30:** Minkowského prostoročasový diagram pro kontrakci délky (současné události v soustavě  $S$ ) pro  $\beta = 0,5$

### 8.1.2. Loedelův diagram pro současné události v $S$

#### Postup:

Sestrojíme Loedelův diagram jako na Obrázek 7. Zvolíme si dvě události, které budou současné v soustavě  $S$ , to znamená, že zvolíme událost  $A$  jako bod v Loedelově prostoročasovém diagramu, kterou necháme procházet rovnoběžku  $g$  s osou  $x$ . Na této přímce si zvolíme bod  $B$ . Průsečík přímky  $g$  s osou  $ct$  označíme jako  $ct_A = ct_B$ . Nyní necháme bodem  $A$  procházet rovnoběžku  $i$  s osou  $ct'$ . Průsečík přímky  $i$  s osou  $x'$  označíme jako  $x'_A$ . Obdobně to uděláme pro bod  $B$ , tj. rovnoběžku  $j$  s osou  $ct'$ . Průsečík přímky  $j$  s osou  $x'$  označíme jako  $x'_B$ . Průsečík přímky  $i$  s osou  $x$  označíme jako  $M$  a průsečík přímky  $j$  s osou  $x$  označíme jako  $N$ . Nyní uděláme dvě rovnoběžky  $m, n$  s osou  $x'$ , kdy první z nich necháme procházet bodem  $A$  a druhou z nich necháme procházet bodem  $B$ . Průsečík přímky  $m$  s osou  $ct'$  označíme jako  $ct'_A$  a průsečík přímky  $n$  s osou  $ct'$  označíme jako  $ct'_B$ . Uděláme další dvě rovnoběžky  $k, l$  s osou  $ct$ . Průsečík přímky  $k$  s osou  $x$  označíme jako  $x_A$  a průsečík přímky  $l$  s osou  $x$  označíme jako  $x_B$ . Vypočítáme intervaly. Vypočítáme si  $\gamma$  pomocí rovnice (23). Vypočítáme si  $\Delta x' / \gamma$  a zjistíme, že se rovná vzdálenosti bodu  $x_A$  od  $x_B$  a vzdálenosti bodu  $M$  od bodu  $N$ . Tím jsme prokázali platnost vztahu (69).

**Link:** <https://www.geogebra.org/classic/gn4jjudy>



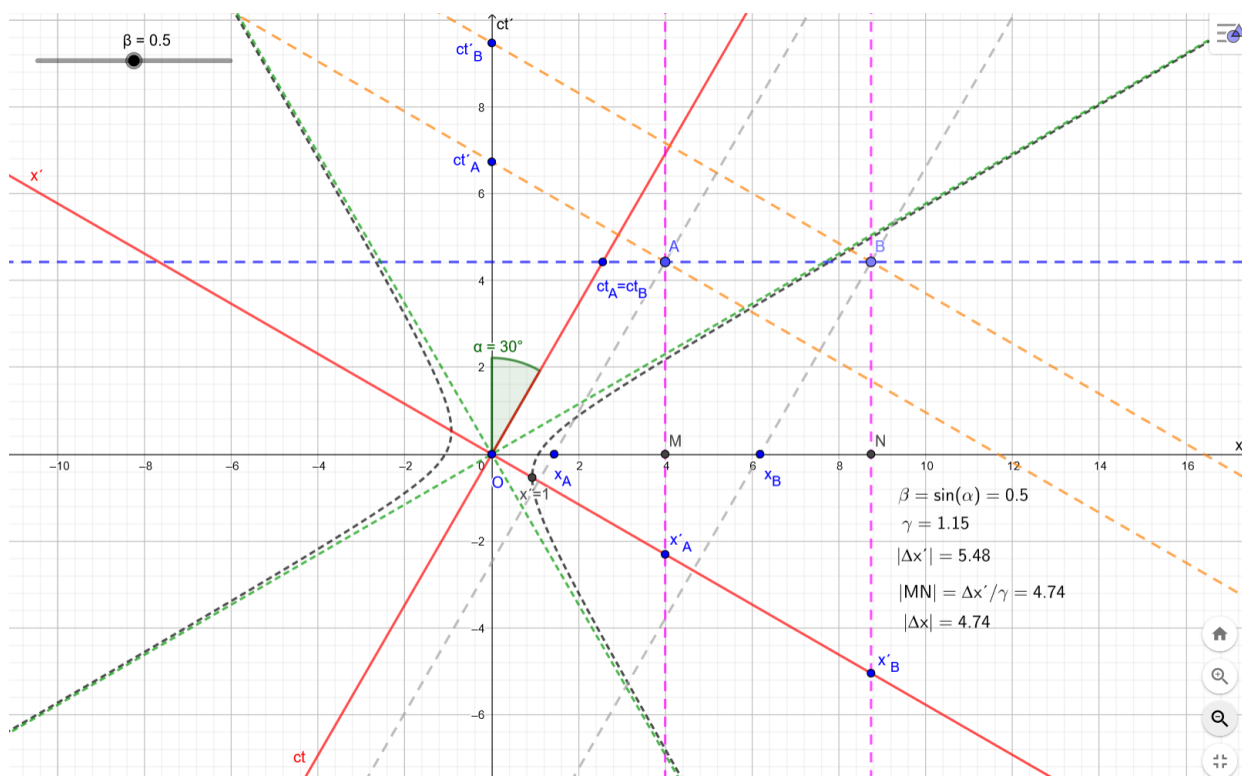
**Obrázek 31:** Loedelův prostoročasový diagram pro kontrakci délky (současné události v soustavě  $S$ ) pro  $\beta = 0,5$

