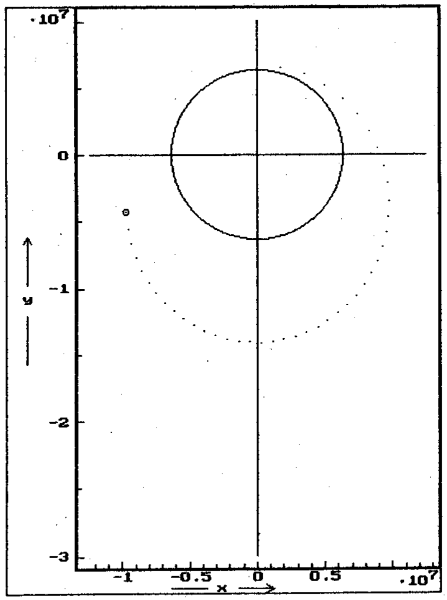
```
==========================================================================
- - - - - - - - - - proměnné, konstanty, procedury a funkce - - - - - - -
m=6e24            ! hmotnost Země
km=m*6.67e-11  ! hmotnost Země vynásobená gravitační konstantou
- - - - - - - - - - - - - - - - - počáteční hodnoty - - - - - - - - - - -
t=0
x=0          ! počáteční x-ová souřadnice družice
y=6.7e6      ! počáteční y-ová souřadnice družice
v=9000       ! počáteční rychlost (v<11000)
h=200        ! časový krok

SetColor(1,7)        ! vykreslení centrálního tělesa
SetMark4(1,3)
Disp4(1,0,0,6.37e6,6.37e6)
SetColor(1,4)

A=y/(2-v^2*y/km)    ! výpočet parametrů trajektorie a doby oběhu
B=sqrt(A^2-(A-y)^2)
T=2*pi*A*B/v/y
ex=A-y
ce=1-y/A
Q=sqrt(km)*A^-1.5
DISP
- - - - - - - - - - - - - - - - - - model - - - - - - - - - - - - - - - -
 t=t+h
 E0=-1; E1=100; q=Q*t        ! řešení Keplerovy rovnice
 LOOP
  E2=E0/2+E1/2; d=E2-E0
  f0=E0-ce*sin(E0)-q
  f2=E2-ce*sin(E2)-q
  f1=E1-ce*sin(E1)-q
  IF f2=0 THEN E=E2; EXIT END
  E3=E2+d*f2/f0/sqrt((f2/f0)^2-f1/f0)
  f3=E3-ce*sin(E3)-q
  IF f3*f2<0 THEN E0=E3; E1=E2
    ELSIF f3*f0<0 THEN E1=E3 ELSE E0=E3 END
  IF abs(f3)<1e-3 THEN E=E3; EXIT END
 END
 y=A*cos(E)-ex
 x=B*sin(E)
==========================================================================
```



t	x	y
0	0	6700000
200	1785518	6523050
400	3475693	6012479
600	5003090	5216793
800	6322418	4190045
1000	7413312	3027492
1200	8274540	1750833
1400	8917226	442308
1600	9357487	-879045
1800	9619303	-2190355
2000	9720424	-3468314
2200	9679115	-4691658
2400	9513144	-5854670
2600	9235743	-6957226
2800	8866234	-7975455
3000	8410597	-8925288
3200	7881742	-9797509
3400	7289342	-10590548
3600	6642067	-11303510
3800	5947724	-11935924
4000	5213382	-12487601
4200	4445508	-12958523
4400	3650076	-13348758
4600	2832675	-13658412
4800	1998600	-13887588
5000	1152934	-14036389
5200	300623	-14104804
5400	-553461	-14092908
5600	-1404452	-14000657
5800	-2247439	-13828000
6000	-3077396	-13574859
6200	-3889128	-13241150
6400	-4677195	-12826799
6600	-5435845	-12331765
6800	-6158927	-11756082
7000	-6839797	-11099902
7200	-7471211	-10363589
7400	-8043842	-9548857
7600	-8555855	-8647593
7800	-8984723	-7681755
8000	-9329176	-6635974
8200	-9573924	-5519555
8400	-9704927	-4337919

Ústřední výbor fyzikální olympiády České republiky
Nám. Svobody, 501 91 Hradec Králové

UŽITÍ NUMERICKÝCH METOD PŘI ŘEŠENÍ ROVNIC VE FYZIKÁLNÍCH ÚLOHÁCH

Studijní text pro řešitele FO, kat. A, B

Přemysl Šedivý

Řešení fyzikální úlohy má obvykle dvě samostatné části - obecnou a numerickou. V obecné části sestavíme na základě vhodných fyzikálních zákonů potřebné veličinové rovnice a z nich matematickými úpravami dojdeme ke vztahům, které vyjadřují hledané veličiny pomocí veličin daných a různých konstant. Do těchto vztahů pak dosadíme číselné hodnoty daných veličin a konstant a získáme číselné hodnoty hledaných veličin, které doplníme příslušnými jednotkami. V méně přehledných úlohách bychom neměli zapomenout na rozměrovou zkoušku.

