Úlohy k semináři z matematiky

1. semestr magisterského oboru Nanotechnologie, 3×3 hodiny

1. Lineární algebra

1.1 Rozhodněte, zda vektory

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

jsou lineárně závislé.

1.2 Ukažte, že vektory

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

mohou být bází vektorového prostoru a vyjádřete vektor $\boldsymbol{v} = (4{,}1)$ v této bázi [4].

1.3 Je dána matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & a. \end{pmatrix}.$$

Rozhodněte, pro která a má hodnost $h = 3$ a pro která $h = 2$ [4].

1.4 Určete, které z pěti vektorů

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_5 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

jsou lineárně nezávislé [4].

1.5 Vypočtěte součiny matic $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$, je-li dáno [4]

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 7 \\ -2 & 9 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

1.6 Pomocí matice řešte soustavy rovnic [4]

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 4z &= 8, \\ 3x + 5y - z &= 10, \\ 7x - y + 7z &= 15; \end{aligned} \qquad \text{a} \qquad \begin{aligned} x + 2y - 3z &= 5, \\ 3x - 4y + 5z &= 6. \end{aligned}$$

1.7 Ukažte, že determinant matice $\boldsymbol{A}$ je stejný jako determinant matice $\boldsymbol{A}^T$, je-li [4]

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -6 & 5 & 4 \\ 7 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

1.8 Vypočtěte determinant [4]

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -7 & 6 & 0 \\ -8 & 0 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

1.9 Pomocí determinantů řešte soustavy rovnic [4]

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 4, \\ 5x + 7y &= -9, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 &= 0, \\ -6x_1 + 7x_2 - 8x_3 &= 0. \end{aligned}$$

1.10 Vypočtěte inverzní matici $\boldsymbol{A}^{-1}$ k matici [4]

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & -4 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.11 Najděte vlastní hodnoty a vlastní vektory matice [4]

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}.$$

1.12 Pomocí vlastních vektorů převeďte matici

$$M = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

na diagonální tvar a převeďte rovnici elipsy $5x^2 - 4xy + 2y^2 = 30$ [1] do soustavy jejích os.

1.13 V rovnoběžníku $ABCD$ je bod E středem strany BC a bod F je středem strany DC. Spojnice AF a AE protínají úhlopříčku BD po řadě v bodech M a N. Vypočtěte, jakou částí úhlopříčky BD je úsečka BN [4].

1.14 Vektor $\boldsymbol{u} = \overline{AB}$ je určen body $A = [1, -2{,}3]$, $B = [4{,}6, -8]$. Vypočtěte směrové kosiny a směrové úhly vzhledem k souřadnicovým osám [4].

1.1 Domácí cvičení

D1.1 Najděte vektor $\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$, je-li dáno [4]

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 13 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

[$\boldsymbol{x} = (8, -11, -41{,}6)$]

D1.2 Rozhodněte, zda vektory

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -8 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

jsou lineárně závislé [4].
[ano]

D1.3 Dokažte, že vektor $\boldsymbol{d}$ je lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, je-li dáno

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 23 \\ -19 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

jsou lineárně závislé [4].

D1.4 Určete hodnost matic [4]

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & -8 & 0 \\ 3 & 7 & -2 & -1 & 5 \\ 10 & 22 & 8 & -18 & 10. \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \\ 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}.$$

[$h(\boldsymbol{A}) = 2$, $h(\boldsymbol{B}) = 3$]

D1.5 Výpočtem ukažte, že pro

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

platí $\boldsymbol{A}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$ [4].