### 8.1.3. Brehmův diagram pro současné události v $S$

#### Postup:

Sestrojíme Brehmův diagram jako na Obrázek 9. Zvolíme si dvě události, které budou současné v soustavě  $S$ , to znamená, že zvolíme událost  $A$  jako bod v Brehmově prostoročasovém diagramu, kterou necháme procházet rovnoběžku  $g$  s osou  $x$ . Na této přímce si zvolíme bod  $B$ . Průsečík přímky  $g$  s osou  $ct$  označíme jako  $ct_A = ct_B$ . Nyní necháme bodem  $A$  procházet rovnoběžku  $i$  s osou  $x'$ . Průsečík přímky  $i$  s osou  $ct'$  označíme jako  $ct'_A$ . Obdobně to uděláme pro bod  $B$ , tj. rovnoběžku  $j$  s osou  $x'$ . Průsečík přímky  $j$  s osou  $ct'$  označíme jako  $ct'_B$ . Nyní uděláme dvě rovnoběžky  $m, n$  s osou  $ct'$ , kdy první z nich necháme procházet bodem  $A$  a druhou z nich necháme procházet bodem  $B$ . Průsečík přímky  $m$  s osou  $x'$  označíme jako  $x'_A$  a průsečík přímky  $n$  s osou  $x'$  označíme jako  $x'_B$ . Průsečík přímky  $m$  s osou  $x$  označíme jako  $M$  a průsečík přímky  $n$  s osou  $x$  označíme jako  $N$ . Uděláme další dvě rovnoběžky  $k, l$  s osou  $ct$ . Průsečík přímky  $k$  s osou  $x$  označíme jako  $x_A$  a průsečík přímky  $l$  s osou  $x$  označíme jako  $x_B$ . Vypočítáme intervaly. Vypočítáme si  $\gamma$  pomocí rovnice (23). Vypočítáme si  $\Delta x'/\gamma$  a zjistíme, že se rovná vzdálenosti bodu  $x_A$  od  $x_B$  a vzdálenosti bodu  $M$  od bodu  $N$ . Tím jsme prokázali platnost vztahu (69).

Link: <https://www.geogebra.org/classic/hbjgrggm>



**Obrázek 32:** Brehmův prostoročasový diagram pro kontrakci délky (současné události v soustavě  $S$ ) pro  $\beta = 0,5$

## 8.2. Současné události v $S'$ – kontrakce délky z $S$ do $S'$

Budeme se zabývat dvěma událostmi, které budou v soustavě  $S'$  současné, tj.  $ct'_A = ct'_B$ , ale nebudou současné v soustavě  $S$ , tj.  $ct_A \neq ct_B$ . Dále bude platit, že tyto události nebudou v soustavě  $S'$  souměrné, tj.  $x'_A \neq x'_B$ .

