Lorentzovy transformace trochu netradičně

Vladimír Majerník*, Lukáš Richterek†
Katedra teoretické fyziky Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého,
tř. Svobody 26, Olomouc, 771 46

12. února 2007

Věnováno 145. výročí narození a 70. výročí úmrtí
Hendrika Antoona Lorentze (18. 7. 1853 - 4. 2. 1928)

1 Filozoficko-historické preludium

Představivost je důležitější než znalost.
Albert Einstein (1879-1955)

Klíčovým problémem speciální i obecné teorie relativity je pojetí vztažné soustavy. Toto téma prostupující fyziku již od dob antické filozofie bylo pro samotného Einsteina rozhodující motivací k úvahám, jež nakonec vyústily k zásadní analýze přestav o prostoru a času [2,3,6,26].

Je proto pochopitelné, že ústřední místo ve speciální teorii relativity (STR) zaujímají transformace souřadnic a času mezi vztažnými soustavami pohybujícími se navzájem konstantní rychlostí - *Lorentzovy transformace*, jež byly poprvé nalezeny H.A. Lorentzem v r. 1904. Význam a přínos H.A. Lorentze vynikne v kontextu moderního pohledu na vývoj vědeckého poznání formulovaném T.S. Kuhnem[1] v knize "Struktura vědeckých revolucí" [10], vybudovaném na základě čtyř pojmů:

(i) *vědecké paradigma*, tj. soubor základních koncepcí a postulátů, určující v dané etapě vývoje modely problémů i způsob jejich řešení;

(ii) *vědecké společenství* tvořené vědci, které spojuje stejné paradigma;

(iii) *normální věda* neboli kumulativní období vývoje vědy zaměřené na rozpracování všeobecně uznávaného paradigmatu;

(iv) *vědecká revoluce*, proces náhlé změny paradigmatu.

Vývoj vědeckého poznání pak podle Kuhna probíhá v cyklech, jež zhruba odpovídají následujícímu schématu:

(i) období *normální vědy*, kdy je výzkum usměrňován a realizován v rámci všeobecně uznávaného paradigmatu;

(ii) období *krize paradigmatu*, kdy se objevují "anomálie", jevy, jež se nedají v rámci uznávaného paradigmatu uspokojivě vysvětlit;

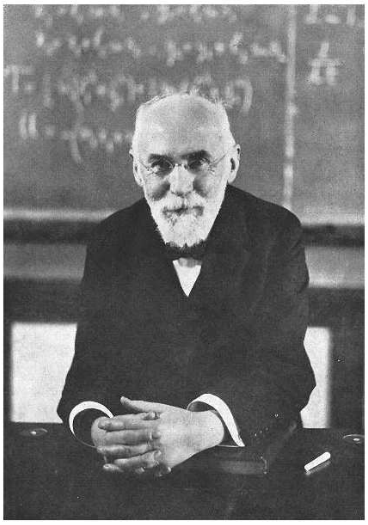
(iii) období *revoluce*, kdy se odmítne staré a vytvoří nové paradigma.

Historie fyziky dává hned několik příkladů "vědeckých revolucí" v Kuhnově chápání, z nichž k nejčastěji uváděným a nejtypičtějším patří právě vznik teorie relativity. Paradigma newtonovské fyziky vycházelo z představy absolutního prostoru, absolutního času a působení na dálku. První změnou paradigmatu byla záměna působení na dálku zavedením elektromagnetického pole v elektrodynamice, druhou relativizace prostoru a času. Lorentz stál u zrodu pojmu silového pole a aktivně se podílel jeho na vybudování. Za svůj přínos k pochopení elektromagnetických vlastností světla byl r. 1902 odměněn Nobelovou cenou[2]. Druhé paradigma připravoval, ale rozhodující krok k jeho překonání

*e-mail: majerv@upol.cz
†e-mail: richter@risc.upol.cz

[1] Thomas Samuel Kuhn (*18.7. 1922), původně teoretický fyzik, se později začal zajímat o filozoficko-metodologické otázky přírodních věd. Jeho stěžejní dílo [10] bývá hojně citováno, v poslední kapitole však zpochybňuje možnosti vědy přispět k nalezení objektivní pravdy; s tímto názorem lze samozřejmě polemizovat [27].

[2] Společně s univerzitním kolegou P. Zeemanem za studium tzv. *Zeemanova jevu* - rozštěpení energetických hladin elektronů v magnetickém poli v závislosti na orientaci jejich spinových momentů.



Obrázek 1: H. A. Lorentz

neuskutečnil. V Lorentzových pojednáních o elektrodynamice pohybujících se těles z let 1892 a 1895 najdeme značnou část formalismu teorie relativity. Představy, z nichž vycházel, však nevybočovaly z newtonovského chápání absolutního času a absolutního prostoru, jehož "materializací" byl předpoklad existence absolutně klidného éteru [4]. Když zjistil, že rovnice elektromagnetického pole se nezmění, aplikujeme-li nejen na prostorové souřadnice, ale také na čas určitou třídu lineárních transformací, pokládal takový souřadný systém za tzv. "místní souřadnice" spojené se vztažnou soustavou, která se sama pohybuje vůči éteru.

V té době již byly známy negativní výsledky některých experimentů, které byly v přímém rozporu s představou nehybného éteru; nejznámější z nich jsou nepochybně interferenční pokusy provedené A.A. Michelsonem[3][3,26]. Při jejich rozboru navrhl r. 1889 G.F. Fitzgerald[4] a r. 1892 H.A. Lorentz hypotézu, že při pohybu těles vůči éteru se jejich podélné rozměry určitým způsobem zkracují. Tuto *Fitzgeraldovu-Lorentzovu kontrakci* Lorentz připisoval změně elektromagnetických sil působících uvnitř těles při jejich pohybu. Konečně r. 1895 dospěl ke známým transformacím, jež později H.J. Poincaré nazval jeho jménem[5]. Právě Poincaré kritizoval Lorentzovo pojetí a r. 1900 vyjádřil přesvědčení, že absolutní pohyb principiálně není pozorovatelný a zpochybnil existenci éteru. Obsah tohoto tvrzení dokonce označil za princip relativity. Jako první fyzik také vyslovil požadavek, že všechny fyzikální zákony - mají-li být správné - musí být vůči Lorentzově transformaci invariantní. V r. 1904 pak předpověděl nové pojetí mechaniky, ve které nebude možné překonat rychlost světla [4].

Toto "předeinsteinovské" období lze charakterizovat jako krizi newtonovského paradigmatu absolutního prostoru a času. Pokusy, které nebylo možné v jeho rámci uspokojivě vysvětlit, byly objasňovány pomocí ad hoc hypotéz a předpokladů (např. "éterový vítr"). Předělem - vědeckou revolucí v Kuhnově chápání - se stala slavná práce A. Einsteina "Zur Elekrodynamik bewegter Körper". Originálním způsobem zavrhla existenci éteru a postulovala relativizaci prostoru a času, která se postupně stala novým paradigmatem[6].

V této souvislosti spatřujeme úlohu H.A. Lorentze v dobudování jednoho a přípravě druhého paradigmatu. I když byl do konce života přesvědčen o existenci éteru a odmítal teorii relativity (podobně jako Poincaré)[7], bezesporu jej můžeme pokládat za jednoho z nejvýznamnějších teoretiků přelomu 19. a 20. století. Všímal si i sociálních aspektů vědy, byl jedním ze spoluzakladatelů *Ligy národů pro mezinárodní spolupráci* a předsedou solvayských vědeckých konferencí. Jeho lidské kvality charakterizuje mino jiné skutečnost, že se r. 1912 vzdal vedení katedry fyziky v holandském Leidenu ve prospěch P. Ehrenfesta, jenž po odchodu z Petrohradu nemohl najít nikde v Evropě místo [18].

Lorenztovy transformace jsou páteří matematického aparátu speciální teorie relativity a jejich vlastnosti byly zkoumány z mnoha hledisek. V tomto článku se zaměříme na dva méně obvyklé způsoby jejich vyjádření: pomocí elementárních goniometrických funkcí a prostřednictvím binárních čísel. Zmíníme se i o některých možnostech jejich grafického znázornění a připomeneme vztahy mezi fyzikálními veličinami charakterizujícími de Broglieho fázové vlny, jež s Lorentzovými transformacemi úzce souvisí.

[3] R. 1881 v Postupimi a r. 1887 v Clevelandu spolu s E.W. Morleym

[4] Příjmení irského fyzika George Francise FitzGeralda (3.8. 1851-22.2. 1901) je dnes stále častěji přepisováno jako "Fitzgerald".

[5] Připomeňme, že Lorentz nebyl úplně prvním; již r. 1887 německý fyzik W. Voigt zjistil, že rovnice tzv. elastické teorie světla jsou invariantní právě vzhledem k těmto transformacím. Nezávisle byly odvozeny také J. Larmorem v r. 1900.

[6] Slavný americký fyzik R.P. Feynman vtipně poznamenal, že v dnešní době by podobná práce stěží uspěla v recenzním řízení už proto, že neobsahovala žádné citace. Je třeba ocenit otevřenost redakce "Annalen der Physik", že ji bez zdržování opublikovala

[7] Je zajímavé, že v jistém smyslu podobný osud potkal na konci života i A. Einsteina, který odmítal paradigma statistické interpretace kvantové fyziky, ačkoli sám stál u jeho zrodu.