I zdánlivě jednoduchá úloha může vést k rovnicím, jejichž obecné řešení je velmi obtížné, nebo vůbec neexistuje. V takovém případě obvykle použijeme přibližné numerické metody. Jejich princip je jednoduchý a ani praktické použití není obtížné. V době všeobecného rozšíření programovatelných kalkulátorů a osobních počítačů by mělo patřit k základním matematickým dovednostem.

V tomto studijním textu si vysvětlíme podstatu některých přibližných metod a na několika příkladech ukážeme, jak se s nimi pracuje. V druhé části pak jsou úlohy k samostatnému procvičení. Pro ukázky algoritmů a grafů byl použit systém FAMULUS, který je od letošního školního roku bezplatně dostupný všem školám v České republice.

Začněme jednoduchým příkladem:

Příklad 1.

Na kotouč o poloměru R volně otáčivý okolo vodorovné osy O zavěsíme v dolním bodu A závaží o hmotnosti m a v horním bodu B upevníme lanko, na jehož konci visí nezatížená pružina zanedbatelné hmotnosti a tuhosti k (obr. 1-1.) Volný konec pružiny C uchopíme a pomalu posuneme dolů do bodu D; $CD = s = \frac{\pi R}{2}$. O jaký úhel φ se kotouč pootočí?

Řešte pro hodnoty $R = 0{,}150$ m, $m = 1{,}00$ kg, $k = 65$ N·m^{-1}, $g = 9.81$ m·s^{-2}.

Řešení

Situaci po přemístění konce pružiny znázorňuje obr. 1-2. Na kotouč působí dvě síly, jejichž otáčivý účinek je v rovnováze. Podle momentové věty

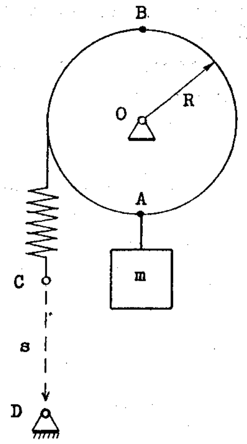
$$mgR\sin\varphi = k\,\Delta l\,R = k(s - R\varphi) = k\left(\frac{\pi R}{2} - R\varphi\right)R\,.$$

975 15|315264...

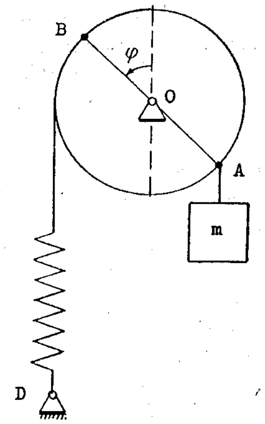
$$mg\sin\varphi + kR\varphi - \frac{kR\pi}{2} = 0\,. \qquad (1)$$

Dostali jsme transcendentní rovnici, kterou neumíme vyřešit elementárními prostředky. Použijeme proto přibližné numerické řešení.

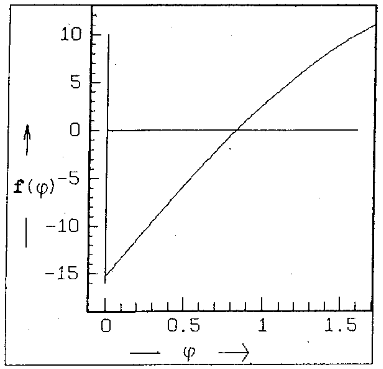
Očekáváme, že se kotouč otočí o úhel $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Výraz na levé straně rovnice je spojitou funkcí úhlu φ, která je v intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$ rostoucí a v jeho krajních bodech dosahuje hodnot $-\frac{k\pi R}{2}$ a mg, které mají různé znaménko. Rovnice má tedy v tomto intervalu jediný kořen. Pro dané hodnoty veličin je průběh funkce zachycen na obr. 1-3. Z grafu odhadneme přibližnou hodnotu hledaného úhlu $\varphi \doteq 0.83$ rad $\doteq 48°$. Přesnější hodnotu nyní určíme přibližným numerickým řešením pomocí některé z následujících metod.



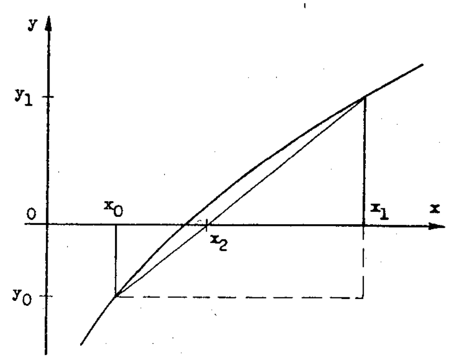
Obr. 1-1



Obr. 1-2



Obr. 1-3



Obr. 1-4

Obecná formulace úlohy

Hledáme řešení rovnice $y = f(x) = 0$ v intervalu (x_0, x_1). V tomto intervalu je funkce $f(x)$ ryze monotónní a v jeho krajních bodech má různé znaménko ($f(x_0) \cdot f(x_1) < 0$). Za těchto předpokladů má funkce $f(x)$ v daném intervalu jediný nulový bod, který je řešením dané rovnice.