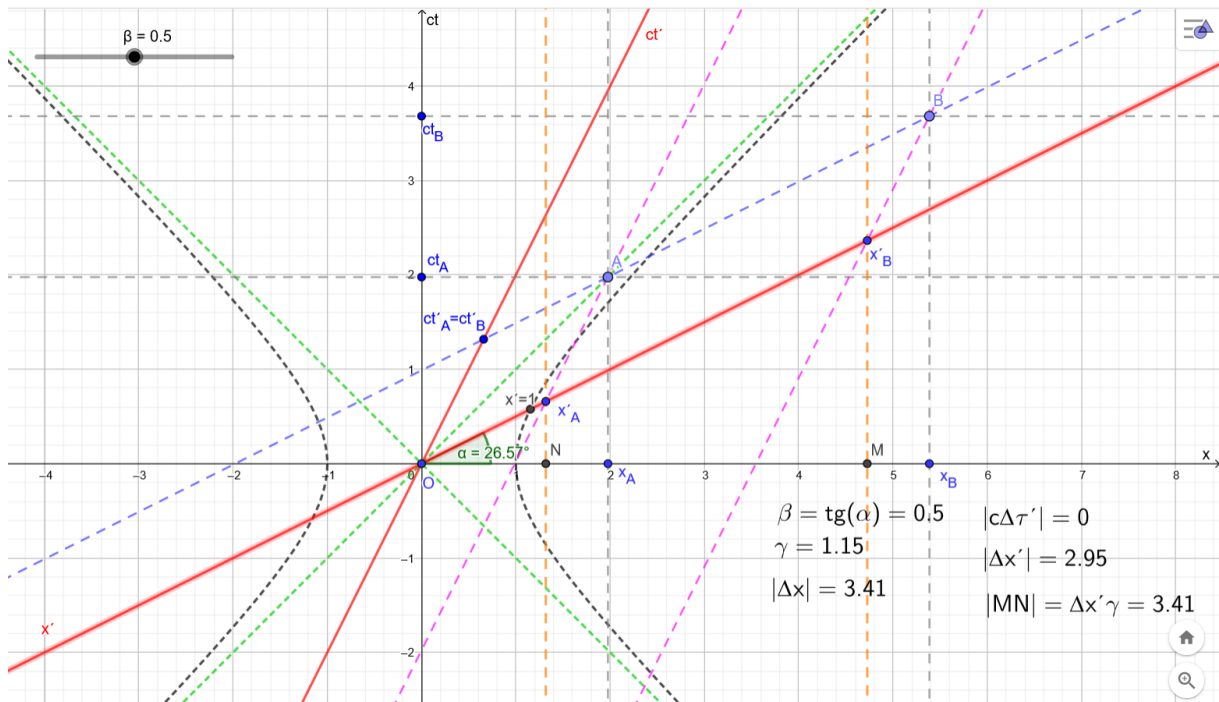
### 8.2.1. Minkowského diagram pro současné události v $S'$

#### Postup:

Sestrojíme Minkowského diagram jako na Obrázek 5. Zvolíme si dvě události, které budou současné v soustavě  $S'$ , to znamená, že zvolíme událost  $A$  jako bod v Minkowského prostoročasovém diagramu, kterou necháme procházet rovnoběžku  $k$  s osou  $x'$ . Na této přímce si zvolíme bod  $B$ . Průsečík přímky  $k$  s osou  $ct'$  označíme jako  $ct'_A = ct'_B$ . Nyní necháme bodem  $A$  procházet rovnoběžku  $i$  s osou  $x$ . Průsečík přímky  $i$  s osou  $ct$  označíme jako  $ct_A$ . Obdobně to uděláme pro bod  $B$ , tj. rovnoběžku  $m$  s osou  $x$ . Průsečík přímky  $m$  s osou  $ct$  označíme jako  $ct_B$ . Nyní uděláme dvě rovnoběžky  $n, r$  s osou  $ct'$ , kdy první z nich necháme procházet bodem  $A$  a druhou z nich necháme procházet bodem  $B$ . Průsečík přímky  $n$  s osou  $x'$  označíme jako  $x'_A$  a průsečík přímky  $r$  s osou  $x'$  označíme jako  $x'_B$ . Uděláme další dvě rovnoběžky  $j, l$  s osou  $ct$ . Průsečík přímky  $j$  s osou  $x$  označíme jako  $x_A$  a průsečík přímky  $l$  s osou  $x$  označíme jako  $x_B$ . Poté uděláme projekci bodů  $x'_A$  a  $x'_B$  na osu  $x$ , tj. uděláme dvě rovnoběžky  $h, s$  s osou  $ct$  a průsečíky těchto přímek s osou  $x$  označíme jako  $M$  a  $N$ . Vypočítáme intervaly. Protože máme Minkowského diagram, musíme vzdálenost bodu  $x'_A$  od

$x'_B$  přepočítat pomocí kalibrační hyperboly, jejíž rovnice je ve tvaru  $x^2 - ct^2 = 1$ . To uděláme tak, že si spočteme vzdálenost počátku  $O$  od průsečíku hyperboly s osou  $x'$ . Abychom dostali správnou vzdálenost bodu  $x'_A$  od  $x'_B$ , musíme tuto vzdálenost podělit vzdáleností počátku  $O$  od průsečíku hyperboly s osou  $x'$ . Vypočítáme si  $\gamma$  pomocí rovnice (23). Vypočítáme si  $\Delta x' \gamma$  a zjistíme, že se rovná vzdálenosti bodu  $x_A$  od  $x_B$  a vzdálenosti bodu  $M$  od bodu  $N$ , kdy vzdálenost  $\Delta x'$  je již přepočítaná pomocí kalibrační hyperboly.