2 Goniometrický tvar Lorentzových transformací

Teorie relativity vznikla z nutnosti. Byla východiskem z hlubokých rozporů staré teorie, z nichž nebylo zdánlivě úniku. Síla nové teorie je v její důslednosti a jednoduchosti, s niž řeší všechny tyto nesnáze s pomocí jen několika málo přesvědčivých předpokladů.
Albert Einstein (1879-1955), Leopold Infeld (1898-1968)

Zabýváme-li se v tomto textu formulací Lorentzových transformací i dalších relativistických a kvantově-mechanických vztahů pomocí reálných goniometrických funkcí, jsme k tomu motivováni následujícími důvody:

- goniometrický přepis rovnic i vzorců STR činí vztah mezi geometrií a fyzikálním obsahem STR mnohem jasnějším a zejména pro studenty středních škol také "stravitelnějším";
- relativistické veličiny, které mají stejné transformační vlastnosti jako prostorové souřadnice a čas (např. relativistické čtyřvektory) je možno též vyjádřit pomocí goniometrických funkcí, tzn. jednoduchého matematického aparátu. Bez obtíží lze získat množství relativistických a kvantově-mechanických vztahů pouhým aplikováním, popř. kombinováním vzorců a rovností;
- vztahy mezi důležitými veličinami v STR i v de Broglieho vlnové mechanice lze přehledně a snadno znázornit pomocí jednoduchých grafů a diagramů.

Lorentzovy transformace jsou lineární v souřadnicích i v čase a podobají se transformacím souřadnicového systému při jeho rotaci. Odtud pramení snaha dát Lorentzovým transformacím určitý geometrický význam spojením geometrické veličiny (např. úhlu) s fyzikální veličinou (relativní rychlostí vztažných soustav v). Tato souvislost pomáhá hlouběji porozumět geometrickému významu Lorentzových transformací i celému formalismu STR a umožňuje prostřednictvím jednoduchých úprav snadno vyvodit řadu kinematických a dynamických efektů. Pro větší názornost bylo vyvinuto několik metod grafického znázornění Lorentzovy transformace, mezi nimiž dominantní postavení bezesporu náleží *Minkowského diagramům* [3,23,26].

Východiskem našich úvah je již zmíněná formální podobnost Lorentzových transformací s rotacemi. Rotace lze parametrizovat pomocí úhlu, který určuje otočení souřadnicových os. Analogicky i v případě Lorentzových transformací lze zavést vhodný parametr, jenž zřejmě musí charakterizovat relativní rychlost v vztažných soustav. Uvažujeme-li vztažné soustavy $S\,(x, y, z, ct)$ a $S'\,(x', y' z', ct')$ v tzv. *standardní konfiguraci*[8] a zavedeme-li bezrozměrný parametr ξ vztahem[9]

$$v = c\ \mathrm{tgh}\,\xi, \tag{1}$$

můžeme Lorentzovy transformace pro x-ové a časové souřadnice zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} x' &= \gamma x - \gamma\beta ct = x\cosh\xi - ct\sinh\xi, \\ ct' &= -\gamma\beta x + \gamma ct = -x\sinh\xi + ct\cosh\xi, \end{aligned} \tag{2}$$

kde $\gamma = \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}$, $\beta = v/c$. Výše popsaný způsob parametrizace má řadu předností a v literatuře se s ním setkáváme zdaleka nejčastěji. Pro začátečníka však může být hůře pochopitelný, např. pro studenty středních škol jsou hyperbolické funkce vesměs úplně neznámé.

Formální podobnost s rotacemi umocňuje invariant Lorentzových transformací - interval mezi dvěma událostmi. Interval mezi událostí v počátku soustavy S a událostí o souřadnicích (x, y, z, ct) je dán vztahem

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2, \tag{3}$$

nápadně připomínajícím čtverec velikosti polohového vektoru $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, jež je invariantem rotací v trojrozměrném Euklidovském prostoru. Z tohoto důvodu zavádějí někteří autoři komplexní časovou souřadnici (viz např. [26]) a Lorentzovy souřadnice parametrizují pomocí komplexního parametru ϑ definovaného jako $\mathrm{tg}\,\vartheta = \mathrm{i}v/c$, kde $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$. Geometrická interpretace "komplexního úhlu" je však dosti obtížná a používání komplexní časové souřadnice se stává problémem při přechodu k obecné teorii relativity [19].

Goniometrické funkce však můžeme do rovnic (2) snadno zavést pomocí reálného parametru $\varphi \in (-\pi/2,\ \pi/2)$, pro který platí

$$\sin\varphi = \frac{v}{c} = \beta. \tag{4}$$

a který plně pokrývá všechny hodnoty podsvětelných rychlostí. Zřejmě

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\cos\varphi} = \sec\varphi$$

[8] Tato konfigurace je předpokládána v celém textu podobně jako ve většině citovaných pramenů; soustava S' se pohybuje ve směru osy x, jež splývá s x', v čase $t = t' = 0$ se právě míjejí počátky obou soustav. V [26] je v takovém případě Lorentzova transformace nazývána *speciální Lorentzovou transformací.*

[9] V anglosaské literatuře bývá někdy označován jako "rapidity".

a po dosazení do (2) převedeme Lorentzovy transformace na tvar

$$\begin{aligned} x' &= x \sec\varphi - ct \operatorname{tg}\varphi, \\ ct' &= -\,x \operatorname{tg}\varphi + ct \sec\varphi. \end{aligned} \tag{5}$$

Analogicky lze definovat

$$\cos\zeta = \frac{v}{c} = \beta,, \qquad \zeta \in (-\,\pi/2,\ \pi/2) \tag{6}$$

a vyjádřit Lorentzovy transformace vztahy

$$\begin{aligned} x' &= x \operatorname{cosec}\zeta - ct \operatorname{cotg}\zeta, \\ ct' &= -\,x \operatorname{cotg}\zeta + ct \operatorname{cosec}\zeta. \end{aligned} \tag{7}$$

Někdy bývá užitečné zavést veličinu $\bar{v} = c\sqrt{1 - v^2/c^2}$ nazývanou v souladu se svým rozměrem *doplňkovou rychlostí.* Podle (4) a (6) zřejmě platí

$$\sin\zeta = \sqrt{1 - \cos^2\zeta} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{\bar{v}}{c}.$$

Goniometrický tvar Lorentzových transformací (5), resp. (7) je zajímavý nejen z teoretického hlediska, ale může posloužit jako výchozí bod pro vyjádření dalších relativistických veličin pomocí goniometrických funkcí a k formulaci relativistických vztahů "v jazyce goniometrie". Použitím rovnic (4) a (6) můžeme bez obtíží zapsat složky některých čtyřvektorů. Jako příklad mohou posloužit čtyřrychlost U a čtyřhybnost P částice pohybující se rychlostí u, pro které dostáváme[10]

1. x-ová složka čtyřrychlosti

$$U_x = \frac{u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = c \operatorname{tg}\varphi = c \operatorname{cotg}\zeta, \tag{8}$$

2. t-složka čtyřrychlosti

$$U_t = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{c}{\cos\varphi} = c \sec\varphi = c \operatorname{cosec}\zeta, \tag{9}$$

3. x-ová složka čtyřhybnosti (x-ová složka relativistické hybnosti)

$$P_x = p_x = \frac{m_0 u_x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = m_0 U_x = m_0 c \operatorname{tg}\varphi = m_0 c \operatorname{cotg}\zeta, \tag{10}$$

4. t-složka čtyřhybnosti (relativistická energie/c)

$$P_t = \frac{E}{c} = \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = m_0 U_t = m_0 c \sec\varphi = m_0 c \operatorname{cosec}\zeta. \tag{11}$$

Vidíme, že relativistické veličiny jsou popsané elementárními goniometrickými funkcemi. Výpočty s nimi proto zvládnou i studenti se znalostí pouhých základů goniometrie. Při formální manipulaci s matematickými vztahy však musíme mít vždy na zřeteli jejich konkrétní fyzikální obsah. Pro ilustraci uveďme několik příkladů.

Začněme dalším invariantem Lorentzových transformací - "čtvercem čtyřhybnosti", jež je obdobou prostoročasového intervalu (3). Z goniometrické rovnosti

$$\operatorname{tg}^2\varphi - \sec^2\varphi = -1. \tag{12}$$

po vynásobení rychlostí světla ve vakuu c podle (8) a (9) získáme

$$U_x^2 - U_t^2 = -\,c^2, \tag{13}$$

[10] Zavedení a systematické užívání čtyřvektorů je standardní součástí většiny učebnic STR, namátkou uveďme [26]; jejich definice zde proto neopakujeme. Přidržujeme se hojně užívané konvence ve značení rychlostí. Zatímco rychlosti vztažných soustav odpovídá "v", rychlostem (popř. čtyřrychlostem) částic "u" (popř. "U").

