

Kapitola 1

Paprsková optika

1.1 Přímočaré šíření světla

1.1.1 Úvod do optiky

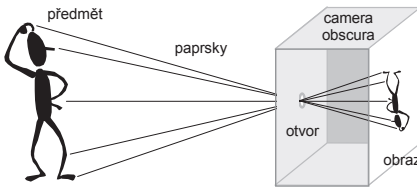
Optika se zabývá jevy souvisejícími se vznikem a šířením světla. Nejstarší poznatky z optiky pocházejí již ze starověku, týkají se přímočarého šíření světla a odrazu světla. Z nich vychází i první fyzikální představa o světle jako o paprscích. Optika byla tehdy neoddělitelně spojena s geometrií a ve středověku byla vyučována jako jediná fyzikální věda na univerzitách pod názvem *katoptrika*. Dnes tuto část optiky nazýváme **paprsková** nebo **geometrická optika**. Objev zákona lomu a pochopení disperze světla umožnily v 17. a 18. století výrobu optických přístrojů, jež pomohly lidstvu poznat tajemství vesmíru i maličkých buněk.

Nové poznatky o interferenci a difrakci světla však bylo možno vysvětlit jen pomocí představy, že světlo je vlnění, proto vzniká v 19. století **vlnová optika**. Rozvoj elektromagnetismu a zvláště objev elektromagnetických vln na konci 19. století vedl k poznání, že světlo je elektromagnetická vlna, která se liší od rádiových vln jen tím, že má mnohem kratší vlnovou délku. Všechny tehdejší poznatky o světle se tak ukázaly být jen důsledkem zákonů pro elektřinu a magnetismus, všechny vlastnosti světla se totiž dají odvodit z Maxwellových rovnic. Tak vzniká **elektromagnetická teorie světla** umožňující pochopit a popsat polarizaci světla, interakci světla s elektrickým a magnetickým polem, s atomy atd. Na počátku 20. století se však objevily další jevy, které ani elektromagnetická optika neuměla vysvětlit, to jsou například jevy související s emisí a absorpcí světla v atomech látky, zářením černého tělesa, laserovým zářením atd. Tyto jevy vysvětluje správně kvantová elektrodynamika a její součást **fotonová optika**.

Započneme náš výklad nejnázornější a současně historicky nejstarší částí optiky, tj. geometrickou optikou.

1.1.2 Paprsek

Geometrická optika je založena na představě, že světlo je tvořeno paprsky. Proto se pro ni někdy používá také termín **paprsková optika**. Paprsky vycházejí ze světelného zdroje a šíří se volným prostorem přímočaře, můžeme si je představit jako určitý svazek polopřímek. Nikdy už nezjistíme, kdo si první uvědomil, že světlo se šíří přímočaře a že paprsek světla definuje v prostoru přímku. Muselo to být ale hodně dávno, protože tohoto faktu využíval jistě už pravěký lovec, když mířil svůj šíp na cíl. Rovněž všechny současné vyměřovací a zaměřovací přístroje využívají přímočarosti paprsku světla. Světelný paprsek je tedy předobrazem a zároveň nejpresnější realizací geometrické přímky v opticky homogenním prostředí.



Temná komora neboli camera obscura, všechny paprsky se kříží v otvoru, ale nijak se tím vzájemně neovlivňují.

Zkušenost dále ukazuje, že pokud se světelné paprsky protínají, nijak se tím navzájem neovlivňují, tj. každý paprsek se šíří nezávisle na ostatních. Důkazem, že křížení paprsků nemá na jejich chod vliv, je například **temná komora** s dírkovou clonou tzv. **camera obscura**.

1.1.3 Světelný zdroj

Zdroj světla si podle geometrické optiky představujeme tak, že každý zářící bod zdroje vysílá všemi směry světelné paprsky, z nichž některé dopadnou do našeho oka přímo, jiné pak až po odrazu či rozptylu na okolních předmětech. Obecně rozlišujeme **bodový zdroj** světla, z něhož vycházejí všechny paprsky radiálně a **plošný zdroj**, u něhož září celý povrch tělesa, takže jednotlivé paprsky jsou vzájemně promíchány a různě se kříží. Příkladem bodového zdroje je vzdálená hvězda a plošného zdroje například bílá stěna nebo povrch Slunce.

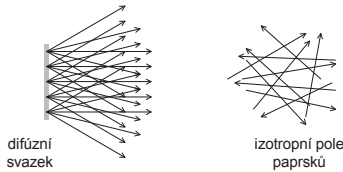
1.1.4 Světelné svazky

Svazek paprsků, které všechny procházejí jedním bodem, se nazývá **homocentrický svazek**. Paprsky vycházející z jediného bodu tvoří **rozbíhavý (divergentní) homocentrický svazek** paprsků. Paprsky, které se naopak sbíhají do jediného bodu a protínají se v něm, tvoří **sbíhavý (konvergentní) homocentrický svazek** paprsků. Tyto svazky tvoří základ **optického zobrazování**, kdy optický přístroj funguje tak, že rozbíhavé paprsky vycházející z nějakého zdroje (například políčka filmu) přetransformuje na sbíhavý svazek paprsků, které tak vytvoří v jiném místě věrný obraz předmětu (například na filmovém plátně).



Divergentní (rozbíhavý) a konvergentní (sbíhavý) homocentrický svazek paprsků a homogenní (rovnoběžný) svazek paprsků.

Někdy se můžeme setkat s **rovnoběžným (homogenním) svazkem** paprsků. Takovému svazku se například bude blížit divergentní svazek paprsků, je-li jejich zdroj dostatečně daleko, neboť divergence paprsků je pak tak malá, že ji můžeme zanedbat a paprsky považovat za rovnoběžné. Nejčastějším případem je ovšem neusměrněný a neuspořádaný **difúzní svazek paprsků**, který produkuje rozlehlý světelný zdroj nebo který vzniká rozptylem světla na velkých difúzních plochách.

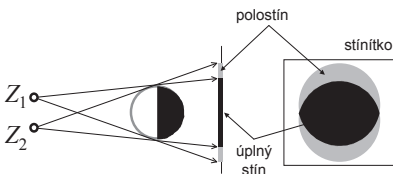


Difúzní (neuspořádaný) svazek paprsků z rozlehlého plošného zdroje a izotropní (všesměrové) pole paprsků, jaké je možno pozorovat například v dutině, jejíž stěny svítí.

Izotropní pole paprsků, kdy paprsky přicházejí ze všech možných směrů zcela náhodně, se pozoruje například v dutině, jejíž stěny mají dostatečnou teplotu (několik tisíc stupňů Celsia). Rovněž reliktní záření má charakter izotropního záření.

1.1.5 Stín a polostín

O přímočarém šíření světla svědčí také existence stínů. Máme-li bodový světelný zdroj, bude neprůhledný předmět vrhat na stínítko ostrý stín odpovídající obrysu tělesa. Geometrickým promítáním můžeme předpovědět tvar stínu a naopak podle stínu můžeme usuzovat na prostorový tvar předmětu.



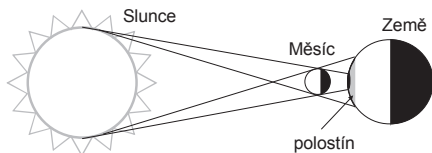
Úplný stín a polostín na stínítku za neprůhledným předmětem osvětleným dvěma zdroji Z_1 a Z_2 .

Neostrý stín se pozoruje tehdy, když zdroj světla není bodový, tj. když je zdroj světla z pohledu stínítka vidět pod konečným úhlem. Každý bod zdroje sám o sobě vytvoří ostrý stín předmětu, ale vůči sobě jsou tyto stíny různě posunuty, což způsobí, že některé body na stínítku budou osvětleny jen částí světelného zdroje a my tak uvidíme **polostín**, zatímco jiné body stínítka nebudou osvětleny vůbec a my uvidíme **plný stín**. Z pohledu stínítka dochází k částečnému nebo úplnému zakrytí zdroje světla stínícím předmětem. To samé se děje při částečném a úplném zatmění Slunce Měsícem.

Dostatečně ostré stíny vrhá i Slunce, ačkoliv není bodovým zdrojem. Slunce se na obloze jeví jako malý zářící kotouček o průměru asi $32'$ a je tedy přibližně stejně veliké jako Měsíc. Rozbíhavost slunečních paprsků proto činí zhruba půl stupně. Teprve jsou-li předměty vrhající stín dostatečně vzdáleny od stínítka, pozorujeme zřetelně polostín i ve slunečním světle. Pokud zanedbáme konvergenci paprsků zdroje, pak předmět rozměru a vrhá na kolmé stínítko stín o stejné velikosti a nezávisle od vzdálenosti d stínítka od předmětu. Pokud je konvergence ϕ paprsků malá, typickým příkladem je Slunce, pak šířka polostínu roste úměrně se vzdáleností d stínítka od předmětu a je rovna $d\phi$, takže rozměr plného stínu b se se vzdáleností d zmenšuje podle vzorce

$$b = a - \phi d.$$

Bude-li předmět o příčné velikosti a ve vzdálenosti $d > a/\phi$, úplný stín vůbec nevznikne. To vysvětluje, proč na zemi obvykle nevidíme stíny elektrických nebo telegrafních drátů, ani stín letadla nebo letícího ptáka. Ze stejného důvodu se také zužuje stín vysokého sloupu a při dostatečné délce stínu se jeho konec může zcela vytratit.



Úplné a částečné zatmění Slunce jako důsledek vzniku úplného stínu a polostínu Měsíce.

Využitím přímočarosti a rovnoběžnosti paprsků Slunce určil ve 3. stol. př. n. l. ERATOSTHENÉS KYRÉNSKÝ poprvé velikost Země. O pár let později určil ARISTARCHOS ZE SAMU vzdálenost a velikost Měsíce. Potřeboval k tomu pouze odhadnout velikost zemského stínu dopadajícího na povrch Měsíce při obyčejném zatmění Měsíce.

Příklad 1.1 V jaké vzdálenosti již nebude sluneční stín drátu o průměru $a = 1$ mm a 1 cm pozorovatelný?

Řešení: Plný stín drátu se ztratí ve vzdálenosti $d > a/\phi \approx 110$ mm respektive 110 cm.

Příklad 1.2 Určete vzdálenost a velikost Měsíce, tak jak to ve 3. stol. př. n. l. učinil Aristarchos, který vyšel z poznatku, že zemský stín vržený na povrch Měsíce má průměr asi 1.5° (tříkrát větší než průměr Měsíce).

Řešení: Kdyby byly paprsky Slunce rovnoběžné, měl by zemský stín na povrchu Měsíce úhlový průměr $\alpha = 2R_Z/a_M$, kde R_Z je poloměr Země a a_M je vzdálenost Měsíce od Země. Vzhledem k rozbíhavosti $\phi_S \approx 0.5^\circ$ slunečních paprsků, bude průměr stínu Země na Měsíci pouze $\beta = \alpha - \phi_S \approx 1.5^\circ$, odtud

$$a_M = \frac{2R_Z}{\beta + \phi_S} \approx 57R_Z \approx 3.6 \times 10^5 \text{ km}.$$

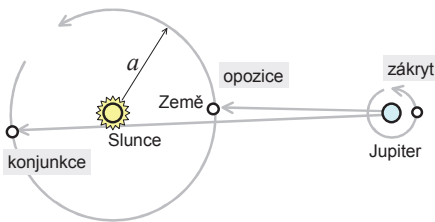
Protože je úhlový rozměr Měsíce znám $\phi_M \approx 0.5^\circ$, mohl Aristarchos odhadnout absolutní velikost Měsíce

$$R_M = \frac{1}{2} a_M \phi_M \approx \frac{1}{4} R_Z \approx 1600 \text{ km}.$$

1.1.6 Rychlost světla

Světlo se šíří vakuem neuvěřitelnou rychlostí $c \approx 300\,000\text{ km/s}$, z Měsíce dorazí na Zem světelný paprsek zhruba za sekundu a ze Slunce zhruba za osm a půl minuty. Rychlost světla hraje důležitou roli nejen v optice, ale ve fyzice vůbec. Především v elektromagnetismu, v teorii relativity, v kosmologii a ve fyzice mikrosvěta. Rychlost světla je totiž rychlost, jakou se šíří veškerá fyzikální interakce a je to zároveň nejvyšší rychlost, kterou se může cokoli hmotného pohybovat. Podle teorie relativity neexistuje žádný objekt, žádná částice ani žádná galaxie, která by se pohybovala rychleji než světlo ve vakuu.

O první pokus určit rychlost světla se pokusil již roku 1607 GALILEO GALILEI. Chtěl změřit dobu, za kterou se dostane světelný paprsek z jednoho kopce na druhý. Tato metoda dobře funguje při měření rychlosti zvuku, ale k určení rychlosti světla je vzhledem k jeho ohromné rychlosti zcela nevhodná. Vždyť jen za krátkou dobu, během níž je člověk vůbec schopen zareagovat na záblesk světla, stačí paprsek oběhnout celou Zeměkouli a to několikrát dokola. Vzhledem k neúspěchu podobných pozemských měření rychlosti světla sílilo mezi vědci přesvědčení, že světlo se šíří okamžitě, tedy nekonečně rychle. Takhle představa ideálně zapadala do právě budovaného systému newtonovské fyziky, kde se předpokládá, že i gravitace působí okamžitě. Teprve až mnohem přesnější měření provedená v 19. století dokázaly, že rychlost světla je konečná.

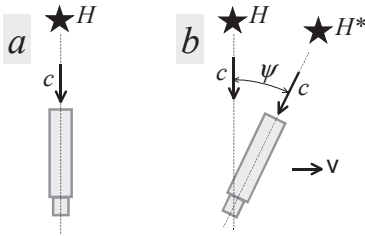


Pozorování zákrytů Jupiterových měsíců

Vzhledem k ohromné rychlosti světla není překvapením, že první odhady rychlosti světla poskytla optice astronomie. Historicky nejstarší odhad patří dánskému astronomu OLE RØMEROVI. Ten si roku 1676 povšiml, že Galileem nedávno objevené Jupiterovy měsíčky neobíhají kolem Jupitera zcela pravidelně, ale že jejich okamžiky zákrytu přicházely zhruba o $\Delta t \approx 11$ minut dříve, než byly předpovězeny, byl-li Jupiter v opozici a naopak o $\Delta t \approx 11$ minut později, když byl Jupiter v konjunkci. Nejjednodušším a jak se později ukázalo i správným vysvětlením tohoto pravidelného předbíhání a opožďování zákrytů bylo prostě započtení faktu, že se světlo šíří meziplanetárním prostorem konečnou rychlostí c a vzdálenost $a \approx 150\,000\,000\text{ km}$ Země od Slunce paprsek urazí právě za oněch jedenáct minut. Pro rychlost světla tak dostal Rømer hrubý odhad $c \approx a/\Delta t \approx 220\,000\text{ km/s}$. Kdyby Rømer použil přesnější údaj $\Delta t \approx 8.5$ minuty, dostal by i přesnější odhad $c \approx 294\,000\text{ km/s}$.

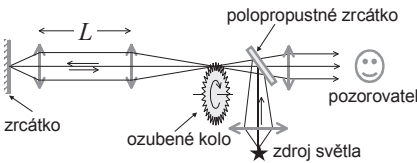
Jiné nepřímé určení rychlosti světla umožnil jev **aberrace světla**, který objevil roku 1727 JAMES BRADLEY. Ten zjistil, že všechny hvězdy zdánlivě opisují během roku na obloze malé elipsy. Jejich zploštění závisí na výšce hvězdy vzhledem k rovině

ekliptiky, velká poloosa všech elips je však stejná a měří $\psi \approx 20''$. Objasnění aberace světla je prosté, hvězdy jsou pochopitelně pořád na svých místech na obloze, ale Země obíhá kolem Slunce s periodou jeden rok. A stejně jako musíme sklápět deštník při chůzi v dešti, tak musí astronomové sklápět své dalekohledy do směru, kterým se řítí naše planeta kosmickým prostorem. Pro aberaci světla, tj. úhel ψ sklonu dalekohledu, platí jednoduchý vzorec $\psi = v/c$, kde $v \approx 30 \text{ km/s}$ je rychlost oběhu Země kolem Slunce. Pro rychlost světla odtud dostaneme odhad $c = v/\psi \approx 301\,000 \text{ km/s}$.



Aberace světla: (a) dalekohled v klidu a (b) dalekohled v pohybu rychlostí v kolmo na paprsek. Hvězda H se jeví pohybuujícímu se pozorovateli (b) v místě H^* , tedy úhlově posunutá o aberaci ψ .

První pozemské měření rychlosti světla se povedlo ARMAND HIPPOLYTE LOUIS FIZEAUOVI až roku 1849. Dráhu paprsku prodloužil na $L \approx 17.3 \text{ km}$ tak, že použil několikanásobného odrazu paprsku na vzdáleném zrcátku a ke zjištění času, za který paprsek urazí vzdálenost L , použil rychle se otáčející ozubené kolo se $Z = 720$ zuby. Pokud se kolo pootočilo o polovinu zubu, odražený paprsek se již nemohl vrátit do oka. K tomu došlo právě při rychlosti $f \approx 12.6$ otáček za sekundu, odtud dostaneme rychlost světla ve vzduchu $c = 2Lzf \approx 315\,000 \text{ km/s}$. Jak již víme, zhruba stejnou hodnotu určili i Rømer a Bradley pro rychlost světla v kosmickém prostoru.



Fizeauův experiment

Významné měření provedl roku 1850 JEAN BERNARD LÉON FOUCAULT, když změřil poprvé rychlost světla ve vodě, a tím ukázal, že je menší než rychlost světla ve vzduchu. Jeho metoda byla podobná Fizeauově, jen místo ozubeného kola použil rotující zrcátko. Tento experiment definitivně pohřbil korpuskulární teorii světla, podle níž měla být rychlost světla ve vodě naopak vyšší než ve vzduchu, a potvrdil tak správnost vlnové teorie světla. Roku 1862 Foucault zpřesnil i rychlost světla ve vzduchu s výsledkem $c \approx 298\,000 \text{ km/s}$.

Rychlost světla je možno hledat i metodami nepřímými, například měřeními dielektrické permitivity ϵ_0 a magnetické permeability μ_0 vakua. Z Maxwellovy teorie totiž plyne, že elektromagnetické vlny a tedy i světlo se šíří ve vakuu rychlostí $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$. Příslušná měření provedli poprvé roku 1857 WILHELM EDUARD WEBER a FRIEDRICH WILHELM GEORG KOHLRAUSH s výsledkem $c \approx 311\,000 \text{ km/s}$.

Rychlost světla byla mnohými experimentátory dále zpřesňována, například ALBERT MICHELSON roku 1926 naměřil $c \approx 299\,796 \text{ km/s}$, až nakonec pozbylo

vlivem neurčitosti samotného etalonu metru další zpřesňování smysl. Bylo proto roku 1983 dohodnuto, že rychlost světla bude definitoricky rovna

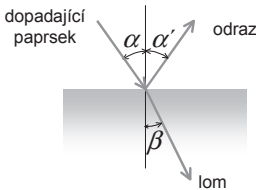
$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$$

a této hodnoty bude zároveň využito k nejpřesnější definici metru. **Metr** je dnes vzdálenost, kterou urazí světlo ve vakuu přesně za $1/299\,792\,458$ sekundy.

1.2 Odraz a lom světla

1.2.1 Odraz světla

Paprsky se však nešíří vždy přímočaře. Jak víme ze zkušenosti, paprsek se na rozhraní dvou různých optických prostředí může odrazit nebo lomit, případně udělat obojí a rozdělit se ve dva různé paprsky. Jistě každý z nás viděl odraz slunečních paprsků od neklidné vodní hladiny nebo zdánlivě zalomené brčko ponořené do sklenice s limonádou. Abychom mohli popsat odraz a lom paprsků, zavádíme úhel dopadu, úhel odrazu a úhel lomu. Všechny tyto úhly měříme od **kolmice dopadu**, což je příčka kolmá k rovině rozhraní a procházející **bodem dopadu** paprsku na rozhraní. Rovina určená dopadajícím paprskem a kolmicí dopadu (normálovou rozhraní) se nazývá **rovina dopadu**.



Odraz a lom paprsku světla, zde α značí úhel dopadu, α' úhel odrazu a β úhel lomu. Všechny tři paprsky leží i s kolmicí dopadu v rovině dopadu.

Na první pohled snadno rozeznáme lesklý hladký povrch od matného nebo drsného. Zatímco od matného povrchu se dopadající paprsek rozptyluje všemi směry (difúzně), od hladkého povrchu se světelný paprsek odráží pouze v jediném dobře definovaném směru, který splňuje zákon odrazu. Jen díky tomu můžeme na lesklém povrchu spatřit odraz své tváře nebo předmětu za námi. Příkladem hladkých povrchů mohou být vyleštěné povrchy kovů, skla nebo hladiny kapalin a všechny takové povrchy mohou sloužit jako zrcadla. Základním kritériem pro hladkost povrchu je, aby jeho drsnost byla podstatně menší než vlnová délka světla.



Difúzní rozptyl na matném povrchu a zrcadlový odraz světla na hladkém povrchu.

Odraz světla na vyleštěných a hladkých površích popisuje **zákon odrazu**, který správně popsal ve své *Katoptrice* již kolem roku 300 př. n. l. EUKLEIDÉS Z ALEXANDRIE. Podle některých současných historiků je autorem Katoptriky spíše mnohem

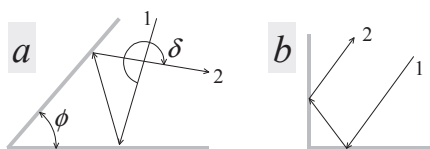
mladší THEÓN Z ALEXANDRIE, poslední vedoucí Alexandrijské knihovny před jejím zničením, který vydával a editoval spisy Eukleida a Ptolemaia ve 4. století našeho letopočtu.

Úhel odrazu je roven úhlu dopadu a odražený paprsek leží v rovině dopadu.

Zákon odrazu sice vychází z pozorování, ale jeho platnost lze podpořit i mechanickými úvahami, neboť stejný zákon platí pro pružný odraz míčku na hladké stěně a platí rovněž pro všechny druhy vlnění. Proto se také fyzikové dlouho nedokázali vzájemně dohodnout, zda je světlo proud částic nebo vlna. Jak se dá odvodit zákon odrazu z Fermatova nebo Huygensova principu, si ukážeme později.

V antice a středověku se jako zrcadel používalo vyleštěných povrchů bronzu, cínu nebo stříbra. Dnešní konstrukce skleněného zrcadla s odraznou kovovou vrstvou pochází až ze 16. století, kdy se touto technikou začala vyrábět *Benátská zrcadla*, odraznou vrstvou zde byl amalgam cínu.¹ Chemický proces, který umožňuje nanesení stříbra na zadní stěnu skleněné desky, objevil roku 1835 JUSTUS VON LIEBIG.

Příklad 1.3 Paprsek dopadá na soustavu zrcadel svírajících úhel ϕ a od obou zrcadel se jednou odrazí. Určete odklon paprsku od původního směru.



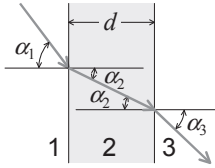
(a) Paprsek 1 se odrazí na soustavě dvou zrcadel svírajících úhel ϕ , tím se jako paprsek 2 odklání od původního směru o deklinaci δ . (b) Při odrazu na dvojici kolmých zrcadel se paprsek 2 vrací v opačném směru než dopadající paprsek 1.

Řešení: Dopadne-li paprsek na první zrcadlo pod úhlem α_1 , pod stejným úhlem se odrazí a na druhé zrcadlo dopadne pod úhlem $\alpha_2 = \phi - \alpha_1$. Celkový odklon paprsku po odrazech na obou zrcadlech je tedy $\delta = (\pi - 2\alpha_1) + (\pi - 2\alpha_2) = 2\pi - 2\phi$. Speciálně pro kolmá zrcadla $\phi = \pi/2$ bude odklon $\delta = \pi$, paprsek se tedy vrací v přesně opačném směru.

1.2.2 Lom světla

Světlo se průchodem přes rozhraní dvou různých prostředí láme, to znamená, že paprsek světla mění ve druhém prostředí směr svého šíření. Lom jako jev byl dobře znám od starověku, nebyl ale znám matematický zákon, který by jej správně popisoval. Na svou dobu velmi přesné tabulky pro lom světla ze vzduchu do vody sestavil již roku 140 proslulý řecký astronom KLAUDIOS PTOLEMAIOS, kterého lom zajímal z důvodu astronomické refrakce, tj. ohybu paprsků v zemské atmosféře. Ptolemaios také zjistil, že lomený paprsek zůstává v rovině dopadu. Teprve roku 1621 objevil zákon lomu WILLEBRORD VAN ROIJEN SNELL, který přišel na to, že poměr sinů úhlu dopadu a úhlu lomu je pro dané rozhraní stálý, tj. že platí $\sin \alpha_2 / \sin \alpha_1 = n_{12}$, kde materiálová konstanta n_{12} se nazývá **relativní index lomu** obou prostředí.

¹ Amalgam je kapalná nebo pevná slitina rtuti s jiným kovem.



Dvojitý lom paprsku na optickém rozhraní 1 – 2 a na optickém rozhraní 2 – 3.

Uvažujme nyní dvě rovnoběžná rozhraní oddělující tři různá optická prostředí. Podle zákona lomu platí na prvním rozhraní $\sin \alpha_2 / \sin \alpha_1 = n_{12}$ a na druhém rozhraní $\sin \alpha_3 / \sin \alpha_2 = n_{23}$. Vynásobením obou rovnic dostaneme rovnici

$$\sin \alpha_3 / \sin \alpha_1 = n_{12} n_{23},$$

tedy opět zákon lomu, který však nezávisí na tloušťce d druhého prostředí. Položíme-li limitně $d \rightarrow 0$, žádné druhé prostředí mezi prvním a třetím vlastně není, takže pak musí současně platit obyčejný zákon lomu $\sin \alpha_3 / \sin \alpha_1 = n_{13}$. Porovnáním obou vzorců dostaneme pro relativní indexy lomu vzorec

$$n_{12} = \frac{n_{13}}{n_{23}}$$

umožňující spočítat relativní index lomu n_{12} dvou prostředí, známe-li relativní indexy lomu n_{13} a n_{23} obou prostředí vzhledem ke třetímu referenčnímu prostředí. Vzorec tedy umožňuje tabelovat indexy lomu $n_1 = n_{13}, n_2 = n_{23}$ atd. vzhledem k jedinému vhodně vybranému prostředí 3. Tím se nabízí být vzduch, ale vzhledem k jeho nestálému složení a hustotě je vhodnější vzít za referenční prostředí rovnou neměnné vakuum. Relativní index lomu vzhledem k vakuu se pak nazývá **absolutní index lomu**. Z definice je absolutní index lomu vakua $n = 1$, a jak ukazují měření, pro všechny ostatní látky pak vychází $n > 1$. Zákon lomu můžeme pomocí absolutních indexů lomu obou prostředí přepsat do tvaru

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Protože dále již nebudeme relativní index lomu používat, dohodneme se, že pod pojmem **index lomu** budeme rozumět absolutní index lomu a budeme jej značit písmenem n . Shrnutím všech těchto poznatků dostaneme **zákon lomu**:

Poměr sinů úhlu dopadu a úhlu lomu je stálý a je roven převrácenému poměru indexů lomu obou prostředí, přitom lomený paprsek leží v rovině dopadu.

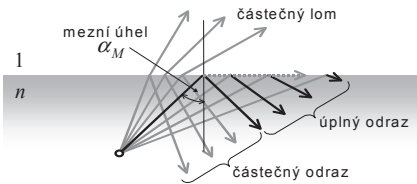
Připomeňme, že úhly dopadu, lomu i odrazu měříme vždy od kolmice dopadu, tj. kolmý dopad odpovídá nulovému úhlu dopadu a dále, protože rovinou dopadu se rozumí rovina určená dopadajícím paprskem a normálou rozhraní, je ze zákona odrazu a lomu zřejmé, že všechny tři paprsky, tj. dopadající, odražený i lomený paprsek leží v jedné rovině.

Jak plyne ze zákona odrazu a lomu, je chod paprsků světla **reverzibilní**, tj. **vratný**. To znamená, že pokud chod paprsku AB na jeho konci B obrátíme zrcátkem o 180° , bude se světlo pohybovat po stejné dráze BA do výchozího bodu A .

Pokud světlo přechází do opticky hustějšího prostředí, tj. $n_1 < n_2$, hovoříme o **lomu ke kolmici**, neboť pak je $\alpha_1 > \alpha_2$. Ke každému úhlu dopadu zde existuje právě jeden úhel lomu. Podobně **lom od kolmice** $\alpha_1 < \alpha_2$ nastává při lomu světla do opticky řidšího prostředí, tj. $n_1 > n_2$. Překročí-li však úhel dopadu α_1 tzv. **mezní úhel** α_M , který splňuje podmínku

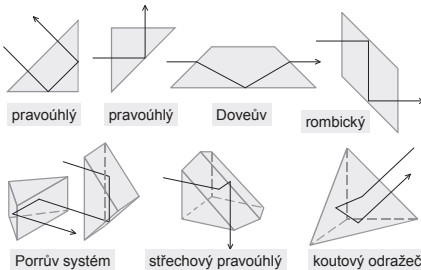
$$\sin \alpha_M = \frac{n_2}{n_1},$$

k žádnému lomu již nedochází a veškeré světlo se na rozhraní odráží zpět do prvního, tj. opticky hustšího prostředí. Jev se nazývá **totální reflexe**, česky **úplný odraz** světla a jako první jej popsal v knize *Dioptrice* astronom JOHANNES KEPLER roku 1611. Pro vodu je mezní úhel $\alpha_M \approx 49^\circ$, pro sklo 41° až 31° a pro diamant 24° .



Úplný a částečný odraz světla při lomu do opticky řidšího prostředí.

Protože při úplném odrazu se od obyčejného skla odráží více světla než od toho nejlepšího kovového zrcadla, využívá se úplného odrazu u odrazných hranolů, polopropustných a polarizačních kostek nebo optických vláken. Mezi nejběžnější odrazné prvky patří pravoúhlý hranol, Doveův hranol, rombický hranol, koutový odražeč, střešové hranoly nebo Porrova soustava.



Některé odrazné hranoly využívající úplný odraz světla.

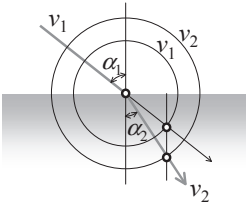
K zákonu lomu je nutno ještě poznamenat, že úhel lomu závisí prostřednictvím indexu lomu také na vlnové délce, tedy na barvě světla. Všechna prostředí kromě vakua totiž vykazují tzv. **disperzi**, tj. závislost indexu lomu $n(\lambda)$ na vlnové délce. Jak uvidíme později, je disperze světla příčinou **barevných vad** optických zobrazovacích soustav.

Orientační hodnoty indexu lomu pro střed viditelného spektra 550 nm uvádí následující tabulka:

prostředí	index lomu	prostředí	index lomu
vakuum	1	korunové sklo	1.52
vzduch	1.00	chlorid sodný	1.54
led	1.31	polystyrén	1.55
voda	1.33	flintové sklo	1.61
etylalkohol	1.36	safír	1.77
tavený křemen	1.46	diamant	2.42

1.2.3 Odvození zákona lomu

První fyzikální interpretaci se pokusil dát zákonu lomu RENÉ DESCARTES ve svém spise *La Dioptrique* z roku 1637. Descartes se domníval, že zákon lomu je podobně jako zákon odrazu důsledkem zachování tečné složky hybnosti částic světla, tj. že platí $v_1 \sin \alpha_1 = v_2 \sin \alpha_2$, kde v_1 a v_2 značí rychlosti částic světla v obou prostředích a že se na rozhraní mění pouze normálová složka rychlosti, která při lomu ke kolmici roste a při lomu od kolmice klesá. Odtud by však plynulo, že rychlost světla je přímo úměrná indexu lomu a že se světlo v látce šíří větší rychlostí než ve vakuu. **Korpuskulární teorie** však neumí rozumně vysvětlit, proč by měla být rychlost světla v daném prostředí stálá a má také vážné problémy s objasněním difrakce a interference světla. Descartes se však nebránil ani vlnové povaze světla, skutečnými stoupenci korpuskulární teorie světla proto byli až PIERRE GASSENDI, ISAAC NEWTON nebo JEAN-BAPTISTE BIOT.



Zákon lomu je podle Descarta důsledkem zachování tečné složky rychlosti světelných částic, tj. $v_1 \sin \alpha_1$ se rovná $v_2 \sin \alpha_2$ a tomu odpovídá i geometrická konstrukce lomeného paprsku.

Současně s korpuskulární teorií světla existovala i konkurenční **vlnová teorie** světla, a to především zásluhou ROBERTA HOOKA a CHRISTIAANA HUYGENSE, podle nichž je světlo podélným vlněním podobně jako zvuk. Z vlnové teorie plynul rovněž správný zákon lomu, ovšem ve tvaru

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{c_1}{c_2}, \quad (1.1)$$

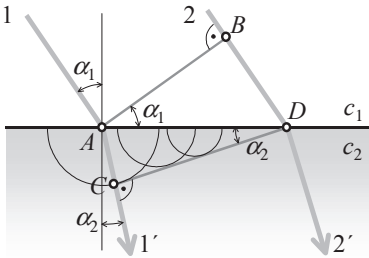
kde c_1 a c_2 značí rychlost světelných vln v obou prostředích. Podle vlnové teorie je tedy rychlost světla c nepřímo úměrná indexu lomu n daného prostředí a platí $c = c_0/n$, kde c_0 je rychlost světla ve vakuu. Teprve zásluhou JEAN BERNARD LÉON FOUCAULTA se roku 1850 definitivně prokázalo, že se světlo ve vodě šíří pomaleji než ve vzduchu, a tudíž že správná je vlnová teorie světla. Rovněž difrakční, interferenční a polarizační jevy plně podporují vlnovou představu světla.

Index lomu tedy souvisí s rychlostí světla vztahem

$$n = \frac{c_0}{c},$$

kde c_0 je rychlost světla ve vakuu. Zkušenost z optiky, že index lomu prostředí je vždy větší než jedna, je tedy ekvivalentní poznatku, že rychlost světla v prostředí je vždy menší než rychlost světla ve vakuu $c \leq c_0$.

Na závěr kapitoly si ještě pro srovnání ukážeme, jak k důležitému zákonu lomu dospívá vlnová teorie, kterou budeme podrobněji probírat až ve vlnové optice. Podle Huygensova *Traité de la Lumière* (Pojednání o světle) z roku 1690 je světlo podélné vlnění podobně jako zvuk, které se šíří v prvním prostředí rychlostí c_1 a ve druhém rychlostí c_2 .



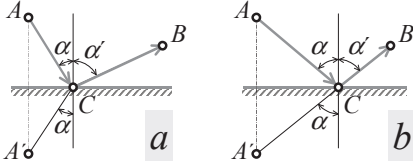
Odvození zákona lomu podle vlnové teorie a Huygensova principu. Paprsek 1 se láme do druhého prostředí jako paprsek 1'. Příslušnou lomenou vlnoplochu CD dostaneme jako obálku elementárních vln šířících se od rozhraní AD do druhého prostředí.

Uvažujme rovinnou světelnou vlnu s vlnoplochou AB , která dopadá na optické rozhraní AD pod úhlem α_1 . Vlnoplochou se zde rozumí, stejně jako u mechanických vln, množina bodů, které mají stejnou fázi. Světelná vlnoplocha AB se láme do druhého prostředí jako vlnoplocha CD . V okamžiku, kdy vlnoplocha AB dorazí do bodu D , se kulová vlna z bodu A již rozšířila rychlostí c_2 do vzdálenosti $|AC| = c_2 \Delta t = |AD| \sin \alpha_2$. Podle Huygensova principu vznikne výsledná lomená vlna složením všech takto vzniklých elementárních sférických vln. Skutečně, jejich obálkou je rovinná lomená vlna šířící se ve směru α_2 . Protože současně platí $|BD| = c_1 \Delta t = |AD| \sin \alpha_1$, můžeme oba vzorce pro $|AC|$ a $|BD|$ podělit, tím se z obou rovnic vykrátí vzdálenost $|AD|$ i čas Δt , a my tak dostaneme zákon lomu (1.1). Směr lomených paprsků najdeme jednoduše jako kolmice k lomené vlnoploše CD . Všimněte si, že k odvození zákona lomu podle vlnové teorie vůbec nepotřebujeme pojem vlnové délky, který bude podrobně vysvětlen až ve vlnové optice.