Link: <https://www.geogebra.org/classic/nbnuhbhd>



**Obrázek 33:** Minkowského prostoročasový diagram pro kontrakci délky (současné události v soustavě  $S'$ ) pro  $\beta = 0,5$

### 8.2.2. Loedelův diagram pro současné události v $S'$

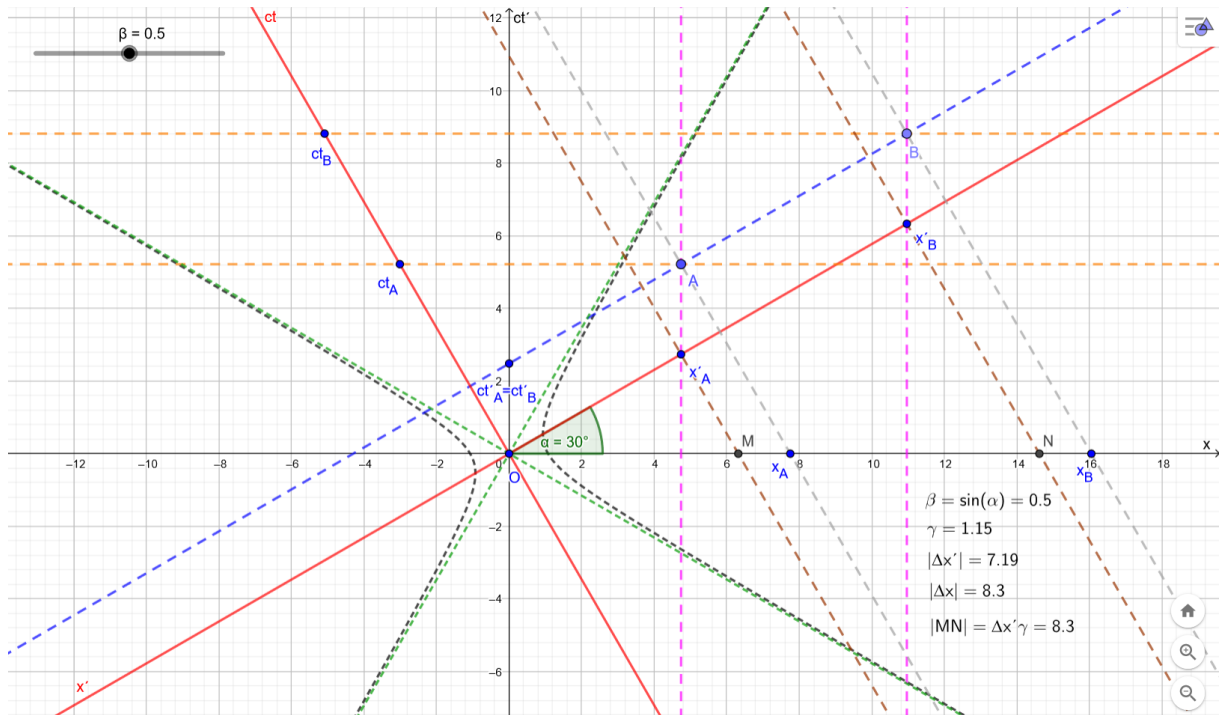
#### Postup:

Sestrojíme Loedelův diagram jako na Obrázek 7. Zvolíme si dvě události, které budou současné v soustavě  $S'$ , to znamená, že zvolíme událost  $A$  jako bod v Loedelově prostoročasovém diagramu, kterou necháme procházet rovnoběžku  $g$  s osou  $x'$ . Na této přímce si zvolíme bod  $B$ . Průsečík přímky  $g$  s osou  $ct'$  označíme jako  $ct'_A = ct'_B$ . Nyní necháme bodem  $A$  procházet rovnoběžku  $k$  s osou  $ct'$ . Průsečík přímky  $k$  s osou  $x'$  označíme jako  $x'_A$ . Obdobně to uděláme pro bod  $B$ , tj. rovnoběžku  $l$  s osou  $ct'$ . Průsečík přímky  $l$  s osou  $x'$  označíme jako  $x'_B$ . Nyní uděláme dvě rovnoběžky  $i, j$  s osou  $x$ , kdy první z nich necháme procházet bodem  $A$  a druhou z nich necháme procházet bodem  $B$ . Průsečík přímky  $i$  s osou  $ct$  označíme jako  $ct_A$  a průsečík přímky  $j$  s osou  $ct$  označíme jako  $ct_B$ . Uděláme další dvě rovnoběžky  $m, n$  s osou  $ct$ . Průsečík přímky  $m$  s osou  $x$  označíme jako  $x_A$  a průsečík přímky  $n$  s osou  $x$  označíme jako  $x_B$ . Poté uděláme projekci bodů  $x'_A$  a  $x'_B$  na osu  $x$ , tj. uděláme dvě rovnoběžky  $r, s$  s osou  $ct$  a průsečíky



