OPT/AST

L09

Úvod do nebeské mechaniky

pohyby astronomických těles ve společném gravitačním poli

obecně: chaotický systém → nestabilní numerické řešení
speciální případ: problém dvou těles → analytické řešení

problém dvou těles

relativní zrychlení a redukovaná hmotnost

$$\vec{a} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2 \;, \quad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

gravitační zákon a gravitační parametr

$$m\vec{a} = -\frac{\mu m}{r^3}\vec{r} \;, \quad \mu = G(m_1 + m_2)$$

kinetická energie v soustavě těžiště

$$E_k = \frac{1}{2} m \dot{r}^2$$

potenciální energie

$$E_p = -\frac{\mu m}{r}$$

- relativní pohyb jednoho tělesa vůči druhému se chová jako pohyb tělesa s hmotností m v gravitačním poli tělesa s hmotností $m_1 + m_2$
- problém dvou těles je tím redukován na jedno těleso

parametry dráhy a integrály pohybu

(specifický) moment hybnosti

$$\vec{k} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \quad \rightarrow \quad \dot{\vec{k}} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{k} = \text{konst.}$$

tj. dráha leží v rovině

energie dráhy

$$\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu}{r}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right)$$

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = \text{konst.}$$

tj. součet kinetické a potenciální energie se zachovává

excentricita a perihelium

$$\vec{k} \times \ddot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}\left(-\mu\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{d}{dt}(\vec{k} \times \dot{\vec{r}})$$

$$\vec{k} \times \dot{\vec{r}} + \frac{\mu\,\vec{r}}{r} \equiv -\mu\,\vec{e} = \text{konst.}$$

tvar dráhy

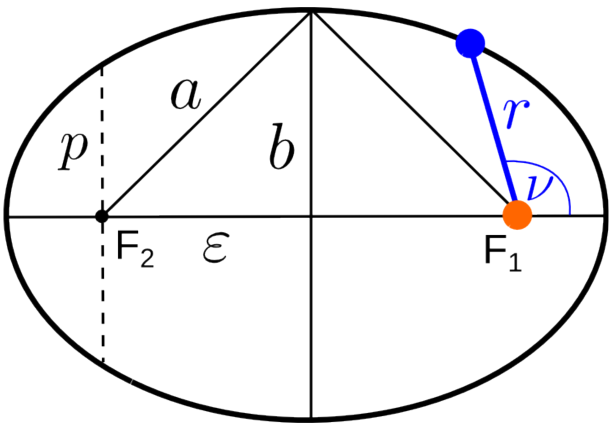
$$\vec{r} \cdot \vec{e} = r\,e\,\cos\nu$$

použitím předchozího dostaneme

$$r = \frac{k^2/\mu}{1 + e\,\cos\nu}$$

1. Keplerův zákon

planety se pohybují po elipsách, v jejichž společném ohnisku je Slunce



a – délka velké poloosy, b – malá poloosa, p – semilatus rectum, r – délka průvodiče (okamžitá vzdálenost), ν – pravá anomálie (úhlová vzdálenost od perihelia)

ε – lineární excentricita $\varepsilon^2 = a^2 - b^2$

rovnice elipsy

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu}$$

e – numerická excentricita $e = \varepsilon / a$

perihelium/afélium

$$r_{\min} = a\,(1 - e) = p\,/\,(1 + e)$$

$$r_{\max} = a\,(1 + e) = p\,/\,(1 - e)$$

velká poloosa je *aritmetický* průměr $r_{\min}$ a $r_{\max}$

$$a = \left(r_{\min} + r_{\max}\right)/2$$

malá poloosa je *geometrický* průměr $r_{\min}$ a $r_{\max}$

$$b = \sqrt{r_{\min} r_{\max}} = a\sqrt{1 - e^2}$$

semilatus rectum je *harmonický* průměr $r_{\min}$ a $r_{\max}$

$$p = \frac{2}{\dfrac{1}{r_{\min}} + \dfrac{1}{r_{\max}}} = \frac{b^2}{a} = a\left(1 - e^2\right)$$