D1.6 Vypočtěte $\boldsymbol{A}^2$ a $\boldsymbol{A}^3$, pro matici [4]

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left[\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 16 \\ -8 & -7 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}^3 = \begin{pmatrix} -29 & 20 \\ -10 & -39 \end{pmatrix}\right]$$

D1.7 Pomocí matice řešte soustavu rovnic [4]

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 12. \end{aligned}$$

$[x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = 5]$

D1.8 Vypočtěte determinanty [4]

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}.$$

$\left[3abc - a^3 - b^3 - c^2,\ (y-x)(z-x)(z-y)\right]$

D1.9 Pomocí determinantů řešte soustavu rovnic [4]

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= -4, \\ 5x + 6y - 7z &= 3, \\ -3x + 5y - 9z &= -1. \end{aligned}$$

$[x = -71/22,\ y = 286/22 = 13,\ z = 185/22]$

D1.10 Vypočtěte inverzní matici $\boldsymbol{A}^{-1}$ k matici [4]

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$\left[\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -3/5 & 2/5 \\ 4/5 & -1/5 \end{pmatrix}\right]$

D1.11 Najděte vlastní hodnoty a vlastní vektory matice [4]

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$[\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 6,\ \boldsymbol{u}_1 = (1{,}0,-1),\ \boldsymbol{u}_2 = (1{,}1{,}1),\ \boldsymbol{u}_3 = (1,-2{,}1)]$

D1.12 Je dán trojúhelník s vrcholy $A\,[4{,}1]$, $B\,[5{,}5]$ a $C\,[-4{,}7]$. Určete polohové vektory bodů A, B, C a vektory $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ a $\overline{AB}$ [4].
$\left[\boldsymbol{r}_A = 4\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y,\ \boldsymbol{r}_B = 5\boldsymbol{e}_x + 5\boldsymbol{e}_y,\ \boldsymbol{r}_C = -4\boldsymbol{e}_x + 7\boldsymbol{e}_y,\ \boldsymbol{c} = \overline{AB} = \boldsymbol{e}_x + 4\boldsymbol{e}_y,\ \boldsymbol{b} = \overline{CA} = 8\boldsymbol{e}_x - 6\boldsymbol{e}_y,\ \boldsymbol{a} = \overline{BC} = -9\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y\right]$

2. Operace s vektory, transformace souřadnic

2.1 V trojúhelníku s vrcholy $A = [1{,}2]$, $B = [3{,}5]$ a $C = \left[1 + 3\sqrt{3}, 2 - 2\sqrt{3}\right]$ vypočtěte velikost vnitřních úhlů [4].

2.2 Najděte rovnici roviny, jejíž normálová vzdálenost od počátku je d [7].

2.3 Najděte rovnici roviny procházející body $A = [-1{,}1{,}1]$, $B = [2{,}3{,}0]$ a $C = [0{,}1,-2]$ a roviny, procházející bodem $[1{,}0,-2]$ kolmo k rovině určené body A, B a C [1].

2.4 Vypočtěte obsah trojúhelníka a vrcholy $A = [7{,}3{,}4]$, $B = [1{,}0{,}6]$ a $C = [4{,}5,-2]$ [4].

2.5 Vypočtěte objem čtyřstěnu a vrcholy $A = [1,-5{,}4]$, $B = [0{,}3{,}1]$, $C = [-2,-4{,}3]$ a $D = [4{,}4,-2]$ a délku jeho výšky v_A spuštěné z bodu A na podstavu BCD [4].

2.6 Ukažte, že pro trojici vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$ platí $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\,\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}$ [4].

2.7 Najděte derivaci skalární funkce $\phi = x^2 y + xz$ v bodě $[1{,}2,-1]$ ve směru vektoru $\boldsymbol{a} = (2,-2{,}1)$ [1].

2.8 Letadlo letí severozápadním směrem rychlostí 930 km/h vzhledem k zemi a přitom fouká silný západní vítr rychlostí 120 km/h. Jakou rychlostí a jakým směrem letí letadlo, pokud by nefoukal vítr [3].

2.9 Jsou dány vektory

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Jaká je velikost průmětu součtu $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ do směru vektoru $\boldsymbol{c}$ [3]?