1.2.4 Héronův princip

HÉRON ALEXANDRIJSKÝ si již kolem roku 60 všiml zajímavého chování světelného paprsku, totiž že se šíří z jednoho bodu do druhého po nejkratší možné dráze. Není-li mezi body A a B překážka, je nejkratší spojnicí přímka, a proto se paprsek světla v homogenním prostředí šíří po přímce AB . Musí-li se ale paprsek AB odrazit od zrcadla, může si k odrazu zvolit libovolný bod C . Délka jeho lomené dráhy ACB bude pochopitelně na volbě bodu C záviset a nejkratší ze všech těchto možných drah vyjde pro bod C takový, že paprsek přitom splní zákon odrazu $\alpha' = \alpha$. Skutečně, dráha paprsku ACB je rovna lomené čáře $A'CB$, kde A' je zrcadlový

obraz bodu A , takže dráha paprsku ACB bude minimální, když bude minimální i délka čáry $A'CB$, což nastane pouze v případě, že čára $A'CB$ bude přímá. Z toho již plyne, že bod C odrazu paprsku musí ležet na přímkce $A'B$, takže pro úhel odrazu musí platit $\alpha' = \alpha$ a navíc odražený paprsek bude ležet v rovině dopadu, což dává dohromady zákon odrazu.

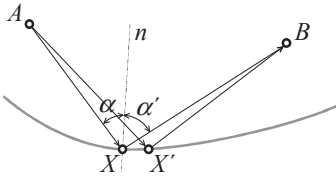


Podle Héronova principu (a) si paprsek AB vybere pro odraz od zrcadla ten ze všech možných bodů C , pro který bude jeho lomená dráha ACB nejkratší, což odpovídá situaci (b), pro kterou platí zákon odrazu.

V případě, že zrcadlo není rovinné, nemusí být dráha paprsku ACB minimální, ale může být někdy také maximální anebo, jako je tomu v případě karteziánských ploch, může být dokonce konstantní. Ve všech těchto případech však platí, že dva infinitezimálně blízké paprsky lišící se v úhlu dopadu o $\delta\alpha$ musejí mít stejnou délku, takže je možno **Héronův princip** zobecnit do tvrzení:

Paprsek si vybere takovou dráhu, jejíž délka s je stacionární, tj. platí $\delta s = 0$.

Symbol δs zde značí variaci, tj. změnu délky s dráhy paprsku při změně polohy bodu dopadu X .



Ilustrace k odvození zákona odrazu podle Héronova principu.

Odvodíme nyní zákon odrazu z Héronova principu. Paprsek vycházející z bodu A se může odrazit na zrcadle v bodě X , takže urazí do bodu B celkovou dráhu $s = |AX| + |XB|$. Pokud by se paprsek odrazil v jiném blízkém bodě X' , změnila by se jeho celková dráha o

$$\delta s = s' - s = |AX'| - |AX| + |X'B| - |XB| \approx |XX'| (\sin \alpha - \sin \alpha'),$$

neboť $|AX'| - |AX| \approx |XX'| \sin \alpha$ a $|XB| - |X'B| \approx |XX'| \sin \alpha'$. Podle Héronova principu však musí být dráha paprsku stacionární, tj. variace jeho dráhy musí být rovna nule $\delta s = 0$, odtud dostaneme pro $|XX'| \neq 0$ podmínku $\sin \alpha = \sin \alpha'$ neboli $\alpha = \alpha'$, což je hledaný zákon odrazu.

1.2.5 Fermatův princip

Héronův princip však přestává platit na rozhraní dvou prostředí, protože zde se paprsek, jak dobře víme, láme a vybere si tudíž dráhu s delší, než je prostá geometrická spojnice jeho krajních bodů $s = |AB|$. Až PIERRE FERMAT našel roku

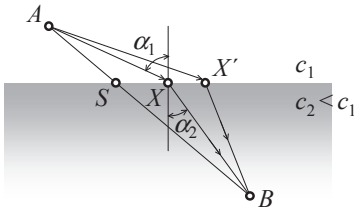
1657 řešení, které je zobecněním Héronova principu. Fermat zjistil, že lom bude správně popsán, když nebudeme zkoumat geometrickou dráhu, ale čas, který paprsek na překonání lomené dráhy AXB potřebuje. Paprsek si totiž vybere tu dráhu, po níž se světlo z bodu A dostane do bodu B za nejkratší možný čas

$$t = \frac{|AX|}{c_1} + \frac{|XB|}{c_2} = \min.$$

Podle **Fermatova principu** tedy ne dráha s , ale čas t jsou určující pro chování paprsku:

Paprsek si vybere dráhu, kterou překoná za stacionární dobu t , tj. pro kterou platí $\delta t = 0$.

Je zřejmé, že Héronův princip je speciálním případem Fermatova principu pro homogenní prostředí $c = \text{konst}$, pak jsou totiž obě podmínky $\delta t = 0$ a $\delta s = 0$ ekvivalentní. Nyní ukážeme, že z Fermatova principu skutečně plyne zákon lomu. Ještě než se pustíme do výpočtu, ukážeme, že správný výsledek je možno kvalitativně předjímat. Je zřejmé, že paprsek AXB ušetří čas tím, že se bude pohybovat více v prostředí, kde má větší rychlost, a méně v prostředí, kde má menší rychlost. Nebude se tedy pohybovat po přímce ASB , kde S značí průsečík přímky AB s rozhraním, ale zalomí se vždy tak, aby reálný bod X zlomu paprsku na rozhraní se posunul od bodu S směrem k tomu z bodů A a B , který se nachází v opticky hustějším prostředí, na našem obrázku je to bod B .



Ilustrace k odvození zákona lomu z Fermatova principu.

A nyní již najdeme zákon lomu exaktně. Uvažujme paprsek jdoucí z bodu A do bodu B a láme se na rozhraní v bodě X . Tuto dráhu urazí za čas

$$t = \frac{|AX|}{c_1} + \frac{|XB|}{c_2}.$$

Pokud by se paprsek lámal v blízkém bodě X' , změnil by se celkový čas šíření paprsku o

$$\delta t = t' - t = \frac{|AX'| - |AX|}{c_1} + \frac{|X'B| - |XB|}{c_2} \approx |XX'| \left(\frac{\sin \alpha_1}{c_1} - \frac{\sin \alpha_2}{c_2} \right),$$

neboť $|AX'| - |AX| \approx |XX'| \sin \alpha_1$ a $|XB| - |X'B| \approx |XX'| \sin \alpha_2$. Protože podle Fermatova principu si paprsek vybere dráhu s nulovou variací $\delta t = 0$, máme odtud pro $|XX'| \neq 0$ podmínku

$$\frac{\sin \alpha_1}{c_1} = \frac{\sin \alpha_2}{c_2},$$

což je hledaný zákon lomu.

Zatím jsme zkoumali pouze případ dvou oddělených homogenních prostředí, ovšem Fermatův princip platí i v **nehomogenním prostředí**, tj. prostředí, jehož index lomu se místo od místa spojitě mění. V takovém prostředí je paprsek obecně zakřivený. Protože rychlost $\widetilde{\text{světla}}$ je nepřímo úměrná indexu lomu, je doba, za kterou paprsek urazí dráhu \widetilde{AB} , rovna výrazu

$$t = \int_A^B \frac{ds}{c} = \frac{1}{c_0} \int_A^B n ds = \frac{l_{AB}}{c_0},$$

kde integrál

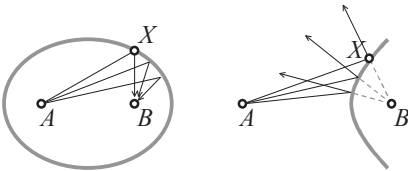
$$l_{AB} = \int_A^B n ds$$

se nazývá **optická dráha** paprsku AB . Optickou dráhou paprsku se tedy rozumí geometrická dráha násobená indexem lomu prostředí v daném místě. Pomocí optické dráhy je možno **Fermatův princip** přeformulovat i tak, že

Paprsek si vybírá takovou trajektorii, jejíž optická dráha $l = \int n ds$ je stacionární, tj. pro kterou platí $\delta l = 0$.

1.2.6 Karteziánské plochy

Vhodně tvarované plochy, které mají tu vlastnost, že dráha všech paprsků AXB spojujících body A a B je stejná, se nazývají **karteziánské plochy**. Bodem X se zde rozumí bod odrazu nebo lomu paprsku na této ploše. Uvažujme body A a B a hledejme karteziánskou plochu pro odraz. Z definice musí hledaná plocha splňovat rovnici $s = |AX| + |XB| = \text{konst}$, což je rovnice rotačního elipsoidu s ohnisky v bodech A a B . Je-li bod B imaginárním obrazem bodu A , tj. leží za odraznou plochou, pak bude mít rovnice karteziánské plochy tvar $s = |AX| - |XB| = \text{konst}$, karteziánskou plochou je tedy rotační hyperboloid s ohnisky A a B . Konečně, leží-li bod A v nekonečnu, bude karteziánskou plochou rotační paraboloid s ohniskem v bodě B .



Karteziánské plochy.

V případě lomu bude rovnice karteziánské plochy $l = n_1 |AX| + n_2 |XB| = \text{konst}$, což je obecně rovnice plochy čtvrtého stupně nazývané Descartův ovál. V případě, kdy se bod A nachází v nekonečnu, se karteziánskou plochou stane rotační elipsoid ($n_1 < n_2$) nebo hyperboloid ($n_1 > n_2$), tj. plocha druhého stupně.

Z výše uvedeného je zřejmé, že karteziánské plochy je možno využít k dokonalému zobrazení jednoho bodu širokým svazkem paprsků (stigmatické zobrazení).

Nejznámějším a nejvýznamnějším případem využití kartéziánské plochy je zřejmě parabolické zrcadlo, které se užívá k zobrazení vzdálených objektů především v astronomii. Jestliže obrátíme chod paprsků, dostaneme reflektor, který vysílá rovnoběžný svazek paprsků z ohniska paraboly do nekonečna.

Asférické parabolické zrcadlo znal již DIOKLES ve 2. stol. př. n. l., ovšem existenci asférických čoček, které podobně zobrazují stigmaticky bez otvorové vady, objevil až RENÉ DESCARTES roku 1626. Vyvinul pak velké ale bohužel marné úsilí k výrobě hyperbolické čočky pro objektiv dalekohledu, o němž se domníval, že bude dávat dokonalý obraz. Tehdejší optická technologie však neumožňovala vyrobit dostatečně kvalitní asférickou čočku, navíc Descartes nevěděl, že otvorová vada je jen jednou z celé řady optických vad, které musí na cestě k výrobě kvalitního dalekohledu odstranit.

1.2.7 Rovnice paprsku

Z Fermatova principu $\delta l = \delta \int_A^B n ds = 0$ lze snadno odvodit obecnou rovnici paprsku AB v nehomogenním prostředí. Připomeňme, že podle variačního počtu je variace z výrazu $\int_A^B L(u, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) du$ rovna nule právě tehdy, když platí **Eulerova rovnice**

$$\frac{d}{du} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = 0. \quad (1.2)$$

Protože $ds = \sqrt{d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}} = \sqrt{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'} du$, kde $\mathbf{r}' = d\mathbf{r}/du$ a kde u je vhodný parametr paprsku, můžeme Fermatův princip přepsat do tvaru

$$\delta l = \delta \int_A^B n ds = \delta \int_A^B n(\mathbf{r}) \sqrt{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'} du = 0.$$

Eulerova rovnice (1.2) pak dává rovnici paprsku

$$\frac{d}{du} \left(\frac{n\mathbf{r}'}{\sqrt{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'}} \right) - \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}} \sqrt{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'} = 0.$$

Pokud zvolíme za parametr u přímo geometrickou délku paprsku s , bude $u = s$ a $|\mathbf{r}'| = 1$, takže **rovnice paprsku** se zredukuje na rovnici

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}} \quad \text{neboli} \quad \frac{d}{ds} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \nabla n. \quad (1.3)$$

V homogenním prostředí je $n = \text{konst}$ a $\nabla n = 0$, takže rovnice paprsku nabude jednoduchého tvaru $d^2\mathbf{r}/ds^2 = 0$. Odtud již vidíme, že paprsky jsou v homogenním prostředí tvořeny přímkami $\mathbf{r} = \mathbf{n}s + \mathbf{r}_0$, kde \mathbf{n} a \mathbf{r}_0 jsou konstantní vektory.

Příklad 1.4 Najděte rovnici paprsku v nehomogenním prostředí popsaném indexem lomu $n(r)$.

Řešení: Vzhledem k symetrii indexu lomu kolem středu O zvolíme polární souřadnice (r, θ) a Fermatův princip přepíšeme do tvaru

$$\delta l = \delta \int_A^B n ds = \delta \int_A^B n \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2} = \delta \int_A^B n(r) \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2} dr = 0.$$

Protože integrand nyní nezávisí explicitně na θ , dává Eulerova rovnice docela jednoduchou rovnici paprsku

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{n(r) r^2 \frac{d\theta}{dr}}{\sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2}} \right) = 0, \quad \text{odtud} \quad \frac{n r^2 \frac{d\theta}{dr}}{\sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2}} = A = \text{konst.}$$

Volíme-li souřadnice (r, θ) tak, aby pro $r = r_0$ bylo $\theta = 0$ a současně $dr/d\theta = 0$, bude konstanta $A = n_0 r_0$, takže po dosazení za A a po úpravě dostaneme

$$\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2 = \frac{n_0^2 r_0^2}{r^2 (n^2 r^2 - n_0^2 r_0^2)}, \quad \text{a odtud} \quad \theta = \pm \int_{r_0}^r \frac{n_0 r_0 dr}{r \sqrt{n^2 r^2 - n_0^2 r_0^2}}. \quad (1.4)$$

Speciálně pro $n = n_0 r_0^2 / r^2$ lze poslední rovnici pohodlně zintegrovat s výsledkem $r = r_0 \cos \theta$, což je rovnice kružnice procházející singulárním středem O . Všechny světelné paprsky tedy mají v tomto nehomogenním prostředí tvar kružnic se společným bodem O .

1.2.8 Z historie zákona lomu

Zákon odrazu popsal správně již EUKLEIDÉS z ALEXANDRIE ve své *Katoptrice* kolem roku 300 př. n. l. HÉRON ALEXANDRIJSKÝ si kolem roku 60 povšiml skutečnosti, že paprsek si vybírá nejkratší dráhu. Zákon odrazu byl znám od starověku, ale zákon lomu světla byl neúspěšně hledán po celá tisíciletí. KLAUDIUS PTOLEMAIOS si nechal vyrobit skleněný půlválec již roku 140 a sestavil první známé tabulky pro lom světla ze vzduchu do vody, ze vzduchu do skla a z vody do skla.

úhel dopadu α	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
β (vzduch/voda)	8°	15.5°	22.5°	29°	35°	40.5°	45.5°	50°
β (vzduch/sklo)	7°	13.5°	19.5°	25°	30°	34.5°	38.5°	42°
β (voda/sklo)	9.5°	18.5°	27°	35°	42.5°	49.5°	56°	62°

Tabulka popisuje lom světla pro úhly dopadu $\alpha \leq 70^\circ$ velmi dobře a nepochybně tedy vychází ze skutečných měření Ptolemaia nebo jeho předchůdců. Současně ale snadno poznáme, že s Ptolemaiovy hodnoty úhlu lomu do vody lze získat přesně z kvadratické funkce

$$\beta = \frac{33}{40}\alpha - \frac{1}{400}\alpha^2,$$

což svědčí o tom, že naměřené hodnoty β byly záměrně trochu upraveny, aby přesně odpovídaly předkládané interpolační funkci. Podobně i lom do skla a z vody do skla jsou přesně popsány kvadratickými formulami

$$\beta = \frac{29}{40}\alpha - \frac{1}{400}\alpha^2 \quad \text{a} \quad \beta = \frac{39}{40}\alpha - \frac{1}{400}\alpha^2.$$

Roku 984 vychází pojednání *O zápalných zrcadlech a čočkách* od ABU SA'D AL-'ALA' IBN SAHLA. Toto roku 1990 znovu nalezené dílo podle některých historiků

naznačuje, že Ibn Sahl možná znal zákon lomu, díky němuž mohl vypočíst nejen správný tvar zápalných zrcadel, ale i zápalných skel (karteziánské plochy!) soustředujících paprsky do jediného bodu. Jeho objev však zapadl a neměl na další vývoj optiky žádný vliv.

První brýle se objevují ve Florencii kolem roku 1270 a první mikroskop zhotovili otec a syn HANS A ZACHARIAS JANSSENOVI kolem roku 1590. Jednoduchý dalekohled – kukátko zhotovil roku 1608 HANS LIPPERSHEY a první dalekohled záhy GALILEO GALILEI. Následkem neznalosti zákona lomu však nikdo v té době netušil, jak takové brýle, natož mikroskop nebo dalekohled, vlastně fungují.

Nalezení matematického zákona lomu bylo ztíženo dvěma málo známými skutečnostmi. Za prvé se obvykle hledal vztah mezi úhlem dopadu α a úhlem zalomení paprsku $\delta = \alpha - \beta$, a tedy ne mezi úhlem dopadu α a úhlem lomu β , jak je dnes zvykem, a za druhé se v antice nepracovalo s funkcí *sinus* (tj. $\sin x$), ale s funkcí *tětiva* oblouku (tj. $2 \sin \frac{x}{2}$). Ani JOHANNES KEPLER správný matematický tvar zákona lomu ještě nenalezl, za Keplerovo řešení se považuje vzorec

$$\delta = \alpha - \beta = \frac{n-1}{n} \frac{\alpha}{\cos \beta}$$

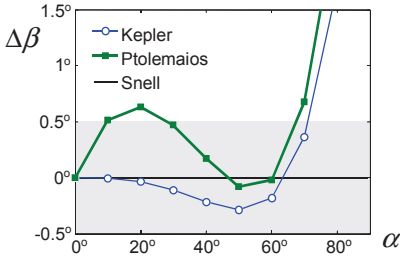
z roku 1604 (*Ad Vitellionem paralipomena*), který podle Keplera nejlépe fitoval naměřená data Witelova. ERAZMUS CIOLEK WITELO latinsky znám jako VITELLIUS uváděl roku 1284 stejná data pro lom světla do skla jako před tisícem let Ptolemaios, a pro lom do vody se jeho tabulka liší jen pro úhly dopadu $\alpha = 10^\circ$ a $\alpha = 80^\circ$, kdy uvádí mírně odlišné hodnoty lomu $\beta = 7.75^\circ$ a $\beta = 50.1^\circ$. Pro srovnání uvedeme společně Ptolemaiovu tabulku, přesné řešení Snellovo a přibližné řešení Keplerovo pro lom do vody, tj. pro index lomu $n = 4/3$.

úhel dopadu α	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
β (Ptolemaios)	8°	15.5°	22.5°	29°	35°	40.5°	45.5°	50°
β (Snell)	7.5°	14.9°	22.0°	28.8°	35.1°	40.5°	44.8°	47.6°
β (Kepler)	7.5°	14.8°	21.9°	28.6°	34.8°	40.3°	45.2°	49.3°

Pro malé úhly se dostane z Ptolemaiova i Keplerova řešení paraxiální aproximace zákona lomu $\beta \approx \alpha/n$. Ta říká, že pro malé úhly je úhel lomu β přímo úměrný úhlu dopadu α , konstantou úměrnosti je zde index lomu n . I s takto málo uspokojivým nástrojem Kepler v *Dioptrice* roku 1611 správně objasňuje funkci čoček a dalekohledu a současně navrhuje moderní dalekohled se spojným okulárem, který předčí holandskou konstrukci objevenou již dříve. Drtivá většina současných dalekohledů, triedrů a zaměřovačů jsou dalekohledy Keplerova typu. První Keplerův dalekohled postavil CHRISTOPH SCHEINER roku 1613. Keplerovi vděčíme i za objev úplného odrazu světla a princip reverzibility chodu paprsku.

Zákon lomu se v učebnicích běžně nazývá Snellův zákon lomu po svém údajném objeviteli WILLEBRORD VAN ROIJEN SNELLOVI. S jeho objevem je to ovšem zamotanější a dodnes není vše zcela vyjasněno. Zákon lomu totiž jako první publikoval, a tak uvedl mezi vědeckou veřejnost RENÉ DESCARTES roku 1637 ve své *La Dioptrique*. Později však CHRISTIAAN HUYGENS obvinil Descarta z toho, že zákon

lomu ukradl Snellovi, jenž se mu se svým objevem svěřil. Huygens tvrdil, že i jemu Snell svůj zákon lomu ukázal ve svých poznámkách a to již roku 1621. Protože Huygens přišel se svým obviněním až po smrti Snella, který tak nemohl potvrdit ani vyvrátit Huygensovo obvinění, má se dost nespravedlivě za to, že Descartes byl plagiátorem, ačkoliv pro to žádné jiné důkazy nejsou. Navíc zákon lomu jako první zřejmě objevil již kolem roku 1600 THOMAS HARRIOT, kterýžto však svůj objev rovněž nikdy nepublikoval.



Srovnání chyby $\Delta\beta$ Keplerova a Ptolemaiova zákona lomu oproti přesnému zákonu Snella pro $n = 4/3$. Podotkněme, že chyba půl stupně je pod hranicí přesnosti tehdejších měření.

Zobecnění Héronova principu podává roku 1657 PIERRE FERMAT. Světlo se podle Fermatova principu nešíří po nejkratší dráze, ale tak aby paprsek překonal dráhu za nejkratší čas.

1.2.9 Planparalelní destička

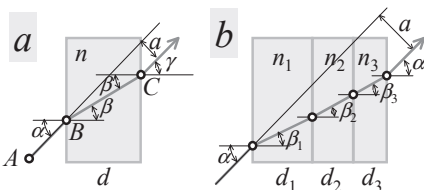
Planparalelní destičkou je obvykle myšlena homogenní skleněná destička stálé tloušťky d a indexu lomu n . Průchodem paprsku ABC planparalelní destičkou se paprsek láme na obou rozhraních, ale výsledný směr paprsku po průchodu destičkou se podle zákonů lomu $\sin \alpha = n \sin \beta$ a $n \sin \beta = \sin \gamma$ nezmění a platí $\gamma = \alpha$. Nastává tedy pouze příčné posunutí paprsku, které najdeme z geometrie destičky

$$a = \frac{d \sin(\alpha - \beta)}{\cos \beta} = d \sin \alpha \left(1 - \frac{\cos \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \right).$$

Natáčením planparalelní destičky je možno paprsek v intervalu $-d < a < d$ rovnoměrně posouvat. Pro malé úhly dopadu platí přibližně

$$a \approx d \frac{n-1}{n} \alpha$$

a pro velké úhly $\alpha \approx 90^\circ$ je $a \approx d$, ovšem pak jen malý zlomek světla projde destičkou, protože většina světla se odrazí na prvním rozhraní.



(a) Průchod paprsku ABC planparalelní destičkou tloušťky d a indexu lomu n a (b) průchod paprsku třemi destičkami.

V případě průchodu paprsku N různými destičkami tloušťky d_k za sebou (a bez ohledu na vzduchové mezery mezi destičkami) bude celkový posun a paprsku roven prostému součtu dílčích posunutí a_k

$$a = \sum_{k=1}^N a_k = \sum_{k=1}^N d_k \frac{\sin(\alpha - \beta_k)}{\cos \beta_k} = \sum_{k=1}^N d_k \sin \alpha \left(1 - \frac{\cos \alpha}{\sqrt{n_k^2 - \sin^2 \alpha}} \right),$$

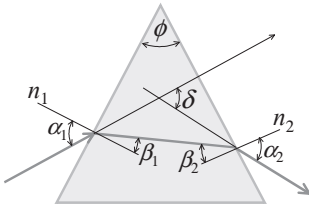
kde pro jednotlivé úhly lomu β_k platí podle zákona lomu $\sin \beta_k = \sin \alpha / n_k$.

1.2.10 Lámavý hranol a klín

Jako **lámavý hranol** se často používá trojboký skleněný hranol, což je **optický hranol** se dvěma vybroušenými a vyleštěnými plochami, které navzájem svírají **lámavý úhel** ϕ . Paprsek mění průchodem přes hranol směr a odklání se od původního směru o celkový úhel

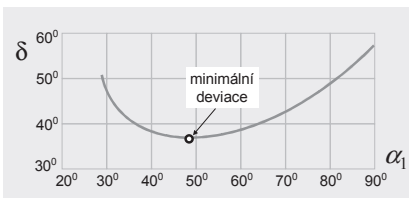
$$\delta = \alpha_1 - \beta_1 + \alpha_2 - \beta_2$$

zvaný **deviace**. Z geometrie našeho hranolu dále platí $\beta_1 + \beta_2 = \phi$ a ze zákona lomu máme rovnice $\sin \alpha_1 = n \sin \beta_1$ a $\sin \alpha_2 = n \sin \beta_2$, kde n je index lomu skla hranolu. Odtud lze spočítat deviaci $\delta(\alpha_1)$ paprsku v závislosti od úhlu α_1 dopadu paprsku na přední stěnu hranolu.



Obecný chod paprsků hranolem o lámavém úhlu ϕ . Úhel δ značí celkovou deviaci paprsku.

Typický průběh deviace pro hranol o lámavém úhlu $\phi = 60^\circ$ a indexu lomu $n = 1.5$ zachycuje obrázek. Všimněte si, že deviace paprsku dosahuje minima, zde je asi $\delta_{\min} \approx 37.2^\circ$. Protože v okolí minima je $d\delta/d\alpha_1 = 0$, paprsky se zde nahušťují a vytvářejí kaustickou plochu, v prošlém světle proto pozorujeme vznik jasné a ostré světelné hrany, čehož se při různých optických měřeních běžně využívá.



Závislost deviace δ na úhlu dopadu α_1 pro hranol o lámavém úhlu $\phi = 60^\circ$ a indexu lomu $n = 1.5$. Jak je patrné z obrázku, minimální deviace $\delta \approx 37.2^\circ$ se dosahuje pro $\alpha_1 \approx 48.6^\circ$.

Najdeme matematickou podmínku minimální deviace paprsku. Za tímto účelem zdiferencujeme všechny výše uvedené rovnice a pomocí nich vyjádříme diferenciál

$d\delta$ jako funkci diferenciálu $d\alpha_1$. Protože $\delta = \alpha_1 + \alpha_2 - \phi$, máme nejprve

$$d\delta = d\alpha_1 + d\alpha_2,$$

protože $\cos \alpha_2 d\alpha_2 = n \cos \beta_2 d\beta_2$ a $d\beta_1 + d\beta_2 = 0$ máme dále

$$d\delta = d\alpha_1 + n \frac{\cos \beta_2}{\cos \alpha_2} d\beta_2 = d\alpha_1 - n \frac{\cos \beta_2}{\cos \alpha_2} d\beta_1$$

a protože $\cos \alpha_1 d\alpha_1 = n \cos \beta_1 d\beta_1$, máme nakonec

$$d\delta = \left(1 - \frac{\cos \beta_2 \cos \alpha_1}{\cos \alpha_2 \cos \beta_1} \right) d\alpha_1.$$

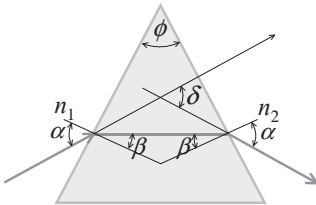
Protože minimální deviaci dostaneme v případě, kdy bude derivace deviace nulová $d\delta/d\alpha_1 = 0$, máme z poslední rovnice podmínku

$$\frac{\cos \beta_2 \cos \alpha_1}{\cos \alpha_2 \cos \beta_1} = 1.$$

Tuto podmínku umocníme na druhou a pomocí zákonů lomu z ní odstraníme úhly α_1 a α_2 , tak dostaneme po úpravě nakonec docela jednoduchou rovnici $\sin^2 \beta_1 = \sin^2 \beta_2$, která má pro $\beta_{1,2}$ z prvního kvadrantu jediné řešení $\beta_1 = \beta_2$, kterému odpovídá i stejné $\alpha_1 = \alpha_2$. Dokázali jsme tímto, že deviace paprsku bude nejmenší při tzv. **souměrném průchodu** paprsku hranolem, kdy je $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ a $\beta_1 = \beta_2 = \beta = \frac{1}{2}\phi$, a pro deviaci platí

$$\delta = 2\alpha - \phi, \quad \text{kde} \quad \sin \alpha = n \sin \frac{\phi}{2}. \quad (1.5)$$

Vzorec (1.5) pro **minimální deviaci** pochází již z roku 1670 od ISAACA NEWTONA.



Souměrný chod paprsků hranolem odpovídá minimální deviaci δ paprsku.

Pro malé lámavé úhly hovoříme o hranolu jako o **optickém klínu**. Na rozdíl od optického hranolu, deviace paprsků v optickém klínu nezávisí na úhlu dopadu paprsku na přední stěnu, ale pouze na lámavém úhlu ϕ optického klínu a platí

$$\delta = (n - 1) \phi.$$

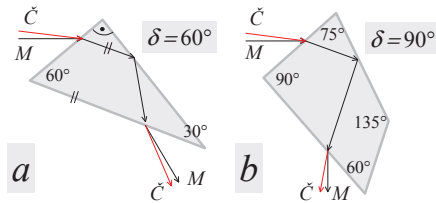
Skutečně, dosadíme-li podle zákonů lomu $\alpha_1 = n\beta_1$ a $\alpha_2 = n\beta_2$ pro malé úhly do vzorce pro deviaci $\delta = \alpha_1 + \alpha_2 - \phi$, dostaneme výše uvedený výsledek $\delta = n\beta_1 + n\beta_2 - \phi = (n - 1) \phi$, který na α_1 nezávisí.

Je nutné poznamenat, že deviace paprsku závisí na vlnové délce světla, proto se hranol používá jako **disperzní prvek** například ve spektroskopii ke spektrálnímu rozkladu světla. Lámací hranol je možno využít také k měření indexu lomu skla nebo jiných optických materiálů vybroušených do tvaru trojbokého hranolu. Protože deviaci δ dokážeme změřit mnohem přesněji než jednotlivé úhly α_1 a α_2 , otáčíme hranolem upevněným na goniometrickém stolku tak dlouho, až nalezneme polohu, při níž je deviace paprsku nejmenší. V tom okamžiku je zřejmě chod paprsku hranolem souměrný, takže platí vztah (1.5). Změříme-li dále lámavý úhel hranolu ϕ , můžeme snadno vypočítat index lomu hranolu podle Fraunhoferova vztahu

$$n = \frac{\sin \frac{1}{2}(\phi + \delta)}{\sin \frac{1}{2}\phi} \quad (1.6)$$

plynoucího z rovnic (1.5). Pokud měříme deviaci s přesností na obloukové vteřiny, bude chyba v určení indexu lomu řádu $\Delta n \approx 10^{-5}$.

Pro některé aplikace může být vhodný disperzní hranol, který dává stálou minimální deviaci pro paprsky všech barev. Příkladem je **Abbeho hranol** (ERNST ABBE), který sestává z trojbokého hranolu s úhly 30° , 60° a 90° a má minimální deviaci $\delta = 60^\circ$ nebo **Pellin-Brocův hranol** (PHILIPPE PELLIN, ANDRÉ BROCA), který sestává ze čtyřbokého hranolu s úhly 90° , 75° , 135° a 60° a má minimální deviaci $\delta = 90^\circ$. Hranol je určen především k oddělení určité vlnové délky ze svazku obsahujícího několik vlnových délek pouhým natočením hranolu, poloha vstupního a výstupního paprsku se přitom nijak nemění. Tyto hranoly se používají například ve spektroskopii nebo nelineární optice. Díky vnitřnímu úplnému odrazu se disperze při vstupním a výstupním lomu paprsku vzájemně vyruší a celková deviace paprsku zůstane beze změny.

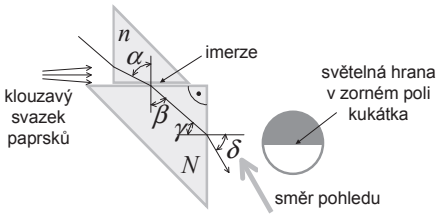


Chod paprsků (a) Abbeho hranolem a (b) Pellin-Brocůvým hranolem.

Připomeňme, že vedle lámavých hranolů se v optice hojně používají odrazné hranoly, které využívají úplného odrazu světla a nahrazují zrcátka. Jsou sice těžší než zrcátka, mají však vyšší odrazivost, snáze se justují a mají delší životnost.

1.2.11 Pulfrichův refraktometr

Jiným běžným přístrojem užívaným k měření indexu lomu skla je **refraktometr**, který navrhl roku 1888 CARL PULFRICH. Sestává z pravoúhlého hranolu ze známého skla o indexu lomu N , na který se přikládá (zhruba) pravoúhlý hranol z neznámého skla o indexu lomu $n < N$. Mezi oba hranoly se přidává imerze a spoj se osvětlí klouzavým svazkem paprsků. Některé paprsky projdou měřeným hranolem, imerzí a pomocným hranolem ven.



Pulfrichův refraktometr: Světlo dopadá na přístroj zleva, tečné paprsky $\alpha \rightarrow 90^\circ$ tvoří v zorném poli refraktometru ostrou hranu, z níž se pohodlně odečítá úhel δ .

Uvažujme jeden takový paprsek, který dopadá na rozhraní měřený hranol – imerze pod úhlem α a láme se do pomocného hranolu pod úhlem β , pro který platí $n \sin \alpha = N \sin \beta$. Dále dopadá tento paprsek na rozhraní pomocný hranol – vzduch pod úhlem $\gamma = 90^\circ - \beta$ a láme se ven do vzduchu pod úhlem δ , pro který platí podle Snellova zákona $N \sin \gamma = \sin \delta$. Odtud dostaneme

$$\sin \delta = N \sin \gamma = N \cos \beta = \sqrt{N^2 - n^2 \sin^2 \alpha}.$$

Protože $\alpha \leq 90^\circ$, bude mít svazek paprsků vystupujících z refraktometru hranu $\sin \delta \geq \sqrt{N^2 - n^2}$, jejíž polohu δ lze pohodlně odečíst na stupnici gonimetru s přesností na obloukové vteřiny. Z ní se pak určí index lomu neznámého skla podle předpisu

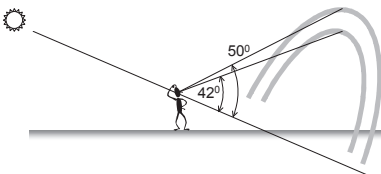
$$n = \sqrt{N^2 - \sin^2 \delta}$$

s přesností až na $\Delta n \approx 10^{-5}$. Součástí refraktometru jsou rtuťová a kadmiová výbojka, takže přístroj rovnou měří indexy lomu pro příslušné spektrální čáry.

1.3 Atmosférická optika

1.3.1 Duha

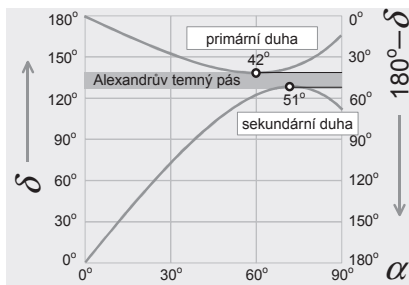
Jedním z nejkrásnějších přírodních úkazů je **duha**, která vzniká rozkladem slunečních paprsků na kapkách deště. Poloměr oblouku duhy měří asi 42° a pozoruje se vždy na opačné straně od Slunce, pochopitelně jen pokud tam zrovna prší. Duha sestává z několika barevných pruhů, vnitřní okraj duhy je modrý a vnější je červený. Duha jako stvrzení boží smlouvy (*Mojžíš*) i příslib lepších časů (*Noe*) je zmiňována již ve *Starém zákoně*.



Primární a sekundární oblouk duhy vzhledem ke Slunci a pozorovateli.

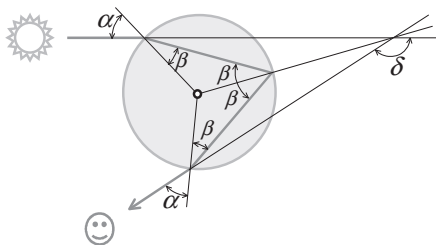
Při dobrých atmosférických podmínkách se pozoruje i méně jasná sekundární duha s opačným pořadím barev, její oblouk je také o něco větší a má poloměr asi 51° . Duha je pozorovatelná, jen když je Slunce dostatečně nízko nad obzorem,

nejlépe tedy k večeru a spíše na jaře a na podzim než v létě. Slunce totiž musí být nejvýše 42° nad obzorem, aby se alespoň kousek oblouku duhy objevil nad obzorem. Ze stejného důvodu není možno z povrchu země nikdy vidět duhu celou, ale jen její část, zato z ledadla nebo z balónu je možno klidně spatřit duhu celou.



Deviace δ paprsku v kapce vody v závislosti na úhlu dopadu α . Lokální extrémů obou křivek odpovídají jednotlivým obloukům duhy o poloměrech 42° a 51° .