pochopitelně za předpokladu, že jak y-ová tak z-ová složka rychlosti dané částice jsou rovny nule. Analogický vztah lze samozřejmě psát i pro složky čtyřhybnosti (10) a (11). Podle (12) musí platit

$$P_x^2 - P_t^2 = -\, m_0^2 c^2,$$

odkud plyne známý vztah mezi relativistickou energií E a hybností $p = p_x$ pohybující se částice

$$p^2 - \frac{E^2}{c^2} = -\, m_0^2 c^2,$$

neboli

$$E = c\sqrt{m_0^2 c^2 + p^2}. \tag{14}$$

Na závěr odvoďme relativistický zákon skládání rychlostí stejného směru. Nabízí se několik možností, zde využijeme skutečnosti, že Lorentzovy transformace tvoří *grupu.* Máme tak zaručeno, že složením dvou Lorentzových transformací vždy dostaneme opět Lorentzovu transformaci. Uvažujme soustavy S, S' a S'', které se navzájem pohybují ve společném směru os x, x', x'' (tzn., že každé dvě jsou navzájem ve standardní konfiguraci). Lorentzova transformace z S do S', jejichž relativní rychlost označíme v_1, je podle (5) dána rovnicemi

$$\begin{aligned} x' &= x \sec\varphi_1 - ct \,\mathrm{tg}\,\varphi_1, \\ ct' &= -\,x \,\mathrm{tg}\,\varphi_1 + ct \sec\varphi_1, \end{aligned} \tag{15}$$

pro přechod od S' k S'', jejichž vzájemnou rychlost označíme v_2, pak můžeme psát

$$\begin{aligned} x'' &= x' \sec\varphi_2 - ct' \,\mathrm{tg}\,\varphi_2, \\ ct'' &= -\,x' \,\mathrm{tg}\,\varphi_2 + ct' \sec\varphi_2. \end{aligned} \tag{16}$$

Dosazením z (15) do první z rovnic (16) obdržíme[11]

$$x'' = x\,(\sec\varphi_1 \sec\varphi_2 + \,\mathrm{tg}\,\varphi_1 \,\mathrm{tg}\,\varphi_2) - ct\,(\,\mathrm{tg}\,\varphi_1 \sec\varphi_2 + \sec\varphi_1 \,\mathrm{tg}\,\varphi_2)\,.$$

Srovnáme-li ji s (2), vidíme, že má opět formálně podobu Lorentzovy transformace pro mezi soustavami S a S''. V souladu s (2) je vzájemná rychlost těchto soustav v_{12} dána podílem koeficientu u souřadnic ct a x; získáme tedy

$$\frac{v_{12}}{c} = \sin\varphi_{12} = \frac{\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2}{1 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2}.$$

Uvážíme-li, že podle (4) je $\sin\varphi_1 = v_1/c$, $\sin\varphi_2 = v_2/c$, dospějeme ke známému vztahu

$$v_{12} = \frac{v_1 + v_2}{1 + \dfrac{v_1 v_2}{c^2}}. \tag{17}$$

Dodejme, že stejně jako u funkce hyperbolický tangens v (1), je oborem hodnot funkcí sinus (resp. kosinus) definovaných vztahy (4) resp. (6) interval $\langle -1, 1\rangle$ a pro reálné hodnoty parametrů ξ, φ resp. ζ zůstáváme vždy u rychlostí menších než c, přesně jak to vyžaduje relativistické skládání rychlostí (17).

3 Loedelovy diagramy

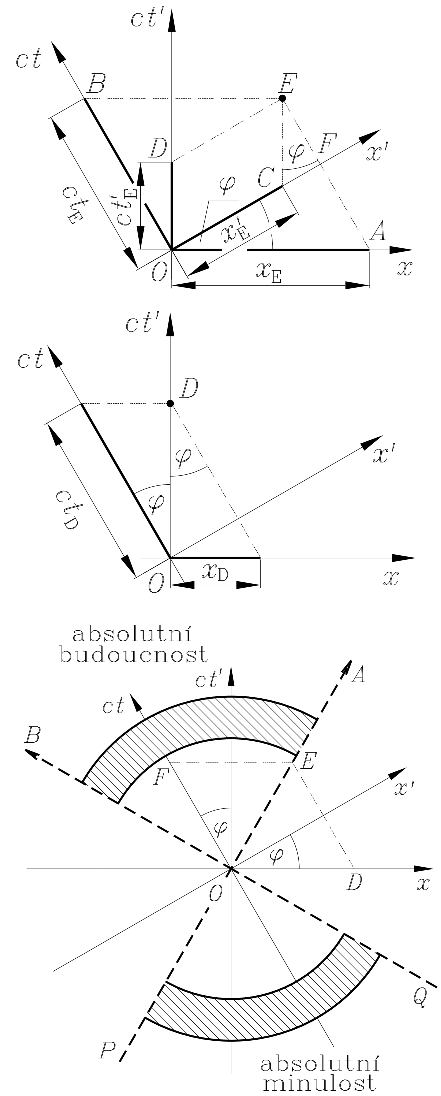
Čas činí svoje. A ty, člověče?
Stanisław Jerzy Lec (1909-1966)

Známé prostoročasové diagramy, jež zavedl v r. 1908 H. Minkowski, se dnes staly neodmyslitelnou součástí populárních výkladů a úvodních učebnic teorie relativity. Význam Minkowského myšlenek nejednou vyzdvihl i A. Einstein.

Význačnou vlastností Minkowského diagramů je, že vždy preferují určitou vztažnou soustavu. Řešíme-li problémy z hlediska více vztažných soustav, jsme většinou nuceni načrtnout pro každou soustavu zvláštní diagram. Ačkoli samozřejmě existuje vzájemně jednoznačné přiřazení bodů v jednotlivých diagramech dané Lorentzovou transformací, z grafického znázornění často není patrné.

Uvedené nedostatky motivovaly v r. 1948 E. Loedela k navržení tzv. *Loedelových diagramů* (obr. 2a). Na první pohled velmi připomínají vzájemné otočení dvou soustav v rovině o úhel φ. Zde je však osa x (soustavy S) kolmá

[11] Můžeme pochopitelně použít i druhou z rovnic (16), vede ke stejnému výsledku.



Obrázek 2: Loedelovy diagramy: a) Zavedení Loedelova diagramu b) Určení vzájemné rychlosti vztažných soustav c) Světelné kužely

na osu ct' (soustavy S') a x' na ct. Na obrázku jsou zakresleny i souřadnice zvolené události E vzhledem k oběma soustavám. Pomocí Pythagorovy věty snadno ukážeme, že v $\triangle DAE$ platí

$$|AD|^2 = |AE|^2 + |ED|^2 = (ct_E)^2 + x_E'^2,$$

podobně v případě $\triangle OAD$ můžeme psát

$$|AD|^2 = |OD|^2 + |OA|^2 = (ct_E')^2 + x_E^2.$$

Máme tak zaručeno, že bude vždy splněna jedna z klíčových vlastností Lorentzovy transformace

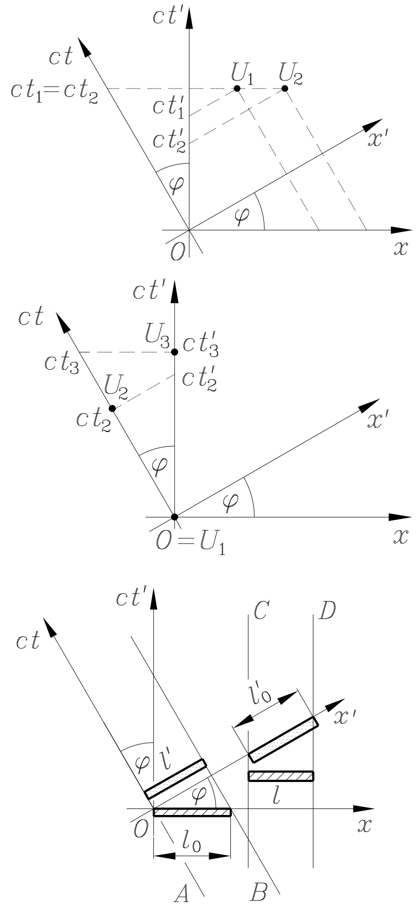
$$x_E^2 + (ct_E')^2 = x_E'^2 + (ct_E)^2 \qquad \text{neboli} \qquad x_E^2 - (ct_E)^2 = x_E'^2 - (ct_E')^2.$$

Zbývá určit význam úhlu φ. Uvažujme pozorovatele D na obr. 2b, který je v klidu vůči S'. Jeho světočára splývá s osou ct' a odpovídající souřadnice v soustavě S jsou x_D a ct_D. Je zřejmé, že pro rychlost, s jakou se D pohybuje vzhledem k S, dostáváme

$$\frac{v}{c} = \frac{x_D}{ct_D} = \sin\varphi,$$

v naprosté shodě s (4). Úhel φ tak přesně odpovídá úhlu v goniometrickém vyjádření Lorentzových transformací (5) a můžeme proto říci, že Loedelovy prostoročasové diagramy jsou přirozeným grafickým znázorněním (5).

Pokusme se nyní ilustrovat některé známé důsledky Lorentzových transformací právě pomocí Loedelových diagramů. Na obr. 2c jsou zakresleny světelné kužely a vyznačena absolutní minulost i absolutní budoucnost události O. Světočára PQA odpovídá světelnému paprsku šířícímu se v kladném směru osy x. Nechť E je jednou z událostí na této



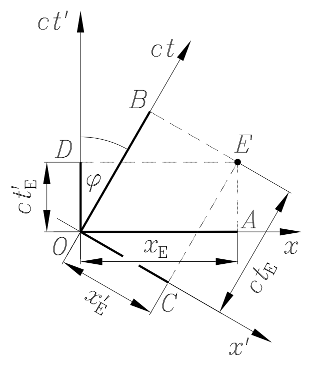
Obrázek 3: Loedelovy diagramy: a) Relativnost současnosti b) Dilatace času, c) Kontrakce délky

světočáře o souřadnicích $x_E = |OD|$ a $ct_E = |OF|$ v soustavě S a x'_E a ct'_E v S'. Protože pro světelný signál $x = ct$ (tj. $|OD| = |OF|$), musí být světočára světelného paprsku osou úhlu sevřeného osami x a ct. Ze symetrie potom plyne, že splývá také s osou úhlu sevřeného osami x' a ct'. Podobně světočára QOB odpovídá světelnému paprsku šířícímu se v záporném směru osy x a nutně proto splývá s osou úhlu sevřeného záporným směrem osy x a osou ct.