2.10 Na těleso působí síla $\boldsymbol{F}_1 = (10{,}2,-1)$ N v bodě $P_1 = (2{,}0{,}0)$ cm, síla $\boldsymbol{F}_2 = (0{,}0{,}5)$ N v bodě $P_2 = (1{,}3{,}0)$ cm a síla $\boldsymbol{F}_3 = (-6{,}1{,}8)$ N v bodě $P_3 = (6{,}8{,}1)$ cm. Určete velikost, souřadnice a směr výsledné síly $\boldsymbol{F}$ a výsledný moment síly vzhledem k bodu P_2 [3].

2.11 Vyčíslete výrazy [5]

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_{ij} x_i, \qquad \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij}\delta_{ji}.$$

2.12 Transformace souřadnic je popsána úhly, jež svírají nové bázové vektory s původními podle tabulky

	x_1	x_2	x_3
x'_1	135°	60°	120°
x'_2	90°	45°	45°
x'_3	45°	60°	120°

Najděte matici transformace a ukažte, že je ortogonální [8].

2.13 Najděte složky vektoru $\boldsymbol{A} = z\boldsymbol{e}_x + 2x\boldsymbol{e}_y + y\boldsymbol{e}_z$ v standardních cylindrických souřadnicích [3].

2.1 Domácí cvičení

D2.1 Nad třemi navzájem kolmými vektory $\boldsymbol{a} = \overline{OA}$, $\boldsymbol{b} = \overline{OB}$ a $\boldsymbol{c} = \overline{OC}$ je sestrojen kvádr o rozměrech $a = 3\,\mathrm{cm}$, $b = 4\,\mathrm{cm}$ a $c = 5\,\mathrm{cm}$. Vypočtěte úhel sevřený stěnovou úhlopříčkou $u_3 = OG$ a tělesovou úhlopříčkou $u = OF$ [4].
[$\varphi \approx 34°27'$]

D2.2 Vypočtěte vektorový součin vektorů $\boldsymbol{a} = 0{,}7\boldsymbol{e}_x + 9\boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_z$ a $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_x + 3\boldsymbol{e}_y - 7\boldsymbol{e}_z$ [4].
[$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -60\boldsymbol{e}_x + 3{,}9\boldsymbol{e}_y - 6{,}9\boldsymbol{e}_z$]

D2.3 Vypočtěte obsah rovnoběžníku určeného vektory $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_x - 3\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z$ a $\boldsymbol{b} = -3\boldsymbol{e}_x - 2\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z$ a úhel sevřený těmito vektory [4].
[$S = 11{,}7$, $\varphi \approx 71°12'$]

D2.4 Vypočtěte objem čtyřstěnu a vrcholy $A = [2{,}4{,}5]$, $B = [1{,}0{,}0]$, $C = [0{,}2{,}0]$ a $D = [0{,}0{,}3]$ [4].
[$V = 14/3$]

D2.5 Ukažte, že pro vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ a $\boldsymbol{d}$ platí [4]:
a) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\,\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\,\boldsymbol{a}$;
b) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d})$;
c) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})^2 = a^2b^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2$.

D2.6 Vektor $(1,a,b)$ je kolmý ke dvěma vektorům $(4{,}3{,}0)$ a $(5{,}1{,}7)$. Určete a a b [3].
[$a = -4/3$, $b = -11/21$]

D2.7 Ukažte, že platí [5]

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_{ii} = n, \qquad \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}\delta_{jk} = \delta_{ik}.$$

D2.8 Je dána souřadnicová transformace

$$x' = 5x - 2y,$$
$$y' = 3x + 2y.$$

Najděte souřadnice bodů $P = [0,-1]$ a $Q = [2{,}1]$ v čárkovaných souřadnicích a ukažte, že délka vektoru $\overline{PQ}$ je v obou soustavách stejná [5].
[$P' = [2,-2]$, $Q' = [8{,}8]$]

D2.9 Kartézskou soustavu souřadnic otočíme podle osy $x_1 = x$ o 30°. Najděte matici transformace a složky vektoru $\boldsymbol{b} = (1{,}2{,}0)$ v nové a vektoru $\boldsymbol{d} = (2{,}0,-1)$ v původní soustavě souřadnic.
$\big[a_{11} = 1$, $a_{12} = a_{13} = 0$, $a_{23} = -a_{32} = 0{,}5$, $a_{22} = a_{33} = \sqrt{3}/2$;
$\boldsymbol{b}' = (1,\sqrt{3},-1)$, $\boldsymbol{d} = (2,\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})\Big]$