Matematicky správně popsal vznik duhy RENÉ DESCARTES ve své *La Dioptrique* z roku 1637. Mohl těžit z toho, že měl jako první k dispozici správný zákon lomu. Descartes tak objasnil, proč má **primární oblouk** duhy právě poloměr 42° a proč **sekundární oblouk** měří 51° . Ovšem vznik barev a jejich pořadí v duze správně vysvětlil až ISAAC NEWTON roku 1670. Popis vzniku duhy lomem a odrazem světla podal nezávisle na Descartovi roku 1648 i JAN MAREK MARCI ve svém spise *Thaumantias, aneb spis o nebeském oblouku, přirozené podstatě jeho barev, vzniku a příčinách*. Marci konal i pokusy s hranolem a dvacet let před Newtonem zjistil, že bílé světlo se na něm rozkládá na duhové barvy, protože úhel lomu je pro jednotlivé barvy různý.



Chod paprsku světla v kapce vody při jednom vnitřním odrazu $m = 1$. Zde α značí úhel dopadu, β úhel lomu a δ výslednou deviaci paprsku.

Jak již bylo řečeno, duha vzniká rozkladem slunečních paprsků v kapce vody. To je možno názorně dokázat tak, že sluneční světlo necháme procházet skleněnou baňkou tvaru koule naplněnou vodou. Na rozměru kapky totiž nezáleží, pouze musí mít sférický tvar a tuto podmínku malé kapky deště velmi dobře splňují. Pečlivý teoretický rozbor lomu paprsků na sférické kapce ukazuje, že paprsky dopadající na povrch kapky pod různými úhly dopadu α se lámou různě, takže jejich deviace δ po projití kapkou po jednom vnitřním odrazu klesá od 180° do 138° , a pak zase roste až k hodnotě 165° . Všechny prošlé paprsky se tedy vlastně vracejí a vyplňují kužel paprsků s vrcholovým úhlem $180^\circ - 138^\circ = 42^\circ$, což je právě poloměr primární duhy, přičemž okraj svazku odpovídá minimální deviaci a maximálnímu nahuštění paprsků, takže příslušný oblouk je zřetelně nejjasnější. Podobně v pří-

padě dvojitého vnitřního odrazu v kapce roste deviace paprsku od 0° do 129° , a pak zase klesá k hodnotě 112° . Část paprsků se tedy vrací a jasný oblouk o poloměru $180^\circ - 129^\circ = 51^\circ$ odpovídající minimální deviaci pak pozorujeme jako sekundární oblouk duhy.

Sluneční paprsek dopadá na povrch sférické kapky pod úhlem α a láme se do ní pod úhlem β . Paprsek se na vnitřním povrchu kapky obecně m krát odrazí, a teprve pak se láme a vychází z kapky ven. Celková odchylka paprsku od původního směru je tedy rovna

$$\delta = (\alpha - \beta) + m(\pi - 2\beta) + (\alpha - \beta) = m\pi + 2\alpha - 2(1 + m)\beta.$$

Minimální deviaci najdeme z podmínky $\delta' = 2 - 2(1 + m)\beta' = 0$, kde derivujeme podle α . Dostaneme tak rovnici $\beta' = 1/(1 + m)$ a vzhledem k zákonu lomu $\sin \alpha = n \sin \beta$ odtud po úpravě vyjde

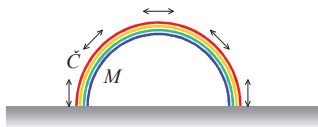
$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{(1 + m)^2 - 1}}, \quad \cos \beta = \frac{1 + m}{n} \sqrt{\frac{n^2 - 1}{(1 + m)^2 - 1}}.$$

Primární oblouk duhy dostaneme pro jeden vnitřní odraz $m = 1$. Zvolíme-li pro červené světlo $n \approx 1.33$, dostaneme $\delta \approx 137.5^\circ$. Odtud je poloměr červeného oblouku duhy roven $180^\circ - \delta \approx 42.5^\circ$. Podobně pro fialové světlo $n \approx 1.34$ dostaneme $\delta \approx 138.9^\circ$, odtud je poloměr fialového oblouku duhy roven $180^\circ - \delta \approx 41.1^\circ$ a je tedy menší než červený oblouk. Šířka duhy by měla být asi 1.5° , ale protože Slunce není bodový zdroj světla, ale zdroj o velikosti asi 0.5° , bude duha trochu rozmazaná a tedy i o něco širší, tj. asi 2° široká.

Sekundární oblouk duhy dostaneme podobně pro dva vnitřní odrazy $m = 2$, pro červené světlo vyjde $\delta \approx 230.1^\circ$, odtud je poloměr červeného oblouku duhy roven $\delta - 180^\circ \approx 50.1^\circ$. Podobně pro fialové světlo dostaneme $\delta \approx 232.7^\circ$, odtud je poloměr fialového oblouku duhy roven $\delta - 180^\circ \approx 52.7^\circ$ a je tedy větší než červený oblouk. Šířka oblouku je tedy asi 3° . Oba oblouky duhy jsou k sobě přivráceny svými červenými konci spektra. Mezi oběma oblouky se nachází temnější oblast zvaná *Alexandřův temný pás*, pojmenovaná po ALEXANDRU Z AFRODISIE, který jej poprvé popsal roku 200.

Jako zajímavost můžeme ještě uvést, že na Venuši by oblouky duhy měřily 29° a 76° a na Titanu 49° a 39° (všimněte si převráceného pořadí oblouků), neboť mraky na Venuši mají složení zhruba 75 % kyselina sírová a 25 % voda ($n \approx 1.44$), zatímco na Titanu převládá metan ($n \approx 1.29$).

Z pohledu geometrické optiky tvar duhy nezávisí na velikosti kapek vody, stačí, že jsou sférické. Pokud však budou kapky příliš malé, dochází na nich k ohybu světla a barvy duhy se rozostřují. Ohyb paprsků je možno odhadnout vzorcem $\psi \approx \lambda/D$, kde λ je vlnová délka světla a D průměr kapek. Pro kapky o průměru $D = 1$ mm tak dostaneme rozmazání $\psi \approx 2'$ a pro kapky o průměru $D = 0.1$ mm již $\psi \approx 20'$. Ve druhém případě již barvy v duze prakticky zřádné nejsou, zato se objevují šedé vnitřní interferenční oblouky.

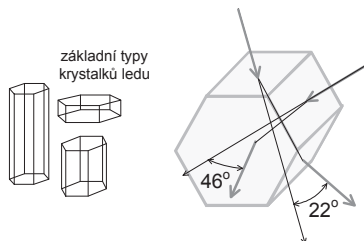


Kmitosměr polarizace duhy.

Protože úhel dopadu paprsků tvořících duhu $\alpha \approx 60^\circ$ je relativně blízký Brewsterově úhlu $\alpha_B \approx 53^\circ$, je světlo duhy silně polarizováno. Stupeň polarizace primární duhy dosahuje 94 % a sekundární 82 %. Kmitosměr polarizace duhy je dán azimutálním směrem, tedy směrem tečným k samotnému oblouku duhy. Pojmy ohyb a polarizace budou podrobně vysvětleny v dalších kapitolách.

1.3.2 Halo

Vzácněji můžeme v atmosféře pozorovat další optické jevy. Například můžeme spatřit kolem Slunce nebo Měsíce tzv. **halo**, tj. část nebo dokonce celý jasný kruh s duhovými okraji a poloměrem asi 22° a 46° . Název jevu pochází z řeckého slova *halon* (mlat), halo totiž připomíná dobyt看em vyšlapaný kruhový mlat při pohonu žentouru. Halové jevy mají původ v lomu na náhodně orientovaných šestihranných krystalcích ledu. V případě lomu mezi dvěma plochami krystalu svírajícími úhel $\phi = 60^\circ$ dostaneme ze vzorce (1.5) minimální deviaci $\delta \approx 21.8^\circ$, neboť index lomu ledu je zhruba $n \approx 1.31$. Podobně pro lom mezi plochami svírajícími lámavý úhel $\phi = 90^\circ$ dostaneme minimální deviaci $\delta \approx 45.7^\circ$.



Lom paprsků v hexagonálních krystalcích ledu dává vzniknout halovým jevům.

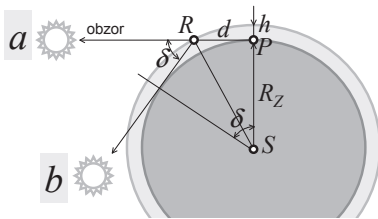
Je-li Slunce v zimě nízko nad obzorem, je možno pozorovat tzv. **parhelia**, dvě jasné zářící skvrny posazené horizontálně symetricky kolem Slunce ve vzdálenosti 22° . I tento jev má příčinu v lomu na krystalcích ledu, které však všechny musejí být zorientovány svou osou převážně svisle dolů.



Rodina halových jevů je velmi rozvětvená, zdaleka ne všechny halové jevy jsou vidět současně jako na tomto obrázku: (1) obě parhelia, (2) malé halo, (3) velké halo, (4) horní dotykový oblouk, (5) Parryho oblouk, (6) cirkumzenitální oblouk a (7) horizontální parhelický oblouk.

1.3.3 Soumrak a rozptyl světla v atmosféře

Jistě jste si všimli, že bezprostředně po západu Slunce nenastává ihned tma, ale nejprve pozorujeme **soumrak**. Soumrak dělíme na občanský, nautický a astronomický. **Občanský soumrak** nastává, když Slunce klesne 6° pod obzor. V tom případě je však pro astronomy ještě stále hodně světla, osvětlení od oblohy je zhruba $E \approx 3 \text{ lx}$. **Nautický soumrak** nastává tehdy, když Slunce klesne 12° pod obzor a **astronomický soumrak** nastává až při poklesu Slunce 18° pod obzor, kdy činí osvětlení od jasné oblohy $E \approx 6 \times 10^{-4} \text{ lx}$. Pokud Slunce neklesne ani o půlnoci pod obzor o více než 7° , hovoříme o tzv. **bílých nocích**. To může na severní polokouli nastat pouze v době kolem letního slunovratu v místech se zeměpisnou šířkou $\phi > 60^\circ$.



Ilustrace k výpočtu (a) dráhy d paprsku v atmosféře o výšce h , když je Slunce na obzoru a (b) úhlu δ Slunce pod obzorem, kdy ještě poslední paprsky Slunce osvětlují atmosféru v místě R viditelném pozorovatelem P na povrchu Země.

Příčinou postupného stmívání je rozptyl² slunečních paprsků v horních vrstvách atmosféry. Úhel δ , o který musí Slunce zapadnout pod obzor, abychom už z bodu P nespatriili ani jeho paprsky rozptýlené v bodě R ve výšce h , spočteme podle vzorce

$$\cos \frac{\delta}{2} = \frac{R_Z}{R_Z + h}, \quad \text{odtud} \quad \delta \approx \sqrt{\frac{8h}{R_Z}},$$

kde R_Z je poloměr Země. Například pro $h \approx 9 \text{ km}$, vyjde $\delta \approx 6^\circ$ a pro $h \approx 80 \text{ km}$, vyjde $\delta \approx 18^\circ$.

Při západu i východu Slunce (a někdy i Měsíce) můžeme pozorovat, jak sluneční kotouč tmavne a barví se do oranžova, červena až ruda. Jindy pozorujeme tzv. **červánky**, tj. mraky kolem zapadajícího Slunce, které jsou od něj zbarveny do červena. Příčinou obou jevů je rozptyl světla v atmosféře. Protože z celého spektra je rozptylováno nejvíce modré světlo (podle Rayleighova zákona je rozptyl nepřímo úměrný čtvrté mocnině vlnové délky světla), skoro žádný modrý a jen málo červených paprsků dorazí do našeho oka. Ve dne není rozptyl slunečních paprsků tak patrný, protože dráha paprsků atmosférou je mnohem kratší $d \approx h \approx 9 \text{ km}$ než při západu Slunce, kdy je zhruba rovna $d \approx |PR| \approx \sqrt{2R_Z h} \approx 340 \text{ km}$.

Taktéž **modrá barva oblohy** má původ v rozptylu slunečních paprsků v atmosféře. Jak již bylo řečeno výše, nejvíce jsou rozptylovány modré paprsky, a proto se nám zdá obloha modrá. Rozptyl světla může být způsoben mikroskopickými nečistotami, ale především je způsoben termálními fluktuacemi v koncentraci molekul vzduchu. Modrá barva oblohy tak vlastně dokazuje, že vzduch se skládá z jednotlivých molekul. Rozptyl slunečního světla v atmosféře nedovolí ve dne pozorovat

²Rozptyl světla bude probrán později.

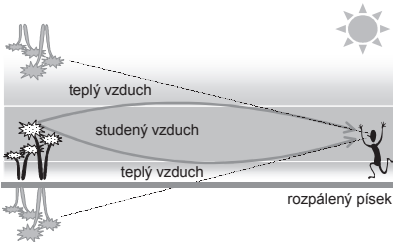
ani ty nejjasnější hvězdy. Naopak na Měsíci, kde není žádná atmosféra, je obloha naprosto černá, a můžeme tam hvězdy pozorovat ve dne stejně jako v noci.

1.3.4 Spodní a svrchní zrcadlení

Dosud jsme předpokládali, že vzduch je opticky natolik homogenní prostředí, že se v něm paprsky šíří přímočaře. To není tak úplně pravda, protože vzduchu s výškou ubývá a index lomu klesá. I když jde o nepatrné změny indexu lomu, může být i tato malá změna především pro horizontální paprsky velmi významná. Pro závislost indexu lomu n na hustotě vzduchu ρ platí dobře vzorec

$$\frac{n - 1}{n_0 - 1} = \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0} \frac{T_0}{T}, \quad (1.7)$$

kde p je tlak a T absolutní teplota vzduchu. Indexem nula jsou zde označeny příslušné veličiny popisující atmosféru u povrchu země. Vzhledem k malé optické hustotě vzduchu $n_0 - 1 \approx 2.7 \times 10^{-4}$ je za normálních atmosférických podmínek také gradient indexu lomu velmi malý $\nabla n \approx -2.5 \times 10^{-5} \text{ km}^{-1}$ a uplatní se tedy jen u kilometry dlouhých paprsků. Za vhodných atmosférických podmínek se však může optická nehomogenita vzduchu stát vlivem výrazného teplotního gradientu stokrát až tisíckrát větší, a na vrstvách studeného vzduchu pak může docházet i k úplnému odrazu světla, tj. ke spodnímu nebo svrchnímu zrcadlení a dalším zajímavým jevům.



Za vznik fata morgány je zodpovědný úplný odraz světla na rozhraní studeného a teplého vzduchu.

Spodní zrcadlení se pozoruje na vrstvě horkého přízemního vzduchu například nad odpoledním Sluncem rozehřátým pouštním písekem, betonovým letištěm nebo asfaltovou dálnicí. Spodní zrcadlení je možno pozorovat také v polárních oblastech ve vrstvě teplejšího vzduchu nad ještě relativně teplým mořem. Obraz je převrácený a neklidný, jde obvykle o odraz oblohy a připomíná rozčeřenou hladinu jezera. Jev může být nebezpečný zvláště pro poutníky v poušti, neboť příslib vzdáleného jezera je jen přeludem, který se od nich vzdaluje právě tak rychle, jako se k němu přibližují.

Vzácnější **svrchní zrcadlení** se pozoruje spíše ráno, kdy je vzduch při zemi výrazně chladnější než vyšší vrstvy atmosféry nebo při výrazné teplotní inverzi. Díky svrchnímu zrcadlení je možno spatřit nad obzorem převrácené obrazy vzdálených hor, budov nebo lodí, které jsou jindy ukryté pod obzorem. Výjimečně se mohou oba typy zrcadlení kombinovat a vznikat mnohonásobné obrazy převrácené i přímé. Těmto vzácným přeludům se také říká **fata morgána**, podle čarodějné víly *Morgany*, mýtické nehodné sestry anglického krále Artuše. Spodním a svrchním zrcadlením lze vysvětlit mnoho bájí a legend, od biblického Mojžíšova přechodu

Rudého moře suchou nohou, přes zkazky o Bludném nebo spíše Létajícím Holanďanovi, až po četné případy létajících talířů. Také různé mořské a jezerní obludy lze vysvětlit deformací obrazu známých mořských tvorů u hladiny moře.

Za jakých podmínek může zrcadlení na nehomogenní vrstvě vzduchu nastat? Má-li se uplatnit úplný odraz světla na rozhraní vrstev vzduchu o indexu lomu n_1 a n_2 , musí paprsek dopadat na rozhraní pod úhlem α větším, než je úhel mezní, musí tedy platit $\sin \alpha > n_2/n_1$. Pokud místo úhlu dopadu zavedeme pro naše úvahy vhodnější doplňkový úhel $\beta = 90^\circ - \alpha$, má podmínka tvar $\cos \beta > n_2/n_1$. Za předpokladu $\beta \ll 1$ platí dobře aproximace $\cos \beta \approx 1 - \frac{1}{2}\beta^2$, takže podmínku pro úplný odraz můžeme přepsat do tvaru

$$\beta < \sqrt{2(n_1 - n_2)}.$$

Konečně použitím vzorce (1.7) pro $p \approx p_0$ přepíšeme podmínku do tvaru

$$\beta < \sqrt{2(n_0 - 1) \left(\frac{T_0}{T_1} - \frac{T_0}{T_2} \right)} \approx \sqrt{\frac{2(n_0 - 1) \Delta T}{T_0}},$$

kde $\Delta T = T_2 - T_1$ značí rozdíl teplot příslušných vrstev vzduchu, $T_0 \approx 300$ K průměrnou teplotu a $n_0 \approx 1.0003$ průměrný index lomu. Odtud pak je

$$\beta < 4.9' \sqrt{\Delta T},$$

kde za ΔT dosazujeme v $^\circ\text{C}$ nebo K . Například pro teplotní skok $\Delta T \approx 10^\circ\text{C}$ musí být $\beta < 15'$. Vzhledem k obvyklé výšce očí pozorovatele nad teplotním rozhraním $h \approx 160$ cm to znamená, že ke spodnímu zrcadlení v tomto případě dochází až ve vzdálenosti $d > h/\beta \approx 360$ m.

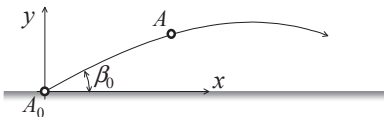
1.3.5 Paprsek v nehomogenní atmosféře

Hledejme nyní trajektorii paprsku v atmosféře se stálým gradientem $\nabla n \approx (0, -K, 0)$. Vrstva vzduchu ve výšce y pak má index lomu $n(y) \approx n_0 - Ky$ a rovnice paprsku (1.3) mají tvar

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{dx}{ds} \right) = 0, \quad \frac{d}{ds} \left(n \frac{dy}{ds} \right) = -K.$$

Pokud se omezíme na horizontální paprsky, lze index lomu v závorkách aproximovat jedničkou $n_0 \approx 1$, a tak dostaneme jednoduché rovnice

$$\frac{d^2 x}{ds^2} \approx 0, \quad \frac{d^2 y}{ds^2} \approx -K.$$



Trajektorie paprsku A_0A v nehomogenní atmosféře.

Za předpokladu, že paprsek prochází bodem $A_0 = [0, 0]$ a s osou x svírá malý úhel β_0 , dostaneme integrací těchto rovnic výsledek

$$x \approx s, \quad y \approx \beta_0 s - \frac{1}{2} K s^2.$$

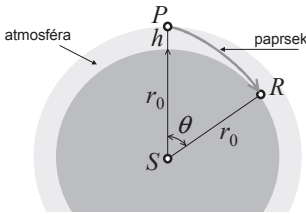
Směr paprsku se přitom plynule mění podle vzorce $\beta = \beta_0 - Ks$. Trajektorií horizontálního paprsku je tedy mírně dolů prohnutá parabola, kterou můžeme se stejnou přesností nahradit i obloukem kružnice o poloměru $R \approx 1/K$ nezávisle od konkrétního paprsku. Pro standardní atmosféru $K \approx 2.5 \times 10^{-5} \text{ km}^{-1}$ vychází poloměr zakřivení paprsku zhruba $R \approx 6R_Z \approx 40\,000 \text{ km}$. Poznamenejme závěrem, že při rovnoměrném poklesu indexu lomu $n \approx n_0 - Ky$ se dosáhne $n = 1$ (vakua) v konečné výšce $h = (n_0 - 1)/K \approx 12 \text{ km}$ a že skutečný pokles indexu lomu v atmosféře Země je pochopitelně mnohem komplikovanější než uvažovaný lineární model.

1.3.6 Dohlednost

Jak daleko je vidět z vrcholu vysoké věže nebo hory? To je jednoduchá geometrická úloha. Za předpokladu homogenní a průzračné atmosféry a hladké Zeměkoule o poloměru R_Z je **geometrická dohlednost** z věže o výšce h zřejmě rovna

$$d_0 \approx \sqrt{2R_Z h}.$$

Takto vyjde pro horu 1 km vysokou dohlednost asi 110 km. V důsledku ohybu paprsků v nehomogenní atmosféře však může být **skutečná dohlednost** výrazně větší nebo menší než výše uvedená dohlednost geometrická. To závisí na konkrétním gradientu indexu lomu $\nabla n \approx -K$.



Ilustrace k výpočtu dohlednosti v nehomogenní atmosféře z bodu P nacházejícího se ve výšce h nad povrchem Země. Paprsek se dotýká v bodě R povrchu Země tečně.

Protože nyní už zakřivení Země zanedbat nemůžeme, použijeme výsledek (1.4), podle něhož je při závislosti indexu lomu $n(r)$ rovnice paprsku PR procházejícího tečně bodem R o polárních souřadnicích $[r_0, 0]$ dána integrálem

$$\theta = \int_{r_0}^r \frac{n_0 r_0 dr}{r \sqrt{n^2 r^2 - n_0^2 r_0^2}}. \quad (1.8)$$

Pokud si dále uvědomíme, že se r a n v našem případě mění jen velmi málo a platí $r = r_0 + y$ a $n \approx n_0 - Ky$, lze tento integrál aproximovat dobře výrazem

$$\theta \approx \frac{1}{\sqrt{2(1 - Kr_0)r_0}} \int_0^h \frac{dy}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{2h}{(1 - Kr_0)r_0}}.$$

Konečně, protože $r_0 = R_Z$ značí poloměr Země a $d \approx r_0\theta$ představuje pro malá h zhruba vzdálenost $|PR|$, máme pro hledanou dohlednost výsledek

$$d \approx \sqrt{\frac{2R_Z h}{1 - KR_Z}} \approx \frac{d_0}{\sqrt{1 - KR_Z}}. \quad (1.9)$$

V případě standardní atmosféry je $K \approx 1/6R_Z$, takže dohlednost vychází $d \approx 1.09d_0$, je tedy asi o 9 % větší než dohlednost v homogenní atmosféře. Za mimořádných atmosférických podmínek se však může gradient i dohlednost podstatně změnit. Je určitě zajímavé poznamenat, že kdyby byla naše atmosféra jen šestkrát hustější, vzrostla by dohlednost nade všechny meze, což znamená, že by měl horizontální paprsek stejné zakřivení jako povrch Země a Země by se pozorovateli jevila plochá. Za dokonalé průzračnosti bychom mohli teoreticky pozorovat místa na opačném konci zeměkoule i svoje záda. A při ještě větší hustotě atmosféry (jako je tomu například na Venuši) by se horizont dokonce jevil prohnutý vzhůru, takže by se nám zdálo, že povrch Země tvoří jakási dutá mísa.

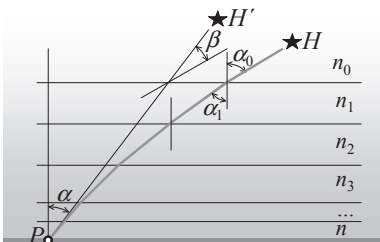
1.3.7 Astronomická refrakce

I když je index lomu vzduchu jen velmi málo odlišný od indexu lomu kosmického prostoru, připomeňme, že za normálních podmínek je index lomu vzduchu $n \approx 1.000273$, hraje lom světla v atmosféře, tj. **astronomická refrakce** v pozemské astronomii významnou roli. Ohyb paprsků v atmosféře totiž způsobuje, že hvězdy vidíme na obloze jinde, než kde ve skutečnosti jsou. Nejjednodušší popis atmosférické refrakce zcela zanedbává zakřivení Země a předpokládá nehomogenní atmosféru s indexem lomu n_k v jednotlivých vrstvách tloušťky h_k . Paprsek přicházející do atmosféry pod úhlem α_0 od vzdálené hvězdy H se postupně láme na jednotlivých vrstvách vzduchu podle zákona lomu

$$n_0 \sin \alpha_0 = n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2 = \dots = n \sin \alpha,$$

kde $n_0 = 1$ značí index lomu mezihvězdného prostoru a n index lomu při povrchu země. Paprsek tedy dopadá na povrch země pod úhlem α , ve kterém se nám obraz hvězdy H' na obloze zdánlivě jeví a který v našem jednoduchém modelu překvapivě nezávisí na tloušťkách jednotlivých vrstev vzduchu ani na skutečném průběhu indexu lomu, ale pouze na indexu lomu n vzduchu při povrchu země. Stačí tedy vzít jen první a poslední člen ze zákona lomu a dostaneme

$$\sin \alpha_0 = n \sin \alpha. \quad (1.10)$$



Astronomická refrakce je způsobena lomem paprsků v atmosféře. Pozorovatel P vidí hvězdu H v místě H' , tedy vždy blíže zenitu.

Astronomickou refrakcí rozumíme odklon paprsku v atmosféře, tj. malý úhel $\beta = \alpha_0 - \alpha$. Abychom jej našli, vyjádříme nejprve $\sin \alpha_0$ prostřednictvím úhlů α a β . Protože $\alpha_0 = \alpha + \beta$, dostaneme postupně

$$\sin \alpha_0 = \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \approx \sin \alpha + \beta \cos \alpha,$$

kde jsme dále nahradili $\sin \beta \approx \beta$ a $\cos \beta \approx 1$ díky předpokladu, že očekávaná refrakce β bude velmi malá. Po dosazení do zákona lomu (1.10) tak máme rovnici

$$\sin \alpha + \beta \cos \alpha = n \sin \alpha,$$

z níž plyne hledaný vzorec pro astronomickou refrakci

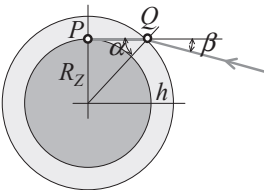
$$\beta \approx (n - 1) \operatorname{tg} \alpha \approx 57'' \operatorname{tg} \alpha.$$

Tento vzorec platí dobře pro úhly $\alpha < 80^\circ$, pro větší úhly už astronomická refrakce podstatně závisí jak na zakřivení Země, tak i na konkrétním profilu indexu lomu. Pro hvězdy u obzoru, tj. pro $\alpha \approx 90^\circ$ dosahuje astronomická refrakce $\beta \approx 30'$ až $40'$ podle aktuálního stavu počasí a nadmořské výšky pozorovatele. Z toho plyne například málo známá skutečnost, že při západu Slunce v okamžiku, kdy se teprve spodní okraj slunečního kotouče dotkne obzoru, jak to vidí pozemský pozorovatel, je vlastně již celé Slunce ve skutečnosti pod obzorem. Dá se spočíst, že astronomická refrakce prodlužuje den v našich zeměpisných šířkách o 8 až 12 minut na úkor noci, v polárních oblastech dokonce o celé hodiny.

Jistě jste si všimli, že sluneční kotouč se při západu nebo východu Slunce jeví spíše jako elipsa než jako kruh, horizontální průměr Slunce sice měří obvyklých $32'$ ale vertikální jen $26'$. Příčinou je rozdíl astronomické refrakce u spodního ($35'$) a horního okraje ($28'$) Slunce, čímž se sluneční kotouč u obzoru vertikálně zkracuje asi o $6'$, tj. zhruba o pětinu svého průměru. Totéž pochopitelně platí i o Měsíci u obzoru.

Astronomickou refrakci znal ji ve starověku KLAUDIUS PTOLEMAIOS a ve středověku arabský učenec ALHAZEN. Ale teprve JOHANNES KEPLER roku 1604 a zejména ISAAC NEWTON roku 1670 vypočítali správné hodnoty úhlů refrakce pro potřeby astronomů.

Příklad 1.5 Odhadněte astronomickou refrakci při obzoru. Jako model vezměte (A) homogenní atmosféru o indexu lomu $n_0 \approx 1.0003$ a výšce $h \approx 12$ km a (B) nehomogenní atmosféru s lineárním poklesem indexu lomu $n \approx n_0 - Ky$ a stejnou výškou $h = (n_0 - 1)/K \approx 12$ km.



Ilustrace k výpočtu astronomické refrakce. R_Z značí poloměr Země, h výšku atmosféry a β refrakci paprsku.

Řešení A: Paprsek QP vchází do atmosféry pod úhlem $\alpha + \beta$, takže jeho úhel lomu je α . Ze zákona lomu máme $\sin(\alpha + \beta) = n_0 \sin \alpha$, odtud pro malé β dostaneme aproximaci

$\beta \approx (n_0 - 1) \operatorname{tg} \alpha$. Protože pro $\operatorname{tg} \alpha$ z obrázku platí

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R_Z}{\sqrt{(R_Z + h)^2 - R_Z^2}} \approx \sqrt{\frac{R_Z}{2h}},$$

máme pro atmosférickou refrakci výsledek

$$\beta \approx (n_0 - 1) \sqrt{\frac{R_Z}{2h}} \approx 17'.$$

Tento výsledek je trochu malý ve srovnání s tím, co se ve skutečnosti pozoruje, podívejme se proto na druhý reálnější model s nehomogenní atmosférou.

Řešení B: Studujme chod tečného paprsku z bodu P do Q . Jeho trajektorie v polárních souřadnicích (r, θ) je popsána rovnicí (1.8), kam dosadíme za $n = n_0 - Ky$ a $r = r_0 + y$, kde $r_0 = R_Z$ nyní představuje poloměr Země. Po úpravě, vhodných aproximacích a integraci dostaneme pro trajektorii paprsku v atmosféře nakonec rovnici

$$\theta \approx \sqrt{\frac{2y}{R_Z(1 - KR_Z)}} \quad \text{neboli} \quad y \approx \frac{1}{2} R_Z (1 - KR_Z) \theta^2.$$

Pro malý tečný sklon paprsku odtud platí

$$\gamma \approx \frac{dy}{R_Z d\theta} \approx (1 - KR_Z) \theta,$$

takže pro celkovou refrakci paprsku v nehomogenní atmosféře platí

$$\beta = \theta - \gamma \approx \theta KR_Z = K \sqrt{\frac{2R_Z h}{1 - KR_Z}} = \sqrt{\frac{2(n_0 - 1) KR_Z}{1 - KR_Z}} \approx 36'.$$

což je již výsledek, který se dobře blíží tomu, co se skutečně pozoruje. Všimněte si, že také platí $\beta = Kd$, kde d značí dohlednost z výšky h podle vzorce (1.9).

1.3.8 Zelený paprsek

Vlivem disperze světla v atmosféře je astronomická refrakce modrého paprsku u obzoru až o $30''$ větší než refrakce červeného paprsku. Proto se při západu Slunce a klidném vzduchu nejlépe u moře nebo ze štítů velehor vzácně pozoruje **zelený paprsek**, tj. poslední paprsek zapadajícího Slunce, který je složen ze zeleného a modrého světla. Celý úkaz trvá jen velice krátce, zhruba 1 až 2 s. Aby se zelený paprsek projevil zřetelněji a trvaleji, musí při západu Slunce vzniknout v atmosféře vhodná vrstva teplejšího vzduchu, která poslouží pro zelený paprsek jako světlovodný kanál, který udrží zelený paprsek až 15 s po západu Slunce. Zelený paprsek (*záře nevšední, nádherná a se žádnou zelení, vyskytující se na zemi, srovnatelná*) proslavil ve stejnojmenném románu z roku 1882 JULES VERNE.

1.4 Fotometrie, světelná měření

Světelné zdroje vyzařují elektromagnetickou energii, kterou vnímáme jako teplo a světlo. Jako světlo je přitom vnímán obvykle jen velmi malý zlomek z této vyzářené energie. Jak velká část to je, závisí na spektrální citlivosti lidského oka. Počátky **fotometrie** jsou však mnohem starší než elektromagnetická teorie světla, proto fotometrie pracuje s veličinami světelný tok, svítivost, jas, světlení, osvětlení a osvit, které popisují světlo kvantitativně, jako by bylo samostatnou formou energie.

1.4.1 Světelný tok

Množství světla, které prochází určitou plochou nebo je vyzařováno do určitého prostorového úhlu za jednotku času, popisuje **světelný tok**, který se značí obvykle řeckým písmenem Φ . Jak naznačuje i název veličiny, jde o jistou analogii toku energie nebo toku kapaliny. Jednotkou světelného toku je **lumen**, zkratkou lm. Původně šlo o světelný tok, který vyzařuje do celého prostoru standardní svíčka. Název jednotky navrhl roku 1894 ANDRÉ EUGENE BLONDEL, který se významně zasloužil o fotometrickou nomenklaturu. Světelný tok vztažený na jednotkovou plochu se nazývá **osvětlení**, světelný tok vztažený na jednotkový prostorový úhel se nazývá **svítivost**.

1.4.2 Svítivost

Uvažujme nyní světelný zdroj, který vyzařuje světlo do prostoru nerovnoměrně, tedy jedním směrem více, jiným směrem méně. Prostorovou nerovnoměrnost (anizotropnost) zdroje popisujeme veličinou zvanou **svítivost** zdroje I_α , která se spočte podle vzorce

$$I_\alpha = \frac{d\Phi}{d\Omega},$$

kde $d\Phi$ je světelný tok vyzářený do prostorového segmentu $d\Omega$ v určeném směru α . Pro izotropní zdroj, jakým je například Slunce nebo hvězda, je svítivost konstantní, takže platí

$$I_\alpha = I = \bar{I} = \frac{\Phi}{4\pi}.$$

Jednotkou svítivosti je **kandela** zkratkou cd. Kandela je základní jednotkou soustavy SI a je definována takto:

Jedna kandela je svítivost zdroje, který v daném směru vysílá monochromatické záření o kmitočtu 540×10^{12} Hz (přibližně 555 nm) a jehož zářivost v tomto směru je $1/683$ W / sr.

Zvolená frekvence je blízka světlu zelené barvy, vůči níž je lidské oko nejcitlivější. Současná definice kandely vychází z technologie moderních monochromatických zdrojů světla a platí od roku 1979. Ještě na přelomu 19. a 20. století se jako základní jednotka svítivosti u nás používala **Hefnerova svíčka**, což je vodorovná svítivost 40 mm dlouhého plamene octanu amylnatého hořícího nad bavlněným válcovým knotem o průměru 8 mm. Lampu sestrojil FRIEDRICH FRANZ VON HEFNER-ALTENECK v roce 1884 a pro převod platí $1 \text{ HK} = 0.92 \text{ cd}$. Později, s rozvojem radiometrie, byla za jednotku svítivosti navržena kandela, která byla definována jako svítivost $1/60 \text{ cm}^2$ povrchu absolutně černého tělesa ve směru kolmém k tomuto povrchu při teplotě tuhnutí platiny (1768°C) a normálním tlaku ($101\,325 \text{ Pa}$). Tato definice kandely byla přijata na XIII. generální konferenci pro míru a váhy v r. 1967.

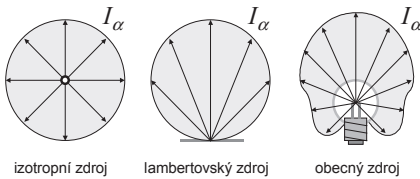
1.4.3 Vyzařovací charakteristika zdroje

Obecný anizotropní zdroj světla graficky popisuje **křivka rozdělení svítivosti** (vyzařovací charakteristika), z ní se dá snadno určit směr největší a nejmenší svítivosti zdroje. Křivka rozdělení svítivosti izotropního i lambertovského zářiče mají tvar kružnice, první má střed v místě zdroje a poloměr I_0 , druhá se pouze dotýká zdroje a má průměr I_0 .

Difúzní odrazné a transparentní plochy vyzařují podle **kosinového zákona** a platí tedy

$$I_\alpha = I_0 \cos \alpha,$$

kde I_0 je kolmá maximální svítivost a α je vyzařovací úhel měřený od kolmice difúzní plochy. Světelné zdroje, pro které platí kosinový zákon, se nazývají **lambertovské zářiče**. Také termální zdroje, Slunce, hvězdy, žárovka atd. vyzařují podle kosinového zákona. Obecné vyzařovací charakteristiky často aproximujeme funkcí $I_\alpha = I_0 \cos^m \alpha$, lambertovský zářič pak dostaneme pro $m = 1$ a izotropní zářič pro $m = 0$.



Vyzařovací charakteristiky bodového všesměrového zdroje, kosinového zářiče a žárovky.