těchto přímk s osou  $x$  označíme jako  $M$  a  $N$ . Vypočítáme intervaly. Vypočítáme si  $\gamma$  pomocí rovnice (23). Vypočítáme si  $\Delta x' \gamma$  a zjistíme, že se rovná vzdálenosti bodu  $x_A$  od  $x_B$  a vzdálenosti bodu  $M$  od bodu  $N$ .

Link: <https://www.geogebra.org/classic/nvpp5vvg>



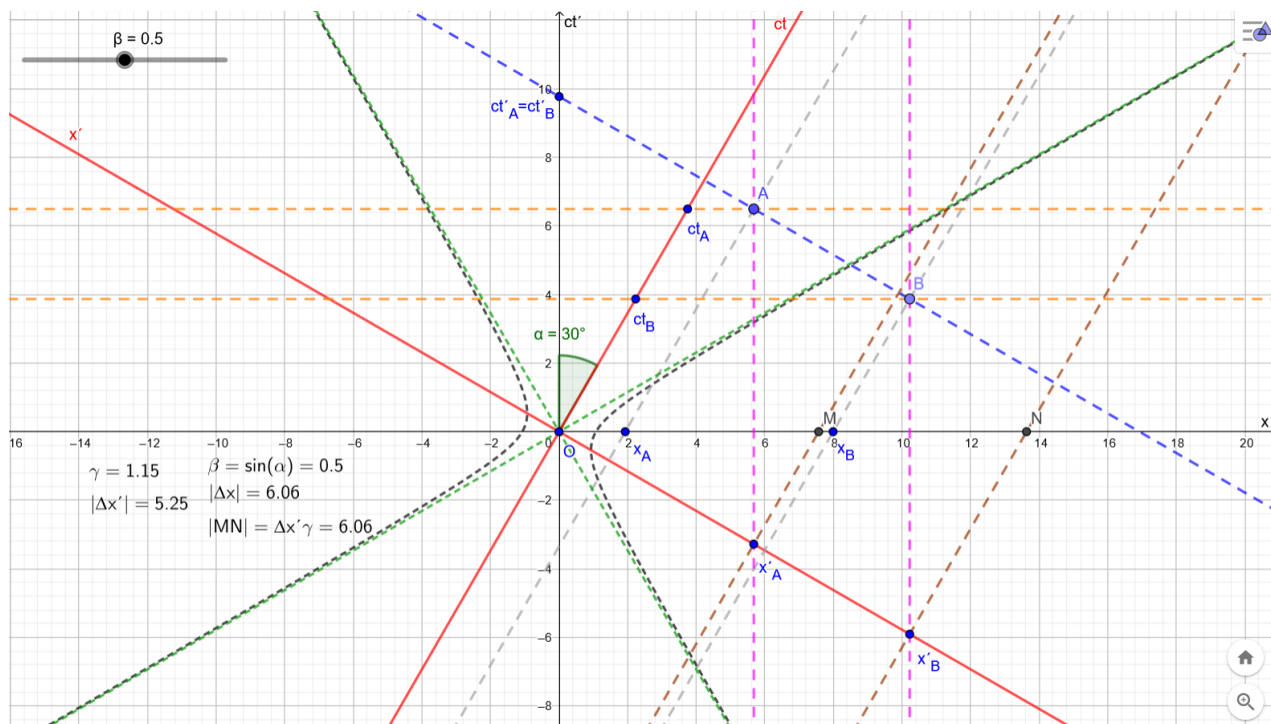
**Obrázek 34:** Loedelův prostorčasový diagram pro kontrakci délky (současné události v soustavě  $S'$ ) pro  $\beta = 0,5$