Dalším známým důsledkem Lorentzových transformací je *relativnost současnosti* (viz obr. 3a). Události U_1, U_2 jsou současné pro pozorovatele v soustavě S, zjevně však nejsou současné pro pozorovatele v S'. Na obr. 3b pak lze snadno demonstrovat *dilataci času*. Událost U_1 nechť nastala v čase $t_1 = t'_1 = 0$, kdy se míjejí počátky obou soustav $x_1 = x'_1 = 0$. Událost U_2 nastala v soustavě S na stejném místě jako U_1, avšak v čase t_2. Rozdíl $t_2 - t_1 = t_2$ určuje proto vlastní čas mezi událostmi U_1 a U_2, pozorovatel v S' musí naměřit větší časový interval $t'_2 - t'_1 = t'_2$. Z obrázku vidíme, že

$$\frac{ct_2}{ct'_2} = \cos\varphi = \frac{1}{\gamma} < 1, \qquad t'_2 = \gamma t_2.$$

neboť podle (4) $\sin\varphi = v/c$. Podobně pro událost U_3, jež proběhne na stejném místě jako U_1 z hlediska pozorovatele



Obrázek 4: Brehmův diagram

v S', zjišťujeme, že

$$\frac{ct_3'}{ct_3} = \cos\varphi = \frac{1}{\gamma}, \qquad t_3 = \gamma t_3'.$$

Velmi jednoduše lze v Loedelově diagramu demonstrovat i *kontrakci délky.* Na obr. (3c) jsou zakresleny světočáry konců tyče A a B, která je v klidu v soustavě S a jejíž délka v S je l_0 (šrafované pásy odpovídají měření délky tyče pozorovatelem v S, nevyšrafované pozorovatelem v S'). Má-li pozorovatel v S' zaznamenat relativistické zkrácení délky tyče, musí polohu obou konců změřit ve stejném čase t'. Naměří potom délku l', která odpovídá průmětu l_0 do směru určeného osou x'. Je zřejmé, že $l' = l_0 \cos\varphi = l_0/\gamma$. Analogicky v případě tyče CD, jež je v klidu vzhledem k S', bude její délka l naměřená pozorovatelem v S dána průmětem do směru osy x; opět vychází $l = l_0 \cos\varphi = l_0'/\gamma$.

Loedelovy diagramy mohou být užitečným nástrojem při studiu celé řady problémů (Dopplerův jev, paradox dvojčat apod.). Kromě nich se v literatuře setkáme i s tzv. *Brehmovými diagramy* (viz [5,22]), jejichž vlastnosti jsou velmi podobné. Uspořádání os a přiřazení souřadnic události E v Brehmově diagramu popisuje obr. 4. Z Pythagorovy věty aplikované na $\triangle OAE$ dostáváme

$$|OE|^2 = |OA|^2 + |AE|^2 = x_E^2 + (ct_E')^2,$$

v případě $\triangle OCE$

$$|OE|^2 = |OC|^2 + |CE|^2 = x_E'^2 + (ct_E)^2.$$

Stejně jako v případě Loedelova diagramu proto zřejmě platí

$$x_E^2 + (ct_E')^2 = x_E'^2 + (ct_E)^2 \qquad \text{neboli} \qquad x_E^2 - (ct_E)^2 = x_E'^2 - (ct_E')^2.$$

Hlavní výhodou jak Loedelových, tak Brehmových diagramů je, že zachovávají stejná měřítka pro obě znázorněné vztažné soustavy. V jednom diagramu můžeme přímo odečítat časoprostorové souřadnice v obou soustavách a mnohem snáz nalézt jejich vzájemné vztahy. Navíc, jak již bylo řečeno, velmi úzce souvisejí s goniometrickým tvarem Lorentzových transformací. V systematickém výkladu speciální teorie relativity se však dosud, bohužel, užívají zřídka. Jednou z mála výjimek je [23].

4 De Broglieho fázové vlny

Princip relativity ve spojení s Maxwellovými rovnicemi vyžaduje, aby hmotnost byla úměrná energii v tělese obsažené. Světlo odnáší hmotnost. Tato úvaha je veselá a podmaňující. Ale zdalipak se tomu Hospodin nesměje a nevodí mě za nos - to nemohu vědět.
Albert Einstein (1879-1955)

Pojem fázových vln sehrál důležitou úlohu ve vývoji kvantové fyziky na počátku 20. století. Podle tehdejších názorů měly elektromagnetické vlny částicové i vlnové vlastnosti, ale elektron (obecně částice) jen vlastnosti korpuskulární. Tato zjevná asymetrie motivovala r. 1924 de Broglieho k vyslovení hypotézy, že pohybující se částice mají také povahu vlnovou.

Popis de Broglieho fázové vlny otevírá téměř každý úvodní kurz kvantové mechaniky. Vztah $\lambda = h/p$ mezi vlnovou délkou de Broglieho vln λ a hybností p částice bývá samozřejmou součástí studijních textů o kvantové mechanice pro začátečníky. I když de Broglieho fázové vlny je třeba chápat relativisticky a jsou bezprostředně spojeny s Lorentzovými transformacemi, jen málo úvodních učebnic teorie relativity tento fakt dostatečně zdůrazňuje. Většina autorů uvádí de Broglieho fázové vlny pouze jako stupeň na cestě k seznámení se se Schrödingerovou rovnicí. Skutečně relativistická povaha de Broglieho vln zůstává nepovšimnuta a celá teorie fázových vln se tak zdá být “ad hoc” hypotézou odůvodněnou jen souhlasem s experimentem. Z pedagogického hlediska má proto velký význam zdůrazňovat vnitřní spojení mezi STR a kvantovou teorií.

Pro popis jakéhokoliv vlnění jsou určující jeho frekvence a vlnová délka. V tehdejší době byly k dispozici jen mechanické veličiny charakterizující elektron, např. jeho energie a hybnost, proto bylo nevyhnutelné spojit právě tyto veličiny s odpovídajícími charakteristikami vlnění. Mechanické veličiny popisující pohyb částic jsou funkčně vázány mnohými vztahy, které musely promítnout i do vzájemných vztahů mezi určujícími parametry vln.

Spojíme-li soustavu S' s pohybující se částicí, budou její relativistická hybnost a energie definovány vztahy (10) a (11), a bude splněna rovnice (14). Na druhé straně pro frekvenci ν, fázovou rychlost v_f a vlnovou délku λ platí

$$\nu\lambda = v_\mathrm{f}; \tag{18}$$

ze tří vlnových veličin ν, λ a v_f stačí proto určit jen dvě, třetí vyjádřit z rovnice (18). Inspirován Planckovým a Einsteinovým vztahem $E = h\nu$, de Broglie definoval frekvenci u fázové vlny jako

$$\nu = \frac{E}{h} = \frac{m_0 c^2}{h\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}. \tag{19}$$

Dále odvodil, že fázová rychlost těchto fázových vln je dána rovnicí

$$v_{\mathrm{f}} = \frac{c^2}{u}.$$

Pro vlnovou délku λ potom v souladu s (18) vychází

$$\lambda = \frac{v_{\mathrm{f}}}{\nu} = \frac{h}{p}, \tag{20}$$

kde p je relativistická hybnost částice.

Veličiny charakterizující fázovou vlnu jsou relativistické, lze tedy očekávat, že mohou být též vyjádřeny pomocí goniometrických funkcí parametru φ zavedeného v předcházející části. Pro částici s klidovou hmotností m_0 můžeme definovat "klidovou" frekvenci

$$\nu_0 = \frac{m_0 c^2}{h},$$

nebo Comptonovu vlnovou délku

$$\lambda_0 = \frac{h}{m_0 c}.$$

S jejich pomocí můžeme zapsat některé ze zbývajících charakteristik fázových vln částice následovně:

1. vlnová délka λ vynásobená klidovou frekvencí ν_0

$$\lambda\,\nu_0 = \frac{c\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}{\dfrac{u}{c}} = c\,\mathrm{cotg}\,\varphi = c\,\mathrm{tg}\,\xi; \tag{21}$$

2. fázová rychlost fázové vlny

$$v_{\mathrm{f}} = \frac{c^2}{u} = \frac{c}{\sin\varphi} = c\,\mathrm{cosec}\,\varphi = c\sec\xi. \tag{22}$$

Obě uvedené veličiny mají zřejmě rozměr rychlosti. Pro úplnost vypočtěme ještě grupovou rychlost

$$v_{\mathrm{g}} = 2\pi\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}k},$$

kde je vlnový vektor. Jeho směr je totožný se směrem šíření vlny a pro jeho velikost platí (s využitím (20) a (10))

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi\frac{p}{h} = 2\pi\frac{m_0 c}{h}\,\mathrm{tg}\,\varphi. \tag{23}$$

Pro výpočet grupové rychlosti můžeme frekvenci $\nu(k) = \nu\,[k(\varphi)]$ považovat za složenou funkci parametru φ. Podle (19) a (11) vychází

$$\nu = \frac{E}{h} = \frac{m_0 c^2}{h}\sec\varphi,$$

takže

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{c\,\mathrm{tg}\,\varphi\sec\varphi}{\lambda_0}$$

a také

$$\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\varphi} = 2\pi\frac{\sec^2\varphi}{\lambda_0}.$$

Podle pravidla pro derivování složené funkce potom dostaneme

$$v_{\mathrm{g}} = 2\pi\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}k} = 2\pi\frac{\dfrac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\varphi}}{\dfrac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\varphi}} = c\sin\varphi = u,$$

výsledek známý z takřka všech úvodních kurzů kvantové mechaniky.