Světelný tok se spočte integrací svítivosti přes prostorový úhel Ω podle vzorce

$$\Phi = \int I_\alpha d\Omega.$$

Například pro zdroj světla s vyzařovací charakteristikou

$$I_\alpha = I_0 \cos^m \alpha,$$

který vyzařuje do kuželového segmentu o úhlovém poloměru θ , tj. do prostorového úhlu

$$\Omega = 2\pi (1 - \cos \theta) = 4\pi \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

a jehož osa splývá s normálou povrchu, dostaneme světelný tok

$$\Phi = \int I_\alpha d\Omega = 2\pi I_0 \int_0^\theta \cos^m \alpha \sin \alpha d\alpha = \frac{2\pi I_0}{1+m} \sin^{1+m} \theta,$$

neboť $d\Omega = 2\pi \sin \alpha d\alpha$. Pro celý poloprostor $\Omega = 2\pi$ sr pak je $\theta = \pi/2$, a tudíž

$$\Phi = \frac{2\pi I_0}{1+m}.$$

Střední svítivost je tedy rovna

$$\bar{I} = \frac{\Phi}{\Omega} = \frac{I_0}{1+m}.$$

Speciálně, pro běžný kosinový zářič je $m = 1$ a $\Phi = \pi I_0$ a $\bar{I} = \frac{1}{2} I_0$. Pro izotropní zdroj světla platí elementárně $\Phi = I \Delta\Omega$, kde $\Delta\Omega$ značí prostorový úhel, do kterého světelný tok určujeme.

zdroj světla	svítivost
Slunce	3×10^{27} cd
přístavní maják	10^7 cd
100 W žárovka	10^3 cd
petrolejová lampa	30 cd
svíčka	1 cd
svatojánská muška	10^{-2} cd

1.4.4 Osvětlení

Pokud světelný zdroj osvětluje tokem $d\Phi$ jistou plochu o velikosti dS , pak mírou osvětlení této plochy je poměr

$$E = \frac{d\Phi}{dS},$$

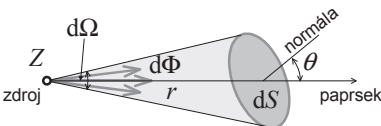
který se nazývá **osvětlení** (intenzita osvětlení, osvětlenost) a měří se v **luxech** zkratkou lx. Protože pro osvětlení plochy dS od vzdáleného zdroje o svítivosti I_α platí

$$d\Phi = I_\alpha d\Omega \quad \text{a} \quad d\Omega = \frac{dS}{r^2} \cos \theta,$$

kde r je vzdálenost osvětlené plochy od zdroje a θ úhel sklonu normály plochy vůči dopadajícím paprskům, můžeme vzorec upravit do užitečného tvaru

$$E = \frac{I_\alpha}{r^2} \cos \theta, \quad (1.11)$$

z něhož je hned patrné, že osvětlení klesá se vzdáleností r zdroje a také s náklonem θ osvětlované plochy. Tento vzorec (1.11) odvodil JOHANN HEINRICH LAMBERT roku 1760.



Ilustrace k zavedení osvětlení E plošky dS ze zdroje Z o svítivosti I_α .

Největšího osvětlení se dosáhne při kolmém dopadu paprsků, naopak při tečném dopadu je osvětlení plochy nulové. Osvětlení šikmé plochy je tedy dáno předpisem $E = E_0 \cos \theta$, kde θ značí náklon plochy vůči paprskům a

$$E_0 = \frac{I_\alpha}{r^2} = \frac{d\Phi}{dS \cos \theta} = \frac{d\Phi}{dS^\perp}$$

kolmé osvětlení plochy.

Pro osvětlení pracovišť a ulic jsou vypracovány normy. Například společné osvětlení učeben ve školách má být 40 lx až 150 lx, individuální osvětlení pracovního stolu 100 lx až 1000 lx, osvětlení ulic a náměstí 3 lx až 15 lx. Ve starší literatuře se můžeme setkat i s jednotkou osvětlení **phot**, přitom platí $1 \text{ ph} = 10^4 \text{ lx}$.

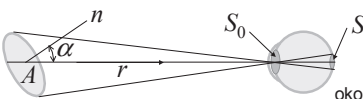
zdroj světla	osvětlení
Slunce v létě	10^5 lx
Slunce v zimě	10^4 lx
zatažená obloha v létě	5000 – 20 000 lx
zatažená obloha v zimě	1000 – 2000 lx
soumrak	1 – 10 lx
noc při úplňku	0.2 – 0.3 lx
bezměsíčná noc	$3 \times 10^{-4} \text{ lx}$

Sluneční paprsky dopadají v zimě na zemský povrch pod větším úhlem θ , proto je v zimě méně světla, ale i méně tepla než v létě. Změna slunečního zářivého toku způsobená změnou sklonu povrchu Země vůči paprskům Slunce způsobuje střídání ročních období i změnu teploty v průběhu dne.

1.4.5 Osvětlení sítnice oka plošným zdrojem

Oko sleduje plošný zdroj světla ze vzdálenosti r . Element plochy A zdroje světla necht' má svítivost I_α a normála elementu plochy zdroje A necht' svírá se spojnicí zdroj – oko úhel α . Označíme-li plochu pupily oka jako S_0 , pak do oka dopadne z uvažovaného elementu zdroje světelný tok $\Phi = I_\alpha \Omega = I_\alpha S_0 / r^2$, který osvětlí na sítnici obraz uvažovaného elementu zdroje světla. Protože geometrické zvětšení vzdáleného předmětu je $\beta \approx f/r$, kde f je předmětová ohnisková vzdálenost oka, bude plocha obrazu S elementu A na sítnici rovna

$$S \approx \beta^2 A^\perp \approx \beta^2 A \cos \alpha \approx \frac{f^2}{r^2} A \cos \alpha.$$



Osvětlení sítnice oka plošným zdrojem. Obrazem předmětu o velikosti A je na sítnici ploška S , S_0 značí plochu oční pupily, r vzdálenost předmětu od oka a úhel α sklon normály zářící plochy vůči paprskům.

Osvětlení obrazu na sítnici je podle definice rovno

$$E = \frac{\Phi}{S} = \frac{S_0}{f^2} \frac{I_\alpha}{A \cos \alpha}.$$

Protože první činitel S_0/f^2 závisí jen na vlastnostech oka a druhý $L_\alpha = I_\alpha/A \cos \alpha$ jen na elementu A zdroje a jeho orientaci α v prostoru, definuje druhý činitel L_α užitečnou fotometrickou veličinu, která odpovídá subjektivnímu vjemu jasů plošného zdroje světla. Nová fotometrická veličina se nazývá **jas**, definuje ji vzorec (1.12) a budeme se jí věnovat v následující kapitole.

1.4.6 Jas

U plošných zdrojů nemusí být celý povrch zdroje stejně jasný, proto definujeme další fotometrickou veličinu L_α zvanou **jas**, jako poměr svítivosti dI_α a zdánlivé (kolmé) velikosti plochy zdroje $dA^\perp = dA \cos \alpha$. Jas elementu zdroje ve směru α je tedy definován vztahem

$$L_\alpha = \frac{dI_\alpha}{dA^\perp} = \frac{dI_\alpha}{dA \cos \alpha}, \quad (1.12)$$

a odpovídá míře osvětlení obrazu zdroje na sítnici oka. Jednotkou jasu je cd/m^2 . Oko již registruje předměty o jasů od $10^{-8} \text{cd}/\text{m}^2$, při jasů předmětu $7\,500 \text{cd}/\text{m}^2$ a vyšším však nastává oslnění očí.

Lambertovské plošné zdroje $dI_\alpha = dI_0 \cos \alpha$ mají jas L nezávislý od směru α pozorování, protože u nich platí

$$L = \frac{dI_\alpha}{dA \cos \alpha} = \frac{dI_0}{dA},$$

takže u lambertovských zdrojů je zbytečné index α uvádět. Z toho také plyne, že lambertovský zdroj vidíme stále stejně jasně nezávisle na tom, jak je vůči nám nakloněn. Lambertovské sférické zdroje, jako jsou Slunce nebo Měsíc, se proto subjektivně zdají být plochými zářícími kotoučky a jejich sférický tvar není na první pohled nijak patrný.

zdroj světla	jas cd/m^2	zdroj světla	jas cd/m^2
noční obloha	10^{-3}	zářívka	2000 až 4000
zatažená obloha	3000	plamen svíčky	10 000
jasná obloha	10 000	žárovka	2 až 15×10^6
Měsíc	2500	žárovka mléčná	5 až 40×10^4
zapadající Slunce	6×10^6	Hg výbojka	17×10^8
Slunce v poledne	15×10^8	pulzní laser	až 10^{19}

Dříve se používala také jednotka jasu **nit**, přitom $1 \text{nt} = 1 \text{cd}/\text{m}^2$ a jednotka **stilb**, přitom $1 \text{sb} = 1 \text{cd}/\text{cm}^2 = 10^{-4} \text{cd}/\text{m}^2$. Vzácně se můžeme setkat i s jednotkou **apostilb**, což je z definice jas difúzní bílé plochy osvětlené jedním luxem, tedy $1 \text{asb} = 1/\pi \text{cd}/\text{m}^2 \approx 0.318 \text{cd}/\text{m}^2$.

1.4.7 Světlení

Světelný tok $d\Phi$ vyzářený jednotkovou plochou zdroje dA do všech směrů se nazývá **světlení (intenzita světlení)**, můžeme tedy psát definici

$$M = \frac{d\Phi}{dA}.$$

Jednotkou světlení je lm/m^2 . Má-li element dA zdroje jas L_α ve směru α , pak v tomto směru má také podle (1.12) svítivost $dI_\alpha = L_\alpha \cos \alpha dA$, takže do celého poloprostoru vyzářuje světelný tok $d\Phi = \int (dI_\alpha) d\Omega = \int L_\alpha \cos \alpha dA d\Omega$. Z definice intenzity světlení malého elementu dS zdroje tak máme vztah

$$M = \frac{d\Phi}{dS} = \frac{\int L_\alpha \cos \alpha dA d\Omega}{dA} = \int_{\Omega} L_\alpha \cos \alpha d\Omega,$$

kde integrujeme přes celý poloprostor Ω . Pro lambertovský zdroj $L_\alpha = L$ lze integraci pohodlně provést, díky z geometrie známému vztahu $d\Omega = 2\pi \sin \alpha d\alpha$ dostaneme hodně užitečný výsledek

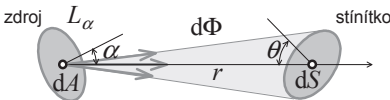
$$M = \int_{\Omega} L \cos \alpha d\Omega = 2\pi L \int_0^{\pi/2} \cos \alpha \sin \alpha d\alpha = \pi L,$$

který říká, že jas L a světlení M lambertovského zdroje se liší jen o koeficient úměrnosti π .

1.4.8 Základní vzorec fotometrie

Element plochy zdroje dA o jasu L má ve směru α svítivost $dI = L \cos \alpha dA$, proto osvětlí předmět o velikosti dS skloněný o úhel θ vzhledem k paprskům a nacházející se ve vzdálenosti r od zdroje světelným tokem $d\Phi = dI_\alpha d\Omega = L \cos \alpha dA d\Omega$, a protože $d\Omega = dS \cos \theta / r^2$, dostáváme odtud základní fotometrický vzorec

$$d\Phi = L_\alpha \frac{\cos \alpha \cos \theta}{r^2} dA dS.$$



Element zdroje dA o jasu L_α osvětlí ve směru α plochu dS skloněnou k paprskům o úhel θ a nacházející se ve vzdálenosti r od zdroje světelným tokem $d\Phi$.

1.4.9 Magnitudy hvězd

Za izotropní zdroje světla o svítivosti I je možno považovat hvězdy, ty jsou již od starověku katalogizovány (HIPPARCHOS z NIKÁIE 150 př. n. l.) a rozděleny podle jasu do šesti tříd podle **magnitudy**. Nejjasnější jsou hvězdy první magnitudy, píšeme $m = 1$ nebo častěji 1^m a nejslabší okem viditelné hvězdy jsou šesté magnitudy,

píšeme $m = 6$ nebo 6^m . Pouhým okem je vidět asi 3000 hvězd na celé, tedy severní i jižní obloze dohromady.

Starověké třídění hvězd podle jasnosti bylo zachováno a upřesněno NORMAN ROBERT POGSONEM roku 1856. Rozdíl pěti magnitud nyní odpovídá přesně podílu jasů 1 : 100. Objekty jasnější mají záporné magnitudy (například planety, Měsíc, Slunce), naopak objekty slabší než nejslabší hvězdy viditelné pouhým okem mají magnitudy větší než 6^m . Pro přepočítání svítivosti hvězdy I a její magnitudy m platí vzorec

$$m = -2.5 \log E - 14.05 = -2.5 \log I + 5 \log r - 14.05,$$

kde svítivost hvězdy I měříme v kandelách, její vzdálenost r v metrech a osvětlení E v luxech. Magnituda hvězdy závisí na její vzdálenosti r od Země, proto se zavádí také **absolutní magnituda** M , což je magnituda m , jakou by měla hvězda, kdyby byla ve standardní vzdálenosti $r_0 = 10 \text{ pc} \approx 3.086 \times 10^{17} \text{ m}$. Připomeňme, že parsek je vzdálenost, ze které je vidět astronomická jednotka (tj. vzdálenost Země od Slunce) pod úhlem jedné obloukové vteřiny. Platí tedy z definice

$$m - M = 5 \log r - 5 \log r_0 \approx 5 \log r - 87.45,$$

takže pro absolutní magnitudu máme výsledek

$$M = m + 5 \log r_0 - 5 \log r = -2.5 \log I + 73.40.$$

Například Slunce má magnitudu $m \approx -26.74$, a protože

$$m - M = 5 \log \frac{1 \text{ AU}}{10 \text{ pc}} = 5 \log \text{tg } 0.1'' \approx -31.572,$$

musí být absolutní magnituda Slunce $M \approx 4.83$.

zdroj světla	magnituda	osvětlení
nejslabší hvězda Hubble	28^m	10^{-17} lx
nejslabší hvězda okem	6^m	10^{-8} lx
Sirius	-1.5^m	10^{-5} lx
Venuše maximum	-4.3^m	$1.3 \times 10^{-4} \text{ lx}$
Měsíc úplněk	-12.5^m	0.24 lx
Slunce	-26.7^m	$1.1 \times 10^5 \text{ lx}$

POZNÁMKA: Pokud bychom měřili vzdálenosti v parsecích, jako to dělají astronomové, platilo by pochopitelně

$$m - M = 5 \log r - 5 \log r_0 = 5 \log r - 5.$$

1.4.10 Svítivost Měsíce

Osvětlené plochy se samy stávají zdrojem světla. Osvětlíme-li plochu s odrazivostí R osvětlením E , pak světlení této plochy je $M = RE$. Bude-li tato plocha navíc lambertovská, pak její jas bude roven

$$L = \frac{M}{\pi} = \frac{RE}{\pi}. \quad (1.13)$$

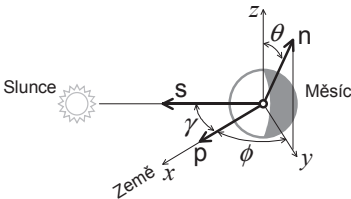
Mějme nyní těleso homogenně osvětlené Sluncem, které je možno popsat kolmým osvětlením $E_0 \approx 1.1 \times 10^5$ lx. Jestliže normála \mathbf{n} elementu jeho povrchu svírá s paprsky úhel α_0 , bude osvětlení tohoto elementu rovno $E = E_0 \cos \alpha_0$ a jas tohoto elementu plochy bude

$$L = \frac{RE}{\pi} = \frac{RE_0}{\pi} \cos \alpha_0.$$

Svítivost I_α osvětleného tělesa ve směru α tedy bude

$$I_\alpha = \int L \, dA \cos \alpha = \frac{RE_0}{\pi} \int dA \cos \alpha_0 \cos \alpha, \quad (1.14)$$

kde integrujeme přes celý osvětlený povrch viditelný ze směru α . Spočteme nyní pomocí tohoto vzorce svítivost Měsíce osvětleného Sluncem v závislosti na jeho fázi. Fázi nám bude určovat úhel γ , který svírá spojnice Měsíc – Slunce a spojnice Měsíc – Země, úhel $\gamma = 0$ tedy odpovídá úplňku a $\gamma = \pi$ novému měsíci. Albedo měsíčního povrchu je zhruba $R \approx 0.14$.



Zavedení sférických souřadnic $[\theta, \phi]$ a vektorů \mathbf{p} , \mathbf{s} a \mathbf{n} k výpočtu svítivosti Měsíce.

Zavedeme si pomocné souřadnice tak, že Slunce, Země a Měsíc budou ležet v rovině xy a osa x bude směřovat k Zemi. Pólem Měsíce tedy bude procházet osa z . Dále si na povrchu Měsíce zavedeme sférické souřadnice (θ, ϕ) tak, že osa z bude jejich polární osou. Velikost elementu zářící plochy Měsíce pak bude $dA = a^2 \sin \theta d\theta d\phi$, kde a značí poloměr Měsíce. Jednotkový vektor ve směru pozorovatele na Zemi pak bude roven $\mathbf{p} = (1, 0, 0)$, jednotkový vektor ve směru Slunce bude $\mathbf{s} = (\cos \gamma, -\sin \gamma, 0)$ a jednotkový vektor ve směru střed Měsíce – element dS povrchu Měsíce bude roven $\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$. Pro směrové kosiny pak máme vzorce

$$\cos \alpha_0 = \mathbf{s} \cdot \mathbf{n} = \cos \gamma \sin \theta \cos \phi - \sin \gamma \sin \theta \sin \phi \quad \text{a} \quad \cos \alpha = \mathbf{p} \cdot \mathbf{n} = \sin \theta \cos \phi.$$

Integrace v (1.14) se vede jen přes osvětlenou část Měsíce, tedy ϕ se bere jen přes interval $(-\pi/2, \pi/2 - \gamma)$. Když to vše dosadíme do vzorce (1.14), dostaneme

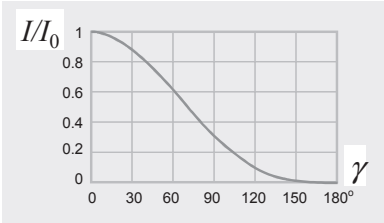
integrál

$$I_\alpha = \frac{RE_0a^2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2-\gamma} (\cos \gamma \cos^2 \phi - \sin \gamma \sin \phi \cos \phi) d\phi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta,$$

který snadno spočteme, vyjde nám

$$I_\gamma = \frac{2R}{3\pi} E_0a^2 (\sin \gamma + (\pi - \gamma) \cos \gamma). \quad (1.15)$$

Vzorec (1.15) platí pochopitelně pouze pro $0 \leq \gamma \leq \pi$. Pro úplněk $\gamma = 0$ dostaneme maximum $I_0 = \frac{2}{3} RE_0a^2$, pro nový měsíc $\gamma = \pi$ dostaneme minimum $I_\pi = 0$ a pro první nebo poslední čtvrt $\gamma = \pi/2$ dostaneme $I_{\pi/2} = \frac{2}{3\pi} RE_0a^2 = \frac{1}{\pi} I_0$. Svítivost Měsíce v první čtvrti je tedy π krát menší než při úplňku. Numericky vychází pro kolmé osvětlení od Měsíce v úplňku $I_0/r^2 \approx 0.209 \text{ lx}$ a ve čtvrti $I_{\pi/2}/r^2 \approx 0.067 \text{ lx}$, kde r značí vzdálenost Měsíce od Země.



Relativní svítivost I/I_0 Měsíce v závislosti na jeho fázi γ .

Pro kontrolu, celkový Měsícem rozptýlený světelný tok Φ by měl být roven součinu odrazivosti R a Měsícem zachyceného světelného toku $\Phi_0 = E_0\pi a^2$. Skutečně, integrací svítivosti Měsíce (1.15) přes plný prostorový úhel dostaneme

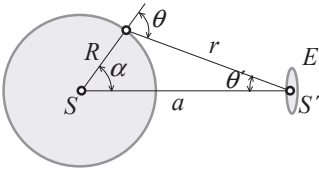
$$\Phi = \int I_\gamma d\Omega = \frac{2R}{3\pi} E_0a^2 \int_0^\pi (\sin \gamma + (\pi - \gamma) \cos \gamma) 2\pi \sin \gamma d\gamma = RE_0\pi a^2.$$

Výsledek (1.15) platí pochopitelně pro každou rovnoměrně osvětlenou a dokonale difúzně odraznou kouli. Neplatí však pro reflexní odrazné koule. Pokud analogicky homogenně osvětlíme dokonale lesklou dobře vyleštěnou kovovou kouli o poloměru a , pak její svítivost vyjde překvapivě ve všech směrech stejná (izotropní zdroj) a bude rovna

$$I_\gamma = \frac{RE_0a^2}{4}.$$

Přitom nebude zářit celá koule, jako tomu bylo u povrchu Měsíce, ale vždy jen malá ploška představující obraz Slunce zrcadlí se v povrchu koule.

Příklad 1.6 Vypočtete osvětlení E kolmé plochy nacházející se ve vzdálenosti a od středu sférického plošného lambertovského zdroje o jas L a poloměru R . Odhadněte jas Slunce ze slunečního osvětlení $E \approx 10^5 \text{ lx}$.



Máme určit osvětlení E v místě S' vzdáleném o a od středu S lambertovského zdroje ve tvaru koule o poloměru R .

Řešení: Světelný tok v místě S' je

$$\Phi = LS' \int \frac{\cos \theta \cos \theta'}{r^2} dS,$$

kde $dS = 2\pi R^2 \sin \alpha d\alpha$ značí element povrchu zdroje a z kosinové věty platí

$$r^2 = a^2 + R^2 - 2aR \cos \alpha.$$

Zdiferencováním kosinové věty dostaneme $r dr = aR \sin \alpha d\alpha$, odtud

$$dS = \frac{2\pi Rr}{a} dr,$$

takže integraci můžeme provést nejen přes α , ale snadněji i přes r . K tomu ještě potřebujeme znát směrové kosiny, nejlépe z kosinových vět, tak dostaneme

$$\cos \theta = \frac{a^2 - R^2 - r^2}{2Rr}, \quad \cos \theta' = \frac{a^2 - R^2 + r^2}{2ar}.$$

Po dosazení dostaneme integrál

$$\Phi = LS' \int_{a-R}^{\sqrt{a^2-R^2}} \frac{a^2 - R^2 - r^2}{2Rr} \frac{a^2 - R^2 + r^2}{2ar} \frac{2\pi R}{ar} dr = LS' \frac{\pi R^2}{a^2},$$

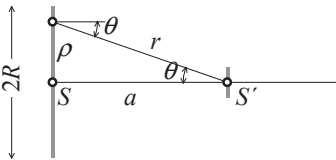
takže osvětlení bude rovno

$$E = \frac{\Phi}{S'} = L \frac{\pi R^2}{a^2}.$$

Tento nakonec velmi elementární výsledek lze snadno odvodit ze symetrie problému. Sférický lambertovský zdroj vyzařuje do prostoru tok $\Phi = MS = \pi LS = 4\pi^2 LR^2$ a ten rovnoměrně osvětlí sféru o poloměru a , takže její osvětlení bude skutečně $E = \Phi/4\pi a^2 = L\pi R^2/a^2$.

Pro Slunce je $\psi = 2R/a \approx 32'$, takže jeho jas musí být $L = 4E/\pi\psi^2 \approx 1.5 \times 10^9 \text{ cd/m}^2$.

Příklad 1.7 Vypočítejte osvětlení E na ose kolmé k lambertovskému kruhovému zdroji o jasu L a poloměru R .



Máme spočítat osvětlení plošky S' na ose SS' od kruhového lambertovského zářiče o poloměru R a jasu L .

Řešení: Světelný tok v místě S' je z definice

$$\Phi = LS' \int \frac{\cos^2 \theta}{r^2} dS,$$

kde $dS = 2\pi\rho d\rho$ značí element zdroje. Protože $r^2 = a^2 + \rho^2$ a $\cos \theta = a/r$, kde a je kolmá vzdálenost místa S' od zdroje S , dostaneme z původního integrálu výsledek

$$\Phi = LS' \int \frac{a^2}{r^4} 2\pi\rho d\rho = 2\pi LS' \int_a^{\sqrt{a^2+R^2}} \frac{a^2}{r^3} dr = \frac{LS' \pi R^2}{a^2 + R^2}.$$

Osvětlení na ose je tedy rovno

$$E = \frac{\Phi}{S'} = L \frac{\pi R^2}{a^2 + R^2}.$$

POZNÁMKA: Všimněte si, že oba výsledky (pro kouli i kruh) je možno přepsat do hezkého tvaru $E = \pi L \sin^2 \sigma$, kde $\sigma = \theta'_{\max}$ značí poloviční zorný úhel, pod nímž je zdroj S z S' vidět.

Příklad 1.8 Máme izotropní bodový zdroj o svítivosti I_0 a ve vzdálenosti r_0 od něj kolmé stínítko, jehož přímé osvětlení je tedy $E_0 = I_0/r_0^2$. (a) Jak se změní osvětlení stínítka, pokud těsně za zdroj světla umístíme rozlehlé ideální zrcadlo se stoprocentní odrazivostí. (b) Jak se změní osvětlení stínítka, pokud těsně za zdroj světla umístíme rozlehlou bílou dokonale odrazivou difúzní stěnu řídící se kosinovým zákonem.

Řešení: V případě (a) vzniká v zrcadle obraz zdroje, který přispívá k osvětlení stínítka. Protože zrcadlo je blízko zdroje, bude vzdálenost obrazu zdroje od stínítka zhruba rovněž rovna $r \approx r_0$, takže osvětlení stínítka od zrcadlového obrazu bude $E_1 \approx I_0/r_0^2 = E_0$ a celkové osvětlení stínítka vzroste na dvojnásobek $E = E_0 + E_1 = 2E_0$. V případě (b) bude element stěny dS osvětlen světelným tokem $d\Phi = I_0 d\Omega$, takže jeho osvětlení bude

$$E = \frac{d\Phi}{dS} = I_0 \frac{d\Omega}{dS}.$$

Jas této dokonale bílé plošky dS je

$$L = \frac{1}{\pi} E = \frac{1}{\pi} I_0 \frac{d\Omega}{dS},$$

rychle klesá se vzdáleností od zdroje a k nepřímému osvětlení našeho stínítka přispěje složkou osvětlení

$$dE = \frac{L dS}{r^2} \cos^2 \theta \approx \frac{I_0}{r_0^2} \frac{d\Omega}{\pi},$$

neboť v naší aproximaci je $r \approx r_0$ a $\theta \approx 0$. Integrací přes celou bílou stěnu dostaneme pro nepřímé osvětlení výsledek

$$E_2 \approx \frac{1}{\pi} \frac{I_0}{r_0^2} \int d\Omega = \frac{1}{\pi} \frac{I_0}{r_0^2} 2\pi = \frac{2I_0}{r_0^2},$$

takže celkové osvětlení stínítka vzroste až na trojnásobek původního přímého osvětlení $E = E_0 + E_2 \approx 3E_0$.

1.4.11 Osvit, expozice

Součin osvětlení E a expoziční doby Δt se nazývá **osvit** (také **expoze**)

$$H = E\Delta t.$$

Osvit hraje významnou roli ve fotografii, protože určuje množství světla, které dopadne na jednotkovou plochu fotoemulze za určitou dobu. Jednotkou osvitu je lx s . Pomocí časové závěrky a clony nastavujeme optimální osvit emulze použitého filmu. Například pro běžný film citlivosti ISO 100 je pro dynamické zčernání filmu nezbytný minimální osvit (expoze) $H_{\min} \approx 0.008 \text{ lx s}$, za pracovní osvit se pak bere hodnota $H \approx 0.1 \text{ lx s}$.

Osvětlení filmu objektivem fotoaparátu je dáno podobně jako u oka vzorcem

$$E = \frac{\pi L}{4c^2},$$

kde $c = f/D$ značí **clonové číslo** objektivu zobrazujícího nekonečně vzdálený

předmět a osvit se pak spočte jako

$$H = E\Delta t = \frac{\pi L}{4c^2} \Delta t.$$

Například plocha o jasu $L = 10^4 \text{ cd/m}^2$ (sluncem kolmo osvětlená bílá plocha) vyvolá při závěrce $1/250 \text{ s}$ a clonovém čísle $f/22$ osvit $H = 0.06 \text{ lx}$. Stejného osvitu dosáhneme také tak, že otevřeme clonu o stupeň na $f/16$ a zkrátíme čas na polovinu na $1/500 \text{ s}$ anebo přivřeme clonu o stupeň na $f/32$ a prodloužíme expozici dvakrát na $1/125 \text{ s}$. Pokud převládající jas L klesne dvakrát, musíme prodloužit expozici na dvojnásobnou dobu $1/125 \text{ s}$ nebo pootevřít clonu o jeden stupeň na $f/16$. Pokud nastavíme čas na $1/30$ a clonu na 3.5, zachytíme stejně kontrastně plochy o jasu $L \approx 30 \text{ lx}$. Expoziční doby i clonová čísla jsou standardně odstupňovány tak, aby posun jednoho o stupeň mohl být kompenzován posunem druhého rovněž o stupeň, expoziční doby proto tvoří geometrickou řadu $1/15, 1/30, 1/60, 1/120, 1/250$ a $1/500 \text{ s}$ s kvocientem $1/2$, zatímco clonová čísla geometrickou řadu $1, 1.4, 2, 2.8, 4, 5.6, 8, 11, 16$ a 22 s kvocientem $\sqrt{2}$. U moderních fotoaparátů se o vhodné nastavení závěrky i clony obvykle plně stará automatika.

1.4.12 Expoziční hodnota, EV

Expoziční hodnota EV je ve fotografii číslo, které reprezentuje takovou kombinaci závěrky a clonového čísla, že všechny kombinace dávají pro daný jas snímané scény stejnou expozici. Z historických dohod vyplývá, že hodnotě 0 EV odpovídá takové množství světla, při kterém budeme šedou tabulku správně exponovat při expozici 1 sekunda a cloně $f/1$. Bude-li světla dvakrát více, vzroste EV právě o jeden stupeň, tj. o jedničku. Expoziční hodnota je tedy logaritmickou veličinou. **Expoziční hodnota** je proto definovaná vztahem

$$\text{EV} = \log_2 \frac{c^2}{\Delta t}. \quad (1.16)$$

Expoziční hodnotu EV zavedl do fotografie kolem roku 1950 FRIEDRICH DECKEL.

Osvit políčka filmu je dán vztahem

$$H = E\Delta t = \frac{\pi L}{4c^2} \Delta t.$$

Pro optimální vykreslení detailů snímané scény (emulze nesmí být ani přesvětlená ani podsvětlená) musí expozice dosahovat pro standardní emulze citlivosti ISO 100 zhruba hodnoty $H_{100} \approx 0.1 \text{ lx}$. Odtud se vhodná kombinace závěrky a clony najde z rovnice

$$\frac{c^2}{\Delta t} = \frac{\pi L}{4H_{100}}.$$

Protože expoziční hodnota je definována předpisem (1.16), dostaneme zlogaritmováním poslední rovnice pro expoziční hodnotu rovnici

$$\text{EV}_{100} = \log_2 \frac{\pi L}{4H_{100}} \approx \log_2 8L = 3 + \log_2 L.$$

Například pro přímým sluncem osvětlenou scénou, jejíž jas je řádově $L \approx 10^4 \text{ cd/m}^2$, dostaneme $EV_{100} \approx 16.3$. Vhodná kombinace clony a závěrky proto bude $f/22$ a $1/125$ nebo $1/250$. Naopak pro domácí interiér je $L \approx 10 - 10^2 \text{ cd/m}^2$, odtud $EV_{100} \approx 6 - 10$.

Jas scény se dostane z kolmého osvětlení scény E_0 podle vzorce

$$L \approx \frac{RE_0}{\pi} \cos \theta,$$

pro střední odrazivost $R \approx 0.25$ a střední sklon osvětlení $\theta \approx 45^\circ$ dostaneme odhad $L \approx E_0/20$. Odtud je možno také vypočíst požadovanou expoziční hodnotu

$$EV_{100} \approx \log_2 8E_0/20 \approx \log_2 2E_0/5 \approx -1.3 + \log_2 E.$$

Ze znalosti expoziční hodnoty EV je možno naopak určit jas L a osvětlení E_0 snímané scény podle vzorců

$$L \approx 2^{EV-3} \approx \frac{1}{8}2^{EV} \quad \text{a} \quad E \approx 2.5 \times 2^{EV} \approx 5 \times 2^{EV-1}.$$

Při vyšší citlivosti filmu c_{ISO} postačí menší osvit $H_{\text{ISO}} = H_{100} * 100/c_{\text{ISO}}$, tím dostaneme vyšší expoziční hodnotu

$$EV_{\text{ISO}} = \log_2 \frac{\pi L}{4H_{\text{ISO}}} = EV_{100} + \log_2 \frac{c_{\text{ISO}}}{100} = 3 + \log_2 L + \log_2 \frac{c_{\text{ISO}}}{100}.$$

Například pro ISO 400 tak máme

$$EV_{400} = EV_{100} + 2 = 5 + \log_2 L.$$

1.4.13 Integrační koule

Chceme-li určit celkový světelný tok Φ konkrétního zdroje, můžeme proměřit svítivosti I_α zdroje v různých směrech a numericky nebo graficky preintegrovat přes celý prostor podle definice $\Phi = \int I_\alpha d\Omega$. K pohodlnějšímu změření integrálního světelného toku Φ je možno použít také integrační kouli. Princip metody nyní popíšeme blíže: Bodový zdroj Z o svítivosti I_α je uzavřen uvnitř integrační koule o poloměru a se stěnami o odrazivosti R . Přímé osvětlení od zdroje na vnitřním povrchu integrační koule je rovno

$$E_0 = \frac{I_\alpha}{r^2} \cos \theta$$

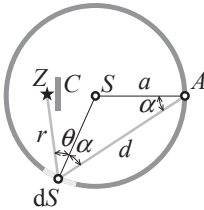
a je v každém místě povrchu koule jiné. Za předpokladu, že povrch koule je dokonale difúzní s odrazivostí R , bude nepřímé osvětlení v obecném bodě A od elementu dS povrchu koule rovno

$$dE_1 = \frac{L \cos^2 \alpha}{d^2} dS = \frac{RE_0}{4\pi a^2} dS = \frac{RI_\alpha \cos \theta dS}{4\pi a^2 r^2} = \frac{RI_\alpha}{4\pi a^2} d\Omega,$$

neboť vzdálenost bodu A od elementu dS je $d = 2a \cos \alpha$, jas plošky dS je $L = RE_0/\pi$ a prostorový úhel, pod kterým je ploška dS vidět ze zdroje Z , je $d\Omega = \cos \theta dS/r^2$. Integrací přes celý povrch koule dostaneme pro nepřímé osvětlení koule výsledek

$$E_1 = \frac{R}{4\pi a^2} \int I_\alpha d\Omega = \frac{R\Phi}{4\pi a^2}.$$

Jak vidíme, nepřímé osvětlení E_1 závisí již pouze na celkovém světelném toku zdroje $\Phi = \int I_\alpha d\Omega$, odtud plyne název **integrační koule** a je ve všech místech vnitřního povrchu koule stejné.



Ilustrace k odvození principu integrační koule. Počítáme nepřímé osvětlení E_1 v bodě A od zdroje světla Z integrací přes elementy dS povrchu integrační koule. S značí střed koule a a její poloměr.

Toto nepřímé osvětlení E_1 však bude zdrojem pro osvětlení i po druhém rozptylu $E_2 = RE_1$, toto zase zdrojem pro osvětlení po třetím rozptylu $E_3 = RE_2 = R^2 E_1$ apod., takže výsledné osvětlení po mnohonásobném difúzním odrazu bude rovno součtu

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + \dots = E_1 + RE_1 + R^2 E_1 \dots = \frac{E_1}{1 - R}.$$

Celkové nepřímé osvětlení na povrchu integrační koule po mnohonásobném difúzním odrazu je tedy rovno

$$E = \frac{\Phi}{4\pi a^2} \frac{1}{1 - R},$$

odtud je možno pohodlně určovat integrální světelný tok Φ obecného anizotropního zdroje Z . Detektor tedy můžeme umístit kdekoliv, například v bodě A , obvykle se ale dělá ve stěně integrační koule malé okénko z mléčného skla a detektor se umísťuje až vně. Jen je nutno okénko A zastínit před přímým osvětlením zdroje Z clonkou C .

