# Příklady ke kolokviu z předmětu KTF/GMMF

**Úloha 1** Dokažte, že pro $\forall a,b \in R$ platí

$$\exp\left(a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}+b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\right)=\exp\left(a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\right)\exp\left(b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\right) \quad\Longleftrightarrow\quad \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda},\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\right]=0.$$

**Úloha 2** V euklidovské rovině jsou zadány polární souřadnice.

a) Najděte složky metrického tenzoru $g_{\mu\nu}$ v souřadnicové bázi $\partial/\partial r$, $\partial/\partial\varphi$.

b) Ukažte, že ortonormované vektory

$$\boldsymbol{e}_r=\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x}+\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \boldsymbol{e}_\varphi=-\sin\varphi\frac{\partial}{\partial x}+\cos\varphi\frac{\partial}{\partial y}$$

tvoří nesouřadnicovou bázi.

c) Vyjádřete vektory $\boldsymbol{e}_r$ a $\boldsymbol{e}_\varphi$ pomocí souřadnicové báze $\partial/\partial r$, $\partial/\partial\varphi$.

d) Najděte složky lineární formy $\mathrm{d}f$ a odpovídajícího vektoru vzhledem k oběma bázím; $f$ je skalární funkce.

**Úloha 3** Dokažte, že pokud $\boldsymbol{V}$ je vektorem souřadnicové báze, např. $\boldsymbol{V}=\partial/\partial x^\mu$, pro Lieovu derivaci vektorového pole $\boldsymbol{W}$ platí

$$\left(\mathcal{L}_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{W}\right)^\nu=\frac{\partial W^\nu}{\partial x^\mu}.$$

**Úloha 4** Dokažte, že pokud je tenzor $\boldsymbol{T}$ invariantní vůči vektorovému poli $\boldsymbol{V}$ i vektorovému poli $\boldsymbol{W}$, bude invariantní i vůči jejich lineární kombinaci $a\boldsymbol{V}+b\boldsymbol{W}$, kde $a,b\in R$.

**Úloha 5** Označme $H$ množinu všech matic typu

$$\begin{pmatrix} a & b\\ -\bar{b} & \bar{a}\end{pmatrix},$$

kde $a,b$ jsou komplexní čísla a $\bar{a},\bar{b}$ čísla k nim komplexně sdružená.

a) Dokažte, že podmnožina

$$H-\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$$

matic s nenulovým determinantem je grupou vzhledem k násobení matic a tím Lieovou podgrupou v GL(2,C).

b) Dokažte, že $H$ je 4-rozměrným reálným vektorovým prostorem, v němž lze za bázi zvolit matice

$$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad J_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&\mathrm{i}\\ \mathrm{i}&0\end{pmatrix},\quad J_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\quad J_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\mathrm{i}&0\\0&-\mathrm{i}\end{pmatrix}.$$

c) Nechť $A\in H$, potom lze najít reálná čísla $a,b,c,d$ tak, že

$$A=aI+2bJ_1+2cJ_2+2dJ_3.$$

Dokažte, že $A$ patří do $SU(2)$ právě tehdy, když

$$a^2+b^2+c^2+d^2=1$$

a že $SU(2)$ je difeomorfní s $S^3$.

**Úloha 6** Dokažte, že v trojrozměrném případě platí

$$*\left(\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V}\right)=\tilde{\boldsymbol{U}}\wedge\tilde{\boldsymbol{V}}.$$

**Úloha 7** Ze vztahu

$$T\tilde{\mathrm{d}}S=p\tilde{\mathrm{d}}V+\tilde{\mathrm{d}}E$$

odvoďte identitu

$$T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_T-p=\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_s\left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_T-\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_T\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_S.$$

**Úloha 8** Složky Rieamnnova tenzoru $R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}$ jsou určeny vztahem

$$\left[\nabla_\alpha,\nabla_\beta\right]\boldsymbol{e}_\nu-\nabla_{[\boldsymbol{e}_\alpha,\boldsymbol{e}_\beta]}\boldsymbol{e}_\nu=R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}\boldsymbol{e}_\mu.$$

a) Dokažte, že v souřadnicové bázi platí

$$R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}{}_{\nu\beta,\alpha} - \Gamma^{\mu}{}_{\nu\alpha,\beta} + \Gamma^{\mu}{}_{\gamma\alpha}\Gamma^{\gamma}{}_{\nu\beta} - \Gamma^{\mu}{}_{\gamma\beta}\Gamma^{\gamma}{}_{\nu\alpha}.$$

b) Zavedeme-li v obecné bázi komutační koeficienty $C^{\mu}{}_{\nu\alpha}$ vztahem

$$[\boldsymbol{e}_{\nu}, \boldsymbol{e}_{\alpha}] = C^{\mu}{}_{\nu\alpha}\boldsymbol{e}_{\mu},$$

ukažte, že

$$R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}{}_{\nu\beta,\alpha} - \Gamma^{\mu}{}_{\nu\alpha,\beta} + \Gamma^{\mu}{}_{\gamma\alpha}\Gamma^{\gamma}{}_{\nu\beta} - \Gamma^{\mu}{}_{\gamma\beta}\Gamma^{\gamma}{}_{\nu\alpha} - C^{\gamma}{}_{\alpha\beta}\Gamma^{\mu}{}_{\nu\gamma},$$

kde $f_{,\alpha} = \boldsymbol{e}_{\alpha}(f)$.