Z goniometrické identity

$$\mathrm{cosec}^{\,2}\varphi - \mathrm{cotg}^{\,2}\varphi = 1. \tag{24}$$

lze snadno odvodit tzv. *disperzní vztah* pro fázovou vlnu

$$\omega^2 = (2\pi\nu)^2 = c^2 \left(k_0^2 + k^2\right), \tag{25}$$

kde ω je úhlová frekvence a $k_0 = 2\pi/\lambda_0$.

Dosazením z rovnic (21) a (22) do (24) vychází

$$v_\mathrm{f}^2 - (\lambda\nu_0^2) = c^2 \tag{26}$$

a po vydělení rovnice λ^2

$$\frac{v_\mathrm{f}^2}{\lambda^2} - \frac{\lambda^2\nu_0^2}{\lambda^2} = \frac{c^2}{\lambda^2} \tag{27}$$

Protože $v_\mathrm{f}\lambda^{-1} = \nu$ a $\lambda^{-1} = k/(2\pi)$, je rovnice (27) ekvivalentní (25).

Další dobře známý vztah mezi fázovou a grupovou rychlostí fázových vln,

$$v_\mathrm{f} v_\mathrm{g} = c^2,$$

vyplývá bezprostředně z goniometrické rovnosti

$$\sin\varphi \operatorname{cosec}\varphi = 1.$$

Podobnost odvození disperzního vztahu (25) z podmínky (24) s výpočtem invariantu čtyřrychlosti (13), popřípadě vztahu mezi relativistickou energií a hybností (14) z identity (12) není náhodná. Její podstata však vynikne teprve při systematickém užívání čtyřvektorů. Fázovou vlnu lze popsat tzv. *vlnovým čtyřvektorem* K, jehož prostorové složky odpovídají vlnovému vektoru   a časová složka je definována jako $\omega/c = 2\pi\nu/c$.

5 Vztah mezi Einsteinovými a de Broglieho veličinami

Ze zkušeností, které se vyhranily v Newtonovu dynamiku, se nemohlo dospět k Einsteinově teorii relativity; nebyly dosti přesné. Tím, že si elektrodynamika vynutila princip relativity spjatý s Lorentzovou transformací, vynutila si také přechod od dynamiky newtonovské k relativistické. V tomto - ryze historickém - smyslu tedy spočívá dnešní dynamika rovněž na elektrodynamice.
Max von Laue (1879-1960)

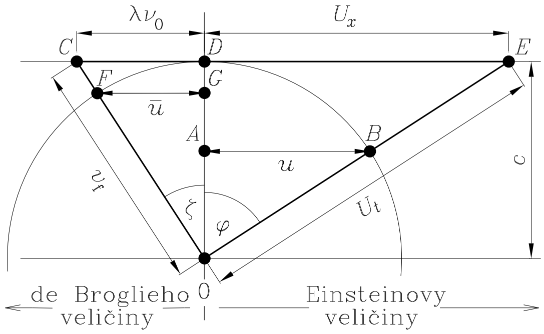
Na základě goniometrického tvaru Lorentzových transformací můžeme veličiny z předcházejících částí rozdělit do dvou skupin. Do první skupiny patří veličiny, jež můžeme vyjádřit jako funkce sinus, tangens respektive sekans úhlu φ, např. rychlost u, x-ová a časová složka čtyřrychlosti. Budeme je nazývat *Einsteinovy veličiny.* Druhá skupina zahrnuje veličiny, které jsou definovány pomocí týchž funkcí úhlu $\zeta = \pi/2 - \varphi$, např. doplňková rychlost $\bar{u}$, fázová rychlost v_f a normalizovaná vlnová délka $\nu_0\lambda$. Tyto veličiny budeme nazývat *de Broglieho veličinami.* Je zajímavé, že mezi Einsteinovými a de Broglieho veličinami existuje symetrie daná vztahem mezi úhly ζ a φ a vlastnostmi goniometrických funkcí. Dosadíme-li Einsteinovy veličiny do vztahu mezi příslušnými de Broglieho veličinami, změní se na vztah mezi odpovídajícími Einsteinovými veličinami a naopak. Vzájemnou korespondenci Einsteinových a de Broglieho veličin přehledně shrnuje následující tabulka

Einsteinova veličina	odpovídající	*de Broglieho veličina*
rychlost u	$\longleftrightarrow$	doplňková rychlost $\bar{u}$
x-ová složka čtyřrychlosti U_x	$\longleftrightarrow$	normalizovaná vlnová délka $\lambda\nu_0$
t-složka čtyřrychlosti U_t	$\longleftrightarrow$	fázová rychlost v_f

Nahradíme-li např. ve vztahu mezi fázovou rychlostí a vlnovou délkou (26) fázovou rychlost a normalizovanou vlnovou délku příslušnými Eisteinovými veličinami, tj. U_t a U_x, dostaneme až na znaménko čtverec čtyřrychlosti (13). Jak již bylo řečeno, přechod od Einsteinových veličin k de Broglieho je formálně provázen záměnou úhlu φ za ζ a naopak. Ve vztazích mezi goniometrickými funkcemi a úhly se tak promítá hlubší fyzikální podstata těchto souvislostí, která nachází nejelegantnější vyjádření v používání čtyřvektorů.

Einsteinovy a de Broglieho veličiny je možno znázornit graficky pomocí jednoduchého grafu na obr. 5, který je vlastně speciálním případem Loedelova diagramu. Obsahuje dvě rovnoběžky, jejichž vzdálenost reprezentuje rychlost světla c, a úsečky OE, OC svírající s kolmicí na obě rovnoběžky OD úhly φ a ϑ. Velikost úsečky DE odpovídá hodnotě $c\operatorname{tg}\varphi$ a podle (8) x-ové složce čtyřrychlosti U_x, podobně OE v souladu s (9) reprezentuje U_t. Pro de Broglieho veličiny potom platí $\bar{u} \mapsto GF$, $\nu_0\lambda \mapsto CD$, $v_\mathrm{f} \mapsto OC$. Pro dvě konkrétní hodnoty $\varphi = 30°$ a $60°$ jsou Einsteinovy a de Broglieho veličiny shrnuty v tabulce 1.

Na obr. (5) lze snadno demonstrovat chování relativistických veličin při změně rychlosti částice. Jak plyne z definice parametru φ (viz (1)), zvýšení rychlosti u znamená zvětšení úhlu φ a naopak zmenšení ζ.



Obrázek 5: Einsteinovy a de Broglieho veličiny

veličina	goniom. tvar	úsečka	hodnota pro $\varphi = 30°$	$\varphi = 60°$
rychlost $u = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$	$c \sin\varphi \equiv c\cos\zeta$	AB	$\dfrac{1}{2}\,c$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,c$
x-složka čtyřrychlosti $U_x = u\gamma$	$c \operatorname{tg}\varphi \equiv c \operatorname{cotg}\zeta$	DE	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}\,c$	$\sqrt{3}\,c$
t-složka čtyřrychlosti $U_t = c\gamma$	$c \sec\varphi \equiv c \operatorname{cosec}\zeta$	OE	$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\,c$	$2\,c$
doplň. rychlost $\bar{u} = c\gamma^{-1}$	$c\cos\varphi \equiv c\sin\zeta$	GF	$\dfrac{3}{2}\,c$	$\dfrac{1}{2}\,c$
kinetická energie/(m_0c): $E_{\mathrm{kin}} = c\,(\gamma - 1)$	$c\left(\dfrac{1}{\cos\varphi} - 1\right) \equiv c\left(\dfrac{1}{\sin\xi} - 1\right)$	BE	$\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3} - 1\right)\,c$	c
norm. de Brogl. vln. délka $\lambda\nu_0 = \dfrac{c^2}{u\gamma}$	$c \operatorname{cotg}\varphi \equiv c \operatorname{tg}\zeta$	CD	$\sqrt{3}\,c$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}\,c$
de Brogl. fázová rychlost $v_{\mathrm{f}} = \dfrac{c^2}{u}$	$c \operatorname{cosec}\varphi \equiv c\sec\zeta$	OC	$2\,c$	$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\,c$

Tabulka 1: Relativistické a de Broglieho veličiny ($\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$)

Z grafického znázornění můžeme dále odvodit některé důležité vztahy mezi Einsteinovými a de Broglieho i bez použití goniometrických rovnic a vzorců. Např. ze shodnosti trojúhelníků ABO a GOF pouhým použitím Pythagorovy věty vychází $u^2 + \bar{u}^2 = c^2$, z podobnosti trojúhelníků ABO a DOC odvodíme, že $v_f u = c^2$ apod. Oba výsledky snadno ověříme pomocí jejich definic a goniometrických vzorců v tabulce 1.