### 8.2.3. Brehmův diagram pro současné události v $S'$

#### Postup:

Sestrojíme Brehmův diagram jako na Obrázek 9. Zvolíme si dvě události, které budou současné v soustavě  $S'$ , to znamená, že zvolíme událost  $A$  jako bod v Brehmově prostorčasovém diagramu, kterou necháme procházet rovnoběžku  $g$  s osou  $x'$ . Na této přímce si zvolíme bod  $B$ . Průsečík přímky  $g$  s osou  $ct'$  označíme jako  $ct'_A = ct'_B$ . Nyní necháme bodem  $A$  procházet rovnoběžku  $i$  s osou  $x$ . Průsečík přímky  $i$  s osou  $ct$  označíme jako  $ct_A$ . Obdobně to uděláme pro bod  $B$ , tj. rovnoběžku  $j$  s osou  $x$ . Průsečík přímky  $j$  s osou  $ct$  označíme jako  $ct_B$ . Nyní uděláme dvě rovnoběžky  $m, n$  s osou  $ct'$ , kdy první z nich necháme procházet bodem  $A$  a druhou z nich necháme procházet bodem  $B$ . Průsečík přímky  $m$  s osou  $x'$  označíme jako  $x'_A$  a průsečík přímky  $n$  s osou  $x'$  označíme jako  $x'_B$ . Uděláme další dvě rovnoběžky  $k, l$  s osou  $ct$ . Průsečík přímky  $k$  s osou  $x$  označíme jako  $x_A$  a průsečík přímky  $l$  s osou  $x$  označíme jako  $x_B$ . Poté uděláme projekci bodů  $x'_A$  a  $x'_B$  na osu  $x$ , tj. uděláme dvě rovnoběžky  $r, s$  s osou  $ct$  a průsečíky těchto přímk s osou  $x$  označíme jako  $M$  a  $N$ . Vypočítáme intervaly. Vypočítáme si  $\gamma$  pomocí rovnice (23). Vypočítáme si  $\Delta x' \gamma$  a zjistíme, že se rovná vzdálenosti bodu  $x_A$  od  $x_B$  a vzdálenosti bodu  $M$  od bodu  $N$ .

Link: <https://www.geogebra.org/classic/hvzuea4k>



**Obrázek 35:** Brehmův prostorčasový diagram pro kontrakci délky (současné události v soustavě  $S'$ ) pro  $\beta = 0,5$

## 9. Závěr

Celkem bylo vytvořeno 31 diagramů pro různé děje a efekty speciální teorie relativity. Využity byly tři typy diagramů – Minkowského, Loedelova a Brehmova. Práce v Geogebra probíhala podle mých představ. Výhodou tohoto programu je, že není složitý na pochopení a je volně dostupný.

Co se týká konstrukce jednotlivých diagramů, tak každý typ má své přednosti. Výhodou Minkowského diagramu je, že rovnice pro osy  $ct'$  a  $x'$  jsou jednodušeji zadané, oproti rovnicím pro  $ct$  a  $x$  u Loedelova a Brehmova diagramu. Další výhodou je lehká konstrukce hyperboly, kterou narozdíl u Loedelova a Brehmova diagramu nemusíme nijak složitě otáčet. Nevýhodou u Minkowského diagramu však je, že jednotlivé intervaly v soustavě  $S'$  musíme přepočítávat pomocí kalibrační hyperboly (musíme si dát pozor, abychom na to nezapomněli), což u Loedelova a Brehmova diagramu nemusíme. Vytvořené diagramy by měly posloužit jako pomůcka při výuce speciální teorie relativity na PřF UP, dále by měly být volně dostupné, tj. mohou je využít střední školy, popř. další zájemci. Interaktivní verze diagramů umožňuje uživatelům měnit parametr rychlosti beta i vzájemnou polohu událostí, přičemž se přepočítávají odpovídající prostoročasové intervaly. Geogebra umožňuje zapnout, popř. vypnout zobrazení objektů a v případě potřeby tak omezit počet čar a prvků v diagramu, aby byl přehlednější. Ve výchozím zobrazení jsou zahrnuty všechny prvky, které popisují i konstrukci souřadnic studovaných událostí. Práci by bylo možné v budoucnu doplnit ještě o další relativistické jevy, např. světelné hodiny nebo Dopplerův jev.