D2.10 Transformace kartézských souřadnic je dána vztahy

$$x'_1 = \frac{3}{5}x_1 - \frac{4}{5}x_2,$$
$$x'_2 = x_3.$$

Doplňte třetí rovnici tak, aby bázové vektory tvořily pravotočivou soustavu [8].
[$x'_3 = -4/5x_1 - 3/5x_2$]

D2.11 Transformace kartézských souřadnic je dána vztahy

$$x'_1 = \frac{3}{5\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 + \frac{4}{5\sqrt{2}}x_3,$$
$$x'_2 = \frac{4}{5}x_1 - \frac{3}{5\sqrt{2}}x_3,$$
$$x'_3 = -\frac{3}{5\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 - \frac{4}{5\sqrt{2}}x_3.$$

Dokažte, že matice transformace je ortogonální, najděte transformaci vektoru $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3$ a přepište rovnici $x_1 - x_2 + 3x_3 = 1$ v čárkovaných souřadnicích [8].
$\left[\boldsymbol{v}' = \frac{2}{5\sqrt{2}}\boldsymbol{e}'_1 + \frac{11}{5}\boldsymbol{e}'_2 - \frac{2}{5\sqrt{2}}\boldsymbol{e}'_3, \quad \sqrt{2}x'_1 - x'_2 - 2\sqrt{2}x'_3 = 1\right]$

3. Úvod do tenzorového počtu

3.1 Dokažte, že symetrie tenzoru se při transformaci souřadnic nezmění [7].

3.2 Najděte tenzor setrvačnosti soustavy dvou hmotných bodů o souřadnicích (1,1,0) a $(-1, -1{,}0)$ a hmotnostech $m_1 = m_2 = 1\,\mathrm{kg}$. Dále určete
a) moment hybnosti, rotuje-li soustava úhlovou rychlostí $\omega = (0{,}3{,}0)$,
b) moment setrvačnosti vzhledem k ose y a ose určené vektorem $\boldsymbol{o} = (1/\sqrt{5}{,}2/\sqrt{5}{,}0)$,
c) tenzor setrvačnosti vzhledem k bodu $P = (2{,}4{,}0)$,
d) transformujte tenzor setrvačnosti nalezený v bodě a) do soustavy hlavních os setrvačnosti a určete hlavní momenty setrvačnosti.

3.3 Dokažte, že v třírozměrném prostoru platí $\sum\limits_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{kij} = 6$ [8].

3.4 Najděte metrický tenzor $g_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{3} \partial x_k/\partial q_i \partial x_k/\partial q_j$ pro sférické souřadnice $(q_1,q_2,q_3) = (r,\vartheta,\varphi)$ na základě transformačních vztahů [8]

$$x_1 = r\sin\vartheta\cos\varphi, \qquad x_2 = r\sin\vartheta\sin\varphi, \qquad x_3 = r\cos\vartheta.$$

3.5 Ukažte, že tenzor

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

lze převést na diagonální tvar transformací pomocí matice $\boldsymbol{A}$ tak, že platí $\boldsymbol{T}' = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}^T$. Zjistěte, jak se liší vlastní hodnoty a vlastní vektory matic $\boldsymbol{T}$ a $\boldsymbol{T}^2$. [8].

3.6 Je dán tenzor napětí v bodě P

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Určete vektor napětí působící na plochu procházející bodem P rovnoběžně s rovinou o rovnici $3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 12$ [8].

3.7 Je dán tenzor napětí

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & -12 & -1 \end{pmatrix}.$$

Najděte hlavní směry napětí a soustavu, v níž budou tečná napětí maximální [8].

3.8 Najděte hlavní napětí a hlavní směry napětí pro tenzor napětí [8]

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \tau & \tau & \tau \\ \tau & \tau & \tau \\ \tau & \tau & \tau \end{pmatrix}$$

.