Metoda půlení intervalu (bisekce)

Určíme střed intervalu $x_2 = \frac{x_0 + x_1}{2}$. Pokud $f(x_2) = 0$, úloha je vyřešena. Jinak pokračujeme hledáním kořenu v té polovině intervalu, kde má funkce v krajních bodech opačné znaménko. Postupné zmenšování intervalu opakujeme, dokud absolutní hodnota funkce uprostřed intervalu neklesne pod předem zvolenou mez.

Algoritmus půlení intervalu spolu s řešením příkladu 1. je v příloze 1.a.

Příloha 1.c

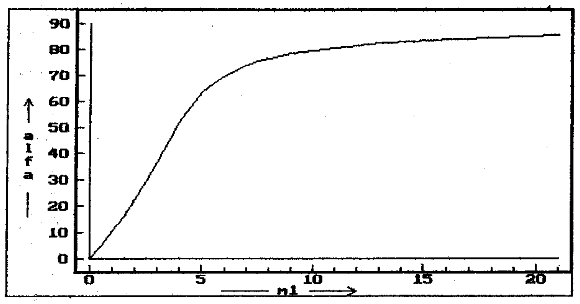
```
Riddersova metoda přibližného řešení rovnice f(x)=0. Hledaný kořen
aproximuje proměnná x3.
- - - - - - - - - - proměnné, konstanty, procedury a funkce - - - - - - - - -
FUNCTION f(x)=9.81*sin(x)+9.75*x-4.875*pi
- - - - - - - - - - - - - - - počáteční hodnoty - - - - - - - - - - - - - -
x0=0; x1=pi/2; k=0
f0=f(x0); f1=f(x1)
- - - - - - - - - - - - - - - - - - - model - - - - - - - - - - - - - - - - -
k=k+1
  x2=x0/2+x1/2; d=x2-x0;
  f2=f(x2)
  IF f2=0 THEN x3=x2; DISP; STOP END
  x3=x2+d*f2/f0/sqrt((f2/f0)^2-f1/f0)
  f3=f(x3)
  IF abs(f3)<1e-7 THEN DISP; STOP END
  IF f3*f2<0 THEN x0=x3; x1=x2; f0=f3; f1=f2
    ELSIF f3*f0<0 THEN x1=x3; f1=f3 ELSE x0=x3; f0=f3 END
```

k	x3	f3
1	0.831512	0.041079
2	0.829002	0.000003
3	0.829002	0.000000

Příloha 2

m1	alfa
0.0	0.0
0.5	5.0
1.0	10.3
1.5	16.1
2.0	22.5
2.5	29.3
3.0	36.7
3.5	44.4
4.0	51.8
4.5	58.2
5.0	63.3
5.5	67.1
6.0	69.9
6.5	72.1
7.0	73.9
7.5	75.3
8.0	76.5
8.5	77.5
9.0	78.3
9.5	79.0
10.0	79.7
10.5	80.2
11.0	80.7
11.5	81.2
12.0	81.6
12.5	82.0
13.0	82.3
13.5	82.6
14.0	82.9
14.5	83.2
15.0	83.4
15.5	83.6
16.0	83.9
16.5	84.0
17.0	84.2
17.5	84.4
18.0	84.6
18.5	84.7
19.0	84.9
19.5	85.0
20.0	85.1
20.5	85.3
21.0	85.4

```
Výpočet funkční závislosti u implicitně zadané
funkce. Metoda regula falsi
- - - - - - - - - - proměnné, konstanty, procedury a f
m1
m=10; dm1=.5; d=4.5; l=3
FUNCTION f(x)=
   m*sin(x)*sqrt(d^2+l^2-2*d*l*sin(x))-2*d*m1*cos(x)
- - - - - - - - - - - - - - - - - počáteční hodnoty - -
m1=0; x0=0; x1=pi/2; alfa=0
DISP
- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - model - - - - -
m1=m1+dm1
LOOP
   f0=f(x0); f1=f(x1)
   x2=(x0*f1-x1*f0)/(f1-f0)
   f2=f(x2)
   IF abs(f2)<1e-5 THEN EXIT END
   IF f2*f1<0 THEN x0=x2
   ELSE x1=x2 END
END
```



Literatura

[1] FIEDLER, M. VRBA, A.: *Základní numerické metody* pro III. ročník tříd gymnázií se zaměřením na matematiku. SPN Praha 1988

[2] BARTSCH, H-J.: *Matematické vzorce*. SNTL Praha 1983

[3] DVOŘÁK, L. a kol.: *FamEduc I.* (příručka ke kompletu výukových programů) FAMULUS Etc. 1992