Integrační koule má obvykle rozměr 1 až 3 m a dokáže změřit světelný tok svítidel až dva metry dlouhých. K měření LED diod se užívají menší integrační koule o průměru kolem 20 cm. Integrační koule se zevnitř natírá bílou barvou o vysoké odrazivosti, používá se například síran barnatý BaSO_4 . Poprvé použil integrační kouli k měření světelného toku FRIEDRICH RICHARD ULBRICHT již roku 1900.

1.4.14 Bunsenův a Lummer-Brodhunův fotometr

Pomocí mastné skvrny je možno určovat svítivost neznámého zdroje I_2 , známe-li svítivost pomocného zdroje I_1 . Mezi oba zdroje světla umístíme bílý papír s mastnou skvrnou. Odrazivost suchého papíru se blíží jedné a propustnost nule, zatímco

odrazivost mastného papíru se naopak blíží nule a propustnost jedné. Bude-li osvětlení $E_1 = I_1/r_1^2$ od prvního zdroje větší než osvětlení $E_2 = I_2/r_2^2$ od druhého zdroje, bude se jevit mastná skvrna z jedné strany jako tmavší a z druhé jako světlejší než zbytek papíru. V okamžiku, kdy mastná skvrna zmizí, budou osvětlení od obou zdrojů stejná a pro hledanou svítivost platí rovnice $I_2 = I_1 r_2^2 / r_1^2$. Místo mastné skvrny je možno použít také trojici papírů, když v prostředním z nich vystříháme otvor nahrazující mastnou skvrnu a slepíme je všechny tři dohromady. Jako referenční zdroj se brávala normovaná standardní svíčka, odtud vznikl i název jednotky svítivosti kandela z anglického *candle* (svíčka). Fotometr tohoto typu navrhl roku 1843 ROBERT WILHELM BUNSEN.

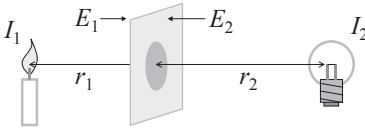
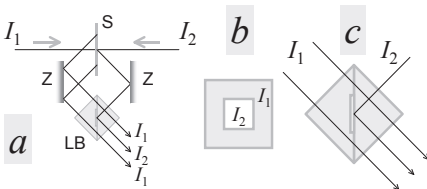
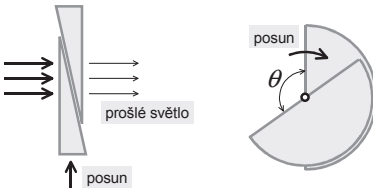


Schéma Bunsenova fotometru s mastnou skvrnou.

Přesnost metody je omezena skutečností, že v oblasti skvrny dochází k částečné absorpci světla, a nelze proto dosáhnout současného vymizení skvrny z obou stran. Aby se mohlo pohodlně pozorovat stínítko současně z obou stran, navrhli roku 1899 OTTO RICHARD LUMMER a EUGEN BRODHUN fotometr, který sestával ze sádrového stínítka, jehož obě strany se pozorovaly současně pomocí speciální **Lummer-Brodhunovy kostky**. Ta sestává z dvojice hranolů, v jednom z nich je vybrušen zářez tak, že jím neprochází světlo, ale naopak vlivem totální reflexe se na něm dopadající světlo odráží. Částí kostky tedy světlo prochází a v jiné části se světlo odráží a my pozorujeme současně jasy obou plošek styčné plochy. Budou-li oba jasy stejné, budou i osvětlení obou stran stínítka stejná.



(a) Schéma Lummer-Brodhunova fotometru, *S* značí stínítko, *Z* zrcadla, *LB* Lummer-Brodhunovu kostku. (b) Zorné pole v Lummer-Brodhunově fotometru a (c) chod paprsků v Lummer-Brodhunově kostce.



Měnit množství prošlého světla lze zasouváním absorpčního klínu nebo změnou velikosti výřezu θ rotujícího disku tvořeného dvojicí vzájemně nastavitelných neprůhledných polodisků.

Porovnávat svítivosti je možné i pomocí absorpčních klínů nebo rotujících disků. Zasouváním klínu se mění jeho tloušťka, a tím i propustnost. Podobně rotací disku s výřezem nastavitelné šíře θ lze měnit množství prošlého světla podle vzorce $I = I_0 \theta / 2\pi$ díky setrvačnosti oka, a tak dosáhnout subjektivní shody osvětlení, aniž bychom museli zdroje světla posouvat na optické lavici.

K přímému měření osvětlení se používají **luxmetry**, přístroje obsahují fotočlánek na bázi fotorezistoru, fotodiody nebo fotonásobiče, zesilovač a vyhodnocovací elektroniku. Jsou běžnou součástí fotoaparátů nebo dotykových telefonů. Pomocí luxmetru je možné pohodlně měřit i svítivost zdroje. Změříme-li vzdálenost r od zdroje a kolmé osvětlení E , pak pro svítivost platí $I = Er^2$.

1.5 Odrazivost, propustnost, pohltivost

1.5.1 Odrazivost a albedo

Dopadá-li světelný tok Φ_0 na povrch tělesa, pak se část světelného toku Φ_R odrazí zpět. Definujeme-li **odrazivost (reflektivita, reflektance)** povrchu poměrem obou toků $R = \Phi_R/\Phi_0$, pak zjistíme, že například okenní sklo má odrazivost asi 4 %, tj. $R \approx 0.04$, vyleštěný povrch železa 60 %, hliníku 90 % a stříbra 99 %. Množství odraženého světla závisí obecně také na směru dopadajícího světla a na jeho vlnové délce. Například pro odrazivost nepolarizovaného světla na dielektriku platí

$$R = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin^2(\alpha - \beta)}{\sin^2(\alpha + \beta)} + \frac{\operatorname{tg}^2(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}^2(\alpha + \beta)} \right],$$

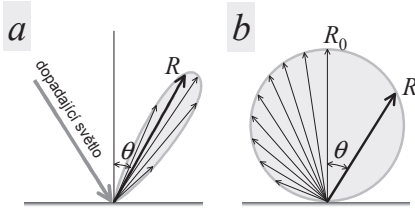
kde α značí úhel dopadu a β úhel lomu, které jsou svázány zákonem lomu $\sin \alpha = n \sin \beta$. Vzorec plyne z elektromagnetické teorie světla a bude odvozen později. Pro kolmý dopad $\alpha = 0$ odtud vyjde pro odrazivost jednoduchý vzorec

$$R = \left(\frac{n - 1}{n + 1} \right)^2. \quad (1.17)$$

Zákon odrazu platí pouze pro hladké povrchy, jejichž drsnost je výrazně menší než vlnová délka světla. Povrchy, které jsou naopak drsné, odrážejí světlo difúzně, tj. paprsky na nich odražené nebo lépe paprsky rozptýlené mají prakticky náhodný směr, i když často ještě převažuje směr splňující zákon odrazu. Teprve velmi jemné difúzní povrchy jako papír, bílá stěna, mléčné sklo apod. rozptylují světlo bez ohledu na směr dopadajícího paprsku a to nejvíce ve směru kolmice k povrchu, zatímco do ostatních směrů světla ubývá podle **Lambertova zákona (kosinového zákona)**

$$R = R_0 \cos \theta, \quad (1.18)$$

kde θ značí úhel rozptylu paprsku měřený od kolmice a R_0 je kolmá odrazivost. Zákon objevil roku 1760 JOHANN HEINRICH LAMBERT. Povrchy rozptylující světlo v souladu s tímto zákonem se nazývají lambertovské. Hodograp odrazivosti R vytvoří kružnici o průměru R_0 . Lambertovské povrchy obsahují rozptylová centra rozměru menšího než vlnová délka světla, rozptyl světla proto téměř nezávisí na směru dopadajícího světla a intenzita rozptýleného světla klesá se zdánlivou velikostí difúzního povrchu $S \cos \theta$, a odtud i plyne Lambertův zákon.



Směrová odrazivost $R(\theta)$ téměř hladkého povrchu (a) odpovídá zhruba zákonu odrazu, zatímco (b) odrazivost ideálně drsného povrchu splňuje Lambertův zákon $R = R_0 \cos \theta$.

Protože se mechanismus difúzního odrazu natolik liší od normálního odrazu, hovoří se u difúzních povrchů spíše o albedu než o odrazivosti. **Albedo** (difúzní odrazivost) bílého papíru je asi 0.7–0.8, sněhu 0.85 a burelu (MnO_2) 0.95. Termín je odvozen z latinského *albedo* = bělost a v tomto významu jej poprvé použil v roce 1760 JOHANN HEINRICH LAMBERT. Je-li difúzní odrazivost (albedo) povrchu $R = 1$, jde o bílý dokonale odrazivý povrch. Je-li $R = 0$, jde o dokonale černý absorbující povrch. Ve skutečnosti závisí odrazivost $R(\lambda)$ povrchu obecně i na vlnové délce (barvě) dopadajícího světla. Proto se mohou předměty jevit barevně v bílém slunečním světle. Bude-li například odrazivost větší pro delší vlnové délky, bude se povrch tělesa jevit červeně nebo oranžově. Bude-li $R(\lambda) \approx \text{konst}$, barva odraženého světla se nezmění a takový povrch tělesa nazýváme šedým povrchem.

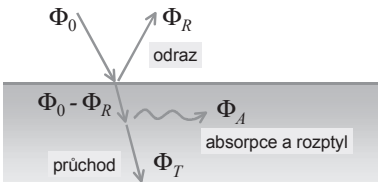
1.5.2 Čistá propustnost a pohltivost světla

Dopadá-li na povrch průhledného materiálu světelný tok Φ_0 , část $\Phi_R = R\Phi_0$ z něj se odrazí zpět do vzduchu a část $\Phi_0 - \Phi_R = (1 - R)\Phi_0$ projde do materiálu. Prochází-li světlo dále průhledným materiálem, část světla se dále ztrácí, a jeho intenzita v hloubce x klesne na hodnotu Φ_T . Poměr Φ_T/Φ_0 se nazývá **propustnost (transmittance)** vrstvy a poměr

$$T = \frac{\Phi_T}{\Phi_0 - \Phi_R}$$

očistěný o vliv reflexe světla na povrchu se nazývá **čistá propustnost** vrstvy.

Příčinou poklesu světelného toku v materiálu je **pohltivost (extinkce)**, která má dvě složky: **absorpci světla**, kdy je část světla absorbována látkou a přeměněna na jiné formy energie, a **rozptyl světla**, kdy je část světla zachycena látkou a zpět vyzářena, ovšem v jiném, většinou náhodném směru. Abychom se vyhnuli komplikacím spojeným s divergencí svazku paprsků, kdy každý paprsek by měl jinou dráhu, omezíme se dále jen na rovnoběžný svazek paprsků.



Ilustrace k popisu odrazivosti, propustnosti a absorpcie světla v průhledném prostředí.

Absorpce i rozptyl mají na procházející světlo stejný účinek, světelný tok prošlého světla klesá, přitom relativní pokles toku $d\Phi/\Phi$ je úměrný tloušťce vrstvy dx , platí tedy

$$\frac{d\Phi}{\Phi} = -\alpha dx,$$

kde $\alpha(x)$ je **součinitel pohltivosti (extinkce)**, což je fakticky součet **součinitele absorpce** a **součinitele rozptylu** dané látky. Odtud integrací přes celou tloušťku x dostaneme

$$\ln \frac{\Phi_T}{\Phi_0 - \Phi_R} = - \int_0^x \alpha dx = -\tau,$$

kde $\Phi_0 - \Phi_R$ značí počáteční světelný tok v $x = 0$ hned za rozhraním a

$$\tau = \int_0^x \alpha(x) dx$$

optickou tloušťku vrstvy. **Optická tloušťka** je z definice rovna přirozenému logaritmu zeslabení

$$\tau = \ln \frac{1}{T} = \ln \frac{\Phi_0 - \Phi_R}{\Phi_T}.$$

Pro světelný tok prošlého světla tedy platí

$$\Phi_T = (\Phi_0 - \Phi_R) e^{-\tau}.$$

Pro homogenní materiál $\alpha = \text{konst}$ dostaneme pochopitelně lineární růst optické tloušťky $\tau = \alpha x$ a exponenciální pokles prošlého světelného toku

$$\Phi_T = (\Phi_0 - \Phi_R) e^{-\alpha x}.$$

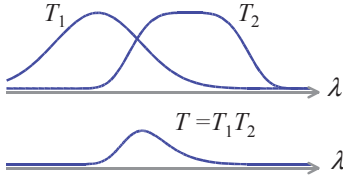
Čistá propustnost (transmitance) homogenní vrstvy je tedy popsána **Bouguerovým zákonem** z roku 1729

$$T = \frac{\Phi_T}{\Phi_0 - \Phi_R} = e^{-\tau} = e^{-\alpha x},$$

kde x značí tloušťku vrstvy. Je-li součinitel pohltivosti (extinkce) α funkcí vlnové délky λ , dojde při průchodu světla selektivně absorbujícím prostředím ke zbarvení prošlého světla v závislosti na tloušťce vrstvy. Součinitel pohltivosti (extinkce) pro vzduch je řádově $\alpha \approx 10^{-3} \text{ m}^{-1}$, pro sklo $\alpha \approx 1 \text{ m}^{-1}$ a pro kovy $\alpha \approx 10^6 \text{ m}^{-1}$, průhlednost těchto prostředí je tedy zhruba popořadě 1 km, 1 m a $1 \mu\text{m}$. Vedle optické tloušťky τ vrstvy se používá také pojem **absorbance** (optická hustota) A vrstvy, která je definována předpisem

$$A = \log \frac{1}{T} = \log \frac{\Phi_0 - \Phi_R}{\Phi_T},$$

takže s optickou tloušťkou souvisí lineárním vztahem $\tau = A \ln 10 \approx 2.303 A$.

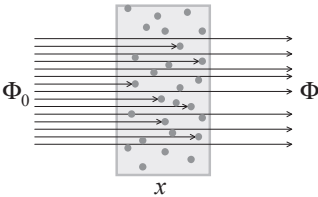


Subtraktivní skládání barev. Propustnost jednotlivých filtrů (nahore) a dvojice filtrů současně (dole).

Pokud je propustnost jednoho filtru T_1 a druhého T_2 , pak když vložíme světlo do cesty oba filtry současně, bude výsledná propustnost rovna jejich součinu $T = T_1 T_2$. Protože se spektrální propustnosti obou filtrů mohou lišit, platí obecně také

$$T(\lambda) = T_1(\lambda) T_2(\lambda).$$

Tomuto skládání barevných filtrů odpovídá **subtraktivní** (rozdílové) **skládání barev**. Například žlutý a azurový filtr současně propustí z bílého světla pouze světlo zelené.



Zeslabení světelného toku vlivem extinkčních center v látce.

Mikroskopicky souvisí součinitel pohltivosti (extinkce) α s koncentrací N a účinným průřezem σ jednotlivých absorbčních a rozptylových center jednoduchým vztahem $\alpha = N\sigma$, takže **Lambert-Beerův zákon** pak zní

$$T = \frac{\Phi_T}{\Phi_0} = e^{-N\sigma x}.$$

Pro směs absorbčních a rozptylových center bude výsledný součinitel pohltivosti (extinkce) dán jejich součtem

$$\alpha = \sum_k N_k \sigma_k.$$

Účinný průřez σ můžeme zjednodušeně chápat jako účinnou plochu, o kterou každé absorbční a rozptylové centrum zmenší příčný průřez destičky. Kdyby absorbčními a rozptylovými centry byly neprůhledné kuličky poloměru r , byl by jejich účinný průřez roven přímo jejich geometrickému průřezu $\sigma = \pi r^2$.

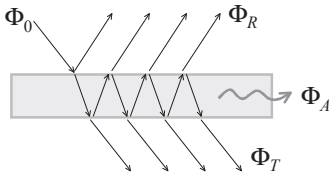
Exponenciální pokles intenzity světla s tloušťkou materiálu, jímž světlo prošlo, byl objeven PIERRE BOUGUEREM již někdy před rokem 1729, kdy svůj objev publikoval. Přesto je jeho objev mylně přisuzován JOHANN HEINRICH LAMBERTOVI, který Bouguerův výsledek jen ocitoval ve své *Photometrii* z roku 1760. Později, roku 1852, rozšířil Bouguerův zákon o exponenciálním útlumu o závislost na koncentraci absorbéru AUGUST BEER, což mělo velký význam především pro analytickou chemii.

1.5.3 Odrazivost a propustnost destičky

Dopadá-li světelný tok Φ_0 na povrch destičky tloušťky d , pak část světelného toku Φ_R se odrazí, část Φ_A se pohltí nebo rozptýlí a pouze část světelného toku Φ_T destičkou projde ven. Podle zákona zachování energie musí platit

$$\Phi_R + \Phi_A + \Phi_T = \Phi_0.$$

Destička má však dva povrchy, které oba přispívají k výsledné odražené intenzitě světla, rovněž výsledná propustnost závisí netriviálním způsobem na odrazivosti jednotlivých stěn a pohltivosti (extinkci) materiálu destičky. Najdeme nyní tyto vztahy.



Opakované odrazy uvnitř destičky.

Předpokládejme rovnoběžný svazek paprsků, stejnou odrazivost každé z obou stěn destičky R a že zeslabení světla jedním průchodem destičkou je $T = e^{-\alpha d}$, tj. čistá propustnost jedním průchodem. Dopadne-li na přední stranu destičky světelná tok Φ_0 , odrazí se $R\Phi_0$ zpět, $(1 - R)\Phi_0$ projde do destičky, přitom na její druhý konec dopadne již pouze tok $\Phi_1 = T(1 - R)\Phi_0$, z čehož se $R\Phi_1$ odrazí zpět a $(1 - R)\Phi_1$ vyjde definitivně ven. Odražená část $R\Phi_1$ prochází zpět destičkou, tím se dále oslabí na $\Phi_2 = RT\Phi_1$, z níž opět část $(1 - R)\Phi_2$ projde ven a $R\Phi_2$ se vrací zpět do destičky. Část světla tedy běhá mezi stěnami destičky a postupně slábne vlivem extinkce a konečné odrazivosti stěn destičky. Sečteme-li všechny tyto příspěvky, dostaneme tři nekonečné geometrické řady. Celkově vrácený, tj. odražený světelný tok bude roven

$$\Phi_R = R\Phi_0 \left(1 + T^2(1 - R)^2 + T^4R^2(1 - R)^2 + \dots \right) = \frac{R + RT^2 - 2T^2R^2}{1 - T^2R^2} \Phi_0,$$

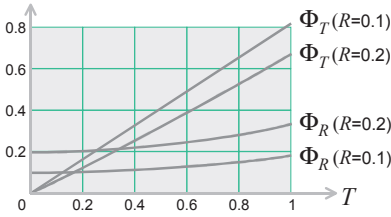
celkově prošlý světelný tok bude roven

$$\Phi_T = T(1 - R)^2 \Phi_0 (1 + T^2R^2 + \dots) = \frac{T(1 - R)^2}{1 - T^2R^2} \Phi_0,$$

zatímco absorbovaná a rozptýlená část světelného toku v destičce bude rovna

$$\Phi_A = (1 - T)(1 - R)\Phi_0(1 + TR + \dots) = \frac{(1 - T)(1 - R)}{1 - TR} \Phi_0.$$

Pro kontrolu těchto výsledků můžeme ověřit, že skutečně platí zákon zachování světelné energie $\Phi_R + \Phi_T + \Phi_A = \Phi_0$.



Výsledný odražený světelný tok Φ_R a výsledný prošlý světelný tok Φ_T destičkou s odrazivostí stěn $R = 0.1$ a 0.2 v závislosti na čisté světelné propustnosti $T = e^{-\alpha d}$ destičky.

Pro dokonale průhlednou (tenkou) destičku $T = 1$ je

$$\Phi_R = \frac{2R}{R+1}\Phi_0, \quad \Phi_T = \frac{1-R}{1+R}\Phi_0 \quad \text{a} \quad \Phi_A = 0,$$

zatímco pro dokonale neprůhlednou destičku $T = 0$ je triviálně

$$\Phi_R = R\Phi_0, \quad \Phi_T = 0 \quad \text{a} \quad \Phi_A = (1-R)\Phi_0.$$

Protože kolmá odrazivost rozhraní je popsána vztahem (1.17), dostaneme pro světelný tok odraženého, prošlého a pohlceného světla destičkou v prvním případě ($T = 1$)

$$\Phi_R = \frac{(n-1)^2}{n^2+1}\Phi_0 \approx 0.077\Phi_0, \quad \Phi_T = \frac{2n}{n^2+1}\Phi_0 \approx 0.923\Phi_0 \quad \text{a} \quad \Phi_A = 0$$

a ve druhém případě ($T = 0$)

$$\Phi_R = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 \Phi_0 \approx 0.04\Phi_0, \quad \Phi_T = 0 \quad \text{a} \quad \Phi_A = \frac{4n}{(n+1)^2}\Phi_0 \approx 0.96\Phi_0,$$

kde poslední výrazy platí pro sklo mající index lomu $n \approx 1.5$. Pokud by byla destička dostatečně tenká, projevila by se na výsledných tocích Φ_R a Φ_T silně interference světla, jev, který jsme zde neuvažovali a se kterým se podrobně seznámíme až ve vlnové optice ve druhém dílu optiky. Pro destičky silnější než mikrometr platí výše uvedené vzorce beze změny.

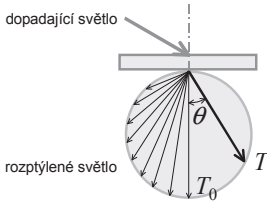
Příklad 1.9 Optická soustava se skládá z deseti čoček. Kolik světla projde takovou soustavou, když odrazivost na rozhraní vzduch – sklo je 4 % a po nanesení antireflexních vrstev 1 %?

Řešení: Soustava obsahuje dvacet rozhraní, každým projde 96 % resp. 99 % světla, takže celou soustavou projde v prvním případě jen $\Phi_1/\Phi_0 \approx 0.96^{20} \approx 44.2\%$ a ve druhém $\Phi_2/\Phi_0 \approx 0.99^{20} \approx 81.8\%$ světla.

1.5.4 Rozptyl světla

Prochází-li světlo průhlednou destičkou, láme se v ní podle zákona lomu a nakonec z ní vychází rovnoběžně s dopadajícím paprskem. Je-li však povrch destičky zdrsňen nebo sklo samo obsahuje malé bubliny, nečistoty, případně rozptylová centra, dochází zde k rozptylu světla. Světlo je v destičce opakovaně rozptylováno až nakonec vyjde destičkou ven, taková destička je tedy **průsvitná** ale **neprůhledná**.

Příkladem je matné uměle zdrsňené sklo nebo mléčné sklo, pro difúzní propustnost takového skla pak platí opět **kosinový zákon** $T = T_0 \cos \theta$, kde T_0 značí kolmou propustnost (transmitanci) a úhel θ měříme od normály mléčného skla.



Propustnost matného nebo mléčného skla se řídí Lambertovým zákonem $T = T_0 \cos \theta$.

Při **rozptylu světla** je část světla zachycena látkou a zpět vyzářena, ovšem v jiném, většinou náhodném směru. Při rozptylu se tedy světelná energie zachovává (pružný rozptyl) nebo klesá jen málo (nepružný rozptyl). Také vlnová délka světla se buď nemění (Rayleighův rozptyl) nebo se málo zvětšuje (Stokesův rozptyl).

Silný rozptyl (Tyndalův jev) je pozorován v koloidních roztocích (stačí pár kapek mléka ve sklenici vody) nebo v jemném aerosolu (mlha), mají-li rozptýlené částice či kapičky rozměry menší než vlnová délka světla. V takovém případě se pozoruje **opalescence** a rozptýlené světlo má jemný modrý nádech. Příkladem je perleť nebo opál, který dal opalescenci jméno. Vlastně i modré oči vděčí za svoji barvu Tyndalovu jevu, tj. rozptylu světla na v duhovce přítomném pigmentu melaninu.

Zákonitosti rozptylu světla v matných (kalných) prostředích poprvé důkladně zkoumal JOHN TYNDALL roku 1869. Teoreticky objasnil rozptyl na malých částicích až LORD RAYLEIGH (JOHN WILLIAM STRUTT) roku 1899 a ukázal, že intenzita rozptýleného světla klesá se čtvrtou mocninou vlnové délky. Rozptyl na částicích větších než vlnová délka světla popsal roku 1908 GUSTAV MIE.

1.5.5 Extinkce u zářící látky

Uvažujme úzký svazek paprsků světla vyzářovaných do úzkého prostorového úhlu $\Delta\Omega$ a procházející plochou ΔS pod úhlem θ . Označíme-li příslušný světelný tok $\Delta\Phi$, pak jas plochy ΔA je z definice roven

$$L = \frac{\Delta\Phi}{\Delta S \cos \theta \Delta\Omega}.$$

Tento svazek nechť prochází vrstvou současně pohlcující i zářící látky o tloušťce dx , světelný tok $d\Phi/dx$ a tím i jas světla dL/dx poklesne vlivem extinkce o αL , ale současně vrstva přispěje k intenzitě světla zdrojovým členem αZ , platí tedy rovnice přenosu světla

$$\frac{dL}{dx} = -\alpha L + \alpha Z.$$

Zavedením optické tloušťky

$$\tau(x) = \int_0^x \alpha(x) dx$$

dostaneme jednoduchou nehomogenní diferenciální rovnici

$$\frac{dL}{d\tau} + L = Z.$$

Například metodou variace konstant najdeme obecné řešení této rovnice ve tvaru

$$L(x) = \left(L_0 + \int_0^\tau Z e^t dt \right) e^{-\tau} = L_0 e^{-\tau} + \int_0^\tau Z e^{t-\tau} dt,$$

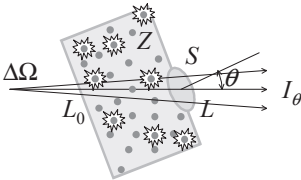
kde $L_0 = L(0)$ značí jas světla na vstupu $z = 0$ do látky. Vidíme tedy, že pro malé optické tloušťky $\tau \ll 1$ je jas světla $L(x) \approx L_0$ dán prakticky jen vstupním jaselem L_0 , zatímco pro velké optické tloušťky $\tau \gg 1$ zase závisí prakticky jen na zdrojové funkci $Z(x)$ v okolí výstupu světla z látky $t \approx \tau$. Skutečně, integrací per partes dostaneme

$$\int_0^\tau Z e^{t-\tau} dt = [Z e^{t-\tau}]_0^\tau - \int_0^\tau Z' e^{t-\tau} dt = Z(\tau) - Z(0) e^{-\tau} - \int_0^\tau Z' e^{t-\tau} dt,$$

opakováním této integrace dostaneme pro velká τ rozvoj

$$L(x) \approx \int_0^\tau Z e^{t-\tau} dt \approx Z(\tau) - Z'(\tau) + Z''(\tau) - \dots,$$

z něhož je patrné, že výsledný jas světla závisí jen na hodnotách a derivacích zdrojové funkce Z v místě x výstupu světla z látky.



Průchod světla současně pohlcující i zářící látkou. Element S povrchu látky má ve směru θ svítivost $I_\theta = LS \cos \theta$.

Pro konstantní zdrojovou funkci $Z(x) = Z_0$ se integrace stane triviální a dostaneme výsledek

$$L(x) = L_0 e^{-\tau} + Z_0 (1 - e^{-\tau}).$$

Pro velké optické tloušťky $\tau \gg 1$ tak máme výsledek $L(x) \approx Z_0$, který triviálně vysvětluje Lambertův kosinový zákon. Element S povrchu zdroje světla vyzařuje ve směru θ od jeho normály světlo o jasu $L \approx Z_0$ nezávisle od aktuálního sklonu paprsku, jas zářícího povrchu je tedy na sklonu paprsku θ nezávislý. Protože ale svítivost $I_\theta = LS \cos \theta = Z_0 S \cos \theta$ vyzářená do daného směru θ závisí na kolmém průmětu $S \cos \theta$ plochy zdroje S , bude svítivost ve směru θ klesat úměrně lambertovskému faktoru $\cos \theta$.

1.6 Disperze a spektrum světla

1.6.1 Rozklad světla, barevné spektrum

Již první experimenty s čočkami vedly k pozorování překvapivě nádherně zbarvených okrajů obrazů jinak nepřilíš barevných předmětů. Rovněž zbarvení a třpyt broušených drahokamů nebo nebeská duha mají svůj původ v rozkladu bílých paprsků na spektrální barvy. Všechny tyto jevy jsou důsledkem různé lámavosti paprsků různých barev, tj. různých vlnových délek.

Za objevitele **disperze**, tj. **rozkladu světla** je někdy považován Čech JAN MAREK MARKŮ z LANŠKROUNA (latinsky znám jako JOANNES MARCUS MARCI DE CRONLAND), osobní lékař císaře Ferdinanda III. a Leopolda I. nebo rektor Karlovy univerzity, který roku 1648 hranolem rozložil bílé světlo a ukázal, že paprsky různých barev se lámou různě.

Soustavné experimenty s rozkladem světla prováděl od roku 1666 ISAAC NEWTON a popsal je ve svém díle *O barvách* z roku 1670. Později, v roce 1704, se toto dílo stalo jednou z kapitol slavné knihy *Opticks*. Pomocí hranolu Newton dokázal, že obyčejné bílé sluneční světlo je světlo složené, tj. skládá se z nekonečně mnoha **elementárních spektrálních barev**. Pomocí jiného hranolu dokázal celé barevné spektrum opět poskládat do jediného bílého paprsku. Elementární spektrální barvy tvoří spojitý soubor barevných odstínů zvaný **spektrum** a nelze je už dále rozložit. Pořadí barev ve spektru je vždy stále od fialové, přes modrou, zelenou, žlutou, oranžovou až k červené. Jednotlivé elementární barvy můžeme skládat a vytvářet z nich libovolné barevné odstíny, které v samotném spektru nenalezneme. Například hnědou, růžovou, purpurovou aj.

Vlnové délky vybraných barev spektra

červená	650 nm	žlutá	580 nm	modrozelená	490 nm
červenooranžová	610 nm	žlutozelená	550 nm	modrá	470 nm
oranžová	590 nm	zelená	510 nm	fialová	430 nm

Když roku 1800 zkoumal WILLIAM HERSCHEL pomocí teploměru, která barva slunečního spektra je nejteplejší, s údivem zjistil, že nejvyšší teplotu ukázal teploměr v místě ležícím mimo viditelné spektrum daleko za červenou barvou. Dokázal tak, že sluneční záření obsahuje i neviditelné tepelné záření, které se dnes nazývá **infračervené záření**. Podobně roku 1801 WILLIAM HYDE WOLLASTON a JOHANN WILHELM RITTER prokázali, že i na druhém konci spektra existuje neviditelné **ultrafialové záření**, které je možno prokázat například ionizačními nebo biologickými účinky. Ultrafialové záření způsobuje také zčernání fotografické desky a zvýšenou pigmentaci (opálení) pokožky.

Teprve dodatečně v rámci vlnové optiky v 19. století bylo zjištěno, že jednotlivé barvy odpovídají různým vlnovým délkám světla a že viditelné spektrum obsahuje zhruba vlnové délky 400 nm až 800 nm. Infračervené záření má vlnové délky 800 nm až 1400 nm a ultrafialové 200 nm až 400 nm.

Čtenář si jistě povšiml, že si občas vypomáháme s pojmy známými až z vlnové optiky, především s pojmem vlnové délky. Světlo však nadále chápeme jako paprsky

a vlnová délka je pro nás jen vhodný parametr určující barvu světla a tím i lámavost světla v daném prostředí. Jiné poznatky z vlnové optiky zatím nepotřebujeme.

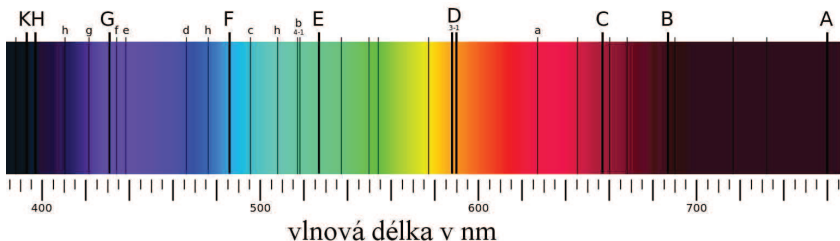
1.6.2 Druhy spekter, spektroskopie

Jak již bylo zmíněno, závisí index lomu skla n obecně na vlnové délce světla λ , a proto může hranol rozložit paprsek bílého světla do celého vějíře barevných paprsků. Existují i jiné disperzní prvky, z nich se v optice používají především optické mřížky.

Rozžhavené látky vyzařují světlo, jehož spektrum se nazývá **emisní spektrum**. Pokud naopak necháme procházet bílé světlo určitou průhlednou látkou, část světla se v ní zachytí a u prošlého světla budeme zkoumat **absorpční spektrum**. Ze složení spektra je možno usuzovat na fyzikální vlastnosti nebo chemické složení neznámých látek. Zkoumáním spekter se zabývá **spektroskopie**, nejpřesnější experimentální obor fyziky vůbec. Spektroskopie umožňuje zkoumat vlastnosti vzdálených hvězd a galaxií, jakož i prohlížet *in vivo* vnitřní orgány lidského těla pomocí jaderné magnetické rezonance. Rozvoj spektroskopie vedl také k sestrojení tak významných nástrojů, jako jsou maser (CHARLES HARD TOWNES roku 1953) a laser (THEODORE H. MAIMAN roku 1960).

Emisní spektrum může být spojité, čárové nebo smíšené. **Spektrální emisní čára** je jasný barevný proužek, který se objeví ve spektru. Je-li těchto čar ve spektru mnoho, překrývají se a vytvářejí spektrální pásy, případně spojité spektrum. Diskrétní neboli **čárové spektrum** je možno pozorovat ve světle vycházejícím z řídkých rozžhavených plynů, výbojek a laserů. Husté plyny, vysokotlaké výbojky a žhavá pevná tělesa vyzařují obvykle **spojité spektrum**, které se více či méně blíží ideálnímu spektru záření černého tělesa, které popisuje Planckův vyzařovací zákon.

Spektrální čáry přesně odpovídají přítomnosti konkrétních atomů ve zdroji světla, a proto může být chemické složení zdroje ze spektra zpětně určeno. Jen díky tomu víme, z jakých atomů se skládají atmosféry hvězd nebo vzdálené mlhoviny. Spektrální čáry mohou být vlivem vzájemného pohybu zdroje světla a pozorovatele posunuty k červenému konci spektra (rudý posun) nebo k modrému konci spektra (modrý posun), jak to předpovídá **Dopplerův jev**, a proto můžeme pohodlně změřit rychlost, se kterou se k nám jednotlivé hvězdy přibližují nebo vzdalují.



Fraunhoferovy čáry ve slunečním spektru.

Světlo, které projde chladným řídkým plynem, je obráno o přesně tytéž spektrální čáry, které bychom pozorovali, kdyby byl plyn žhavý. Ve spojitém transmisním

spektru se absorpce projeví vznikem tmavých **absorpčních čar**. Protože jejich poloha je stejná jako u emisních čar, můžeme je rovněž použít k identifikaci látek a atomů přítomných v chladném vzorku.

Fraunhoferovy čáry

<i>A</i>	760.8 nm	O	tmavočerv.	<i>E</i>	527.0 nm	Fe	zelená
<i>B</i>	687.8 nm	O	červená	<i>F</i>	486.1 nm	H	modrozelená
<i>C</i>	656.3 nm	H	červená	<i>G</i>	430.8 nm	Ca	modrá
<i>D</i>	589.3 nm	Na	žlutá	<i>H</i>	396.8 nm	Ca	fialová

Absorpční spektrální čáry sodíkového plamene objevil prakticky náhodou při zkoumání optických vlastností skel roku 1813 JOSEPH FRAUNHOFER. Později objevil a katalogizoval stovky spektrálních čar různých prvků a objevil také absorpční spektrální čáry ve slunečním spektru. Ty nejsilnější z nich pojmenoval písmeny *A* až *H*. Dnes jich známe více než dvacet tisíc. Během slunečního zatmění roku 1868 objevil PIERRE JANSSEN ve spektru sluneční chromosféry i čáry, které neodpovídaly žádnému z tehdy známých pozemských prvků. Tento neznámý prvek byl pojmenován hélium, neboť řecky se Slunce řekne *Hélios*. Teprve později se ukázalo, že i hélium se nachází na Zemi, ovšem jen v malém množství a díky své chemické netečnosti bylo objeveno až WILLIAM RAMSAYEM roku 1895.

Modré světlo se obvykle láme (normální disperze) více než červené, takže index lomu průhledných látek roste s pořadím jména čáry podle abecedy. Výraz $\Delta n = n_H - n_C$ se nazývá **celková disperze**, $\Delta n = n_F - n_C$ **střední disperze** a rozdíl indexů lomu pro libovolné dvě Fraunhoferovy čáry **částečná disperze**. Převrácená relativní disperze se pak nazývá **Abbeovo číslo**

$$\nu_D = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C}.$$

Pro obyčejné sklo je $n_D \approx 1.52$, $\Delta n = n_F - n_C \approx 0.008$, takže Abbeovo číslo je $\nu_D \approx 65$.