excentricita je *kontrast* $r_{\min}$ a $r_{\max}$

$$e = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}}$$

2. Keplerův zákon

plochy opsané průvodičem planety za stejnou dobu jsou stejné

$$\frac{dA}{dt} = k/2 = \text{konst.}$$

$$\pi a b = \frac{1}{2} k P$$, P – perioda

vyjadřuje zákon zachování momentu hybnosti $\vec{k}$ vzhledem ke Slunci v rotačně symetrickém potenciálu v periheliu a aféliu je průvodič kolmý na vektor rychlosti

$$k_{\mathrm{perihelium}} = r_{\min} v_{\max} = r_{\max} v_{\min} = k_{af\acute{e}lium}$$

takže

$$\frac{v_{\max}}{v_{\min}} = \frac{1+e}{1-e}$$

3. Keplerův zákon

druhá mocnina oběžné doby planety je úměrná třetí mocnině velké poloosy planetární dráhy

zákon zachování energie

$$v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \quad , \quad \mu = G\left(m_\odot + m_p\right)$$

použitím 1. a 2. zákona dostaneme

$$k = \sqrt{\mu\; p}$$

a

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$$

pro dvě planety

$$\frac{P_1^2}{P_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}\;\frac{m_\odot + m_2}{m_\odot + m_1}$$

aplikace 3. Keplerova zákona

určení hmotnosti planety m_p s pomocí oběžné doby P_m a velké poloosy a_m měsíce/umělého satelitu

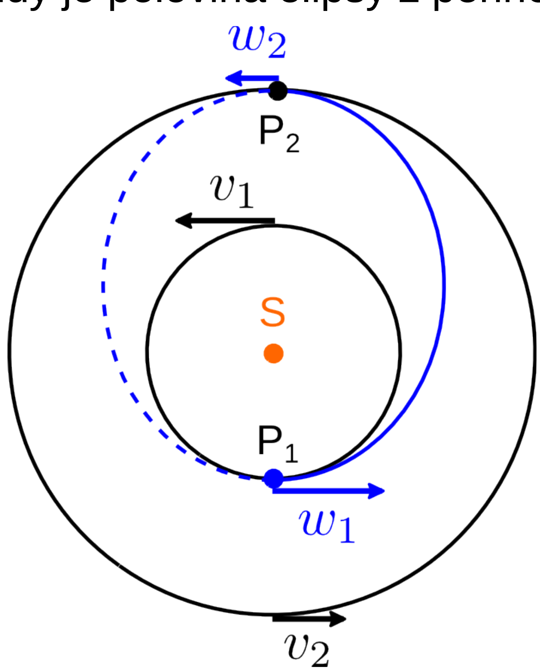
$$\frac{m_p}{m_\odot} \approx \frac{a_m^3}{a_p^3}\,\frac{P_p^2}{P_m^2}$$

Hohmannovy přechodové dráhy

ekonomický transfer v gravitačním poli

start (cíl) ve vzdálenosti a_1 (a_2) od Slunce

dráha sondy je polovina elipsy z perihelia do afélia (nebo naopak)