## 10. Seznam obrázků

<b>Obrázek 1:</b> Závislost druhých mocnin rychlosti elektronu k rychlosti světla na kinetické energii elektronů (naměřené hodnoty poměru druhých mocnin rychlosti elektronu k rychlosti světla jsou znázorněny na obrázku 1 pomocí červených teček) [5].....	3
<b>Obrázek 2:</b> Nákres vzájemné polohy soustav $S$ a $S'$ , kdy soustava $S'$ se pohybuje vůči soustavě $S$ rychlostí $v$ v kladném směru osy $x$ .....	5
<b>Obrázek 3:</b> Nákres vzájemné polohy soustav $S$ a $S'$ , kdy soustava $S$ se pohybuje vůči soustavě $S'$ rychlostí $-v$ v kladném směru osy $x'$ .....	6
<b>Obrázek 4:</b> Nákres vzájemné polohy soustav $S$ a $S'$ , kdy soustava $S$ se pohybuje vůči soustavě $S'$ rychlostí $v$ v kladném směru osy $x$ , znázornění hmotného bodu $A$ a jeho souřadnic.....	7
<b>Obrázek 5:</b> Minkowského prostoročasový diagram pro $\beta = 0,5$ .....	11
<b>Obrázek 6:</b> Prokázání, že $\beta = \tan\alpha$ .....	11
<b>Obrázek 7:</b> Loedelův prostoročasový diagram pro $\beta = 0,5$ .....	12
<b>Obrázek 8:</b> Prokázání, že $\beta = \sin\alpha$ .....	13
<b>Obrázek 9:</b> Brehmův prostoročasový diagram pro $\beta = 0,5$ .....	14
<b>Obrázek 10:</b> Prokázání, že $\beta = \sin\alpha$ .....	14
<b>Obrázek 11:</b> Minkowského prostoročasový diagram pro relativnost současnosti (současné události v soustavě $S$ ) pro $\beta = 0,5$ .....	16
<b>Obrázek 12:</b> Loedelův prostoročasový diagram pro relativnost současnosti (současné události v soustavě $S$ ) pro $\beta = 0,5$ .....	17
<b>Obrázek 13:</b> Zachování intervalů pro Loedelův prostoročasový diagram – relativnost současnosti (současné události v soustavě $S$ ) pro $\beta = 0,5$ .....	18
<b>Obrázek 14:</b> Brehmův prostoročasový diagram pro relativnost současnosti (současné události v soustavě $S$ ) pro $\beta = 0,5$ .....	19
<b>Obrázek 15:</b> Zachování intervalů pro Brehmův prostoročasový diagram – relativnost současnosti (současné události v soustavě $S$ ) pro $\beta = 0,5$ .....	19
<b>Obrázek 16:</b> Minkowského prostoročasový diagram pro relativnost současnosti (současné události v soustavě $S'$ ) pro $\beta = 0,5$ .....	21
<b>Obrázek 17:</b> Loedelův prostoročasový diagram pro relativnost současnosti (současné události v soustavě $S'$ ) pro $\beta = 0,5$ .....	22
<b>Obrázek 18:</b> Brehmův prostoročasový diagram pro relativnost současnosti (současné události v soustavě $S'$ ) pro $\beta = 0,5$ .....	23
<b>Obrázek 19:</b> Světelné hodiny tvořené dvěma rovnoběžnými zrcadly, které se nachází ve vzdálenosti $L$ , mezi nimiž kmitá světelný paprsek .....	23
<b>Obrázek 20:</b> Raketa pohybující se rychlostí $v$ vzhledem k druhému pozorovateli, který se nachází ve své klidové soustavě.....	24
<b>Obrázek 21:</b> Minkowského prostoročasový diagram pro dilataci času (soumítné události v soustavě $S$ ) pro $\beta = 0,5$ .....	27
<b>Obrázek 22:</b> Loedelův prostoročasový diagram pro dilataci času (soumítné události v soustavě $S$ ) pro $\beta = 0,5$ .....	28
<b>Obrázek 23:</b> Brehmův prostoročasový diagram pro dilataci času (soumítné události v soustavě $S$ ) pro $\beta = 0,5$ .....	29
<b>Obrázek 24:</b> Minkowského prostoročasový diagram pro dilataci času (soumítné události v soustavě $S'$ ) pro $\beta = 0,5$ .....	31
<b>Obrázek 25:</b> Loedelův prostoročasový diagram pro dilataci času (soumítné události v soustavě $S'$ ) pro $\beta = 0,5$ .....	32

<b>Obrázek 26:</b> Brehmův prostoročasový diagram pro dilataci času (soumísné události v soustavě $S'$ ) pro $\beta = 0,5$ .....	33
<b>Obrázek 27:</b> Světelné hodiny tvořené dvěma rovnoběžnými zrcadly, které se nachází ve vzdálenosti $l_0$ , mezi nimiž kmitá světelný paprsek.....	34
<b>Obrázek 28:</b> Pohyb světelného paprsku od zadního zrcadla k přednímu zrcadlu v klidové soustavě druhého pozorovatele, vůči němuž se raketa pohybuje rychlostí $v$ v kladném směru osy $x$ .....	34
<b>Obrázek 29:</b> Pohyb světelného paprsku od předního zrcadla k zadnímu zrcadlu v klidové soustavě druhého pozorovatele, vůči němuž se raketa pohybuje rychlostí $v$ v kladném směru osy $x$ .....	35
<b>Obrázek 30:</b> Minkowského prostoročasový diagram pro kontrakci délky (současné události v soustavě $S$ ) pro $\beta = 0,5$ .....	38
<b>Obrázek 31:</b> Loedelův prostoročasový diagram pro kontrakci délky (současné události v soustavě $S$ ) pro $\beta = 0,5$ .....	39
<b>Obrázek 32:</b> Brehmův prostoročasový diagram pro kontrakci délky (současné události v soustavě $S$ ) pro $\beta = 0,5$ .....	40
<b>Obrázek 33:</b> Minkowského prostoročasový diagram pro kontrakci délky (současné události v soustavě $S'$ ) pro $\beta = 0,5$ .....	41
<b>Obrázek 34:</b> Loedelův prostoročasový diagram pro kontrakci délky (současné události v soustavě $S'$ ) pro $\beta = 0,5$ .....	42
<b>Obrázek 35:</b> Brehmův prostoročasový diagram pro kontrakci délky (současné události v soustavě $S'$ ) pro $\beta = 0,5$ .....	43