Pokud nemáme k dispozici sluneční světlo, je obvykle jednodušší získat emisní čáry hélia, rtuti nebo kadmia než vodíku a sodíku. Proto se dnes často užívají alternativní Abbeova čísla

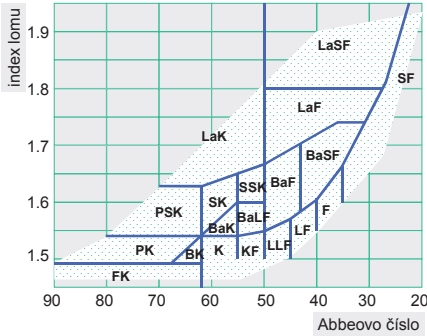
$$\nu_d = \frac{n_d - 1}{n_F - n_C} \quad \text{a} \quad \nu_e = \frac{n_e - 1}{n_{F'} - n_{C'}},$$

kde *d* značí žlutou čáru 587.6 nm hélia, *e* značí zelenou čáru 546.1 nm rtuti, *F'* a *C'* pak značí modrou 480.0 nm a červenou 643.8 nm čáru kadmia.

1.6.3 Typy skel

Podle indexu lomu a Abbeova čísla dělíme optická skla do mnoha skupin, jejich názvy a zkratky jsou odvozeny od chemického složení skla. Hlavní dělení určuje Abbeovo číslo, pro $\nu > 55$ hovoříme o **korunovém skle** (sodno-vápenaté a

draselno-vápenaté), pro $\nu < 50$ hovoříme o **flintovém skle** (olovnaté) a mezi tím se nacházejí korunověflintová skla. **Těžká korunová skla** mají vyšší index lomu než obyčejná korunová skla a podobně **lehká flintová skla** mají nižší index lomu než obyčejná flintová skla.



Mapa základních typů skel rozdělena podle indexu lomu a Abbeova čísla. Označení skel podle Schotta.

Každý výrobce optického skla má své specifické značení, jako příklad zde uvádíme označení skel podle *Schotta* a jejich polohu v grafu Abbeovo číslo – index lomu: FK značí fluorečnaté korunové sklo, PK fosforečnaté korunové sklo, PSK těžké fosforečnaté korunové sklo, BK borosilikátové korunové sklo, BaK barnaté korunové sklo, SK těžké korunové, K korunové, LaK lantanaté korunové, SSK velmi těžké korunové sklo, BaLF barnaté lehké flintové sklo, KF korunověflintové sklo, LaSF lantanaté těžké flintové sklo, LaF lantanaté flintové, BaF barnaté flintové, BaSF barnaté těžké flintové, LLF velmi lehké flintové, LF lehké flintové, F flintové, SF těžké flintové, ZK zinečnaté korunové, KzSF speciální krátké flintové.

1.6.4 Disperzní hranol

Nejstarším disperzním zařízením je skleněný lámavý hranol o indexu lomu n a lámavém úhlu ϕ . Paprsek se v něm podle (1.5) odklání o minimální úhel $\delta = 2\alpha - \phi$, kde α značí úhel dopadu paprsku na lámavou hranu a přitom platí $\sin \alpha = n \sin \frac{1}{2}\phi$. Deviace paprsku tedy závisí na indexu lomu n , který zase závisí na barvě světla neboli na vlnové délce λ světla. Pro malou disperzi najdeme úhlovou šířku spektra zdiferencováním obou vzorců (1.5). Tak dostaneme

$$\Delta\delta = 2\Delta\alpha = \frac{2 \sin \frac{\phi}{2}}{\cos \alpha} \Delta n,$$

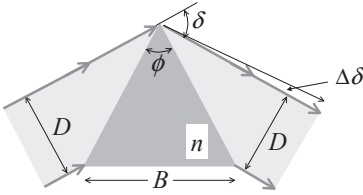
vyloučením úhlu α s pomocí vzorce

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \frac{\phi}{2}}$$

dostaneme pro šířku vějíře spektra výsledný vzorec

$$\Delta\delta = \frac{2 \sin \frac{\phi}{2}}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \frac{\phi}{2}}} \Delta n. \quad (1.19)$$

Pro běžný lámavý úhel $\phi = 60^\circ$ a obyčejné sklo je střední disperze $\Delta n = n_F - n_C \approx 0.008$, takže úhlová šířka spektra za hranolem je typicky $\Delta\delta \approx 0.7^\circ$. Pro malé lámavé úhly ϕ (disperzní klín) platí aproximace $\Delta\delta = 2\Delta\alpha \approx \phi\Delta n$.



Ilustrace ke spektrálnímu rozlišení hranolu šířky B , lámavého úhlu ϕ a indexu lomu n .

Délku L lámavé hrany můžeme vyjádřit pomocí šířky B základny hranolu nebo také pomocí šířky D optického svazku, takže z geometrie chodu paprsků hranolem platí

$$L = \frac{B}{2 \sin \phi/2} = \frac{D}{\cos \alpha},$$

proto lze vzorec pro disperzi (1.19) přepsat také do elementárního tvaru

$$\Delta\delta = \frac{B}{D} \Delta n. \quad (1.20)$$

Úhlové rozlišení hranolu je omezeno ohybem světla, takže nemůže být lepší než $\Delta\delta \approx \lambda/D$, kde D je šířka svazku (příčný rozměr hranolu). **Rozlišovací schopnost** hranolu definujeme jako podíl $R = \lambda/\Delta\lambda$, kde $\Delta\lambda$ značí nejmenší rozlišitelný rozdíl vlnových délek, takže s pomocí (1.20) dostaneme

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{\lambda}{\Delta\delta} \frac{\Delta\delta}{\Delta\lambda} \approx D \frac{B}{D} \frac{\Delta n}{\Delta\lambda} = B \frac{\Delta n}{\Delta\lambda}. \quad (1.21)$$

Spektrální rozlišení hranolu tedy roste s velikostí B základny hranolu a velikostí disperze $\Delta n/\Delta\lambda$ použitého skla. Pro typický hranol o základně $B \approx 10$ cm a obyčejné sklo vyjde rozlišení $R \approx 4400$. Chceme-li disperzi zvýšit, můžeme použít řadu hranolů za sebou.

1.6.5 Disperzní vzorce

Přesněji než Abbeovo číslo popisuje disperzi látky **disperzní vzorec** $n(\lambda)$, tj. závislost indexu lomu na vlnové délce světla. Většinou se jedná o přibližné fenomenologické vzorce platící v omezeném intervalu spektra. Pro svoji jednoduchost se nejčastěji užívá **Cauchyho vzorec**

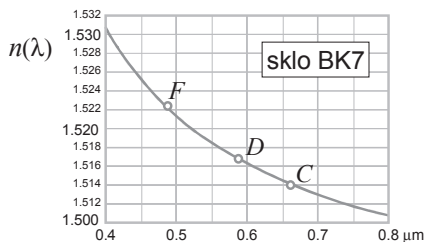
$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \dots,$$

který odvodil roku 1836 AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY. Mnohdy vystačíme již s prvními dvěma členy rozvoje. Používá se také **Cornuův vzorec** (MARIE ALFRED CORNU)

$$n = n_0 + \frac{a}{\lambda - \lambda_0}.$$

Konstanty n_0 , a a λ_0 pro Cornuův vzorec najdeme, známe-li tři indexy lomu n_1, n_2 a n_3 pro tři vlnové délky λ_1, λ_2 a λ_3 . Index lomu pak můžeme vyjádřit vzorcem

$$n(\lambda) = n_3 + \frac{n_1 - n_3}{1 + N(\lambda)}, \quad \text{kde} \quad N(\lambda) = \frac{(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda_2)(n_1 - n_2)}{(\lambda - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_1)(n_2 - n_3)}.$$



Disperze $n(\lambda)$ borosilikátového skla BK 7.

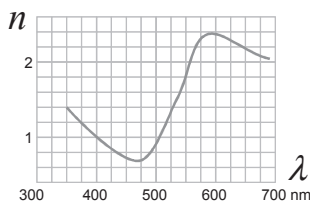
Nejpřesnější disperzní formulí je **Sellmeierův vzorec**, který má tvar

$$n^2 = 1 + \frac{B_1\lambda^2}{\lambda^2 - C_1} + \frac{B_2\lambda^2}{\lambda^2 - C_2} + \frac{B_3\lambda^2}{\lambda^2 - C_3},$$

přitom pro běžné borosilikátové sklo BK 7 jsou konstanty rovny $B_1 \approx 1.03961212$, $B_2 \approx 0.231792344$, $B_3 \approx 1.01046945$ a dále $C_1 \approx 6.00069867 \times 10^{-3} \mu\text{m}^2$, $C_2 \approx 2.00179144 \times 10^{-2} \mu\text{m}^2$, $C_3 \approx 1.03560653 \times 10^2 \mu\text{m}^2$. Tato empirická formule nejlépe odpovídá teoretickému průběhu disperze, platí s odchylkou indexu lomu menší než 5×10^{-6} v širokém intervalu vlnových délek od 365 nm do 2.3 μm a sestavil ji roku 1871 WILHELM SELLMEIER.

1.6.6 Anomální disperze

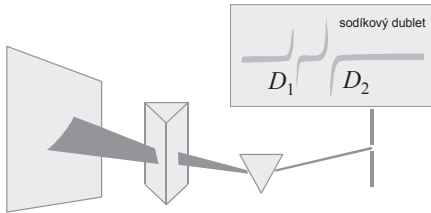
Pro průhledné látky klesá index lomu s vlnovou délkou $\Delta n/\Delta\lambda < 0$, hovoříme o **normální disperzi**. Existují však látky, pro něž index lomu v určitém intervalu viditelného spektra roste s vlnovou délkou. Tato **anomální disperze** $\Delta n/\Delta\lambda > 0$ je vždy spojena se zvýšenou absorpcí světla.



Anomální disperze lihového roztoku fuchsinu, všimněte si indexu lomu menšího než jedna pro vlnové délky 400 nm až 500 nm.

Anomální disperzi objevil roku 1840 WILLIAM HENRY FOX TALBOT. Roku 1861 si FRANÇOIS PIERRE LE ROUX všiml při zkoumání disperze světla na jodových parách, že červené světlo se láme překvapivě více než fialové a ostatní barvy parami neprocházejí prakticky vůbec. Jejich objevy však upadly v zapomnění, teprve podrobné studium anomální disperze, které provedl CHRISTIAN CHRISTIANSEN roku

1870 na lihovém roztoku fuchsínu, vyvolalo patričný zájem optiků o tento zajímavý jev.

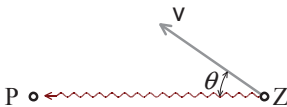


Kundtova metoda zkřížených hranolů umožnila studium anomálních spekter. Vpravo nahoře anomální spektrum sodíkových par získané Kundtovou metodou zkřížených hranolů.

Roku 1871 použil k analýze anomální disperze AUGUST KUNDT zkřížených hranolů, tím odstranil překryv některých částí spektra se stejným indexem lomu.

1.6.7 Dopplerův jev

Poloha spektrálních čar umožňuje identifikovat prvky, které příslušné světlo vyzařily, i jejich množství. Při studiu spekter vzdálených hvězd a galaxií však byly s překvapením objeveny neznámé čáry a naopak čáry běžných prvků jako vodík nebo hélium ve spektru těchto hvězd chyběly. Teprve později se zjistilo, že jde o spektrum běžného typu, které je ovšem posunuté buď ve směru k modrému nebo, což je častější, k červenému konci spektra. Jevo se nazývá **modrý** nebo **rudý posun** a jeho příčinou je **Dopplerův jev**, který objevil již roku 1842 CHRISTIAN ANDREAS DOPPLER.³



Frekvence ω světla zachyceného od pohyblivého zdroje Z je posunuta vlivem Dopplerova jevu.

V teorii relativity se dokazuje, že pohybuje-li se zdroj světla vůči pozorovateli rychlostí $v = c\beta$ ve směru θ vůči paprsku světla, pozoruje se světlo o frekvenci

$$\omega = \omega_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta} = \omega_0 \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \theta},$$

kde ω_0 odpovídá frekvenci světla nehybného zdroje. Pokud se omezíme na nerelativistické rychlosti, platí s dostatečnou přesností vzorce

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \approx \frac{v \cos \theta}{c} \quad \text{nebo} \quad \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} \approx -\frac{v \cos \theta}{c}.$$

Dopplerův jev tedy umožňuje měřit podélnou rychlost $v \cos \theta$ vzdálených zdrojů záření z jejich spektra. Pokud se zdroj přibližuje $\cos \theta > 0$, pozorovaná frekvence roste a vlnová délka klesá (modrý posun spektra), pokud se zdroj vzdaluje $\cos \theta < 0$,

³Podrobněji o Dopplerově jevu pojednává kapitola věnovaná teorii relativity ve druhém dílu optiky.

pozorovaná frekvence klesá a vlnová délka roste (rudý posun spektra). Pro $\theta = 90^\circ$ se zdroj ani nepřibližuje ani nevzdaluje, pohybuje se příčně. I v takovém případě však naměříme slabý rudý posun

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \omega_0 \sqrt{1 - \beta^2} < \omega_0,$$

který souvisí s relativistickou dilatací času.

1.7 Radiometrie a záření černého tělesa

1.7.1 Tepelné záření

Z nauky o šíření tepla je známo, že teplo je předáváno mezi atomy a molekulami, a proto nejlepším, ba přímo ideálním tepelným izolantem je vakuum. Jeho tepelná vodivost je nulová a konvektivní proudy v něm také nevznikají. Vakuum se používá k tepelné izolaci v termoskách a Dewarových nádobách na zkuplněné plyny. Pečlivější zkoumání však ukazuje, že i tělesa oddělená vzduchoprázdnem si vyměňují teplo. Nejpádňějším důkazem je teplo přicházející ze Slunce. Sluneční paprsky nám přinášejí teplo přes 150 milionů kilometrů vzduchoprázdna a nepotřebují pro přenos hmotné prostředí stejně jako světlo. Vedle kondukcce a konvekce je tedy třetím mechanismem vedení tepla **sálání** neboli **radiace**. Význam sálání roste s teplotou povrchu a u do ruda rozžhavených těles je dokonce hlavním mechanismem přenosu tepla.

Tepelným zářením se rozumí obecně všechno záření, které emituje povrch tělesa s nenulovou absolutní teplotou. Spektrum tohoto záření je spojitě a energii nesou všechny složky záření, například naše Slunce (5800 K) vyzařuje nejvíce v rozsahu vlnových délek $0.2 \mu\text{m}$ až $1.7 \mu\text{m}$. Na Zemi používané zdroje tepelného záření však mají podstatně nižší teplotu než Slunce (žárovka 2700 K, infrazářič 1000 K, lidské tělo 300 K) a vyzařují proto energii spíše v intervalu delších vlnových délek $0.8 \mu\text{m}$ až $10 \mu\text{m}$, tedy v oblasti neviditelného infračerveného záření. Tepelné infračervené záření má podobné vlastnosti jako světlo, od něhož se liší jen delší vlnovou délkou. Na tepelné záření naše oči moc nereagují, ale pokožka je na ně dostatečně citlivá, takže intenzivní tepelné záření vnímat dokážeme. Zkoumání vlastností tepelného záření vyústilo na počátku 20. století ve vznik kvantové teorie.

1.7.2 Radiometrické veličiny

Tepelné infračervené záření je svou podstatou neviditelné elektromagnetické záření, podobně jako třeba rádiové vlny nebo rentgenové paprsky. Pro naše potřeby však zatím postačí představa, že tepelné záření je proudem neviditelných tepelných paprsků, které nesou prostorem energii. Množství zářivé energie, která projde určitou plochou za jednotku času, se nazývá **zářivý tok** Φ^e a měří se ve **wattech**. Zářivý tok představuje z definice zářivý výkon, který prochází danou plochou **S**, takže

souvisí se středním **Poyntingovým vektorem**⁴ \mathbf{P} vztahem

$$\Phi^e = \int \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = \int P \cos \theta dS.$$

Zářivý tok je energetickým ekvivalentem světelného toku, proto jej budeme značit symbolem Φ^e . Množství zářivého toku vyzařovaného tepelným zdrojem do jednotkového prostorového úhlu Ω představuje **zářivost**

$$I_\alpha^e = \frac{d\Phi^e}{d\Omega}.$$

Zářivost je energetickým ekvivalentem svítivosti a měří se ve W / sr. Zářivý tok, který vyzáří jednotková plocha A zdroje, se nazývá **intenzita vyzařování**

$$M^e = \frac{d\Phi^e}{dA}.$$

Jde o energetický ekvivalent světlení a měří se ve W / m². Energetickým ekvivalentem jasu je **zář**

$$L^e = \frac{dI_\alpha^e}{dA \cos \alpha}.$$

Jde vlastně o zářivost jednotky zdánlivé plochy zdroje a měří se ve W / sr m². Zářivý tok, který dopadá na jednotkovou plochu S skloněnou o úhel θ , představuje **ozáření** (intenzitu ozáření, ozářenost)

$$E^e = \frac{d\Phi^e}{dS} = \frac{I_\alpha^e d\Omega}{dS} = \frac{I_\alpha^e}{r^2} \cos \theta.$$

Jedná se o energetický ekvivalent osvětlení a měří se ve W / m². Kolmé ozáření E_0^e je zřejmě ekvivalentní se středním Poyntingovým vektorem a nazývá se **intenzita záření** nebo **intenzita světla**. Konečně časový integrál

$$H^e = \int_0^t E^e dt$$

ozáření E^e představuje **dávku ozáření** (expozici), která je energetickým ekvivalentem osvitů a měří se v J / m².

Srovnání radiometrických a fotometrických veličin a jednotek

Φ^e	W	zářivý tok	Φ	lm	světelný tok
I^e	W / sr	zářivost	I	cd	svítivost
M^e	W / m ²	intenzita vyzařování	M	lm / m ²	intenzita světlení
E^e	W / m ²	ozáření	E	lx	osvětlení
E_0^e	W / m ²	intenzita záření	E_0	lx	intenzita světla
L^e	W / sr m ²	zář	L	cd / m ²	jas
H^e	J / m ²	dávka ozáření	H	lx s	osvit

⁴Poyntingův vektor $\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ budeme definovat později v elektromagnetické teorii světla.

1.7.3 Odraz a absorpce tepelného záření

Když dopadá zářivý tok Φ^e tepelného záření na neprůhledný povrch tělesa, je část záření Φ_R^e odražena zpět a část Φ_A^e je pohlcena. Můžeme pak definovat stejně jako u světla **odrazivost** $R = \Phi_R^e / \Phi^e$ a **pohltivost** $A = \Phi_A^e / \Phi^e$ povrchu. Pro odrazivost a pohltivost platí podle zákona zachování energie rovnice $\Phi_R^e + \Phi_A^e = \Phi^e$ neboli

$$R + A = 1.$$

Odraz tepelného záření na vyleštěné ploše se řídí zákonem odrazu stejně jako odraz světla. Proto je možné pomocí zrcadel soustřeďovat tepelné paprsky do ohniska. Čočky a hranoly je také možno použít, ovšem je třeba přihlídnout k absorpci záření ve skle, a používat proto jiné optické materiály.

Na difúzním povrchu neplatí zákon odrazu, ale záření je rozptylováno všemi směry bez ohledu na směr dopadu záření. Difúzní odraz je způsoben rozptylem záření. Dokonale difúzní povrchy je možno považovat za lambertovské zářiče, jejichž zářivost klesá od kolmice podle kosinového zákona. V astronomii se místo odrazivosti používá termín **albedo**, který odpovídá integrální odrazivosti povrchu tělesa.

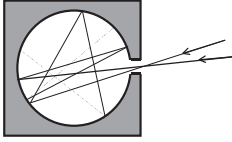
Následující tabulka uvádí přehled pohltivostí tepelného záření některých povrchů. Všimněte si, že pohltivost není vždy v korespondenci se světelnou pohltivostí. Například v optické oblasti bílá, drsná omítka má pohltivost pro tepelné záření 93 %. Pohltivost závisí významně na úpravě povrchu (leštěný, drsný, oxidovaný) a jeho teplotě, například wolfram má při pokojové teplotě emisivitu 0.03, při 1000 °C asi 0.15 a při 3000 °C už asi 0.35. Obecně je tedy nutno uvažovat i spektrální závislost pohltivosti, která je složitou funkcí vlnové délky záření. To vysvětluje i rozdíl mezi pohltivostí světla, infračerveného záření a mikrovln.

Pohltivost a emisivita povrchu

leštěný hliník	0.05	omítnutá stěna	0.93
poniklovaný plech	0.06	drsná litina	0.94
leštěná ocel	0.29	černé saze	0.95
sklo	0.80	abs. černé těleso	1

1.7.4 Absolutně černé těleso

Absolutně černé těleso je podle definice těleso, jehož povrch tepelné záření dokonale pohltí $A = 1$, a tudíž nic neodrazí $R = 0$. Z analogie se světlem pak vznikl jeho název. Absolutně černému tělesu se blíží drsný černý povrch, ale žádný povrch není dokonale černý v celém spektru. Ideálním prototypem absolutně černého tělesa je proto spíše dutina s malým otvorem, vlivem konečné odrazivosti vnitřních stěn dutiny se téměř každý paprsek, který do dutiny vnikne, rychle absorbuje. Otvor se tedy jeví jako černý a je dobrou aproximací absolutně černého tělesa. Pozor, absolutně černé těleso sice skutečně nic neodráží a všechno dopadající záření dokonale absorbuje, ovšem absolutně černé těleso také samo vyzařuje, má-li nenulovou absolutní teplotu.



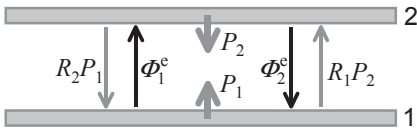
Nejlepší aproximací černého tělesa je dutina s dobře absorbujícím vnitřním povrchem a malým otvorem.

Vedle absolutně černého tělesa $A(\lambda) = 1$ můžeme definovat spektrálně neutrální šedý zářič $A(\lambda) = A = \text{konst}$, kde $A < 1$ a obecný spektrálně selektivní zářič $A(\lambda)$. Veličina $A(\lambda)$ se nazývá **spektrální pohltivost**.

1.7.5 Kirchhoffův zákon

Povrchy těles mající různé teploty vyzařují ve vakuu tepelné záření, a tím si vzájemně vyrovnávají teploty. Podle termodynamických zákonů dojde po jisté době k vyrovnání teplot všech těles. V tepelné rovnováze bude energie, která na povrch tělesa dopadne od ostatních těles, přesně rovna energii povrchem vyzářené. Jen za této podmínky se teplota povrchu nebude měnit.

Roku 1859 hledal GUSTAV ROBERT KIRCHHOFF zákonitosti tepelného záření pomocí obecných zákonů termodynamiky. Uvažoval dva různé rovinné povrchy 1 a 2 o stejné ploše S obrácené těsně k sobě a uzavřené v izolovaném termostatu. Od prvního povrchu proudí ke druhému celkový zářivý tok P_1 , zatímco opačně proudí tok P_2 . Po určité době dojde k ustavení tepelné rovnováhy, energetické toky se vyrovnají $P_1 = P_2$ a oba povrchy budou mít stejnou teplotu T .



Ilustrace k odvození Kirchhoffova zákona, od první plochy proudí ke druhé zářivý výkon P_1 , který sestává nejen z emitovaného záření Φ_1^e první plochou, ale i odraženého záření od druhé plochy R_1P_2 .

První povrch emituje zářivý tok $\Phi_1^e = M_1^e S$ a má podle předpokladu odrazivost R_1 . Druhý povrch emituje zářivý tok $\Phi_2^e = M_2^e S$ a má odrazivost R_2 . První povrch emituje zářivý tok Φ_1^e a zároveň vrací zpět odraženou část R_1P_2 zářivého toku z druhého povrchu, platí tedy $P_1 = \Phi_1^e + R_1P_2$. Opačným směrem proudí zářivý tok Φ_2^e emitovaný z druhého povrchu a odražená část R_2P_1 záření P_1 od prvního povrchu, platí tedy také $P_2 = \Phi_2^e + R_2P_1$. Protože je vše v tepelné rovnováze, teplota se nemění a energetické toky musí být přesně vybalancované $P_1 = P_2 = P$. Z první a druhé bilanční rovnice tak máme výsledek

$$P = \frac{\Phi_1^e}{1 - R_1} = \frac{\Phi_2^e}{1 - R_2}.$$

Protože $\Phi^e = M^e S$ a pro pohltivost neprůhledného povrchu současně platí $A = 1 - R$, plyne odtud závěr, že poměr

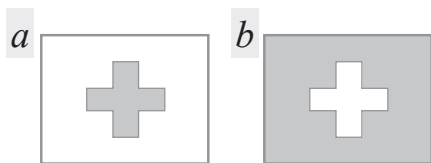
$$\frac{P}{S} = \frac{M_1^e}{A_1} = \frac{M_2^e}{A_2} = f(T)$$

nezávisí na kvalitě povrchů ani na jejich velikosti, ale jen na jejich teplotě T . Bude-li jeden povrch představovat **absolutně černé těleso**, pro které je pohltivost $A_0 = 1$, pak $M_0^e = f(T)$ představuje intenzitu vyzařování absolutně černého tělesa, která je jen funkcí teploty. Docházíme tak ke **Kirchhoffovu zákonu**

$$M^e = AM_0^e(T),$$

podle něhož je intenzita vyzařování M^e obecného povrchu úměrná pohltivosti A povrchu tělesa a na teplotě závisí přesně stejným způsobem jako intenzita vyzařování povrchu absolutně černého tělesa M_0^e . **Relativní emisivita** povrchu $\epsilon = M^e/M_0^e$ je tedy přesně rovna pohltivosti A povrchu. Dostali jsme nečekaný výsledek: Čím lépe těleso záření pohlcuje, tím lépe také tepelné záření emituje, takže nejlepším emitérem záření je paradoxně samo černé těleso!

Tento výsledek potvrzuje jednoduchý pokus. Sazeme vytvoříme na poniklované plechové destičce značku (zde kříž) a rozehrějeme ji do žáru. Na denním světle destička svítí odraženým světlem, a černá značka se proto jeví jako tmavá. Jestliže zhasneme nebo zatěmníme, bude destička aktivně vyzařovat tepelné záření a uvidíme její inverzní obraz. Nejvíce teď září původně tmavá značka, která se nám nyní bude jevit jako světlá na tmavém pozadí.



(a) Sazeme vytvořený kříž na lesklém poniklovaném plechu při denním světle a (b) stejný kříž ve vlastním tepelném záření. Tmavý kříž tedy nejen dobře absorbuje, ale i dobře emituje světlo.

Vzorec pro emisivitu jsme odvodili za předpokladu optické neprůhlednosti zářivého povrchu a za předpokladu platnosti tepelné rovnováhy, zkušenost však ukazuje, že vzorec

$$\epsilon = A = 1 - R \tag{1.22}$$

svazující emisivitu a odrazivost povrchu platí velmi dobře i za obecnějších podmínek a běžně se v radiometrii využívá. To znamená, že pokud známe teoreticky nebo měřením odrazivost R povrchu dielektrika nebo kovu, můžeme snadno dopočítat i jeho emisivitu A včetně závislosti na vlnové délce, směru a polarizaci. Například kolmá odrazivost obyčejného skla v blízké IR oblasti je $R \approx 0.04$, a proto jeho emisivita musí být $A \approx 1 - R \approx 0.96$. Obecně pro kolmou odrazivost dielektrika o indexu lomu n platí⁵

$$R = \left(\frac{n - 1}{n + 1} \right)^2,$$

takže jeho emisivita musí být

$$A \approx 1 - R = \frac{4n}{(n + 1)^2}.$$

⁵ Uvedené vzorce pro odrazivost dielektrika a kovu odvodíme později v elektromagnetické optice.

Podobně pro kolmou odrazivost kovu platí

$$R = \frac{(n-1)^2 + \kappa^2}{(n+1)^2 + \kappa^2},$$

kde n a κ jsou reálná a imaginární složka komplexního indexu lomu kovu, proto jeho emisivita musí být rovna

$$A \approx 1 - R = \frac{4n}{(n+1)^2 + \kappa^2}.$$

Pozor, nesmíme ale směšovat pohltivost A ve slunečním světle a emisivitu ϵ stejného povrchu ve vzdálené infračervené oblasti, například sníh se jeví ve slunečním světle bílý, protože jeho odrazivost je $R \approx 0.9$ a tedy pohltivost je $A \approx 0.1$, zatímco emisivita stejného sněhu ve vlastním tepelném záření (270 K) kolem $10 \mu\text{m}$ činí $\epsilon \approx 0.99$, takže se zde sníh jeví téměř *absolutně černý*.

Kirchhoffův zákon $M^e(\lambda, T) = A(\lambda) M_0^e(\lambda, T)$ je možno dokázat i pro jednotlivé spektrální složky záření. Toho se využívá například ve spektroskopii, kde emisní a absorpční spektroskopie opravdu dává stejné výsledky. Zatímco záření černého tělesa je dokonale lambertovské a nepolarizované, pro záření reálných povrchů to již neplatí.

1.7.6 Stefan-Boltzmannův zákon

Roku 1879 objevil JOSEPH STEFAN, že intenzita vyzařování je přímo úměrná čtvrté mocnině absolutní teploty, a tedy že pro absolutně černé těleso platí

$$M_0^e = \sigma T^4, \quad (1.23)$$

kde $\sigma \approx 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$ je **Stefan-Boltzmannova konstanta**. Teoreticky pak dodatečně roku 1884 odvodil tento zákon (1.23) na základě termodynamických zákonů LUDWIG BOLTZMANN. Intenzita vyzařování roste velmi rychle s teplotou, například pro pokojovou teplotu $T \approx 300 \text{ K}$ je $M_0^e \approx 460 \text{ W/m}^2$ a pro teplotu povrchu Slunce $T \approx 6000 \text{ K}$ je už $M_0^e \approx 73 \text{ MW/m}^2$. Pro zářivý tok obecného povrchu S pak dostaneme

$$\Phi^e = A\Phi_0^e = AM_0^e S = A\sigma T^4 S.$$

Průměrný sluneční výkon dopadající kolmo na jednotku plochy představuje důležitý parametr nazývaný **solární konstanta**. Její průměrná velikost měřena mimo zemskou atmosféru činí

$$E_S \approx 1360 \text{ W/m}^2$$

a kolísá se změnou vzdálenosti Slunce o $\pm 3.5\%$. Vlivem absorpce v atmosféře klesá solární konstanta při povrchu země na hodnoty 1000 až 1100 W/m^2 . O první odhad solární konstanty se již roku 1838 zasloužil CLAUDE POUILLET, k měření použil jednoduchý pyrheliometer a obdržel hodnotu 1228 W/m^2 .

1.7.7 Tok záření mezi dvěma stěnami různých teplot

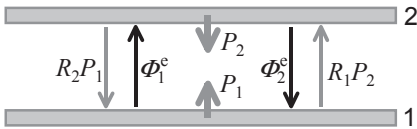
Uvažujme dvě blízké rovnoběžné stěny s emisivitami A_1 a A_2 ale rozdílnými teplotami T_1 a T_2 . Spočteme čistý energetický tok $P_{12} = P_1 - P_2$ plynoucí od první teplejší stěny ke druhé, který nyní nebude nulový, protože jsme mimo tepelnou rovnováhu. Od první stěny ke druhé proudí tok záření $P_1 = \Phi_1^e + R_1 P_2$, skládající se z emitovaného záření $\Phi_1^e = A_1 \sigma T_1^4 S$ samotnou stěnou a od první stěny odraženého záření pocházející ze druhé stěny $R_1 P_2$. Opačným směrem proudí podobně záření $P_2 = \Phi_2^e + R_2 P_1$. Odtud snadno vypočteme jednotlivé energetické toky

$$P_1 = \frac{\Phi_1^e + R_1 \Phi_2^e}{1 - R_1 R_2} \quad \text{a} \quad P_2 = \frac{\Phi_2^e + R_2 \Phi_1^e}{1 - R_1 R_2},$$

takže čistá výměna tepla mezi deskami je rovna rozdílu obou zářivých toků

$$P_{12} = P_1 - P_2 = \frac{(1 - R_2) \Phi_1^e - (1 - R_1) \Phi_2^e}{1 - R_1 R_2} = A_{12} \sigma (T_1^4 - T_2^4) S, \quad (1.24)$$

neboť podle (1.22) předpokládáme platnost vztahů $A_1 = 1 - R_1$ a $A_2 = 1 - R_2$. Všimněte si, že bez ohledu na emisivity obou stěn teplo podle očekávání proudí vždy od teplejší stěny ke studenější a snaží se obě teploty srovnat.



Ilustrace k odvození tepelného toku $P_{12} = P_1 - P_2$ od teplejší stěny k chladnější.

Relativní emisivita mezi dvěma stěnami se přitom podle (1.24) spočte podle předpisu

$$A_{12} = \frac{A_1 A_2}{1 - R_1 R_2} = \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2 - A_1 A_2}.$$

Pro $A_2 = 1$ vyjde $A_{12} = A_1$, zatímco pro $A_2 = 0$ je $A_{12} = 0$. Speciálně pro identické emisivity $A_1 = A_2 = A$ vyjde relativní emisivita

$$A_{12} = \frac{A}{2 - A}, \quad \text{platí tedy} \quad \frac{A}{2} \leq A_{12} \leq A.$$

Jako jiný příklad vezměme těleso o emisivitě A a teplotě T umístěné v prostředí o pokojové teplotě T_0 . Nechť je emisivita okolí $A_0 \approx 1$ a teplota tělesa srovnatelná s okolím $T \approx T_0$, pak bude těleso ve skutečnosti ztrácet jen zářivý tok P daný rozdílem proti sobě jdoucích zářivých toků podle vzorce (1.24)

$$P = A \sigma (T^4 - T_0^4) S$$

a bude se ochlazovat. Pro malý rozdíl teplot $\Delta T = T - T_0$ jsou tyto tepelné ztráty tělesa přibližně rovny výrazu

$$P \approx 4A \sigma T_0^3 S \Delta T,$$

takže tepelné ztráty tělesa o teplotě blízké teplotě okolí jsou přímo úměrné rozdílu teplot ΔT .

Příklad 1.10 Určete teplotu povrchu Slunce ze solární konstanty.

Řešení: Solární konstanta představuje ozáření kolmé plochy slunečním zářením vně atmosféry

$$E_S = E = \sigma T^4 \frac{4\pi R^2}{4\pi r^2} = \sigma T^4 \frac{R^2}{r^2},$$

kde R značí poloměr Slunce a r vzdálenost Slunce od Země. Odtud je teplota povrchu slunce

$$T = \left(\frac{E_S r^2}{\sigma R^2} \right)^{1/4} = \left(\frac{4E_S}{\sigma \phi^2} \right)^{1/4} \approx 5800 \text{ K},$$

neboť úhlový průměr Slunce je $\phi = 2R/r \approx 32'$.

Příklad 1.11 Určete průměrnou teplotu satelitu na oběžné dráze kolem Země. Předpokládejte, že satelit má tvar rotující kovové koule.

Řešení: Satelit je ohříván Sluncem, při poloměru R zachytí zářivý tok $\Phi^e = E_S \pi R^2$, z něj je absorbováno $\Phi_1^e = A\Phi^e$. Protože je satelit kovový a dobře teplo vede, bude mít všude téměř stejnou teplotu T . Vyzářuje tedy do okolního vesmíru zářivý tok $\Phi_2^e = \epsilon \sigma T^4 4\pi R^2$ a v rovnováze je $\Phi_1^e = \Phi_2^e$, čili

$$T = \left(\frac{A E_S}{\epsilon 4\sigma} \right)^{1/4} \approx \left(\frac{A}{\epsilon} \right)^{1/4} 280 \text{ K}.$$

Teplota satelitu závisí na poměru A/ϵ , tj. na pohltivosti povrchu A satelitu v oblasti slunečního spektra a na emisivitě ϵ ve vzdálené infračervené oblasti kolem $10 \mu\text{m}$, na které vyzářuje satelit. Pokud by satelit nerotoval, mohla by jeho teplota na sluneční straně stoupnout až na

$$T = \left(\frac{A E_S}{\epsilon \sigma} \right)^{1/4} \approx \left(\frac{A}{\epsilon} \right)^{1/4} 390 \text{ K},$$

zatímco na odvrácené straně by mohla klesnout k absolutní nule.

Příklad 1.12 Určete průměrnou teplotu na povrchu Země, když znáte albedo⁶ (odrazivost ve slunečním světle) Země $\mathcal{A} \approx 0.3$.