Přílohy 1.a, 1.b

```
Přibližné řešení rovnice f(x)=0 metodou půlení intervalu. Hledaný kořen
aproximuje proměnná x2.
- - - - - - - - - - proměnné, konstanty, procedury a funkce - - - - - - - - -
FUNCTION f(x)=9.81*sin(x)+65*.15*x-32.5*.15*pi
- - - - - - - - - - - - - - - počáteční hodnoty - - - - - - - - - - - - - - -
  x0=0; x1=pi/2; k=0
  f0=f(x0); f1=f(x1)
- - - - - - - - - - - - - - - - - model - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
k=k+1
  x2=(x0+x1)/2
  f2=f(x2)
  IF abs(f2)<1e-7 THEN DISP;STOP END
  IF f2*f1<0 THEN x0=x2; f0=f2
     ELSE x1=x2; f1=f2 END
```

k	x2	f2
1	0.785398	-0.720915
2	1.178097	5.234442
3	0.981748	2.413493
4	0.883573	0.882804
5	0.834486	0.089700
6	0.809942	-0.313467
7	0.822214	-0.111342
8	0.828350	-0.010685
9	0.831418	0.039542
10	0.829884	0.014437
11	0.829117	0.001878
12	0.828733	-0.004403
13	0.828925	-0.001262
14	0.829021	0.000308
15	0.828973	-0.000477
16	0.828997	-0.000084
17	0.829009	0.000112
18	0.829003	0.000014
19	0.829000	-0.000035
20	0.829001	-0.000011
21	0.829002	0.000001
22	0.829002	-0.000005
23	0.829002	-0.000002
24	0.829002	-0.000000

```
Přibližné řešení rovnice f(x)=0 metodou regula falsi.
Hledaný kořen aproximuje proměnná x2.
- - - - - - - - - - proměnné, konstanty, procedury a funkce - - - - - - - - -
FUNCTION f(x)=9.81*sin(x)+9.75*x-4.875*pi
- - - - - - - - - - - - - - - počáteční hodnoty - - - - - - - - - - - - - - -
  x0=0; x1=pi/2; k=0
  f0=f(x0); f1=f(x1)
- - - - - - - - - - - - - - - - - model - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
k=k+1
  x2=(x0*f1-x1*f0)/(f1-f0)
  f2=f(x2)
  IF abs(f2)<1e-7 THEN DISP; STOP END
  IF f2*f1<0 THEN x0=x2; f0=f2
     ELSE x1=x2; f1=f2 END
```

k	x2	f2
1	0.957489	2.042368
2	0.844827	0.258268
3	0.830817	0.029707
4	0.829208	0.003377
5	0.829025	0.000383
6	0.829005	0.000043
7	0.829002	0.000005
8	0.829002	0.000001
9	0.829002	0.000000

Interpolační metoda (regula falsi)

Jednotlivé kroky této metody spočívají v lineární interpolaci intervalu (x_0, x_1), která je znázorněna na obr. 1-4. Z podobnosti trojúhelníků odvodíme

$$\frac{x_2 - x_0}{0 - y_0} = \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0}, \quad x_2 = x_0 - y_0\frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0} = \frac{y_1 x_0 - y_0 x_1}{y_1 - y_0}.$$

Pokud $f(x_2) = 0$, je rovnice vyřešena. Jinak pokračujeme hledáním kořenu v té části intervalu, kde má funkce v krajních bodech opačné znaménko, podobně jako v metodě půlení intervalu.

Algoritmus metody regula falsi spolu s řešením příkladu 1. je v příloze 1.b.

Předcházející dvě metody mají jednoduchý algoritmus a vedou bezpečně k nalezení kořenu rovnice, konvergují však pomalu, což může vadit ve složitějších úlohách, kde přibližnou metodou hledáme větší počet kořenů. S takovou situací se setkáme v př. 4. V takovém případě použijeme některou z rychlejších metod, mezi které patří metoda Riddersova.

Metoda Riddersova

Nejprve určíme střed intervalu $x_2 = \frac{x_0 + x_1}{2}$ a vypočítáme funkční hodnoty $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$ a $y_2 = f(x_2)$. Kořen rovnice aproximujeme vztahem

$$x_3 = x_2 + \frac{(x_1 - x_0)}{2} \cdot \frac{\frac{y_2}{y_0}}{\sqrt{\frac{y_2^2}{y_0^2} - \frac{y_1}{y_0}}}.$$

Pokud není $|f(x_3)|$ dostatečně malá, volíme x_3 jako jeden krajní bod nového intervalu a druhý krajní bod vybereme z x_2, x_0 a x_1 tak, aby funkce $f(x)$ v něm měla opačné znaménko než bodu x_3. Postup opakujeme, až dosáhneme požadované přesnosti.

Algoritmus Riddersovy metody spolu s řešením příkladu 1. je v příloze 1.c

Numerickým řešením jsme ve všech třech případech dospěli k stejnému výsledku, který zaokrouhlíme na $\varphi = 0,829$ rad $= 47,5°$.