Goniometrické vyjádření Einsteinových a de Broglieho veličin dokládá na těsné spojení mezi fyzikou a geometrií. Vidíme, že s pozoruhodnou lehkostí lze odvodit řadu relativistických vztahů na základě goniometrických vzorců, jež jsou standardní součástí středoškolské matematiky a běžných matematických příruček. Spolu s názorným grafickým vyjádřením prostřednictvím Loedelových, popř. Brehmových diagramů představuje tato koncepce rovnocennou alternativu dnes již téměř "klasické" Minkowského prostoročasové reprezentace, která se používá ve výuce STR nejčastěji. Tradiční Minkowského pojetí je přinejmenším z historického hlediska neodmyslitelnou součástí výkladu a lépe vyhovuje matematickému aparátu diferenciální geometrie i přechodu k obecné teorii relativity. Na druhé straně využití elementárních goniometrických funkcí je podle našeho názoru ideálním prostředkem k usnadnění mnoha výpočtů a především zpřístupnění speciální teorie relativity zájemcům odkázaným pouze na aparát středoškolské matematiky.

Kromě pedagogických aspektů připomeňme, že goniometrický tvar Lorentzových transformací a vztahů mezi veličinami charakterizujícími de Broglieho fázové vlny má také jistý teoretický význam. Poodhaluje vztah transformací pojmům neeuklidovské geometrie, tzv. *gudermaniánu* a *Lobačevského úhlu rovnoběžnosti*. Stručně je o této problematice pojednáno v dodatku 7.

6 Vyjádření Lorentzových transformací pomocí binárních čísel

Je jistě možné uvádět argumenty a je možné kriticky zkoumat názory. Avšak mimo oblast elementárních partií matematiky není naše argumentace nikdy nevyvratitelná a úplná. Musíme vždy zvažovat důvody, musíme pokaždé rozhodovat, které z nich mají větší váhu... Tvorba vlastního názoru tak posléze vždy zahrnuje prvek svobodného rozhodnutí. A právě ono svobodné rozhodování činí nějaký názor lidsky cenným.
Karl Raimund Popper (1902-1994)

Nyní věnujme pozornost ještě jedné, algebraicky zcela odlišné možnosti vyjádření Lorentzových transformací. V matematice se poměrně často setkáváme s tzv. dvousložkovými čísly. Mohou být zapsána ve tvaru $Z = a + \varepsilon b$, kde ε je "imaginární jednotka". Z algebraického hlediska tvoří dvousložková čísla okruh (vzhledem ke sčítání a násobení). Požadujeme proto, aby součin dvou dvousložkových čísel čísel $Z_1 = a + \varepsilon b$ a $Z_2 = c + \varepsilon d$, pro který vychází

$$Z_1 Z_2 = (a + \varepsilon b)(c + \varepsilon d) = ac + \varepsilon(ad + bc) + \varepsilon^2 bd,$$

také patřil do okruhu. Nutně tedy musí platit

$$\varepsilon^2 = \beta + \varepsilon\gamma, \qquad \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Pro komplexní čísla zřejmě $\beta = -1$ a $\gamma = 0$. Kromě komplexních čísel existují i jiné dvousložkové systémy tvořící komutativní okruh, zvané binární nebo duální čísla [9]. Je známo, že rotace vektoru r o složkách x a y o úhel ϑ může být vyjádřena jako transformace v Gaussově rovině komplexních čísel $Z' = AZ$, kde $Z = x + \mathrm{i}y$ a $A = \exp(\mathrm{i}\vartheta)$. Ukážeme, že speciální Lorentzovy a Galileiho transformace mohou být vyjádřeny v okruhu *binárních* a *duálních* čísel.

Důležitý matematický teorém říká, že jakékoliv dvousložkové číslo $Z = a + \varepsilon\, b,\ a, b \in \mathbb{R}, \varepsilon^2 = \beta + \varepsilon\gamma,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$ může být převedeno na jeden z následujících tří typů:

(i) komplexní čísla, $Z_c = a + \varepsilon b,\ a, b \in \mathbb{R}$, kde $\varepsilon^2 = \mathrm{i}^2 = -1$;

(ii) binární čísla[12], $Z_b = a + \varepsilon b,\ a, b \in \mathbb{R}$, kde $\varepsilon^2 = \lambda^2 = 1$;

(iii) duální čísla, $Z_b = a + \varepsilon b,\ a, b \in \mathbb{R}$, kde $\varepsilon^2 = \mu^2 = 0$.

Rozhodujícím kritériem je přitom znaménko výrazu $Q = (\beta + \gamma^2/4)$. Jestliže je Q záporné, kladné nebo nulové, dostaneme komplexní, binární nebo duální čísla.

Obvyklé operace s komplexními čísly, jako je absolutní hodnota, goniometrický tvar, Eulerův vzorec, mají svou obdobu i v ostatních dvousložkových číselných systémech. Pro číslo $Z = a + \varepsilon b$ patřící k některému z těchto tří číselných systémů definujeme číslo sdružené $\bar{Z} = a - \varepsilon b$. Absolutní hodnota Z může být zavedena jako

$$|Z| = \sqrt{|Z\,\bar{Z}|},$$

a konečně "goniometrický tvar" Z jako

$$Z = |Z| \left(\frac{a}{|Z|} + \varepsilon\, \frac{b}{|Z|} \right) = |Z| \exp(\varepsilon\varphi),\ \varphi = \varphi\left(\frac{a}{b}\right).$$

druh čísel	goniometrický tvar	pro
komplexní čísla	$\lvert Z_c\rvert e^{\mathrm{i}\varphi}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}(b/a)$	$a > 0$
$Z_c = a + \mathrm{i}b$	$-\lvert Z_c\rvert e^{\mathrm{i}\varphi}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}(b/a)$	$a < 0$
$\lvert Z_c\rvert = \sqrt{\lvert a^2 + b^2\rvert}$	$\lvert Z_c\rvert e^{\mathrm{i}\varphi}, \quad \varphi = \operatorname{sgn}(b)\pi/2$	$a = 0$
binární čísla	$\lvert Z_b\rvert e^{\lambda\xi}, \quad \xi = \operatorname{argtgh}(b/a)$	$a^2 > b^2,\ a > 0$
$Z_b = a + \lambda b$	$-\lvert Z_b\rvert e^{\lambda\xi}, \quad \xi = \operatorname{argtgh}(b/a)$	$a^2 > b^2,\ a < 0$
$\lvert Z_b\rvert = \sqrt{\lvert a^2 - b^2\rvert}$	ξ není definováno	$a = b$
duální čísla	$\lvert Z_d\rvert e^{\mu\alpha}, \quad \alpha = b/a$	$a > 0$
$Z_d = a + \mu b$	$-\lvert Z_d\rvert e^{\mu\alpha}, \quad \alpha = b/a$	$a < 0$
$Z_d = \sqrt{\lvert a^2\rvert}$	α není definováno	$a = 0$

Tabulka 2: Srovnání dvousložkových číselných systémů

Důležité vlastnosti jednotlivých číselných systémů jsou shrnuty v tabulce 2.

Eulerovy a Moivrovy vzorce pro komplexní, binární a duální čísla mají postupně tvar

$$\exp(\mathrm{i}\varphi) = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi, \qquad \exp(\mathrm{i}n\varphi) = (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^n, \tag{28}$$

$$\exp(\lambda\xi) = \cosh\xi + \lambda\sinh\xi, \qquad \exp(\lambda n\xi) = (\cosh\xi + \lambda\sinh\xi)^n, \tag{29}$$

$$\exp(\mu\alpha) = 1 + \mu\alpha, \qquad \exp(\mu n\alpha) = 1 + n\mu\alpha, \tag{30}$$

a snadno z nich odvodíme následující identity

$$\sin\varphi = \frac{\exp(\mathrm{i}\varphi) - \exp(\mathrm{i}\varphi)}{2\mathrm{i}}, \qquad \cos\varphi = \frac{\exp(\mathrm{i}\varphi) + \exp(\mathrm{i}\varphi)}{2}, \tag{31}$$

$$\sinh\xi = \frac{\exp(\lambda\xi) - \exp(\lambda\xi)}{2\lambda}, \qquad \cosh\xi = \frac{\exp(\lambda\xi) + \exp(\lambda\xi)}{2}, \tag{32}$$

$$\alpha = \frac{\exp(\mu\alpha) - \exp(\mu\alpha)}{2\mu}, \qquad 1 = \frac{\exp(\mu\alpha) + \exp(\mu\alpha)}{2}. \tag{33}$$

$$\tag{34}$$

Pomocí komplexních čísel bývají často popsána tzv. *konformní zobrazení* v euklidovské rovině[13]. Z našeho hlediska jsou nejzajímavější rotace, jež pro vektor r s kartézskými složkami x, y můžeme zapsat ve tvaru

$$Z'_c = A_c Z_c, \quad x + \mathrm{i}y, \quad A_c = \exp(\mathrm{i}\varphi) \tag{35}$$

nebo pomocí složek

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi + y\sin\varphi, \\ y' &= -x\sin\varphi + y\cos\varphi; \end{aligned}$$

výraz $Z_c\overline{Z_c} = x^2 + y^2 = Z'_c\overline{Z'_c} = x'^2 + y'^2$ se přitom nemění. Analogicky při transformacích

$$Z'_b = A_b Z_b, \quad A_b = \exp(\lambda\xi) \tag{36}$$

binárního čísla $Z_b = a + \lambda b$ o složkách a, b se nemění výraz $Z_b\overline{Z_b} = a^2 - b^2 = Z'_b\overline{Z'_b} = a'^2 - b'^2$. Z (29) odvodíme vztah pro transformaci složek

$$\begin{aligned} a' &= a\cosh\xi + b\sinh\xi, \\ b' &= a\sinh\xi + b\cosh\xi. \end{aligned}$$

Konečně u duálních čísel $Z_d = f + \mu g$ transformace

$$Z'_d = A_d Z_d, \quad A_d = \exp(\mu\alpha) \tag{37}$$

[12] V literatuře se setkáme také s označením "perplexní", popř. "hyperbolická" čísla.