velká polosa přechodové dráhy

$$a = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

excentricita přechodové dráhy

$$e = \left| \frac{a_2 - a_1}{a_2 + a_1} \right|$$

doba letu

$$\tau\,[roků] = \sqrt{\frac{\left(a_1[AU] + a_2[AU]\right)^3}{32}}$$

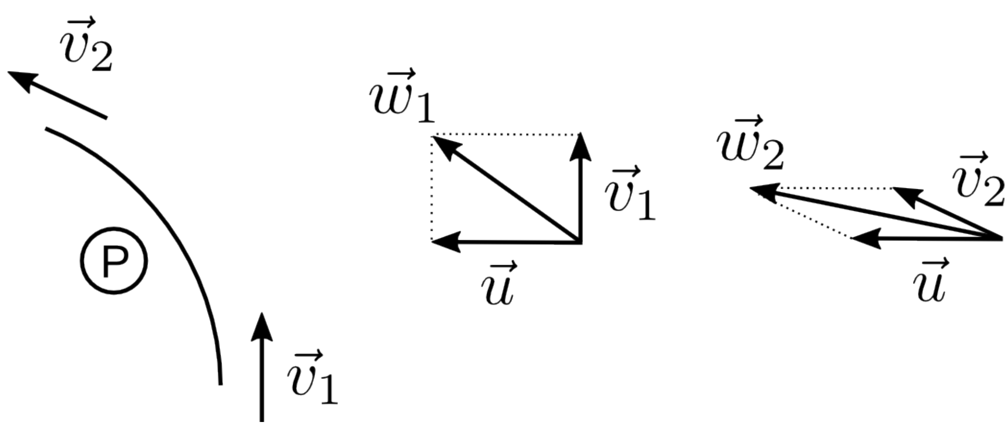
změny rychlosti

- $\Delta v_1 = w_1 - v_1 > 0$ ze startovní dráhy na přechodovou dráhu
- $\Delta v_2 = v_2 - w_2 > 0$ z přechodové dráhy na cílovou dráhu

v praxi se často využívají méně ekonomické dráhy s kratší dobou letu

gravitační manévr (gravitační prak)

elastická “srážka” sondy s planetou
dochází ke změně směru a rychlosti vzhledem k Slunci
využívá se pro zvýšení/snížení rychlosti umělých sond