Vzhledem k malému rozsahu tohoto studijního textu se omezíme jen na tři numerické metody, se kterými jste se právě seznámili. Další naleznete v literatuře uvedené na str. 10.

Příklad 2.

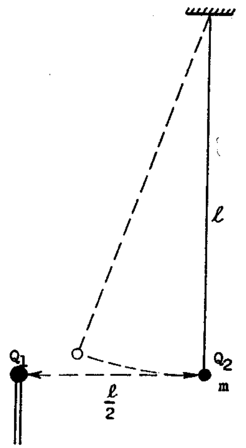
Malá kulička o hmotnosti m je zavěšena na tenkém hedvábném vlákně délky l. Ve stejné výšce je ve vzdálenosti $\frac{l}{2}$ od první kuličky umístěna druhá malá kulička (obr. 2-1). V jaké rovnovážné poloze se zastaví zavěšená kulička, jestliže na pevnou kuličku umístíme kladný náboj Q_1 a na zavěšenou kuličku záporný náboj Q_2?

Úlohu řešte pro hodnoty $Q_1 = 0,20\ \mu$C, $Q_2 = -0,050\ \mu$C, $l = 0,50$ m a pro tři různé hmotnosti: a) $m = 1,0$ g, b) $m = 2,5$ g, c) $m = 5,0$ g. Vlákno považujte za neroztažitelné a dokonale ohebné v místě závěsu. $g = 9,8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

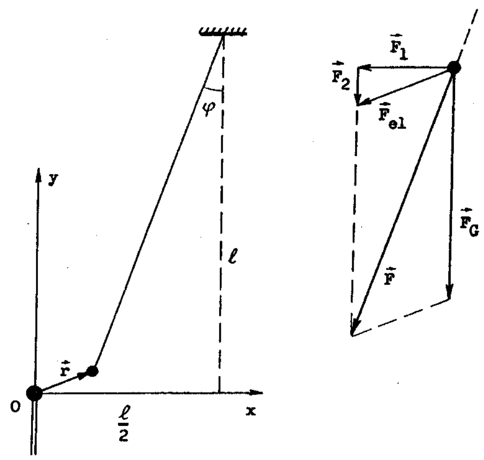
Řešení

Rovnovážná poloha kuličky je určena úhlem φ, o který se vlákno se zavěšenou kuličkou odchýlí od svislého směru. Zvolme počátek vztažné soustavy v místě náboje Q_1 (obr. 2-2). Kulička zaujme rovnovážnou polohu s polohovým vektorem

$$\boldsymbol{r} = \left(\frac{l}{2} - l\sin\varphi; l - l\cos\varphi\right).$$



Obr. 2-1



Obr. 2-2

Zde na ni bude působit elektrická síla $\boldsymbol{F}_{el}$ o velikosti

$$F_{el} = k\frac{|Q_1Q_2|}{r^2}\,, \qquad k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \doteq 9\cdot 10^9\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}\,,$$

kterou můžeme rozložit na složky $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ o velikostech

$$F_1 = F_{el}\,\frac{0{,}5\,l - l\sin\varphi}{r}\,, \qquad F_2 = F_{el}\,\frac{l - l\cos\varphi}{r}\,.$$

Moment elektrické síly vzhledem k bodu závěsu se ruší s momentem síly tíhové:

$$(mg + F_2)\,l\sin\varphi - F_1 l\cos\varphi = 0\,,$$

po úpravě

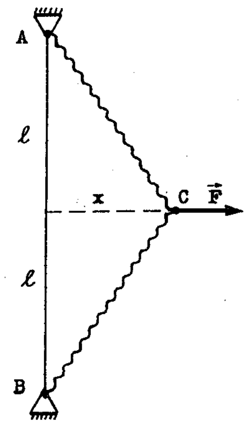
$$mgl\sin\varphi - \frac{k|Q_1Q_2|}{l}\,\frac{4\cos\varphi - 8\sin\varphi}{(9 - 4\sin\varphi - 8\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}} = 0\,. \qquad (1)$$

Také v této úloze nezbývá než pokračovat přibližným numerickým řešením. Je zřejmé, že odchylka vlákna v rovnovážné poloze nepřekročí hodnotu $\mathrm{arctg}\,0{,}5$, což je odchylka spojnice bodu závěsu s pevnou kuličkou. Přes zdánlivou přehlednost situace je však na místě určitá opatrnost, o čemž se přesvědčíme, jestliže nejprve sestrojíme grafy závislosti celkového momentu na úhlové výchylce ve všech třech zadaných případech (obr. 2-3).