Řešení: Povrch Země zachytí ze Slunce zářivý tok $P = E_S \pi R^2$, část $\mathcal{A}P$ se odrazí neúčinně zpět a zbytek $(1 - \mathcal{A})P$ ohřeje povrch Země na teplotu T . Ohřátý povrch Země pak vyzářuje do kosmu zářivý tepelný tok $\sigma T^4 4\pi R^2$. V tepelné rovnováze budou oba toky vyrovnané

$$(1 - \mathcal{A})P = (1 - \mathcal{A}) E_S \pi R^2 = \sigma T^4 4\pi R^2,$$

odtud máme pro teplotu Země

$$T = \left(\frac{(1 - \mathcal{A}) E_S}{4\sigma} \right)^{1/4} \approx 255 \text{ K} \approx -18^\circ \text{C}.$$

To je teplota, kterou by měl povrch Země nebýt skleníkového efektu, bez něhož bychom zmrzli. Pokud přibude ledu nebo oblačnosti, albedo vzroste a teplota ještě více klesne. Skleníkový efekt zadrží většinu mikrovlnného záření a polovinu z něj vrátí zpět na zem, tím teplota na Zemi výrazně stoupne k současné hodnotě $+15^\circ \text{C}$.

Příklad 1.13 O jakou maximální teplotu může stoupnout absolutně černý povrch tělesa z dobře tepelně izolujícího materiálu při kolmém ozáření Sluncem? Předpokládejte solární konstantu $E_S \approx 1100 \text{ W/m}^2$ a teplotu okolí $T_0 \approx 20^\circ \text{C}$.

Řešení: Na černý povrch dopadá výkon $(E_S + \sigma T_0^4)S$, který ohřeje povrch tělesa na teplotu T , takže tento pak vyzářuje do okolí výkon $\sigma T^4 S$. Podle předpokladu vyzářuje ohřátý povrch

⁶ Vysoká hodnota albeda Země je dána především rozsáhlou oblačností a sněhem pokrytým polárním oblastem. Albedo Měsíce je přitom jen 0.12.

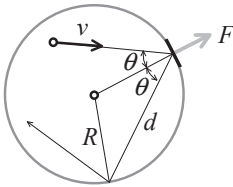
pouze na stranu přivrácenou ke Slunci. Z bilance dopadajícího a vyzářeného výkonu máme rovnici $E_S + \sigma T_0^4 = \sigma T^4$, odtud je ohřátí povrchu

$$\Delta T = T - T_0 = \left(\frac{E_S}{\sigma} + T_0^4 \right)^{1/4} - T_0 \approx 111 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Ve skutečnosti bude pozorovaná teplota ohřevu zhruba poloviční ($60 \text{ } ^\circ\text{C}$) vzhledem k nedokonalé absorpci světla, jakož i nezapočteném odvodu tepla tělesem a prouděním vzduchu kolem tělesa. To ale pořád pohodlně stačí k usmažení volského oka na vhodném Sluncem rozpáleném kameni.

1.7.8 Tlak záření

Uzavřeme-li tepelné záření do nádoby, bude působit na stěny nádoby tlakem podobně jako molekuly plynu. Najdeme nejprve velikost tlaku plynu ve sférické nádobě o poloměru R . Uvažujme jednu molekulu o rychlosti v , která dopadá na povrch kulové nádoby pod úhlem θ . Protože se pod stejným úhlem θ i odráží, jak nutně plyne ze zákonů zachování, předá molekula stěně nádoby každým nárazem impuls $\Delta p = 2mv \cos \theta$. Pak se molekula pohybuje v novém směru a opět narazí na stěnu nádoby.



Ilustrace k výpočtu tlaku plynu na stěny nádoby.

Z geometrie úlohy snadno poznáme, že úhel dopadu je opět θ a přímá dráha molekuly má délku $d = 2R \cos \theta$, takže doba mezi následnými srážkami je stálá a trvá $\Delta t = d/v = 2R \cos \theta / v$. Průměrná síla $F = \Delta p / \Delta t = mv^2 / R$ vztážená na jednotkovou plochu nádoby představuje tlak od jediné molekuly

$$p = \frac{F}{S} = \frac{mv^2}{4\pi R^3}.$$

Pokud místo poloměru R zavedeme objem nádoby $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, lze vzorec pro tlak přepsat do tvaru

$$p = \frac{1}{3} \frac{mv^2}{V},$$

ve kterém již tlak nebude záviset na tvaru nádoby. Pokud bychom započítali vliv všech molekul plynu, dostali bychom pro tlak plynu vzorec

$$p = \frac{1}{3V} \sum_k m_k v_k^2.$$

Když si uvědomíme, že kinetická energie molekul plynu je rovna $E = \sum_k \frac{1}{2} m_k v_k^2$,

lze vzorec pro tlak plynu přepsat do tvaru

$$p = \frac{2}{3} \frac{E}{V} = \frac{2}{3} w,$$

kde w značí hustotu kinetické energie plynu.

Podobné úvahy umožňují vypočítat i tlak izotropního záření, pokud připustíme, že tepelné záření se skládá z malých částic m_k pohybujících se rychlostí světla. V tom případě je **tlak izotropního záření** roven

$$p = \frac{1}{3V} \sum_k m_k c^2 = \frac{1}{3} \frac{E}{V} = \frac{1}{3} w, \quad (1.25)$$

neboť kinetická energie kvant záření je podle Einsteina rovna $E = \sum_k m_k c^2$.

Pokud není stěna nádoby pro světlo dokonale odrazivá, ale její odrazivost je menší $R < 1$, pak pro tlak izotropního záření platí modifikovaný vzorec

$$p = \frac{1}{6} (1 + R) w,$$

kde w značí opět **hustotu energie** tepelného záření v nádobě. Pro **tlak od usměrněného záření** dopadajícího pod úhlem θ na plochu stínítka platí podobně

$$p = (1 + R) w \cos \theta.$$

Například na dokonale černou $R = 0$ kolmou desku působí sluneční tlak o velikosti $p = w = E_S/c \approx 4.5 \times 10^{-6}$ Pa a na dokonale lesklou $R = 1$ desku dokonce dvojnásobný tlak $p = 2w \approx 9 \times 10^{-6}$ Pa.

Tlak světelného záření vychází také z Maxwellových rovnic, které zformuloval roku 1862 JAMES CLERK MAXWELL. Protože je však velmi malý, potvrdil existenci tlaku světelného záření experimentálně až PJOTR NIKOLAJEVIČ LEBEDĚV roku 1899. Nejkrásnější projev světelného tlaku představují ohony komet. Jde vlastně o superřídký plyn uvolněný slunečními paprsky z jader komet a v důsledku tlaku slunečního záření je plyn postupně vymetáván pryč směrem od Slunce.

Někdy se jako důkaz světelného tlaku uvádí *Crooksův mlýnek*, který sestrojil roku 1873 WILLIAM CROOKES. Jeho světelný mlýnek má lopatky natřené z jedné strany černou a ze druhé bílou barvou a při dopadu světla na lopatky se mlýnek ve vyčerpané baňce skutečně roztočí, ovšem mechanismus otáčivého účinku je komplikovanější a otáčí se paradoxně proti směru světelného tlaku.

1.7.9 Vztah mezi intenzitou vyzařování a hustotou energie

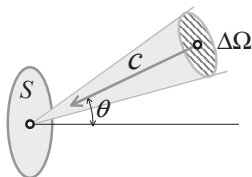
Hledáme vztah mezi intenzitou vyzařování M^e a hustotou energie w izotropního záření. Izotropní tepelné záření si představujeme jako neuspořádaný proud paprsků šířících se v dutině všemi směry. Paprsky se šíří rychlostí světla c a nesou tepelnou energii. Pokud je povrch tělesa v tepelné rovnováze se zářením v dutině o hustotě energie w , musí se rovnat energie, která je pohlcena povrchem tělesa a energie, která je povrchem S tělesa vyzařována. Pohlcená energie je rovna součinu $A\Delta E$, kde ΔE

představuje veškerou zářivou energii, která na plochu S dopadne a A je pohltivost povrchu. Vyzařovaná energie je pak z definice rovna $M^e S \Delta t$. Z rovnosti obou energií dostaneme

$$M^e = A \frac{\Delta E}{S \Delta t}. \quad (1.26)$$

Nyní spočteme energii záření ΔE , která dopadá z okolí na povrch S tělesa za konečnou dobu Δt . Za předpokladu, že se zářivá energie šíří usměrněně pouze ve směru θ , pak na plošku S dopadá zářivá energie, která se nachází v objemu šikmého válečku, jehož objem je zřejmě roven $\Delta V = c \cos \theta S \Delta t$, takže na naši plošku by dopadla energie

$$\Delta E = w \Delta V = wc \cos \theta S \Delta t. \quad (1.27)$$



Ilustrace k odvození vztahu mezi intenzitou vyzařování M^e a hustotou energie w . Na plošku S dopadá záření ze směru θ rychlostí c .

Tepelné záření v dutině je však izotropní a šíří se všemi možnými směry se stejnou pravděpodobností. Pravděpodobnost dp , že záření přichází z určitého prostorového úhlu $d\Omega$, je rovna poměru tohoto úhlu $d\Omega$ a plného prostorového úhlu 4π steradiánů, platí tedy

$$dp = \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{\sin \theta d\theta d\phi}{4\pi}.$$

Součet všech pravděpodobností je pochopitelně roven jedné $\int dp = 1$. Hustota energie záření přicházejícího ze směru θ je tedy rovna $dw = w dp$, a proto ve vzorci (1.27) musíme nahradit w výrazem $w dp$ a přes prostorový úhel $d\Omega$ přeintegrovat. Dostaneme tak jednoduchý integrál

$$\Delta E = wc S \Delta t \int \cos \theta dp = \frac{wc}{4\pi} S \Delta t \int \cos \theta d\Omega,$$

kde integrujeme pouze přes poloprostor nad plochou S , z něhož může záření na plošku S přijít. Tak dostaneme výsledek

$$\Delta E = \frac{wc}{4\pi} S \Delta t \int_0^{\pi/2} \cos \theta 2\pi \sin \theta d\theta = \frac{1}{4} wc S \Delta t.$$

Po dosazení za ΔE do (1.26) již dostaneme pro hledanou intenzitu vyzařování povrchu dutiny výsledek

$$M^e = \frac{1}{4} A w c.$$

Kromě toho, že jsme našli hledaný vztah mezi intenzitou vyzařování a hustotou energie, dokázali jsme znovu **Kirchhoffův zákon**, tj. že intenzita vyzařování M^e daného povrchu je přímo úměrná pohltivosti téhož povrchu A a že intenzita vyzařování M^e je v tepelné rovnováze přímo úměrná hustotě energie tepelného záření w . Pro absolutně černé těleso $A = 1$ se vzorec zjednoduší na

$$M_0^e = \frac{1}{4}wc. \quad (1.28)$$

Všimněte si, že v případě izotropního záření proteče stejnou plochou pouze čtvrtina toho, co by protéklo při usměrněném zářivém toku kolmém na uvažovanou plochu při stejné hustotě energie.

1.7.10 Termodynamika tepelného záření

Stefan-Boltzmannův zákon (1.23) odvodil roku 1884 LUDWIG BOLTZMANN na základě termodynamických zákonů a skutečnosti, že tlak světelného záření je podle (1.25) roven třetině hustoty energie $p = \frac{1}{3}w$. Boltzmann uvažoval takto: Pro tepelné záření v dutině platí první věta termodynamická

$$\delta Q = dU + pdV,$$

kde vnitřní energie je $U = wV$ a hustota energie záření $w = 3p$ závisí jen na teplotě T . Po dosazení za $U = 3pV$ do první termodynamické věty je

$$\delta Q = d(3pV) + pdV = 4pdV + 3Vdp.$$

Entropie záření definovaná obvyklým předpisem

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{4p}{T}dV + \frac{3V}{T}dp$$

musí být stavovou veličinou, a proto musí být dS úplným diferenciálem. Z toho plyne podmínka

$$\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{4p}{T} \right) = \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{3V}{T} \right) \quad \text{neboli} \quad \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{4p}{T} \right) = \frac{3}{T},$$

z níž dostaneme

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{T}{4p}.$$

Řešením této jednoduché rovnice je

$$p = \frac{1}{3}aT^4 \quad \text{a} \quad w = aT^4.$$

S využitím vztahu (1.28) odtud už snadno dostaneme **Stefan-Boltzmannův zákon**

$$M_0^e = \frac{1}{4}cw = \frac{1}{4}caT^4 = \sigma T^4.$$

Konstanta σ , případně a se však musí změřit experimentálně, z Boltzmannovy teorie nijak neplyne kromě vzájemného vztahu $\sigma = \frac{1}{4}ca$. Všimněte si, že energie záření v dutině je $U = aT^4V$ a na rozdíl od ideálního plynu závisí i na objemu V záření.

Rovnici adiabaty tepelného záření dostaneme snadno z podmínky $\delta Q = 0$. Z ní plyne rovnice $4pdV + 3Vdp = 0$, a odtud již máme řešení

$$p^3V^4 = \text{konst.}$$

Když sem dosadíme za tlak podle Stefan-Boltzmannova zákona $p = \frac{1}{3}w \sim T^4$, dostaneme jiné vyjádření pro adiabatou tepelného záření

$$T^3V = \text{konst.}$$

Z toho plyne, že když se bude tepelné záření adiabaticky rozpínat, bude klesat jeho teplota $T \sim V^{-1/3}$, tlak a hustota energie $p = \frac{1}{3}w \sim V^{-4/3}$ i celková vnitřní energie $U \sim V^{-1/3}$. Snadno lze dopočítat i další termodynamické veličiny, jako jsou tepelná kapacita $C_V = 4U/T$, entropie $S = 4U/3T$, volná energie $F = -\frac{1}{3}U$ a entalpie $H = \frac{4}{3}U$ tepelného záření.

1.7.11 Adiabatický invariant expanze záření

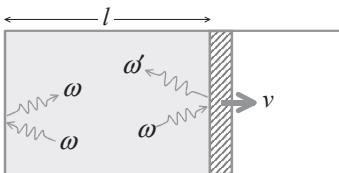
Pokud bychom připustili pomalé posouvání pístu s izotropním tepelným zářením uvnitř válce, klesala by frekvence záření vlivem Dopplerova jevu. Bude-li délka válce l a rychlost pístu $v = \Delta l/\Delta t$, pak každým odrazem klesne relativní frekvence záření o $\Delta\omega/\omega = -2v/c$, přitom jeden odraz od pístu trvá dobu $\Delta t = 2l/c$. Pokles frekvence záření je tedy úměrný posunutí pístu

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{2v}{c} = -\frac{\Delta l}{l}.$$

Ve skutečnosti se pouze třetina záření odráží od pístu, zbývající dvě třetiny se odrážejí od bočních stěn, proto je průměrný pokles frekvence záření pouze třetinový, takže platí

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{2v}{3c} = -\frac{\Delta l}{3l}.$$

Odtud dostaneme elementární integrací adiabatou $\omega^3l = \text{konst}$ nebo $\omega^3V = \text{konst}$.



Tepelné záření v adiabaticky izolovaném válci s pohyblivým pístem. Po odrazu záření na pohyblivém pístu se jeho frekvence mění $\omega \rightarrow \omega'$ podle Dopplerova zákona.

Totéž odvodíme i z modelu pomalu se rozpínající dokonale odrazné koule, jakou jsme zkoumali v souvislosti s tlakem plynu výše. Frekvence záření uvnitř

koule bude vlivem Dopplerova jevu klesat. Bude-li poloměr koule R a rychlost její expanze $v = \Delta R/\Delta t$, pak každým odrazem poklesne relativní frekvence záření o $\Delta\omega/\omega = -2v \cos\theta/c$. Protože jeden odraz od stěny koule nastane s periodou $\Delta t = 2R \cos\theta/c$, platí pro rychlost poklesu frekvence záření

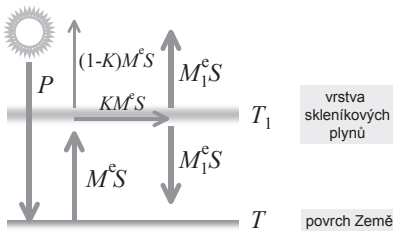
$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{2v \cos\theta}{c} = -\frac{2 \cos\theta}{c} \frac{\Delta R}{\Delta t} = -\frac{\Delta R}{R}.$$

Odtud integrací dostaneme adiabatický invariant $\omega R = \text{konst}$ nebo $\omega^3 V = \text{konst}$ nebo $\lambda/R = \text{konst}$.

Protože současně platí rovnice adiabaty $T^3 V = \text{konst}$, můžeme psát také $\omega/T = \text{konst}$ nebo $\lambda T = \text{konst}$. Podobně s rozpínáním vesmíru klesají frekvence a teplota reliktního záření a roste jeho vlnová délka.

1.7.12 Skleníkový jev

Pokud nějaký materiál dobře propouští světlo, ale velmi špatně tepelné záření, může být využit k navození **skleníkového jevu**, který dobře znají zahradníci. Takovým typickým materiálem je sklo nebo PVC fólie. Stejně ale fungují i skleníkové plyny H_2O , CO_2 , CH_4 a další v naší atmosféře. Nebýt skleníkového efektu, byla by průměrná teplota povrchu Země -18°C , zatímco skutečná průměrná teplota je kolem $+15^\circ\text{C}$.



Slunce vysílá na Zemi tepelný příkon P , ten ohřívá povrch Země na teplotu T , takže povrch vyzařuje zpět výkon $M^e S = \sigma T^4 S$, který je však částečně zachycen obálkou skleníkových plynů, která se tím ohřeje na teplotu T_1 a vyzařuje oběma směry výkon $M_1^e S = \sigma T_1^4 S$.

Abychom naznačili princip a účinnost skleníkového jevu, předpokládejme pro jednoduchost, že skleníkové plyny obklopují rovnoměrně celou Zemi v tenké vrstvě a velmi dobře pohlcují tepelné záření o vlnové délce $4 - 10 \mu\text{m}$ a $12 - 30 \mu\text{m}$, zatímco dokonale propouští sluneční paprsky o vlnové délce kolem $0.5 \mu\text{m}$, kterými ohřívá Zemi. Označme tepelný příkon, kterým Slunce ohřívá Zemi, jako $P = (1 - \mathcal{A}) E_S \pi R_Z^2$, kde $\mathcal{A} \approx 0.3$ značí albedo a R_Z poloměr naší planety. Nebýt skleníkových plynů, měl by povrch Země takovou teplotu T_0 , aby vyzařil všechno teplo zpět do kosmu, takže by platilo $P = \sigma T_0^4 S$, kde $S = 4\pi R_Z^2$ značí celý povrch Země. Odtud bychom porovnáním obou výkonů dostali

$$T_0 = \left((1 - \mathcal{A}) \frac{E_S}{4\sigma} \right)^{1/4} \approx 255 \text{ K} \approx -18^\circ\text{C}.$$

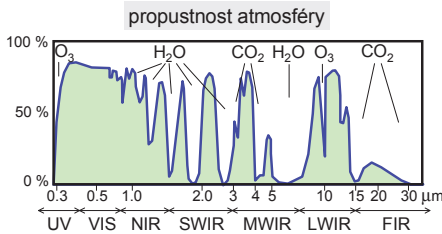
Vlivem skleníkových plynů se teplota povrchu Země zvýší na T , tepelné záření ze Země pak bude mít intenzitu vyzařování $M^e = \sigma T^4$. Část $K M^e S = K \sigma T^4 S$ z tohoto tepelného záření je zachycena obálkou skleníkových plynů, čímž se tato obálka

ohřeje na teplotu T_1 a sama začne zářit intenzitou $M_1^e = \sigma T_1^4$. Polovinu zachyceného tepla vrací obálka skleníkových plynů zpátky na Zem a druhou polovinu vyzáří do kosmu. Zbývá část tepelného záření $(1 - K) M^e S$ uniká ven z atmosféry. V rovnováze musí pro povrch Země platit $P + M_1^e S = M^e S$ neboli $T_0^4 + T_1^4 = T^4$ a pro obálku skleníkových plynů $K M^e S = 2 M_1^e S$ neboli $K T^4 = 2 T_1^4$, odtud dostaneme pro teplotu Země a skleníkové obálky

$$T = \left(\frac{2}{2 - K} \right)^{1/4} T_0 \quad \text{a} \quad T_1 = \left(\frac{K}{2 - K} \right)^{1/4} T_0.$$

Pro $K = 0$ (žádný skleníkový efekt) dostaneme $T = T_0 \approx -18^\circ\text{C}$ a $T_1 = 0\text{ K} \approx -273^\circ\text{C}$ a pro $K = 1$ (dokonale pohltivá obálka skleníkových plynů) dostaneme $T \approx 30^\circ\text{C}$ a $T_1 \approx -18^\circ\text{C}$. Pro naši atmosféru je zhruba $K \approx 0.8$, takže pak dostaneme příjemnou teplotu povrchu Země $T \approx 16^\circ\text{C}$ a skleníkové obálky $T_1 \approx -43^\circ\text{C}$.

V atmosféře může být i několik vrstev skleníkových plynů, skleníkový jev se tím jen dál zesiluje. Známým příkladem je planeta Venuše, jejíž povrchová teplota dosahuje až 500°C , zatímco bez atmosféry by na ní měla být průměrná povrchová teplota jen kolem 50°C . Takovou teplotu nemá ani Merkur, jehož průměrná povrchová teplota dosahuje jen 170°C a jehož maximální povrchová teplota díky pomalé rotaci je asi 430°C .



Typická propustnost zemské atmosféry v oblasti vlnových délek od $0.3\ \mu\text{m}$ do $30\ \mu\text{m}$, tj. od blízké UV až po vzdálenou IR oblast spektra. Jsou zde zobrazeny i plyny zodpovědné za absorpci jednotlivých oblastí.

1.7.13 Propustnost atmosféry

Za absorpci tepelného infračerveného záření jsou zodpovědné skleníkové plyny jako vodní pára (60 %), kysličník uhličitý (26 %), ozón (8 %) nebo třeba metan. Jimi způsobené absorpční pásy slouží k rozdělení infračerveného spektra na blízkou IR oblast NIR $0.8 - 1.4\ \mu\text{m}$, krátkovlnnou IR oblast SWIR $1.4 - 3\ \mu\text{m}$, středněvlnnou IR oblast MWIR $3 - 8\ \mu\text{m}$, dlouhovlnnou IR oblast LWIR $8 - 15\ \mu\text{m}$ a vzdálenou IR oblast FIR $15 - 1000\ \mu\text{m}$.

1.7.14 Spektrum tepelného záření

S rozvojem infračervené spektroskopie ve druhé polovině 19. století bylo možno zkoumat i spektrální rozložení intenzity vyzařování. K rozkladu se používaly především lineární mřížky, které nevykazovaly absorpci jako hranoly a citlivé **bolometry**, měřící změnu elektrického odporu tenkého platinového pásku po jeho ohřevu dopadající zářivou energií. V podstatě šlo jen o zpřesnění Herschelova experimentu, při němž roku 1800 objevil infračervené záření.

Mřížka rozdělí tepelné záření do spektra. Do zkoumaného intervalu vlnových délek λ až $\lambda + \Delta\lambda$ padne jen část z výkonu intenzity vyzařování úměrná intervalu $\Delta\lambda$, platí tedy $\Delta M^e = M^e(\lambda) \Delta\lambda$, kde

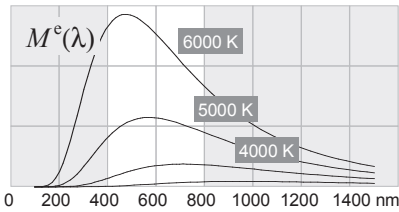
$$M^e(\lambda) = \frac{dM^e}{d\lambda}$$

nazýváme **spektrální intenzitou vyzařování**. Intenzita záření v části spektra λ_1 až λ_2 se dostane zpátky integrací

$$M^e = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} M^e(\lambda) d\lambda.$$

Protože mřížka rozkládá spektrum přibližně lineárně ve vlnové délce, měří se přímo veličina $M^e(\lambda)$.

Kirchhoffovy zákony lze aplikovat i na jednotlivé spektrální složky tepelného záření. Plyne z nich, že spektrální intenzita vyzařování černého tělesa a spektrální hustota energie záření závisí jen na vlnové délce λ a teplotě. Z toho je zřejmé, že univerzální funkce $M_0^e(\lambda, T)$ nezávisí na žádných neznámých parametrech a mělo by být možné odvodit její přesný matematický tvar z obecných zákonů fyziky. Experimentálně nalezený průběh spektrální intenzity vyzařování $M_0^e(\lambda, T)$ absolutně černého tělesa ukazuje další obrázek. Matematický tvar těchto křivek našel až MAX PLANCK roku 1900, jeho objev znamenal počátek kvantové optiky.



Planckův vyzařovací zákon, spektrální intenzita vyzařování $M^e(\lambda)$ pro různé teploty.

1.7.15 Wienův posunovací zákon

Při zkoumání spekter černého tělesa bylo zjištěno, že maximum spektrální intenzity vyzařování $M^e(\lambda)$ připadá na vlnové délky $1 \mu\text{m}$ až $10 \mu\text{m}$, přičemž se maximum s rostoucí teplotou posouvá do kratších vlnových délek. Pro polohu maxima platí **Wienův posunovací zákon**

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}, \quad (1.29)$$

který teoreticky vysvětlil roku 1893 WILHELM WIEN. Přibližná hodnota **Wienovy konstanty posuvu** je $b \approx 2898 \mu\text{m K}$. Z pozorování i z Wienova zákona plyne, že těleso o pokojové teplotě 300 K vyzařuje tepelné záření především na vlnové délce $10 \mu\text{m}$, rozžhavené vlákno žárovky o teplotě 3000 K vyzařuje především na vlnové délce $1 \mu\text{m}$ a povrch Slunce o teplotě 6000 K má maximum vyzařování na

vlnové délce $0.5 \mu\text{m}$. Poloha maxima λ_{max} ve spektru umožňuje určit teplotu zdroje záření. Díky tomu mohl roku 1895 FRIEDRICH PASCHEN určit povrchovou teplotu Slunce, vyšlo mu 5400 K , novější a přesnější měření dávají 5800 K . Vlnové délky pro maximum spektrální zářivosti a vybrané teploty ukazuje následující tabulka:

teplota	300 K	1000 K	3000 K	4000 K	5000 K	6000 K
vlnová délka	9660 nm	2898 nm	966 nm	725 nm	580 nm	483 nm

Wien se pokoušel najít přesný analytický tvar spektrální intenzity vyzařování (podrobněji kapitola 1.7.16), podařilo se mu však roku 1893 jen dokázat, že hledaná funkce musí mít tvar

$$M_0^e(\lambda, T) = \frac{1}{\lambda^5} f(\lambda T), \quad (1.30)$$

kde f je neznámá funkce, kterou se mu již najít nepodařilo. Z předpisu (1.30) však plyne jak Stefan-Boltzmannův, tak i Wienův zákon posuvu. Skutečně, jestliže pomocí předpisu (1.30) spočteme celkovou intenzitu vyzařování, dostaneme Stefan-Boltzmannův zákon

$$M_0^e = \int_0^\infty M_0^e(\lambda, T) d\lambda = \int_0^\infty \frac{1}{\lambda^5} f(\lambda T) d\lambda = T^4 \int_0^\infty \frac{1}{x^5} f(x) dx = \sigma T^4.$$

Pokud budeme hledat maximum funkce $M_0^e(\lambda, T)$ dané předpisem (1.30), dostaneme z podmínky pro minimum

$$\frac{\partial M_0^e}{\partial \lambda} = -\frac{5}{\lambda^6} f(\lambda T) + \frac{T}{\lambda^5} f'(\lambda T) = 0$$

rovnici $5f(x) = xf'(x)$, kde $x = \lambda T$. Bude-li řešením této rovnice $x = b$, máme odtud Wienův zákon posuvu $\lambda_{\text{max}} = b/T$.

Wien se pokusil uhodnout funkci f pomocí úvah založených na kinetické teorii plynů. Protože se v kinetické teorii často objevuje Boltzmannův faktor, předpokládal Wien, že by hledanou funkcí mohla být exponenciální funkce, takže **Wienova formule** má tvar

$$M_0^e(\lambda, T) = \frac{c_1}{\lambda^5} \exp\left(-\frac{c_2}{\lambda T}\right).$$

Tento vzorec velice dobře fitoval naměřená data, především v oblasti krátkých vlnových délek. Pro dlouhé vlnové délky však vedl k nesprávným výsledkům. Jeho nedostatkem bylo také to, že neuměl předpovědět hodnotu univerzálních konstant c_1 a c_2 .

1.7.16 Odvození Wienova zákona

Naznačíme nyní sled úvah, které vedly roku 1893 WILHELMA WIENA k formulaci zákona (1.30), respektive

$$M_0^e(\omega, T) = \omega^3 f\left(\frac{\omega}{T}\right) \quad (1.31)$$

pro spektrální intenzitu vyzařování. Wien uvažoval tepelně izolovanou dokonale odraznou válcovou dutinu s pohyblivým pístem a se zářením uvnitř. Píst se pomalu vysouvá z válce rychlostí v . Pomalu proto, aby šlo o dokonale vratný děj. Z pohledu termodynamiky půjde o adiabatický děj, pro který jsme již dříve odvodili rovnici

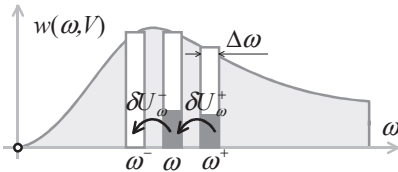
$$T^3V = \text{konst.},$$

objem a teplota záření spolu tedy úzce souvisí. Místo $w(\omega, T)$ budeme zpočátku hledat rozdělení $w(\omega, V)$.

Záření, které se odráží na pohyblivém pístu, má v důsledku Dopplerova jevu menší frekvenci ω^- než dopadající záření ω a platí

$$\omega^- \approx \omega \left(1 - \frac{2v}{c}\right).$$

Protože jde o pomalý posun, postačí nerelativistická aproximace Dopplerova jevu. Pokles frekvence vede k částečnému přerozdělení energie ve spektru záření a následně i k celkovému poklesu teploty záření. Protože jde o pomalý a vratný proces, je možno předpokládat, že spektrum bude stále v termodynamické rovnováze a může být popsáno stejným rozdělením $w(\omega, V')$ při změněném objemu V' .



V důsledku Dopplerova jevu dochází k přerozdělení energie ve spektru. Část záření o frekvenci ω^+ se mění na záření o frekvenci ω a část záření o frekvenci ω se mění na záření o frekvenci ω^- .

Na počátku bylo rozdělení hustoty energie záření určeno funkcí $w(\omega, V)$. Energie záření ΔU mající frekvence ω až $\omega + \Delta\omega$ a nacházející se v celém objemu V válce je

$$\Delta U = U_{\omega} \Delta\omega = V w(\omega, V) \Delta\omega,$$

kde $U_{\omega} = V w$ značí spektrální hustotu energie záření ve válci $\Delta U / \Delta\omega$. Za dobu δt se píst posunul o $v\delta t$ a válec zvětšil svůj objem o $\delta V = Sv\delta t$. Spektrální hustota energie záření v našem intervalu $\Delta\omega$ se proto změnou objemu δV změnila o

$$\delta U_{\omega} = U_{\omega}(V + \delta V) - U_{\omega}(V) \approx \frac{\partial U_{\omega}}{\partial V} \delta V. \quad (1.32)$$

Tato změna spektrální hustoty energie δU_{ω} byla způsobena jednak úbytkem části záření δU_{ω^-} o frekvenci ω , která se dopplerovsky zmenšila na ω^- , a dále pak přírůstkem energie záření δU_{ω^+} o původní frekvenci

$$\omega^+ \approx \omega \left(1 + \frac{2v}{c}\right),$$

která se dopplerovsky zmenšila na ω . Množství tohoto záření, které podleho dopplerovskému posunu, je určeno objemem $Sv\delta t$ záření, které za dobu δt stačí dorazit

k pístu. Díky izotropnosti záření má jen $\frac{1}{6}$ záření správný směr kolmý k rovině pístu, takže úbytek energie záření je dán výrazem

$$\delta U_{\omega}^{-} \Delta\omega = \frac{1}{6} w(\omega, V) S c \delta t \Delta\omega.$$

Podobně přibude množství energie

$$\delta U_{\omega}^{+} \Delta\omega = \frac{1}{6} w(\omega^{+}, V) S c \delta t \Delta\omega^{+} \approx \frac{1}{6} w(\omega^{+}, V) S c \delta t \Delta\omega$$

od záření, které mělo předtím vyšší frekvenci ω^{+} , neboť pro $v \ll c$ platí v naší aproximaci $\Delta\omega^{+} \approx \Delta\omega$. Balance spektrální hustoty energie je tedy

$$\delta U_{\omega} = \delta U_{\omega}^{+} - \delta U_{\omega}^{-} = \frac{1}{6} S c \delta t (w(\omega^{+}, V) - w(\omega, V)) \approx \frac{\omega}{3} \frac{\partial w}{\partial \omega} \delta V, \quad (1.33)$$

protože

$$w(\omega^{+}, V) - w(\omega, V) \approx \frac{\partial w}{\partial \omega} (\omega^{+} - \omega) \approx \frac{\partial w}{\partial \omega} \frac{2\omega v}{c}.$$

Porovnáním obou výrazů (1.32) a (1.33) pro δU_{ω} dostaneme rovnici

$$\frac{\partial U_{\omega}}{\partial V} = \frac{\omega}{3} \frac{\partial w}{\partial \omega} \quad \text{neboli} \quad 3V \frac{\partial U_{\omega}}{\partial V} = \omega \frac{\partial U_{\omega}}{\partial \omega}.$$

Řešením této parciální diferenciální rovnice dostaneme $U_{\omega} = Vw = f(\omega^3 V)$, kde f je libovolná funkce. Proto je

$$w(\omega, V) = \frac{1}{V} U_{\omega} = \frac{1}{V} f(\omega^3 V) = \omega^3 g(\omega^3 V),$$

kde $g(x) = f(x)/x$ je jiná libovolná funkce. Protože záření je popsáno adiabatou $V \sim 1/T^3$, lze výsledek přepsat také do obvyklejšího tvaru

$$w(\omega, T) = \omega^3 h\left(\frac{\omega}{T}\right)$$

známého jako **Wienův zákon** (1.31). Konečně, protože $\omega = 2\pi c/\lambda$ a $d\omega/d\lambda = -2\pi c/\lambda^2$, lze Wienův zákon přepsat i do tvaru

$$w(\lambda, T) = \left| \frac{d\omega}{d\lambda} \right| w(\omega, T) = \frac{(2\pi c)^4}{\lambda^5} h\left(\frac{2\pi c}{\lambda T}\right) = \frac{1}{\lambda^5} f(\lambda T),$$

kde f je opět libovolná funkce.

1.7.17 Planckův vyzařovací zákon

Pro spektrální intenzitu vyzařování povrchu absolutně černého tělesa platí **Planckův vyzařovací zákon**

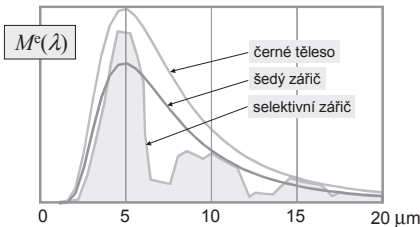
$$M_0^e(\lambda, T) = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp \frac{hc}{k_B \lambda T} - 1}, \quad (1.34)$$

kde $h \approx 6.626 \times 10^{-34}$ Js je Planckova konstanta, $c \approx 2.998 \times 10^8$ m/s rychlost světla, $k_B \approx 1.381 \times 10^{-23}$ J/K Boltzmannova konstanta a T absolutní teplota. Z Planckova zákona plyne pro Wienovu konstantu posuvu hodnota $b \approx 0.2014hc/k_B \approx 2898 \mu\text{mK}$ a pro Stefan-Boltzmannovu konstantu hodnota $\sigma = 2\pi^5 k_B^4 / 15c^2 h^3 \approx 5.671 \times 10^{-8}$ W/m² K⁴. Protože černé těleso je kosinovým zářičem, platí pro jeho zář obdoba toho co pro jas, tedy $L_0^e = M_0^e/\pi$. Také je možno najít hustotu izotropního tepelného záření v dutině zářiče a vyjde $w = 4M_0^e/c$. Záření černého tělesa je nepolarizované.

Neň-li zdroj absolutně černým tělesem, pak vyzařuje podle zákona

$$M^e = \int_0^\infty A(\lambda) M_0^e(\lambda) d\lambda,$$

kde $A(\lambda) \leq 1$ je **spektrální emisivita** povrchu zdroje. Vyzařovací zákon (1.34) roku 1900 MAX PLANCK nejprve z experimentálních dat uhodl a později jej i teoreticky odůvodnil **kvantovou hypotézou**. Odvození Planckova zákona, jakož i z něj plynoucí Wienovu a Stefan-Boltzmannovu konstantu, uvedeme později v kapitole věnované kvantové optice.