souřadná soustava planety

$$|\vec{v}_2| = |\vec{v}_1| = v$$

sonda odlétá stejnou rychlostí

souřadná soustava Slunce

$\vec{u}$ - rychlost planety vzhledem ke Slunci

$$|\vec{v}_2 + \vec{u}| > |\vec{v}_1 + \vec{u}|$$

rychlost sondy vzhledem ke Slunci se zvýší $|\vec{w}_2| > |\vec{w}_1|$

speciální případ – 1D

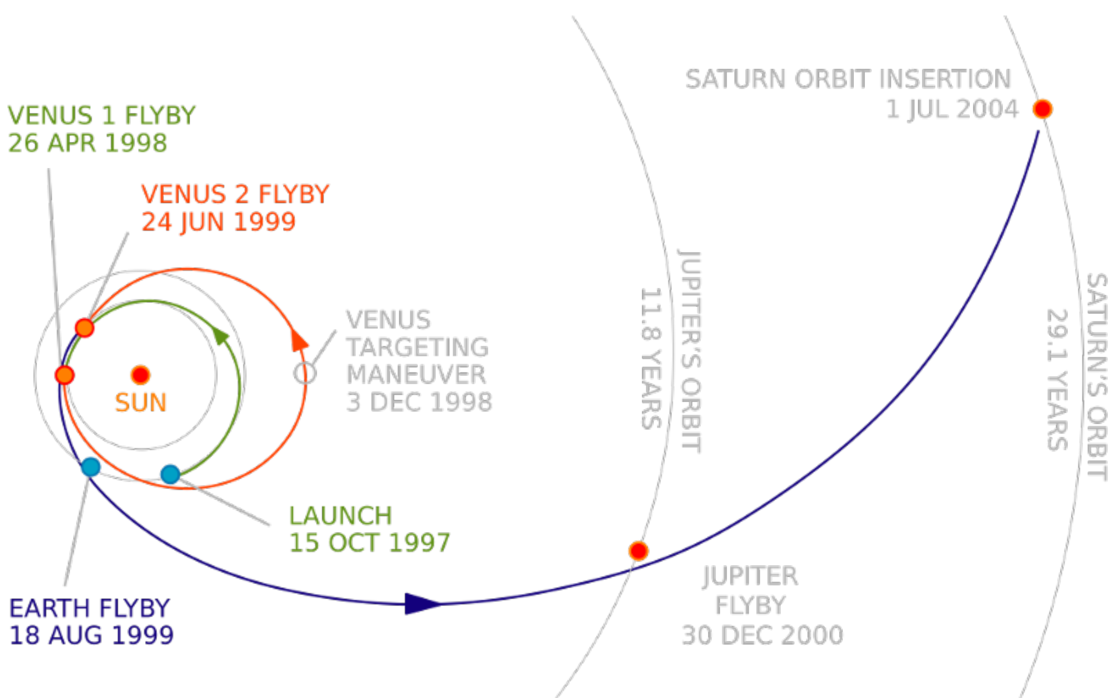
$$\vec{v}_2 = -\vec{v}_1$$

výsledná heliocentrická rychlosti

$w_1 = v - u$ a $w_2 = v + u$

$$\Delta w = 2u$$

sonda Cassini



Oberthův manévr

raketový motor způsobuje Δv nezávisle na rychlosti v

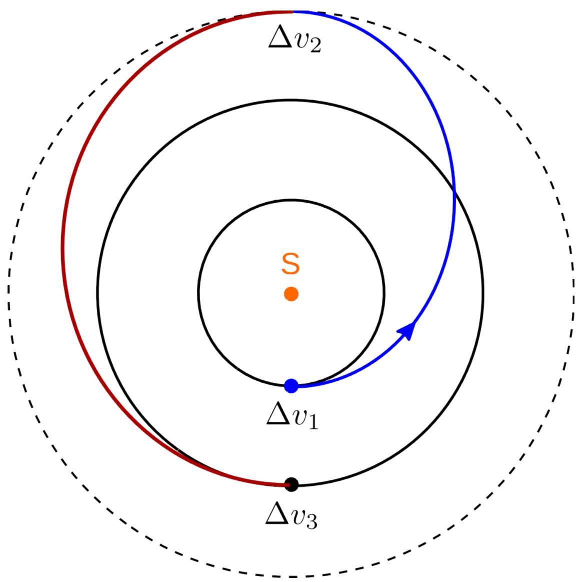
kinetická energie $E_k \propto v^2$

stejné Δv při vyšší rychlosti způsobí větší ΔE_k – stejná síla působí po větší dráze

výhodné je použít motor při maximální rychlosti, tj. v blízkosti planety/Slunce

bieliptický transfer

využívá Oberthův manévr pro úsporu paliva oproti Hohmannově transferu



změny rychlosti

- $\Delta v_1 > 0$ ze startovní dráhy na první přechodovou dráhu
- $\Delta v_2 > 0$ na druhou přechodovou dráhu

- $\Delta v_3 < 0$ na cílovou dráhu

vhodná volba apogea první přechodové dráhy může vést k úspoře paliva

např. při vzdalování od Slunce je afélium první přechodové dráhy $a_{12} > a_2$, takže $(\Delta v_1)_{\text{bieliptická}} > (\Delta v_1)_{\text{Hohmann}}$ v okamžiku, kdy je rychlost sondy vůči Slunci největší

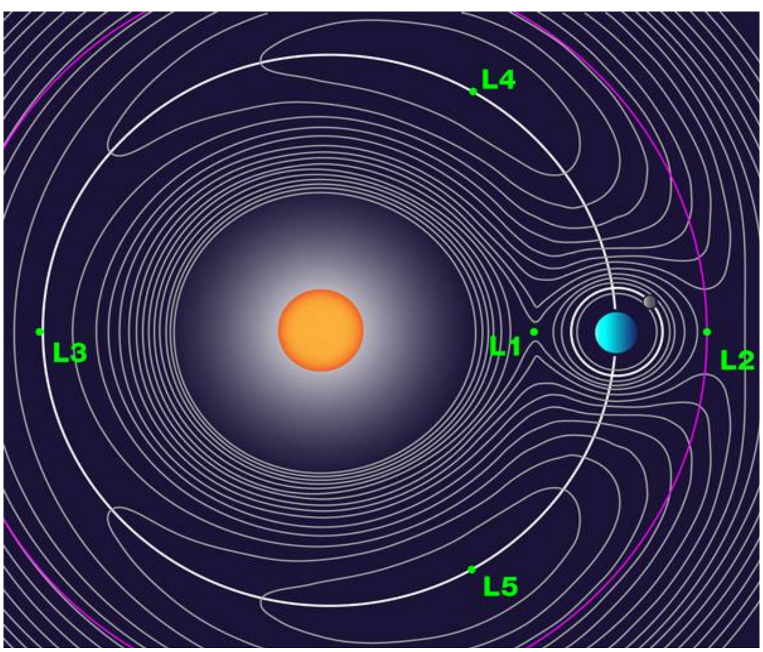
Oberthův jev může vést k větší efektivitě na úkor doby transferu