[13] Jako konformní označujeme taková zobrazení (v našem případě v rovině), která "zachovávají tvar", např. posunutí, otočení kolem zvoleného bodu, stejnolehlost, kruhová inverze; podrobněji viz [24].

nebo s využitím (30) také

$$f' = f, \qquad g' = g + \alpha f$$

zachovává součin $Z_d\overline{Z_d} = f^2 = Z'_d\overline{Z'_d} = f'^2$. Transformace (35), (36) a (37) tvoří na příslušných číselných množinách komutativní (Abelovy) grupy s parametry $\varphi,\ \xi,\ \alpha$.

Komplexních čísla nacházejí uplatnění v matematickém vyjádření mnoha přírodních zákonů. Nabízí se otázka, zda mohou být v některých případech užity i zbývající dvousložkové číselné systémy. Uvidíme, že může být zodpovězena kladně, neboť prostoročasové transformace mohou být geometricky interpretovány jako speciální transformace složek dvousložkových číselných systémů; např. binární čísla lze využít pro popis otočení a tzv. "boost"[14] v Minkowského prostoročase [20].

Za tímto účelem se pokusíme dát jednotlivým složkám popsaných číselných systémů konkrétní fyzikální interpretaci. Začněme s transformací v okruhu binárních čísel. Jestliže v binárním čísle $Z = \alpha + \lambda b$ položíme $a = ct$ a $b = x$ a dále analogicky s (1) zavedeme $\xi = \mathrm{arctgh}(v/c)$, potom zobrazení $Z'_b = \exp(\lambda\xi)Z_b$ reprezentuje Lorentzovu transformace (2), neboli

$$\begin{aligned} x' &= x\cosh\xi + ct\sinh\xi, \\ ct' &= x\sinh\xi + ct\cosh\xi. \end{aligned} \tag{38}$$

Transformace (38) může být také napsána ve tvaru součinu dvou binárních čísel $A_b = V_b(|V_b|)^{-1}$, kde $V_b = 1 + \lambda v/c$ a $Z = ct + \lambda\, x$, kde c je rychlost světla a v je relativní rychlost dvou referenčních soustav

$$Z'_b = A_b Z_b = \left[\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} + \lambda\,\frac{\dfrac{v}{c}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\right] \times [ct + \lambda\, x]\,. \tag{39}$$

Separace reálného a nereálného členu v rovnici (39) vede opět k Lorentzově transformaci (38).

Protože složení zobrazení

$$A_b^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v_1^2}{c^2}}} + \lambda\,\frac{\dfrac{v_1}{c}}{\sqrt{1-\dfrac{v_1^2}{c^2}}}$$

a

$$A_b^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v_2^2}{c^2}}} + \lambda\,\frac{\dfrac{v_2}{c}}{\sqrt{1-\dfrac{v_2^2}{c^2}}}$$

odpovídajících rychlostem v_1 a v_2 je ekvivalentní výslednému zobrazení

$$A_b^{(12)} = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v_{12}^2}{c^2}}} + \lambda\,\frac{\dfrac{v_{12}}{c}}{\sqrt{1-\dfrac{v_{12}^2}{c^2}}},$$

platí rovnice

$$\left[\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v_2^2}{c^2}}} + \lambda\,\frac{\dfrac{v_2}{c}}{\sqrt{1-\dfrac{v_2^2}{c^2}}}\right] \times \left[\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v_1^2}{c^2}}} + \lambda\,\frac{\dfrac{v_1}{c}}{\sqrt{1-\dfrac{v_1^2}{c^2}}}\right] = \left[\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v_{12}^2}{c^2}}} + \lambda\,\frac{\dfrac{v_{12}}{c}}{\sqrt{1-\dfrac{v_{12}^2}{c^2}}}\right],$$

z níž lze jednoduše odvodit známý relativistický vzorec (17) pro skládání rychlostí stejného směru.

Ztotožníme-li v duálním čísle $Z = a + \mu b,\ a, b \in \mathbb{R}$ složky a, b se souřadnicemi $a = ct$, $b = x$ a zavedeme $A_d = \exp(\mu\alpha) = 1 + \mu\, v/c$, kde $\alpha = v/c$, pak okamžitě obdržíme Galileovu transformaci

$$x' = x + vt, \qquad\qquad t' = t,$$

která nechává výraz nezměněný výraz $Z_d\overline{Z_d} = c^2t^2$. Tato transformace může být také napsána ve tvaru součinu dvou duálních čísel $A_d = V_d(|V_d|)^{-1}$, kde $V_d = 1 + \mu v/c$ a $Z_d = ct + \mu x$,; potom $Z'_d = A_d Z_d = [(1 + \mu v/c)] \times (ct + \mu x)$. Stejně jako v předcházejícím případě i zde můžeme snadno odvodit galileovský zákon skládání rychlostí

$$v_{12} = v_1 + v_2$$

[14]Tímto termínem se v anglicky psané literatuře označují transformace lorentzovského typu.

postupným aplikováním transformací

$$A_d^{(1)} = 1 + \lambda\,\frac{v_1}{c} \qquad \text{a} \qquad A_d^{(2)} = 1 + \lambda\,\frac{v_2}{c},$$

jež dává výsledek

$$\left(1 + \lambda\,\frac{v_1}{c}\right) \times \left(1 + \lambda\,\frac{v_2}{c}\right) = 1 + \lambda\,\left(\frac{v_1}{c} + \frac{v_2}{c}\right) = 1 + \lambda\,\frac{v_{12}}{c}.$$

Pro zajímavost uveďme, že pracujeme-li s duálními čísly, můžeme v rovnici (33) parametr α nahradit proměnnou x a vyjádřit x i číslo 1 jako kombinaci exponenciálních funkcí. Díky tomu lze obecně funkci typu $F(x) = P_1(x)P_2\,[\exp(x)]$, kde P_1 i P_2 představují určité polynomy, zapsat ve tvaru sumy

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} E_i(x), \quad E_i = \frac{\exp(a + \mu b)x}{c + \mu d},\ i = 1, \dots, n, a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Tento rozklad umožňuje počítat derivaci a integraci funkce $F(x)$ jako sumu exponenciálních funkcí [17], což bývá mnohdy výhodné.

Předcházející výsledky lze shrnout do několika bodů:

(i) Limitní přechod od Lorentzovy ke Galileiho transformaci se v množině všech dvousložkových čísel $a + \varepsilon\, b$, kde $\varepsilon^2 \in \langle 0; 1\rangle$ projeví přechodem od podmnožiny binárních čísel k podmnožině duálních čísel.

(ii) Uvedené okruhy komplexních, binárních i duálních čísel jsou z algebraického hlediska *komutativními tělesy*. Grupové vlastnosti vzhledem k násobení dvousložkových čísel se automaticky přenáší i na skládání příslušných prostoročasových transformací.

(iii) Je zajímavé, že lorentzovské transformace typu $Z'_c = A_c Z_c$, kde $Z_c = x + \mathrm{i}ct$, $A_c = \exp\,[\mathrm{i}\,\mathrm{arctg}\,(v/c)]$ neexistují v množině komplexních čísel. Ačkoli by měly mnoho zajímavých teoretických vlastností, jsou vyřazeny kvůli fyzikálním experimentům.

(vi) Odpovídající Cauchy-Riemanovy rovnice, které představují nutné a postačující podmínky pro to, aby funkce $f(Z = x + \varepsilon y) = u(x, y) + \varepsilon\, v(x, y)$ definovaná na množině dvousložkových čísel byla analytická, mají tvar

$$u_x = v_y - \chi v_x, \qquad u_y = \eta v_x;$$

u i v navíc vyhovují parciální diferenciální rovnici

$$y_{yy} - \chi u_{xy} - \eta u_{xx} = 0.$$

Jestliže $\chi = 0, \eta > 0$ a $y = ct$, pak tato rovnice představuje klasickou vlnovou rovnici s rychlostí šíření vlny $c = 1/\sqrt{\eta}$. Pro $\chi = 0$ a $\beta = -1$ dostáváme dvourozměrnou Laplaceovu rovnici.

Pro kompletní formulaci fyzikálních zákonů ve čtyřrozměrném prostoročase[15] je nutné rozšířit dvousložková algebraická čísla na čtyřsložková, tzv. *kvaternióny* [14]. V literatuře najdeme celou řadu příkladů, kdy byly kvaternióny úspěšně použity pro matematickou formulaci fyzikálních zákonů [1], konkrétně pomocí tzv. *Minkowského kvaterniónů* lze vyjádřit celý matematický aparát speciální relativity v kompaktní a elegantní formě (viz např. [25]).