## 11. Literatura

- [1] Einstein, A. (1905). Zur Elektrodynamik bewegter Körper. *Annalen Der Physik*, 322(10), 891–921. DOI: 10.1002/andp.19053221004
- [2] FEYNMAN, R.P., R.B. LEIGHTON a M. SANDS. *Feynmanovy přednášky z fyziky 1*. Dotisk 2. vydání. Havlíčkův Brod: Albatros Media, 2018. ISBN 978-80-253-1642-9.
- [3] Javadi, H: Reconsidering relativistic Newton's second law and its results [online]. *The General Science Journal* (2015). Dostupné z: <https://www.gsjournal.net/Science-Journals/Research%20Papers/View/5518>
- [4] HALLIDAY, D., R. RESNICK a J. WALKER. *Fyzika 2*. Doplněný dotisk. Vysoké učení technické v Brně: VUTIUM, 2019. ISBN 978-80-214-4123-1.
- [5] BERTOZZI, William. Speed and Kinetic Energy of Relativistic Electrons. *American Journal of Physics*. 1964, 32(7), 551–555. Dostupné z: doi:10.1119/1.1970770.
- [6] *Konstanta rychlosti světla* [online]. [cit. 2021-5-9]. Dostupné z: <https://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?c>
- [7] W.Rindler. *Relativity-Special, general and cosmological*. 2. vydání. United States, New York: Oxford University Press, 2006. ISBN 978-0-19-856732-5.
- [8] *Program Geogebra* [online]. [cit. 2021-5-9]. Dostupné z: <https://www.geogebra.org>
- [9] Masanori Sato a Hiroki SATO. Galilean transformation with Lorentz time dilation. *Physics Essays*. Prosinec 2015, doi:10.4006/0836-1398-28.4.644. Dostupné z: <https://www.researchgate.net/publication/287505950>
- [10] BERGMANN, Peter Gabriel. *Introduction to the THEORY OF RELATIVITY*. United States, New York: Dover Publications, 1976. ISBN 0-486-63282-2.
- [11] ENGELHARDT, W. On the Origin of the Lorentz Transformation. *Human Journals*. Červen, 2018, 8. Dostupné z: <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1303/1303.5309.pdf>
- [12] RICHTEREK, L. a MAJERNÍK V.. *Lorentzovy transformace trochu netradičně*. Katedra teoretické fyziky Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého, Olomouc, Červen 2018, 17.
- [13] Lorentzova transformace. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2021-5-9]. Dostupné z: [https://cs.wikipedia.org/wiki/Lorentzova\\_transformace](https://cs.wikipedia.org/wiki/Lorentzova_transformace)
- [14] Takeuchi, T.: *An Illustrated Guide to Relativity*. Cambridge University Press, 2010.
- [15] LACSNÝ, Boris a Aba TELEKI. *Špeciálna teória relativity v Loedelových diagramoch* [online]. [cit. 2021-5-9]. Dostupné z: <http://www.kf.fpv.ukf.sk/Biblioteka/teleki/LoedelveDigramyKEGA.pdf>.

[16] LIU, B. a T. A. PERERA. *A Graphical Introduction to Special Relativity Based on a Modern Approach to Minkowski Diagrams*. Department of Physics, Illinois Wesleyan University, Srpen 11,2015, 31. Dostupné z: <https://arxiv.org/pdf/1508.01968.pdf> .

[17] STAUNTON, L. P. a H. VAN DAM. Graphical introduction to the special theory of relativity. *American Journal of Physic*. Department of Physics and Astronomy, Drake University, Des Moines, Únor 26,1980, 11. doi:10.1119/1.12229, Dostupné z <https://aapt.scitation.org/doi/10.1119/1.12229> .