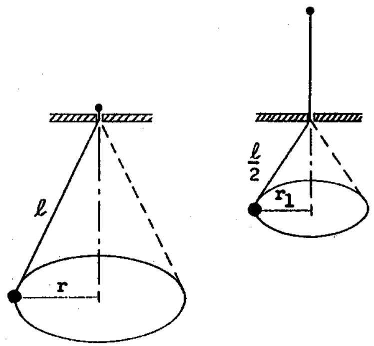
Pro zadání a) má úloha jediné řešení. Přibližným výpočtem dojdeme k hodnotě $\varphi = 0{,}44571\ \mathrm{rad} = 25{,}6°$.

Také pro zadání c) dostaneme jediné řešení $\varphi = 0{,}03379\ \mathrm{rad} = 1{,}9°$.

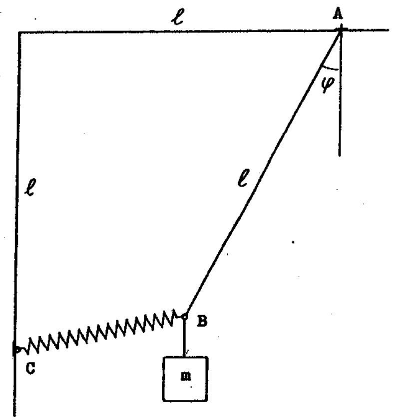
Poněkud složitější je situace v případě b), kde dostaneme hned tři rovnovážné polohy s úhlovými výchylkami



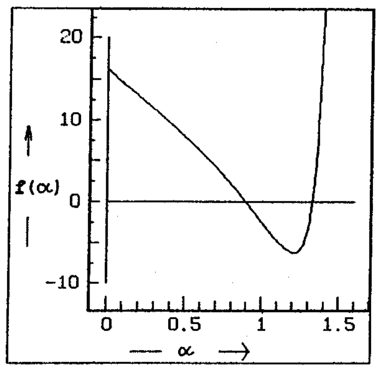
Obr. U-1



Obr. U-2



Obr. U-3



Obr. R-1

Úlohy

1. Kámen vyletí z praku počáteční rychlostí o velikosti v_0. Jaký elevační úhel α musíme zvolit, abychom zasáhli cíl ve vodorovné vzdálenosti a a výšce b? (Měřeno od místa, kde kámen opustí prak.)

Úlohu řešte pro hodnoty $v_0 = 25\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $a = 17\ \mathrm{m}$, $b = 13\ \mathrm{m}$. Odpor vzduchu zanedbáváme, $g = 9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

2. Dvě stejné pružiny o tuhosti k, které mají v nezatíženém stavu délku l_0 spojíme do série a jejich volné konce připevníme k pevným bodům A, B, jejichž vzdálenost je $2l > 2l_0$. V bodě C, kde jsou pružiny spojeny, začne působit síla $\boldsymbol{F}$ kolmá k přímce AB (obr. U-1). Do jaké vzdálenosti x se bod C vychýlí?

Úlohu řešte pro hodnoty $l_0 = 0{,}35\ \mathrm{m}$, $l = 0{,}70\ \mathrm{m}$, $k = 85\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}$, $F = 55\ \mathrm{N}$. Hmotnost pružin zanedbáváme.

3. Kulička kuželového kyvadla, jehož vlákno má délku l, obíhá po kružnici o poloměru r. Vlákno je nahoře provlečeno malým otvorem, takže jeho délku můžeme zkrátit, aniž bychom přerušovali pohyb kyvadla (obr. U-2). Jaký bude poloměr r_1 trajektorie kuličky, zkrátíme-li délku vlákna na $l_1 = \frac{l}{2}$?

Úlohu řešte pro hodnoty $l = 0{,}800\ \mathrm{m}$, $r = 0{,}250\ \mathrm{m}$.

4. Závaží o hmotnosti m je zavěšeno pomocí delšího lanka v bodu A na stropě. Vzdálenost bodu A od stěny je l. Ve stejné vzdálenosti l od bodu A je lanko opatřeno očkem B a druhé očko C je připevněno ve stejné výši na stěně (obr. U-3). Obě očka spojíme pružinou tuhosti k, která má v nezatíženém stavu délku $l_0 < l$ a jejíž hmotnost je zanedbatelná. O jaký úhel φ se vychýlí závěs AB?

Úlohu řešte pro hodnoty $m = 10\ \mathrm{kg}$, $l = 2{,}00\ \mathrm{m}$, $l_0 = 0{,}50\ \mathrm{m}$, $k = 75\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}$, $g = 9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Výsledky úloh

1. Úloha vede na rovnici

$$f(\alpha) = b - a\,\mathrm{tg}\,\alpha + \frac{ga^2}{2v_0\cos^2\alpha} = 0\,.$$

Graf funkce $f(\alpha)$ je na obr. R-1. Pro dané hodnoty veličin má úloha dvě řešení $\alpha_1 = 0.89512\ \mathrm{rad} = 51.3^\circ$ a $\alpha_2 = 1{,}32853\ \mathrm{rad} = 76{,}1^\circ$.