3.9 Pro pohyb kontinua zadaný rovnicemi $y_1 = kx_2t + x_1$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3$, sestavte tenzor konečné deformace a tenzor malé deformace. Návod viz [6].

3.10 Moment setrvačnosti homogenní čtvercové zanedbatelné tloušťky o hmotnosti M a straně a umístěné v rovině xy je

$$\boldsymbol{I} = Ma^2 \begin{pmatrix} 1/3 & -1/4 & 0 \\ -1/4 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Napište rovnici elipsoidu setrvačnosti, najděte hlavní osy setrvačnosti a vypočtěte složky tenzoru $\boldsymbol{I}$ v soustavě, která bude o proti zadané pootočena o úhel $\varphi = \pi/4$ okolo osy z [2].

3.11 Pole rychlosti proudící tekutiny je popsáno rovnicemi

$$\begin{aligned} v_1 &= 0, \\ v_2 &= A\left(x_1x_2 - x_3^2\right)e^{-Bt}, \\ v_3 &= A\left(x_2^2 - x_1x_3\right)e^{-Bt}. \end{aligned}$$

Najděte tenzory rychlosti deformace a tenzor rychlosti rotace a jemu odpovídající axiální vektor víru rychlosti [8].

3.12 Vektor posunutí v látce je dán vztahem $\boldsymbol{u} = x_1^2x_2\boldsymbol{e}_1 + \left(x_2 - x_3^2\right)\boldsymbol{e}_2 + x_2^2x_3\boldsymbol{e}_3$. Najděte tenzor (malé) deformace, tenzor rotace, jemu odpovídající vektor v bodě $P = [1{,}2{,}-1]$, relativní změnu jednotkového objemu a relativní změnu jednotkového vektoru ve směru $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y)/\sqrt{2}$ [8].

3.1 Domácí cvičení

D3.1 Zapište matici odpovídající kvadratické formě $3x^2 + y^2 - z^2 - 5xy - 6yz$ [5].

$$\left[\begin{pmatrix} 3 & -5/2 & 0 \\ -5/2 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}\right]$$

D3.2 Dokažte, že matice

$$\boldsymbol{M} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 7 & -4 \\ 1 & 4 & 8 \\ 8 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

je ortogonální.

D3.3 Rozložte tenzor $\boldsymbol{T}$ o složkách

$$T_{ik} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 7 \\ -6 & 2 & -3 \\ 1 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

na symetrickou a antisymetrickou část. Lze podobný rozklad provést pro tenzor libovolného řádu?

$$\left[T_{ikS} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}, \; T_{ikAS} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ -5 & 0 & -6 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

D3.4 Je dán tenzor $\boldsymbol{T}$ o složkách

$$T_{ik} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix},$$

Jaké budou jeho složky $T_{i'k'}$ v soustavě otočené o 90° v kladném směru?

$$\left[T'_{ik} = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\right]$$

D3.5 Je dán tenzor napětí v bodě P

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Určete vektor napětí působící na plochu procházející bodem P s normálovým vektorem $\boldsymbol{n} = 2/3\boldsymbol{e}_1 - 2/3\boldsymbol{e}_2 + 1/3\boldsymbol{e}_3$ [8].
[$4\boldsymbol{e}_1 - 10/3\boldsymbol{e}_2$]

D3.6 Je dán tenzor napětí v určitém bodě

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Najděte jeho složky v soustavě určené transformační maticí [8]

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

$$\left[\tau'_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1-\sqrt{2} & -1 \\ 2 & -1 & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}\right]$$

D3.7 Je dán tenzor napětí v určitých bodech

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tau_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Najděte hlavní napětí [8].
[$\tau_{\mathrm{I}} = 2$, $\tau_{\mathrm{II}} = \tau_{\mathrm{III}} = -1$, $\qquad \tau_{\mathrm{I}} = 4$, $\tau_{\mathrm{II}} = \tau_{\mathrm{III}} = 1$]