Lagrangeovy body

speciální problém tří těles – těleso infinitisimální hmotnosti se pohybuje v gravitačním poli dvou těles na kruhových drahách

celkové gravitační působení dvou těles umožňuje malému tělesu umístěnému do Lagrangeova bodu rotovat spolu s oběma tělesy

gravitační a odstředivé síly jsou v rovnováze



efektivní potenciál v rotující vztažné soustavě např. v bodě L2 se gravitační síly od Slunce a Země sčítají, takže oběžná doba ve vzdálenosti L2 od Slunce je stejná jako pro Zemi

body L1, L2, a L3 leží na přímce Země – Slunce a jsou nestabilní

body L4, L5 vytvářejí rovnostranný trojúhelník se Zemí a Sluncem a jsou stabilní – existují pouze někdy (velký poměr hmotností)

využití Lagrangeových bodů Země – Slunce

- L1 pro pozorování Slunce (Soho)
- L2 pro pozorování vesmíru (Gaia)

sondy musí být stabilizovány, jsou preferovány trajektorie s velkou amplitudou – konstantní osvětlení v L2 a dostatečná úhlová vzdálenost od Slunce v L1

meziplanetární transfery

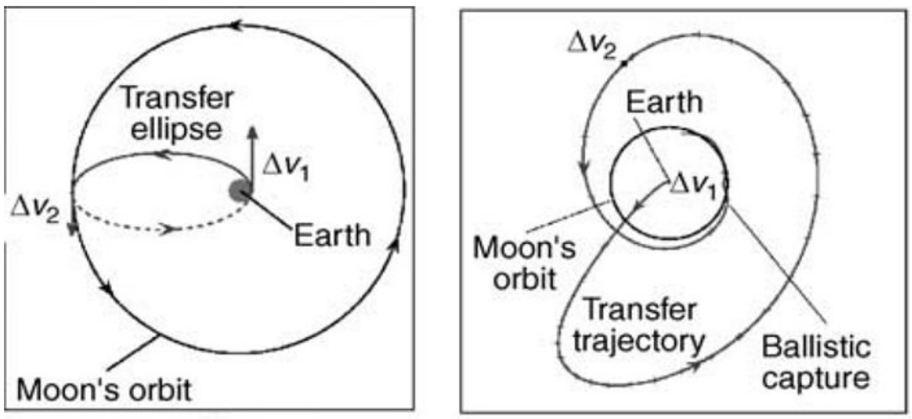
transfer mezi oběžnými drahami kolem dvou planet, tj. transfer mezi sférami vlivu dvou těles

ve sféře vlivu cílové planety je nutno sondu zpomalit na oběžnou rychlost

Oberthův jev snižuje náklady takového přesunu – Δv provádět v co největší blízkosti obou těles *nízkonákladové transfery*

přechodové dráhy využívající řešení problému více těles

- cílem je minimalizovat Δv pro záchyt
- typicky využívají cestu mezi Lagrangeovy body a balistické zachycení



W. S. KOON , M.W. LO , J. E. MARSDEN and S. D. ROSS, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy 81: 63–73, 2001

- vysoce ekonomické (nízké nároky na spotřebu paliva)
- mohou být velmi pomalé
- byly využity např. pro záchranu mise Hiten (1991) – dosažení oběžné dráhy kolem Měsíce