2. Úloha vede k rovnici

$$F\sqrt{l^2+x^2} - 2kx\left(\sqrt{l^2+x^2} - l_0\right) = 0\,.$$

Pro dané hodnoty veličin $x = 0{,}5364\ \mathrm{m}$.

3. Úloha vede k rovnici

$$(4l^2 - 4r^2)\,r_1^8 + 4r^8 r_1^2 - r^8 l^2 = 0\,.$$

Pro dané hodnoty veličin $r_1 = 0.2050\ \mathrm{m}$.

4. Úloha vede k rovnici

$$(kl\sin\varphi - kl\cos\varphi + mg\sin\varphi)\sqrt{3 - 2\sin\varphi - 2\cos\varphi} + kl_0(\cos\varphi - \sin\varphi) = 0\,.$$

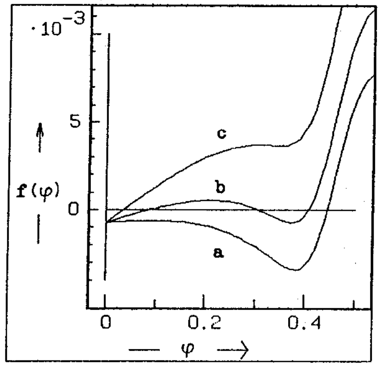
Pro dané hodnoty veličin $\varphi = 0{,}43685\ \mathrm{rad} = 25{,}0^\circ$.

$$\varphi_1 = 0{,}08500\ \mathrm{rad} = 4{,}9^\circ\,,\quad \varphi_2 = 0{,}30386\ \mathrm{rad} = 17{,}4^\circ \text{ a } \varphi_3 = 0{,}40841\ \mathrm{rad} = 23{,}4^\circ\,.$$

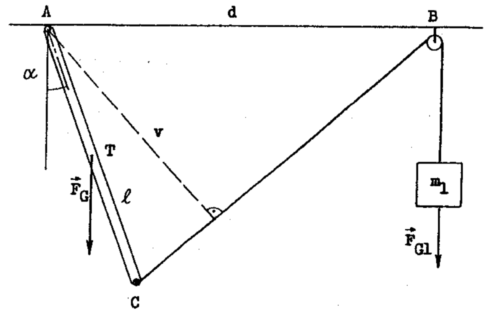
Prostřední poloha je ovšem labilní a kulička se tedy může trvale nacházet jen v první nebo třetí poloze.

Příklad 3.

Tyč konstantního průřezu, délky $l = 3\ \mathrm{m}$ a hmotnosti $m = 10{,}0\ \mathrm{kg}$ je jedním koncem otáčivě upevněna v bodu A na stropě. K druhému konci je připevněno lanko vedené přes kladku umístěnou na stropě v bodu B, jehož vzdálenost od bodu A je $d = 4{,}5\ \mathrm{m}$. Na volný konec lanka C zavěsíme závaží o hmotnosti m_1 (obr. 3). Určete graf závislosti odchylky α tyče od svislého směru na hmotnosti závaží. Hmotnost lanka a rozměry kladky zanedbáváme.



Obr. 2-3



Obr. 3

Řešení

Vyjdeme z momentové věty pro osu procházející bodem A:

$$m_1 g v - mg\frac{l}{2}\sin\alpha = 0\,.$$

v je výška trojúhelníku ABC, kterou určíme přes jeho obsah:

$$P = \frac{1}{2}ld\cos\alpha = \frac{1}{2}v\sqrt{d^2 + l^2 - 2ld\sin\alpha}\,,\qquad v = \frac{ld\cos\alpha}{\sqrt{d^2 + l^2 - 2ld\sin\alpha}}\,.$$

Dosazením do předchozího vztahu a úpravou dojdeme k rovnici

$$m\sin\alpha\sqrt{d^2 + l^2 - 2ld\sin\alpha} - 2m_1 d\cos\alpha = 0\,. \qquad (2)$$

Dostali jsme rovnici typu $f(m_1, \alpha) = 0$, která vyjadřuje závislost úhlu α na hmotnosti závaží m_1 **implicitně**. Explicitní vyjádření ve tvaru $\alpha = \alpha(m_1)$ je sice možné, ale dosti obtížné. V takovém případě určíme hodnoty úhlu α pro různá m_1 přibližným numerickým řešením. Dosazením zvolené hodnoty m_1 do rovnice (3) dostaneme rovnici o jedné neznámé typu $f(\alpha) = 0$, kterou řešíme stejně jako rovnici (1) v příkladu 1.

Řešení úlohy pomocí systému FAMULUS – program výpočtu, tabulka a graf – je v příloze 2.

Příklad 4.

Okolo velkého kosmického tělesa o hmotnosti M se pohybuje po eliptické trajektorii družice o hmotnosti $m \ll M$. Vzdálenost pericentra trajektorie od středu kosmického tělesa je y_0, rychlost družice v pericentru má velikost v_0. Určete závislost polohy družice na čase (měřeném od okamžiku průchodu pericentrem) a znázorněte pohyb ve vhodném měřítku.

