Příklady ke kolokviu z předmětu KEF/UOTR

1. sada

1.1 Systém parabolických souřadnic (p,q) v rovině je dán rovnicemi

$$x = p, \qquad y = cp^2 + q,$$

kde $c > 0$ je kladná konstanta. Najděte metrický tensor v těchto souřadnicích a rovnice geodetických čar.

1.2 Uvažujte 2D metriku

$$\mathrm{d}s^2 = \cosh^2\left(\frac{r}{R}\right)\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\varphi^2,$$

kde $R > 0$ je reálná konstanta. Zkonstruujte vnořovací (embedding) diagram roviny s touto metrikou do 3D Euklidovského prostoru a diagram načrtněte (případně vykreslete na počítači).

1.3 Je dán dvourozměrný prostor s metrikou

$$\mathrm{d}s^2 = a^2\mathrm{d}u^2 + \sin^2(u)\mathrm{d}w^2,$$

kde a je reálná konstanta. Ukažte, že jediným nenulovým Christoffelovým symbolem je

$$\Gamma^u_{ww} = -\frac{1}{a^2}\sin u\cos u$$

a že pro složku Riemannova tenzoru platí

$$R^u_{wuw} = \frac{1}{a^2}\sin^2 u.$$

1.4 Změna hmotnosti Schwarzschildovy černé díry v důsledku Hawkingova záření se řídí Stefanovým-Bolztmannovým zákonem

$$-\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = A\sigma T^4,$$

kde A je plocha horizontu, T její termodynamická teplota a σ Stefanova-Bolztmannova konstanta. Ukažte, že černá díra s počáteční hmotností M_0 se vypaří za čas

$$\tau = \frac{256\pi^3 k_{\mathrm{B}}^4}{3G\sigma\hbar^4}\left(GM_0\right)^3,$$

kde k_{B} je Boltzmannova konstanta. Nakreslete graf závislosti M/M_0 na čase.

2. sada

2.1 Uvažujte souřadnice na ploše rotačního paraboloidu o rovnici $z = ar^2$, kde a je kladná konstanta s metrickým tenzorem ve tvaru

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 + 4a^2r^2\right)\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\vartheta^2.$$

Ukažte, že rovnice geodetických čar mají tvar

$$r^2\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}s} = c = \text{konst.}, \quad 4a^2r\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\right) + \left(1 + 4a^2r^2\right)\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}s^2} - \frac{c^2}{r^3} = 0.$$

Ukažte, že křivky s rovnicemi

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}s} = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4a^2r^2}}.$$

splňují rovnice geodetických čar.

2.2 Uvažujte 2D metriku

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - r^2/R^2} + r^2 \mathrm{d}\varphi^2,$$

kde $R > 0$ je reálná konstanta. Zkonstruujte vnořovací (embedding) diagram roviny s touto metrikou do 3D Euklidovského prostoru a diagram načrtněte (případně vykreslete na počítači). Pomocí transformace $r = R \sin \varphi$ ukažte, že metrika popisuje kulovou plochu.

2.3 Uvažujte systém souřadnic v rovině $p = x$ a $q = \exp(by)$, kde b je reálná konstanta.

a) Najděte jediný nenulový Christoffelův symbol pro metriku v těchto souřadnicích.

b) Uvažujte vektorové pole o složkách $A^x = 0$, $A^y = Cx$, kde C je konstanta. Najděte složky tenzorového pole $\nabla_\mu A^\nu$ v kartézských souřadnicích a souřadnicové bázi souřadnic p, q.

c) Ukažte, že složky tenzorového pole v souřadnicích p, q získané v bodě b) lze převést do kartézských souřadnic vhodnou transformací a po transformaci získáme složky tenzorového pole vypočítané předtím přímo v kartézských souřadnicích.

2.4 Ukažte, že pro pozorovatele, který je v klidu v místě o souřadnici $r = 6GM$ v okolí Schwarzschildovy černé díry, zabírá černá díra část oblohy vymezené úhlem 45° okolo radiálního směru k černé díře. Najděte tento úhel pro statického pozorovatele v místech o radiální souřadnici $r = 2.5GM$, $r = 3GM$, $r = 4GM$ a $r = 5GM$.

3. sada

3.1 Uvažujte 2D metriku

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{d}r^2}{\cos^2(r/R)} + r^2 \mathrm{d}\varphi^2,$$

kde $R > 0$ je reálná konstanta. Zkonstruujte vnořovací (embedding) diagram roviny s touto metrikou do 3D Euklidovského prostoru a diagram načrtněte (případně vykreslete na počítači).

3.2 Je dán dvourozměrný prostor s metrikou

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{d}p^2}{1 - kp^2} + p^2 \mathrm{d}q^2,$$

kde k je reálná konstanta. Najděte nenulové složky Riemannova tenzoru.

3.3 Kosmické struny jsou hypotetické objekty, jejichž metrika ve válcových souřadnicích by měla být tvar

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}r^2 f(r)^2 \mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}z^2,$$

kde $f(r)$ je funkce radiální souřadnice. Uvažujte tenzor energie-hybnosti s nenulovými složkami $T^t_t = T^z_z = -\sigma(r)$, $\sigma(r)$ je funkce souřadnice r. Ukažte, že Einsteinovy rovnice mají tvar

$$R_{rr} = \frac{R_{\varphi\varphi}}{f^2} = 8\pi G\sigma.$$

3.4 Kosmická loď se pohybuje na stabilní kruhové orbitě okolo Schwarzchildovy černé díry o hmotnosti $10^6 M_\odot$; orbita je určena radiální souřadnicí $r = 10GM$

a) Jaký obvod kruhové trajektorie naměří pozorovatel v raketě?

b) Jaká jsou efektivní energie a moment hybnosti L rakety vztažené na jednotku hmotnosti rakety?

c) Jakou periodu oběhu naměří pozorovatel v raketě?

Literatura

Hartle, J. B. (2003). *Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity.* San Francisco: Addison Wesley. ISBN 0-8053-8662-9.

Lightman, A. P., Press, W. H., Price, R. H. a Teukolsky, S. A. (1975). *Problem Book in Relativity and Gravitation.* Princeton, New Jersey: Princeton University Press. ISBN 0-681-08162-X.

Machačík, J. (1998). *Sbírka úloh z obecné teorie relativity*. Univerzita Palackého Olomouc. Dostupné z: `http://muj.optol.cz/~richterek`.

Moore, T. A. (2013). *A General Relativity Workbook*. Mill Valley, California: University Science Books. ISBN 978-1-891389-82-5.

Padmanabhan, T. (1996). *Cosmology and Astrophysics Through Problems*. Cambridge: Cambridge University Press. ISBN 0-524-42783-7.

Raine, D. a Edwin, T. (2009). *Black Holes: An Introduction*. London: Imperial College Press. ISBN 1-84816-382-7.

Schutz, B. F. (1985). *A First Course in General Relativity*. Cambridge: Cambridge Univ. Press.