Spektrální intenzita vyzařování $M^e(\lambda)$ černého tělesa, šedého zářiče a selektivního zářiče o stejné teplotě T .

Integrální emisivita (pohltivost) A se spočte ze spektrální emisivity (pohltivosti) $A(\lambda)$ podle předpisu

$$A(\lambda_1, \lambda_2, T) = \frac{M^e}{M_0^e} = \frac{\int M^e(\lambda) d\lambda}{\int M_0^e(\lambda) d\lambda} = \frac{\int A(\lambda) M_0^e(\lambda, T) d\lambda}{\int M_0^e(\lambda, T) d\lambda},$$

kde se integruje přes vybraný úsek spektra $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$. Integrální emisivita tedy závisí nejen na vybraném intervalu spektra, ale i na teplotě zářičího povrchu. Máme-li na mysli celé spektrum, bude jmenovatel pochopitelně roven výrazu $M_0^e = \sigma T^4$ a integrální emisivita $A(T)$ bude pouze funkcí teploty.

1.7.18 Barevná a efektivní (bolometrická) teplota

S rostoucí teplotou se zkracuje vlnová délka tepelného záření, a tím se mění intenzita i zabarvení světla pocházejícího z rozžhaveného tělesa z nejprve temně rudé, přes oranžovou, žlutou a bílou až k oslepující jasně modrobílé. Barevný odstín a jas záření je možno použít k určení vysoké teploty povrchu tepelného zářiče. Na tomto principu pracují barvové a jasové **pyrometry**, jimiž se měří bezkontaktně například teploty ve vysoké peci.

Měření teploty bezkontaktními pyrometry jsou spolehlivá, jen když zdroj záření není spektrálně příliš selektivní a platí $A(\lambda) \approx 1$. Pokud je selektivní, nemáme skutečnou teplotu, ale barevnou nebo efektivní teplotu. **Barevnou teplotou** se míní teplota černého tělesa, jehož záření má stejnou barvu jako záření povrchu měřeného tělesa a podobně **efektivní teplotou** se míní teplota černého tělesa, jehož záření má stejný jas jako povrch měřeného tělesa. Pochopitelně pouze u absolutně černého tělesa obě teploty, tj. barevná T_B a efektivní T_E , splývají s absolutní teplotou T tělesa.

Barevnou teplotu je možno určit z polohy maxima λ_{\max} podle Wienova zákona. Pro automatizovaná měření je vhodnější určovat poměr spektrálních intenzit vyzařování pro dvě vlnové délky $M^e(\lambda_1)$ a $M^e(\lambda_2)$. Poměr $M^e(\lambda_1)/M^e(\lambda_2)$ spolu s vlnovými délkami λ_1 a λ_2 jednoznačně určuje barevnou teplotu. Pro $\lambda_{1,2} < \lambda_{\max}$ platí pro barevnou teplotu dostatečně přesně přibližný vzorec

$$T_B \approx \frac{hc}{\lambda_1 \lambda_2} \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\ln [\lambda_1^5 M^e(\lambda_1)] - \ln [\lambda_2^5 M^e(\lambda_2)]}.$$

Teplotu tělesa můžeme odhadnout i na základě Stefan-Boltzmannova zákona $M^e = \sigma T_E^4 = A\sigma T^4$, tak dostaneme efektivní teplotu

$$T_E = \left(\frac{M^e}{\sigma} \right)^{1/4} = A^{1/4} T,$$

kteřá je menší než skutečná teplota T a kde A značí integrální emisivitu tělesa. Intenzitu vyzařování můžeme určit citlivým bolometrem, v praxi se ale vystačí i s jednodušším řešením. Použije se **optický pyrometr**, jednoduché kukátko, ve kterém se současně zobrazuje rozžhavené wolframové vlákno i pec a porovnávají se oba jasy. V okamžiku, kdy žhavé vlákno na pozadí vymizí, je jeho jas i teplota zřejmě stejná jako teplota pece. Teplota vlákna se dá pohodlně nastavovat potenciometrem. První moderní pyrometr takové konstrukce vyrobili LUDWIG HOLBORN a FERDINAND KURLBAUM již roku 1901.

1.8 Kolorimetrie

1.8.1 Světelná účinnost

Světelné zdroje vyzařují energii, kterou vnímáme jako teplo a světlo. Abychom toto záření vnímali jako světlo, musí mít vlnovou délku zhruba z intervalu 400 až 700 nm. Například 100 W žárovka vydává tepelné záření o zářivém toku $\Phi^e \approx 100$ W, což lidské oko vnímá jako světelný tok $\Phi \approx 1200$ lm. Podíl obou veličin se nazývá **světelná účinnost** záření

$$K = \frac{\Phi}{\Phi^e}.$$

Pro naši 100 W žárovku je tedy světelná účinnost $K \approx 12$ lm/W. Různé vlnové délky (tj. různé barvy) však oko nevnímá stejně efektivně, proto zavádíme dále

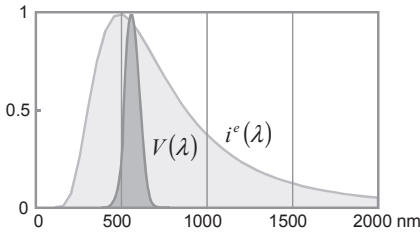
pojem **spektrální světelné účinnosti**

$$K(\lambda) = \frac{\Phi(\lambda)}{\Phi^e(\lambda)}.$$

Protože světelná účinnost má výrazné maximum K_{\max} pro λ_{\max} , zavádí se dále bezrozměrná **poměrná spektrální světelná účinnost**

$$V(\lambda) = \frac{K(\lambda)}{K_{\max}} \leq 1.$$

Při denním (fotopickém) vidění nastává maximální citlivost oka pro $\lambda_{\max} \approx 555$ nm, kdy je $K_{\max} \approx 683$ lm/W. Při nočním (skotopickém) vidění je oko mnohem citlivější a maxima se dosahuje pro $\lambda_{\max} \approx 507$ nm, kdy je $K_{\max} \approx 1700$ lm/W. Posun maxima citlivosti oka popsal již roku 1819 JAN EVANGELISTA PURKYNĚ a po něm se tento **Purkyňův jev** i jmenuje.



Srovnání fotopické poměrné spektrální světelné účinnosti standardního lidského oka $V(\lambda) = K(\lambda)/K_{\max}$ a poměrné spektrální zářivosti Slunce $i^e(\lambda) = I^e(\lambda)/I_{\max}^e$.

Pro obecný širokospektrální zdroj světla spočteme světelný tok pomocí vzorce

$$\Phi = \int K(\lambda) \Phi^e(\lambda) d\lambda = K_{\max} \int V(\lambda) \Phi^e(\lambda) d\lambda.$$

Celková **světelná účinnost zdroje** je tedy rovna

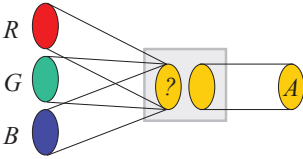
$$K = \frac{\Phi}{\Phi^e} = \frac{\int K(\lambda) \Phi^e(\lambda) d\lambda}{\int \Phi^e(\lambda) d\lambda} = K_{\max} \frac{\int V(\lambda) \Phi^e(\lambda) d\lambda}{\int \Phi^e(\lambda) d\lambda}$$

a závisí na konkrétním spektrálním složení zářivého toku $\Phi^e(\lambda)$ zdroje. Například pro světlo sluneční nebo rtuťovou výbojku je $K \approx 90$ lm/W, pro obyčejnou wolframovou žárovku je $K \approx 8$ až 16 lm/W (účinnost roste s výkonem), halogenová žárovka má $K \approx 22$ lm/W, kompaktní zářivka má $K \approx 60$ lm/W, moderní bílé LED diody mají $K \approx 50 - 150$ lm/W a polovodičový laser může dosahovat účinnosti až $K \approx 300$ lm/W.

1.8.2 Míchání barev, kolorimetrie

U každého světla pozorujeme vedle jasů také **barvu**, u které rozlišujeme **tón** a **syťost**. Tón odpovídá vlnové délce světla a syťost čistotě dané barvy, tj. poměru čisté spektrální barvy a bílé barvy. Syťost spektrální barvy je 100% a syťost bílé barvy je 0%. Lidské oko je schopno od sebe rozlišit na 150 barevných tónů a až 600 tisíc barevných odstínů.

Spektrální elementární barvy můžeme skládat a vytvářet z nich libovolné barevné odstíny, některé z nich v samotném spektru ani nenalezneme. Například červená a zelená dají vzniknout barvě žluté, modrá a zelená dává azurovou (tyrkysovou) a červená s modrou vytvoří purpur. Takovému skládání říkáme **aditivní skládání barev** na rozdíl od **subtraktivního skládání barev**, kdy neskládáme jednotlivé světelné odstíny, ale naopak je zadržujeme barevnými filtry. Složením některých dvojic dostaneme barvu bílou, takové barvy nazýváme doplňkovými. **Doplňkovými barvami** jsou například červená a azurová, modrá a žlutá, zelená a purpurová. Ukazuje se, že každou myslitelnou barvu můžeme dostat určitou vhodnou kombinací spektrálních barev a to mnoha různými způsoby. Jedna barva tedy nemá jednoznačné spektrální složení, hovoříme o **metamerismu barev**.



Aditivním mícháním základních barev **R**, **G**, **B** ve vhodných poměrech R, G, B se snažíme obdržet barvu **A**, jako má zdroj **A**.

Zkušenost vede k poznatku, že většinu barev dokážeme namíchat z pouhých tří základních barev: červené **R**, zelené **G** a modré **B**. Toho se s výhodou využívá v barevné typografii, fotografii, televizní a počítačové technice. Máme-li získat barvu **A**, musíme smíchat základní barvy **R**, **G** a **B** ve vhodném poměru $R : G : B$, symbolicky pak můžeme psát

$$\mathbf{A} = R\mathbf{R} + G\mathbf{G} + B\mathbf{B}. \quad (1.35)$$

Čísla R, G, B zde představují **trichromatické složky** barvy **A** v systému základních barev **R**, **G**, **B** a tuto barvu **A** reprezentuje v **barevném prostoru** bod o souřadnicích (R, G, B) . Míchání barev **A**₁ a **A**₂ se tedy převádí na sčítání vektorů (R_1, G_1, B_1) a (R_2, G_2, B_2) . Například výsledná barva **A** = **A**₁ + **A**₂ je určena souřadnicemi $(R_1 + R_2, G_1 + G_2, B_1 + B_2)$.

Také **bílou barvu W** = $R_W\mathbf{R} + G_W\mathbf{G} + B_W\mathbf{B}$ lze namíchat pomocí základních barev **R**, **G**, **B**. Vhodnou volbou jasů základních barev **R**, **G**, **B** lze dosáhnout toho, že trichromatické složky bílé barvy budou stejné $R_W = G_W = B_W$, například rovny jedné, takže pak bude bílá barva rovna

$$\mathbf{W} = \mathbf{R} + \mathbf{G} + \mathbf{B}$$

nebo jeho násobku.

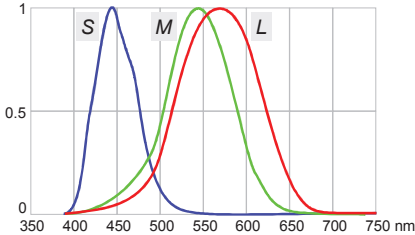
Experimenty dále ukazují, že některé barvy **A** nelze ze základních barev **R**, **G**, **B** namíchat, pokud k barvě **A** nepřidáme trochu bílé barvy **W** = **R** + **G** + **B**. Teprve pak je možno dosáhnout shody barev. V takovém případě pro skládání barev platí rovnice

$$\mathbf{A} + W\mathbf{W} = R\mathbf{R} + G\mathbf{G} + B\mathbf{B},$$

kteřou lze přepsat do základního tvaru (1.35), jen když dovolíme, aby některé z barevných složek R, G, B mohly být i záporné. Popsanou metodu kvantitativního

určení trichromatických složek R, G, B libovolné barvy navrhl HERMANN GRASSMANN roku 1853.

Možnost rozkladu barev do složek RGB má původ ve skutečnosti, že čípky na sítnici oka obsahují tři barevné pigmenty na bázi jodopsinu, které reagují na přítomnost dlouhovlnné L , středněvlnné M a krátkovlnné S složky světla s maximy nacházejícími se poblíž žluté 565 nm, zelené 540 nm a modré 445 nm barvy spektra.

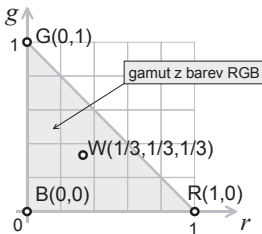


Absorbční spektra LMS barevných pigmentů z čípků lidského oka zhruba odpovídají odezovým funkcím rgb.

Pokud všechna světla v rovnici (1.35) zesílíme n -krát, změní se jen jas, ale barva výsledného světla \mathbf{A} . Ta závisí jen na poměru složek $R : G : B$ a ne na jejich absolutních hodnotách, takže barevné složky můžeme normovat, a tak definovat **barevné souřadnice**

$$r = \frac{R}{R + G + B}, \quad g = \frac{G}{R + G + B}, \quad b = \frac{B}{R + G + B},$$

pro které z definice platí podmínka $r + g + b = 1$. Tedy jen dvě z barevných souřadnic jsou nezávislé, obvykle se za ně volí r a g , třetí $b = 1 - r - g$ je normovací podmínkou již plně určena, takže každou barvu můžeme zobrazit jako bod v rovině rg . Přejdem od trichromatických složek R, G, B k barevným souřadnicím r, g, b se však ochuzujeme o informaci o jasu příslušné barvy. Bílá barva $\mathbf{W} = (1, 1, 1)$ má v RGB prostoru souřadnice $r = g = b = \frac{1}{3}$.



Základní barvy $\mathbf{R}, \mathbf{G}, \mathbf{B}$ a bílá barva \mathbf{W} v barevném prostoru RGB. Gamut RGB barev tvoří šedá plocha trojúhelníka RGB, barvy mimo tento trojúhelník nelze ze základních barev $\mathbf{R}, \mathbf{G}, \mathbf{B}$ nijak namíchat.

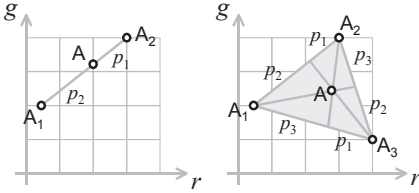
Když budeme míchat dvě barvy $\mathbf{A}_1 = (r_1, g_1)$ a $\mathbf{A}_2 = (r_2, g_2)$, pak jejich smícháním v poměru $p_1 : p_2$ dostaneme barvu $\mathbf{A} = p_1 \mathbf{A}_1 + p_2 \mathbf{A}_2$ o souřadnicích

$$r = \frac{p_1 r_1 + p_2 r_2}{p_1 + p_2}, \quad g = \frac{p_1 g_1 + p_2 g_2}{p_1 + p_2},$$

kteřá bude ležet v barevném prostoru RGB na spojnici bodů A_1 a A_2 a bude ji dělit v obráceném poměru

$$\frac{|AA_1|}{|AA_2|} = \frac{p_2}{p_1}.$$

Při stejných poměrech $p_1 = p_2$ bude výsledná barva $\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)$ ležet přesně uprostřed mezi body (barvami) A_1 a A_2 .



Skládáním dvojice barev \mathbf{A}_1 a \mathbf{A}_2 dostaneme všechny barvy \mathbf{A} ležící na spojnici $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$. Skládáním trojice barev $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ a \mathbf{A}_3 dostaneme všechny barvy \mathbf{A} ležící uvnitř trojúhelníka $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3$.

Podobně kombinací trojice barev $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ a \mathbf{A}_3 dostaneme všechny barvy \mathbf{A} , které leží uvnitř trojúhelníka vymezeného body $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ a \mathbf{A}_3 z příslušného barevného prostoru. Všechny barvy, které takto mícháním konečného počtu barev dostaneme, tvoří v barevném prostoru dohromady tzv. **gamut**.

1.8.3 Barevný prostor RGB

Základní barvy **R, G, B** jsme zatím přesně nespécifikovali, podle konference *Mezinárodní osvětlovací komise* konané roku 1931 (CIE 1931) se za primární barvy bere trojice čistých spektrálních barev o vlnové délce 700 nm, 546.1 nm a 435.8 nm (poslední dvě čáry se pohodlně najdou ve spektru ruťové lampy), což v barevném RGB prostoru odpovídá vektorům $\mathbf{R} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{G} = (0, 1, 0)$ a $\mathbf{B} = (0, 0, 1)$.

Abychom z těchto primárních barev namíchali bílou barvu $\mathbf{W} = \mathbf{R} + \mathbf{G} + \mathbf{B}$, musíme světelné toky primárních zdrojů **R, G, B** vybrat tak, aby byly v poměru

$$\Phi_R : \Phi_G : \Phi_B = 1 : 4.5907 : 0.0601$$

nebo jejich zářivé toky byly v poměru

$$\Phi_R^e : \Phi_G^e : \Phi_B^e = 72.0962 : 1.3791 : 1,$$

protože poměrná světelná účinnost primárních zdrojů je

$$V_R : V_G : V_B = 0.004102 : 0.984420 : 0.017774.$$

Světelný tok Φ_A obecné barvy $\mathbf{A} = R\mathbf{R} + G\mathbf{G} + B\mathbf{B}$ je dán lineární superpozicí

$$\Phi_A = R\Phi_R + G\Phi_G + B\Phi_B,$$

kde Φ_R, Φ_G a Φ_B jsou světelné toky primárních barev **R, G, B**. Vzhledem na výše uvedené poměry světelných toků primárních zdrojů odtud platí

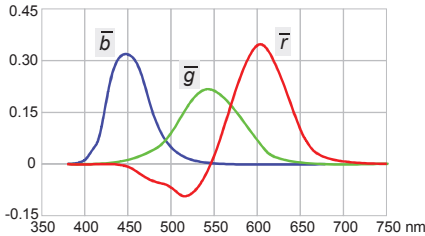
$$\Phi_A \approx (1.0000R + 4.5907G + 0.0601B) \Phi_R$$

a speciálně pro bílou barvu $\mathbf{W} = \mathbf{R} + \mathbf{G} + \mathbf{B}$ máme

$$\Phi_W \approx (1.0000 + 4.5907 + 0.0601) \Phi_R = 5.6508\Phi_R.$$

Odtud vidíme, že je-li světelný tok primárního zdroje $\Phi_R = 1$ lm, světelný tok odpovídající bílé barvy je $\Phi_W \approx 5.6508$ lm a zbývající dva toky primárních zdrojů musí být $\Phi_G \approx 4.5907$ lm a $\Phi_B \approx 0.0601$ lm.

K úplnému popisu barev nemusíme hledat souřadnice r, g, b všech možných barev, ale stačí se omezit na barvy spektrální. Pokud provedeme výše popsání měření a určíme trichromatické složky R, G, B pro všechny spektrální barvy stejné jednotkové zářivosti $\Phi^e(\lambda) = \text{konst} = \Phi_0^e = 1$ W na širokém vzorku lidí, dostaneme průměrné odezvové funkce oka, tak zvané **trichromatické členitele** $\bar{r}(\lambda)$, $\bar{g}(\lambda)$ a $\bar{b}(\lambda)$, které je možno vidět na dalším obrázku.



Trichromatické členitele $\bar{r}(\lambda)$, $\bar{g}(\lambda)$ a $\bar{b}(\lambda)$ lidského oka pro spektrální barvy vzhledem k základním barvám R, G, B podle CIE 1931.

Každý zdroj světla je plně charakterizován svým spektrálním zářivým tokem $\Phi^e(\lambda)$. Budeme-li znát odezvové funkce $\bar{r}(\lambda)$, $\bar{g}(\lambda)$ a $\bar{b}(\lambda)$ pro každou vlnovou délku spektra, spočteme z nich integrací přes celé spektrum jednotlivé **trichromatické složky**

$$R = \int_0^{\infty} \bar{r}(\lambda) \Phi^e(\lambda) d\lambda, \quad G = \int_0^{\infty} \bar{g}(\lambda) \Phi^e(\lambda) d\lambda, \quad B = \int_0^{\infty} \bar{b}(\lambda) \Phi^e(\lambda) d\lambda \quad (1.36)$$

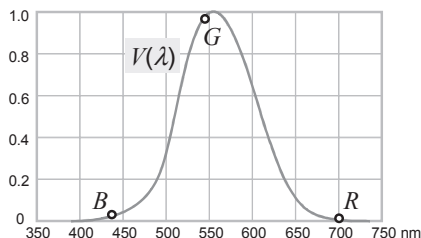
definující výslednou barvu (R, G, B) i jas zkoumaného širokospektrálního světla. Trichromatické složky R, G, B tedy nemusíme určovat experimentálně, ale najdeme je pohodlně přímým výpočtem ze spektra $\Phi^e(\lambda)$.

Pro izoenergetický zdroj záření $\Phi^e(\lambda) = \text{konst} = \Phi_0^e$ přitom bude

$$R = \Phi_0^e \int_0^{\infty} \bar{r}(\lambda) d\lambda, \quad G = \Phi_0^e \int_0^{\infty} \bar{g}(\lambda) d\lambda, \quad B = \Phi_0^e \int_0^{\infty} \bar{b}(\lambda) d\lambda,$$

a protože pro bílé světlo očekáváme $R = G = B$, požadujeme pro **trichromatické složky** splnění normovací podmínky

$$\int_0^{\infty} \bar{r}(\lambda) d\lambda = \int_0^{\infty} \bar{g}(\lambda) d\lambda = \int_0^{\infty} \bar{b}(\lambda) d\lambda.$$



Poměrná spektrální světelná účinnost $V(\lambda)$ lidského oka a poloha základních barev R, G, B .

Uvažujme ještě jednu čistou spektrální barvu stejné jednotkové zářivosti $\Phi^e(\lambda) = \Phi_0^e = 1 \text{ W}$. Jejich trichromatické složky $R = \bar{r}(\lambda)$, $G = \bar{g}(\lambda)$ a $B = \bar{b}(\lambda)$ jsou z definice rovny trichromatickým členitelům a pro světelný tok těchto spektrálních barev musí platit

$$\Phi(\lambda) = \bar{r}(\lambda) \Phi_R + \bar{g}(\lambda) \Phi_G + \bar{b}(\lambda) \Phi_B,$$

neboli

$$\Phi(\lambda) \approx (1.0000 \bar{r}(\lambda) + 4.5907 \bar{g}(\lambda) + 0.0601 \bar{b}(\lambda)) \Phi_R.$$

Současně z definice spektrální světelné účinnosti $K(\lambda) = \Phi(\lambda) / \Phi^e(\lambda)$ pro spektrální barvy o stejném zářivém toku $\Phi^e(\lambda) = \text{konst} = \Phi_0^e$ musí platit

$$\Phi(\lambda) = K(\lambda) \Phi_0^e,$$

takže odtud porovnáním máme $\Phi_R = K_{\max} \Phi_0^e \approx 683 \text{ lm}$ a pro poměrnou spektrální světelnou účinnost dostaneme výsledek

$$V(\lambda) = \frac{K(\lambda)}{K_{\max}} \approx 1.0000 \bar{r}(\lambda) + 4.5907 \bar{g}(\lambda) + 0.0601 \bar{b}(\lambda),$$

kteří velmi dobře odpovídá **fotopické spektrální světelné účinnosti lidského oka** s maximem účinnosti $V_{\max} = 1$ v žlutozeleném světle s vlnovou délkou kolem 555 nm.

Světelný tok Φ z obecného zdroje světla popsaného zářivým tokem $\Phi^e(\lambda)$ se tedy spočte jako integrál

$$\Phi = \int_0^{\infty} K(\lambda) \Phi^e(\lambda) d\lambda = K_{\max} \int_0^{\infty} V(\lambda) \Phi^e(\lambda) d\lambda,$$

kde $K_{\max} \approx 683 \text{ lm/W}$ nebo jako

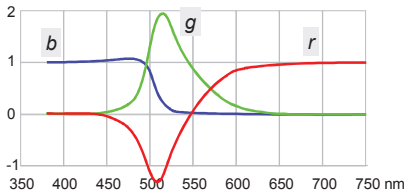
$$\Phi \approx K_{\max} (1.0000R + 4.5907G + 0.0601B),$$

kde R, G, B jsou trichromatické složky širokospektrálního zdroje $\Phi^e(\lambda)$ určené vzorcí (1.36).

Normované barevné souřadnice pro jednotlivé spektrální složky jsou definovány opět vzorcí

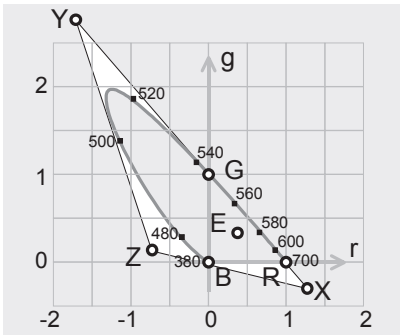
$$r(\lambda) = \frac{\bar{r}(\lambda)}{\Sigma(\lambda)}, \quad g(\lambda) = \frac{\bar{g}(\lambda)}{\Sigma(\lambda)}, \quad b(\lambda) = \frac{\bar{b}(\lambda)}{\Sigma(\lambda)},$$

kde $\Sigma(\lambda) = \bar{r}(\lambda) + \bar{g}(\lambda) + \bar{b}(\lambda)$, takže pro ně platí normovací podmínka $r(\lambda) + g(\lambda) + b(\lambda) = 1$ a jsou zobrazeny na následujícím obrázku.



Barevné souřadnice $r(\lambda)$, $g(\lambda)$, $b(\lambda)$ lidského oka pro spektrální barvy. Všimněte si, že pro 700 nm je $r = 1$, pro 546.1 nm je $g = 1$ a pro 435.8 nm je $b = 1$.

Všimněte si, že pro základní barvy $\lambda = 700$ nm je $r = 1$ a zbývající složky g a b vymizí, podobně pro $\lambda = 546.1$ nm je $g = 1$ a zbývající složky r a b vymizí a pro $\lambda = 435.8$ nm je $b = 1$ a zbývající složky r a g vymizí. Bílá barva **E** má v RGB prostoru barevné souřadnice $r = g = b = \frac{1}{3}$.



Barevný trojúhelník RGB. Všimněte si polohy primárních barev **R, G, B** i imaginárních primárních barev **X, Y, Z**.

1.8.4 Barevný prostor XYZ

RGB barevný prostor byl odvozen z řady experimentů provedených roku 1928 WILLIAM DAVID WRIGHTEM a roku 1931 JOHN GUILDEM a dnes je znám jako CIE 1931 barevný prostor. Protože CIE RGB systém měl jisté nevýhody, především obsahoval záporné hodnoty odezvových funkcí a bílá barva ležela příliš blízko okrajů barevného pole, navrhla komise vhodnější systém CIE XYZ s trichromatickými členiteli spektrálních barev $\bar{x}(\lambda)$, $\bar{y}(\lambda)$ a $\bar{z}(\lambda)$ takovými, že pro **trichromatické složky** platí

$$X = \int_0^{\infty} \bar{x}(\lambda) \Phi^e(\lambda) d\lambda, \quad Y = \int_0^{\infty} \bar{y}(\lambda) \Phi^e(\lambda) d\lambda, \quad Z = \int_0^{\infty} \bar{z}(\lambda) \Phi^e(\lambda) d\lambda,$$

podobně jako platí (1.36) pro R, B, G , přitom $\bar{x}(\lambda) \geq 0$, $\bar{y}(\lambda) \geq 0$ a $\bar{z}(\lambda) \geq 0$ a **trichromatictí členitelé** mají opět stejnou normu

$$\int_0^{\infty} \bar{x}(\lambda) d\lambda = \int_0^{\infty} \bar{y}(\lambda) d\lambda = \int_0^{\infty} \bar{z}(\lambda) d\lambda.$$

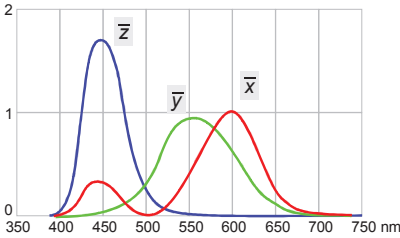
Tím se dosáhne toho, že izoenergetické bílé světlo je opět rovno homogennímu součtu nových primárních barev

$$\mathbf{E} = \mathbf{X} + \mathbf{Y} + \mathbf{Z}.$$

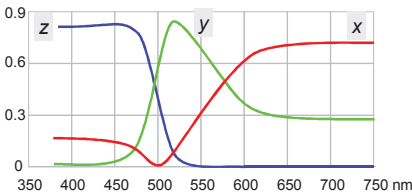
Navíc byl virtuální zdroj světla Y vybrán tak, aby barevný podnět $\bar{y}(\lambda)$ přesně odpovídal fotopické světelné účinnosti $\bar{y}(\lambda) = V(\lambda)$ lidského oka, takže platí

$$\Phi = K_{\max} Y = K_{\max} \int_0^{\infty} \bar{y}(\lambda) \Phi^e(\lambda) d\lambda,$$

kde opět $K_{\max} \approx 683 \text{ lm/W}$.



Trichromaticí členitelé spektrálních barev $\bar{x}(\lambda)$, $\bar{y}(\lambda)$ a $\bar{z}(\lambda)$ normovaného oka podle systému CIE 1931.



Barevné souřadnice xyz pro jednotlivé spektrální barvy.

Pro rozklad barvy \mathbf{A} do nových primárních barev \mathbf{XYZ} analogicky platí

$$\mathbf{A} = X\mathbf{X} + Y\mathbf{Y} + Z\mathbf{Z},$$

kde (X, Y, Z) jsou trichromatické složky barvy \mathbf{A} . Barevné souřadnice x, y, z dostaneme ze složek X, Y, Z podle definice

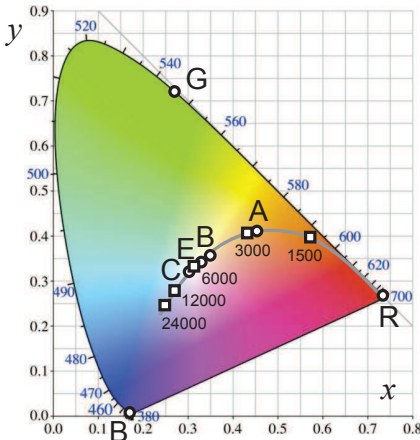
$$x = \frac{X}{X + Y + Z}, \quad y = \frac{Y}{X + Y + Z}, \quad z = \frac{Z}{X + Y + Z}.$$

Tím je zaručeno $0 \leq x, y, z \leq 1$ a navíc platí $x + y + z = 1$. Díky tomu nyní leží všechny barvy v **barevném trojúhelníku** s vrcholy $\mathbf{X} = (1, 0)$, $\mathbf{Y} = (0, 1)$ a $\mathbf{Z} = (0, 0)$. Jedinou nevýhodou nového systému je skutečnost, že jeho primární barvy \mathbf{X} , \mathbf{Y} a \mathbf{Z} reálně neexistují, protože jde jen o **imaginární barvy**, které nelze dostat smícháním žádné kombinace spektrálních barev, ani je nelze spatřit očima. Bílá barva \mathbf{E} má v barevném prostoru CIE XYZ souřadnice $\mathbf{E} = \frac{1}{3}(1, 1, 1)$, zatímco barevné souřadnice původních Maxwellových primárních barev jsou $\mathbf{R} \approx (0.7347, 0.2653, 0)$, $\mathbf{G} \approx (0.2738, 0.7171, 0.0091)$ a $\mathbf{B} \approx (0.1660, 0.0089, 0.8251)$.

Naopak souřadnice imaginárních primárních barev $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ jsou v RGB barevném prostoru $\mathbf{X} \approx (1.2750, -0.2778, 0.00280)$, $\mathbf{Y} \approx (-1.7393, 2.7673, -0.0279)$ a $\mathbf{Z} \approx (-0.7430, 0.1409, 1.6021)$.

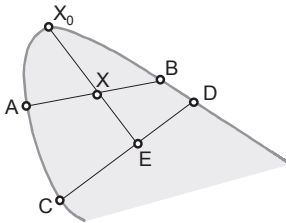
1.8.5 Barevný trojúhelník XYZ

Barvy se v technické optice znázorňují v **barevném trojúhelníku XYZ**. Každé barvě odpovídá jeden bod (x, y) v barevném trojúhelníku. Na podkovovitém okraji trojúhelníka leží všechny spektrální barvy, uvnitř trojúhelníka se nacházejí barvy složené a také barva bílá **E**. **Bílé barvě E** odpovídá izoenergetické spektrum $\Phi^e(\lambda) = \text{konst}$, takže musí mít stejné barevné souřadnice $x = y = z = \frac{1}{3}$.



Barevný trojúhelník XYZ, na obvodu podkovy leží spektrální barvy označené vlnovými délkami a základní barvy **R, G, B**, dole leží purpurové barvy, uprostřed podkovy barvy míchané a **A, B, C** a **E** značí smluvní bílé barvy.

Kdybychom zkoumali polohu barevných odstínů odpovídajících záření absolutně černého tělesa při různých teplotách, dostali bychom oblouk **AE** začínající v syté temně červené barvě přecházející postupně přes oranžovou a stále méně sytou žlutou barvu až do oblasti bílých odstínů. Oblouk protne i bílou barvu E, která odpovídá zhruba záření o teplotě 5454 K. Záření ještě teplejšího tělesa již začíná mít namodralý odstín.



Skládání barev v barevném trojúhelníku. Mícháním spektrálních barev A a B dostaneme libovolnou barvu X ležící na spojnici AB . Sytost barvy X je dána poměrem $|EX|/|EX_0|$. Pokud spojnice CD prochází bílým bodem E , jsou barvy C a D navzájem doplňkové.

Sytost barvy X se najde graficky na barevném trojúhelníku z podílu délek $|EX|/|EX_0|$, kde bod E odpovídá bílé barvě, X_0 nejbližší spektrální barvě, která se najde jako průsečík EX a oblouku spektrálních barev a X zkoumané barvě. Mícháním dvou barev reprezentovaných v barevném trojúhelníku dvěma body A

a B , dostaneme postupně všechny barvy X ležící na spojnici AB . Pokud leží na spojnici AB i **barva bílá**, která má souřadnice $\mathbf{E} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, nazýváme barvy \mathbf{A} a \mathbf{B} **doplňkovými barvami**. Vzdálenost $|AB|$ bodů reprezentujících dvě barvy \mathbf{A} a \mathbf{B} na barevném diagramu však neodpovídá skutečné vzdálenosti barev, jak ji vnímá oko, proto byly později navrženy další barevné prostory, například CIELuv a CIELab, které tento problém řeší lépe.

1.8.6 Přepočítání z RGB do XYZ

Přepočítání trichromatických členitelů $\bar{r}, \bar{g}, \bar{b}$ jakož i trichromatických složek R, G, B do složek X, Y, Z v prostoru XYZ se dělá exaktně podle standardů CIE matematickou transformací

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \frac{1}{0.17697} \begin{pmatrix} 0.49 & 0.31 & 0.20 \\ 0.17697 & 0.81240 & 0.01063 \\ 0 & 0.01 & 0.99 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}.$$

Pro obrácený přepočítání z X, Y, Z do R, G, B se použije inverzní transformace, která má přibližně tvar

$$\begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.41847 & -0.15866 & -0.08283 \\ -0.09117 & 0.25243 & 0.01571 \\ 0.00092 & -0.00255 & 0.17860 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

1.8.7 Smluvní bílá světla

Vedle izoenergetického bílého světla \mathbf{E} se v osvětlovací technice definují další **smluvní bílá světla**. Nejdůležitější z nich včetně jejich barevných souřadnic podle CIE 1931 a barevné teploty uvádíme v tabulce.

bílé světlo	x	y	$T[\text{K}]$
A	0.44757	0.40745	2856
B	0.34842	0.35161	4874
C	0.31006	0.31616	6774
D65	0.31271	0.32902	6504
E	0.33333	0.33333	5454

Smluvní bílé světlo \mathbf{A} představuje světlo wolframové žárovky o teplotě 2856 K, smluvní bílé světlo \mathbf{B} představuje přímé sluneční světlo o teplotě 4874 K, smluvní bílé světlo \mathbf{C} představuje nepřímé sluneční světlo modré oblohy o teplotě 6774 K, smluvní bílé světlo **D65** představuje průměrné denní světlo o teplotě 6504 K a smluvní bílé světlo \mathbf{E} je již známé izoenergetické bílé světlo se souřadnicemi $x = y = z = \frac{1}{3}$ nebo spektrem $\Phi^e(\lambda) = \text{konst.}$