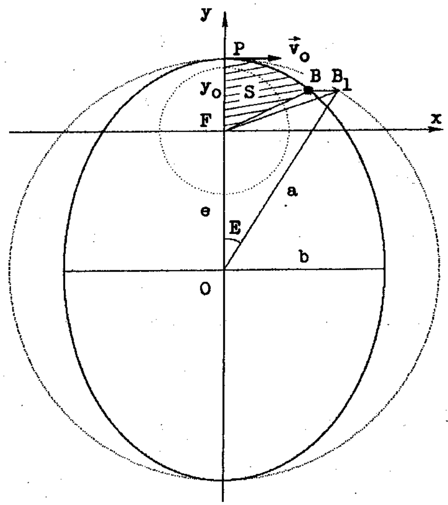
Úlohu řešte pro hodnoty $M = 6,0 \cdot 10^{24}$ kg, $y_0 = 6,7 \cdot 10^6$ m (družice Země). $\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N $\cdot$ m$^2 \cdot$ kg^{-2}. Počáteční rychlost volte menší než 11 km $\cdot$ s^{-1}.

Řešení

Zavedeme vztažnou soustavu s počátkem ve středu centrálního tělesa, který je současně ohniskem eliptické trajektorie (obr. 4). Osa x je rovnoběžná s vedlejší poloosou elipsy, osa y prochází středem trajektorie a pericentrem P. Polohu hmotného bodu B můžeme v každém okamžiku určit pomocí **excentrické anomálie** E. Platí vztahy

$$y = a\cos E - e\,, \quad x = \frac{b}{a}\, a\sin E = b\sin E\,, \qquad (3)$$

kde a, b jsou velikosti poloos elipsy, e je excentricita.



Obr. 4

Závislost excentrické anomálie na čase určíme na základě **druhého Keplerova zákona** takto: Okamžité poloze družice B přiřadíme na kružnici k se středem O a poloměrem a bod B_1 tak, že spojnice BB_1 je kolmá na osu y. Obsah S_1 obrazce FPB_1 je roven rozdílu obsahu kruhové výseče OPB_1 a obsahu trojúhelníku OFB_1

$$S_1 = \frac{a^2E - ae\sin E}{2}\,.$$

Pro plochu S opsanou průvodičem platí

$$S = S_1\frac{b}{a} = \frac{abE - be\sin E}{2}\,.$$

Zároveň platí $S = Ct$, kde C je plošná rychlost a t je doba od průchodu pericentrem. Délky poloos a plošná rychlost jsou dány počátečními podmínkami, tj. vzdáleností pericentra od středu centrálního tělesa a rychlostí v pericentru. V pericentru platí

$$\frac{\kappa Mm}{y_0^2} = \frac{mv_0^2}{\varrho}\,,$$

kde ϱ je poloměr oskulační kružnice v pericentru $\varrho = \frac{b^2}{a}$. Po dosazení

$$\frac{\kappa M}{y_0^2} = \frac{v_0^2 a}{b^2}\,.$$

Současně platí

$$y_0 = a - e = a - \sqrt{a^2 - b^2}\,.$$

Úpravou předchozích vztahů dostáváme

$$a = \frac{y_0}{2 - \frac{v_0^2 y_0}{\kappa M}} = \frac{y_0^2}{2y_0 - \frac{v_0^2 y_0^2}{\kappa M}}\,, \quad b = \sqrt{a^2 - \epsilon^2} = \sqrt{2ay_0 - y_0^2}\,.$$

Plošná rychlost je určena vztahem

$$C = \frac{v_0 y_0}{2} = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{\kappa M}{a}}.$$

Z výše uvedených vztahů vyplývá

$$S = Ct = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{\kappa M}{a}}t = \frac{ab}{2}E - \frac{1}{2}b\epsilon\sin E\,.$$

Vynásobíme-li vztah výrazem $\frac{2}{ab}$, dostaneme tzv. **Keplerovu rovnici**

$$(\kappa M)^{0,5}a^{-1,5}t = E - \frac{\epsilon}{a}\sin E\,,$$

neboli

$$E - \varepsilon\sin E - Qt = 0\,,$$

kde ε je **relativní excentricita** a $Q = (\kappa M)^{0,5}a^{-1,5}$.

Keplerovou rovnicí je excentrická anomálie určena implicitně. Je to rovnice typu $f(t, E) = 0$ a její řešení pro zvolené t musíme provést některou z přibližných numerických metod. Pro $t \in (0; T)$ je výraz Qt z intervalu $(0; 2\pi)$ a také E je v intervalu $(0; 2\pi)$.

Dosazením E do vztahů (4) dostaneme souřadnice družice v daném okamžiku.

Řešení úlohy v systému FAMULUS – program výpočtu, tabulka a grafický model pro počáteční rychlost 9000 m$\cdot$s^{-1} je v příloze 3. V programu byla pro výpočet excentrické anomálie použita Riddersova metoda.