7 Závěr

Naším cílem bylo zmínit se o alternativních možnostech vyjádření Lorentzových transformací, které nejsou příliš známé a s nimiž se ve většině učebnic speciální teorie relativity vůbec nesetkáváme. Přestože jak historickému hledisku, tak formalismu diferenciální geometrie, který je vlastní obecné teorii relativity, lépe odpovídá tradiční přístup Minkowského, jiný úhel pohledu napomáhá hlubšímu pochopení vzájemných souvislostí a zejména pro středoškolské studenty může být i v jistém smyslu přitažlivější. Ve spojení s adekvátním grafickým znázorněním pomocí prostoročasových diagramů tak goniometrický tvar Lorentzových transformací může být vítaným doplňkem výkladu STR.

Používání vícesložkových číselných systémů pak zdaleka nejvýstižněji postihuje algebraickou strukturu transformací prostoročasu, konkrétně grupové vlastnosti. I když jde nepochybně o nadstavbu nad úvodními kurzy STR, hledání různých reprezentací číselných grup spolu s jejich fyzikální interpretací přispívá k utváření jednotícího pohledu na zdánlivě nesouvisející oblasti fyziky a kvalitativně lepšímu chápání jejich vzájemných vztahů. V tomto smyslu jak goniometrický tvar, tak vyjádření pomocí binárních čísel představují dvě různé reprezentace grupy speciálních Lorentzových transformací.

[15] Připomeňme, že obecné Lorentzovy transformace netvoří grupu a jejich skládání není komutativní.

Poděkování

Autoři jsou zavázáni Mgr. Jitce Lebišové za pomoc při přepisování textu a Prof. RNDr. Janu Novotnému, CSc. za jeho přečtení i cenné připomínky.

Dodatek: Jiné odvození goniometrického tvaru Lorentzových transformací

Uveďme ještě jeden způsob, jakým lze dojít ke goniometrickému tvaru Lorentzových transformací (5), resp. (7). Vychází se ze dvou veličin užívaných v analytické geometrii, jmenovitě z tzv. *hyperbolické amplitudy*, nazývané též *gudermanián* $\mathrm{gd}(\psi)$ a tzv. *Lobačevského úhlu rovnoběžnosti* $\Pi(\psi)$. Prostřednictvím těchto veličin mohou být hyperbolické funkce převáděny na goniometrické funkce téhož argumentu a obráceně, např.

$$\begin{aligned}\cosh\psi = [\cos \mathrm{gd}(\psi)]^{-1} = \sec \mathrm{gd}(\psi) = [\sin \Pi(\psi)]^{-1} = \operatorname{cosec}\Pi(\psi),\\ \sinh\psi = \operatorname{tg}\mathrm{gd}(\psi) = \operatorname{cotg}\Pi(\psi)\\ \operatorname{tgh}\psi = \sin\mathrm{gd}(\psi) = \cos\Pi(\psi).\end{aligned} \tag{40}$$

Gudermanián a Lobačevského úhel rovnoběžnosti jsou definovány vztahy [7]

$$\mathrm{gd}(\psi) = \int_0^\psi \frac{\mathrm{d}\tau}{\cosh\tau} = 2\operatorname{arctg} e^\psi - \frac{\pi}{2}, \qquad \Pi(\psi) = 2\operatorname{arccotg} e^\psi = 2\operatorname{arctg} e^{-\psi}. \tag{41}$$

Dosadíme-li uvedené vztahy do Lorentzových transformací (2), dostaneme přímo rovnice (5)

$$x' = x\sec\mathrm{gd}(\psi) - ct\operatorname{tg}\mathrm{gd}(\psi), \tag{42}$$
$$ct' = -x\operatorname{tg}\mathrm{gd}(\psi) + ct\sec\mathrm{gd}(\psi) \tag{43}$$
$$\tag{44}$$

nebo (7)

$$x' = x\operatorname{cosec}\Pi(\psi) - ct\operatorname{cotg}\Pi(\psi), \tag{45}$$
$$ct' = -x\operatorname{cotg}\Pi(\psi) + \operatorname{cosec}\Pi(\psi). \tag{46}$$
$$\tag{47}$$

Poznamenejme, že úhly $\varphi = \mathrm{gd}(\psi)$ a $\zeta = \Pi(\psi)$ nejsou úhly rotace v rovině x-ct. Výsledný úhel, odpovídající složení dvou Lorentzových transformací, není roven součtu úhlu charakterizujících skládané transformace, tj. $\varphi_{12} \neq \varphi_1 + \varphi_2$, $\zeta_{12} \neq \zeta_1 + \zeta_2$. Platí však $\varphi_{12} = \mathrm{gd}(\psi_1 + \psi_2)$ a $\zeta_{12} = \Pi(\psi_1 + \psi_2)$. Relativistickému zákonu skládání rychlostí zde odpovídá relace známá z Lobačevského geometrie

$$\cos\Pi(\psi_1+\psi_2) = \frac{\cos\Pi(\psi_1) + \cos\Pi(\psi_2)}{1 + \cos\Pi(\psi_1)\cos\Pi(\psi_2)}.$$

Skutečnost, že při parametrizaci Lorentzových transformací se velmi dobře uplatní pojmy Lobačevského geometrie podtrhuje neeuklidovský (přesněji řečeno pseudoeuklidovský) charakter geometrie Minkowského prostoročasu. Pro zajímavost vyjádřeme na závěr rotaci prostorových souřadných os x, y o úhel ϑ kolem osy z

$$x' = x\cos\vartheta + y\sin\vartheta,$$
$$y' = -x\sin\vartheta + y\cos\vartheta \tag{48}$$
$$\tag{49}$$

pomocí hyperbolických funkcí. V souladu s (40) lze (49) vyjádřit ve tvaru

$$x' = x\operatorname{sech}\psi + y\operatorname{tgh}\psi,$$
$$y' = -x\operatorname{tgh}\psi + y\operatorname{sech}\psi,$$

kde pro úhel ψ platí $\mathrm{gd}(\psi) = \vartheta$ a podle (41) vychází

$$\psi = \ln\left\{\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}\left(\mathrm{gd}(\psi) + \frac{\pi}{2}\right)\right]\right\} = \ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\vartheta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Položíme-li $\sinh\psi = v/c$, získají transformace (49) podobu

$$x' = x\,\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{v^2}{c^2}}} + y\,\frac{\dfrac{v}{c}}{\sqrt{1+\dfrac{v^2}{c^2}}}, \qquad y' = -\,x\,\frac{\dfrac{v}{c}}{\sqrt{1+\dfrac{v^2}{c^2}}} + y\,\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{v^2}{c^2}}}.$$

Snadno zjistíme, že při transformacích tohoto typu zůstává výraz $x^2 + y^2$ invariantní.

Literatura

[1] Anderson R., Ioshi G.: *Physics Essays* **6** (1993), 308.

[2] Balibarová F.: *Einstein radost z myšlení*, Slovart 1995.

[3] Bartuška K.: *Kapitoly za speciální teorie relativity*, SPN, Praha 1991.

[4] Born M.: *Physik im Wandel meiner Zeit*, Vieveg Berlin 1957.

[5] Brehme R.W.: *Am. J. Phys.* **30** (1962), 489.

[6] Einstein A., Infeld L.: *Fyzika jako dobrodružství poznání*, Orbis, Praha 1958.

[7] Gradstein I.S., Ryzhik I.N.: *Tablici integralov, summ, rjadov i proizvedenii*, Nauka, Moskva 1974.

[8] Chromý Z.: *Abeceda moudrosti*, Proxima, Brno 1993.

[9] Kantor I.L., Solodownikow V.N.: *Hyperkomplexe Zahlen*, Leipzig 1978.

[10] Kuhn T.S.: *The Structure of Scientific Revolutions*, University Press Chicago 1970 (slovenský překlad: Kuhn T.S.: *Štruktúra vedeckých revolúcií*, Pravda, Bratislava 1982).

[11] Kuzněcov B.G.: *Einstein (život, smrt, nesmrtelnost)*, SPN, Praha 1986.

[12] Laue M. von: *Dějiny fyziky*, Orbis, Praha 1959.

[13] Loedel E.: *Abberacion y Relatividad*, Annales de la Sociedad Cientifica Argentina **145** (1948), 3.

[14] Madelung E.: *Die mathematische Hilfsmittel des Physikers.* Springer, Berlin 1953.

[15] Majerník V.: *Am. J. Phys.* **54** (1986), 536.

[16] Majerník V.: *Acta Physica Polonica* **A 86** (1994), 291.

[17] Majerník V.: *Acta Physica Polonica* **A 90** (1996), 491.

[18] Malíšek V.: *Co víte o dějinách fyziky*, Horizont, Praha 1986.

[19] Misner Ch.W., Thorne K.S., Wheeler J.A.: *Gravitation*, W.H. Freeman & Co., San Francisco 1973.

[20] Motter E., Rosa M.A.F: *From Perplex Number to Perplex Calculus*, Preprint 41/95 of Institute de Matematica, Universidade Estudial de Campinas, Brasil 1995, 1.

[21] Popper K.R.: *Život je řešení problémů*, Mladá fronta, Praha 1997.

[22] Rekveld J.: *Am. J. Phys.* **37** (1969), 716.

[23] Sartori L.: *Understanding Relativity*, University of California Press, Berkeley 1996.

[24] Šulista M.: *Základy analýzy v komlexním oboru*, SNTL, Praha 1981.

[25] Synge J.L.: *Quaternions, Lorentz Transformation and Conway-Dirac-Eddington Matrices*, Dublin Institute for Advanced Studies, Dublin 1972.

[26] Votruba V.: *Základy speciální teorie relativity*, Academia, Praha 1969.

[27] Weinberg S.: *Snění o finální teorii.* Hynek, Praha 1996.