D3.8 Pro soustavu hmotných bodů o hmotnostech $m_1 = 100\,\mathrm{g}$, $m_2 = 200\,\mathrm{g}$ a $m_3 = 150\,\mathrm{g}$ nacházejících se v bodech $(x_1,y_1,z_1) = (10,12,5)$ cm, $(x_2,y_2,z_2) = (-10,8,15)$ cm, $(x_3,y_3,z_3) = (-11,-14,12)$ cm najděte polohu hmotného středu, složky momentu setrvačnosti vzhledem k počátku souřadnic a moment setrvačnosti vzhledem k ose procházející počátkem určené vektorem $\boldsymbol{n} = (-6,8,20)$ [2].
[$x_{\mathrm{s}} = (-5{,}88,\ 1{,}56,\ 11{,}80)$ cm
$I_{xx} = 125{,}7\,\mathrm{kg\cdot cm^2}$, $I_{yy} = 117{,}2\,\mathrm{kg\cdot cm^2}$, $I_{zz} = 104{,}75\,\mathrm{kg\cdot cm^2}$,
$I_{xy} = -19{,}1\,\mathrm{kg\cdot cm^2}$, $I_{xz} = 44{,}8\,\mathrm{kg\cdot cm^2}$, $I_{yz} = -4{,}8\,\mathrm{kg\cdot cm^2}$, $I_n = 87{,}061\,\mathrm{kg\cdot cm^2}$]

D3.9 Najděte metrický tenzor $g_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \partial x_k / \partial q_i \partial x_k / \partial q_j$ pro cylindrické souřadnice $(q_1,q_2,q_3) = (r,\varphi,z)$ na základě transformačních vztahů [8]

$$x_1 = r\cos\varphi, \qquad x_2 = r\sin\varphi, \qquad x_3 = z.$$

$\left[\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\vartheta^2 + \mathrm{d}z^2\right]$

D3.10 Dokažte, že v třírozměrném prostoru platí $\sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_j a_k = 0$ [8].

D3.11 Antisymetrickému tenzoru

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -12 \\ -1 & 0 & -10 \\ 12 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

přiřaďte odpovídající axiální vektor.
[(−10,12,1)]

D3.12 Vektor posunutí v látce je dán vztahem $\boldsymbol{u} = (x_1 - x_3)^2 \boldsymbol{e}_1 + (x_2 + x_3)^2 \boldsymbol{e}_2 + x_1 x_2 \boldsymbol{e}_3$. Najděte tenzor (malé) deformace, tenzor rotace, jemu odpovídající vektor v bodě $P = [0,2,-1]$ a relativní změnu jednotkového vektoru ve směru $\boldsymbol{a} = 8/9\boldsymbol{e}_x - 1/9\boldsymbol{e}_y + 4/9\boldsymbol{e}_3$ [8].

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega} = (1,0,0)\,, \quad -6/81\right]$$

Použitá literatura

[1] Boas, M. L. (1966). *Mathematical methods in the Physical Sciences.* New York – London – Sydney: John Wiley & Sons.
[2] Greiner, W. (2003). *Classical mechanics. System of particles and Hamiltonoan mechanics.* New York: Springer-Verlag.
[3] Greiner, W. (2004). *Classical mechanics. Point particles and relativity.* New York: Springer-Verlag.
[4] Jirásek, F., Kriegelstein, E., & Tichý, Z. (1990). *Sbírka řešených příkladů z matematiky.* Praha: SNTL.
[5] Kay, D. C. (1988). *Schaum's outlines: Tensor calculus.* New York: McGraw-Hill.
[6] Kolář, M. (2003). *Sbírka úloh z mechaniky kontinua.* Diplomová práce, Univerzita Palackého Olomouc. Dostupné z `http://muj.optol.cz/~richterek/data/media/diplomky/03_kolar.pdf`.
[7] Kvasnica, J. (1989). *Matematický aparát fyziky.* Praha: Academia.
[8] Mase, G. E. (1970). *Schaum's outlines: Continuum mechanics.* New York: McGraw-Hill.