Numerické metody a programování

Lekce 5

Interpolace a extrapolace

známe funkční hodnoty funkce $f(x)$ v bodech $x_1, x_2, \ldots, x_N$

problém: odhadnout hodnotu funkce $f(x)$ v libovolném bodě x

- interpolace $x_1 < x < x_N$
- extrapolace $x < x_1$ nebo $x > x_N$

funkční model:

- polynomy
- racionální funkce
- trigonometrické funkce

interpolace:

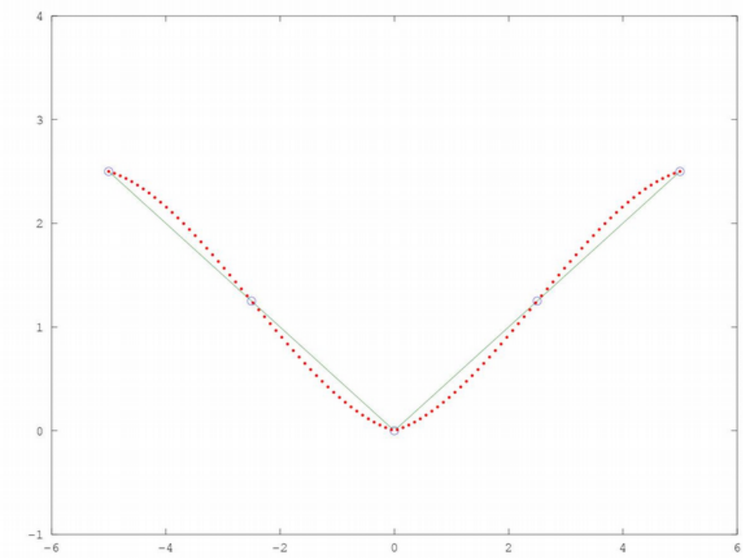
- nalezení interpolační funkce, vyhodnocení interpolační funkce v bodě x
- přímý odhad $f(x)$ ze známých hodnot
  - výchozí funkční hodnota v blízkém bodě $f(x_i)$
  - (klesající) korekce od vzdálenějších bodů
  - nejmenší korekce: poskytuje odhad chyby interpolace

podle požadavků na spojitost:

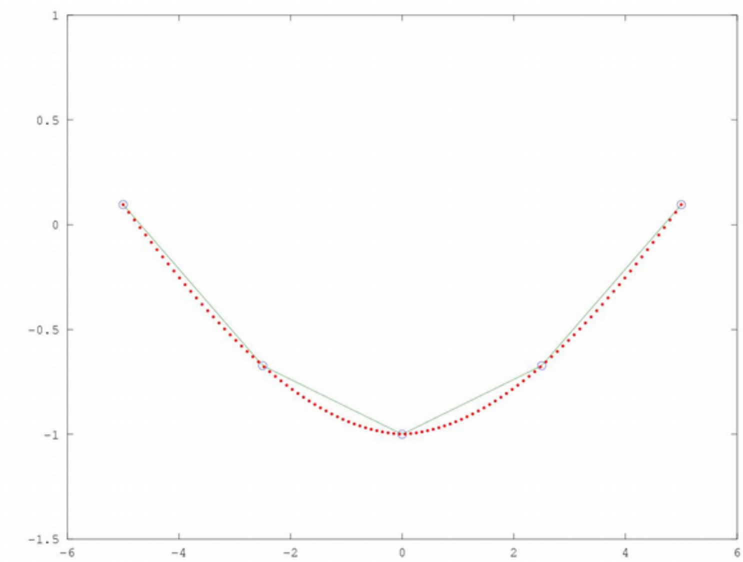
- lokální interpolace
  - použito N nejbližších bodů
  - nespojitost derivací interpolovaných hodnot
- nelokální interpolace (splajny, spline)
  - zajišťují spojitost derivace daného řádu
  - obvykle kubické splajny (druhá derivace)
  - koeficienty polynomu určeny “nelokálně”

řád interpolace:

- dán počtem bodů $N-1$
- vyšší řád interpolace nemusí znamenat vyšší přesnost
- vzdálené body mohou způsobovat nežádoucí oscilace
- obvykle 3-6 bodů



ostré rohy jsou lépe vystihnuty nižším řádem interpolace



zde vyšší řád interpolace lépe vystihuje hladkou křivku

extrapolace:

- metody jako interpolace
- chyba rychle narůstá pokud vzdálenost od interpolovaného intervalu přesahuje typickou vzdálenost tabulovaných bodů

Polynomiální interpolace a extrapolace

dva body: přímka

tři body: kvadratická křivka

N bodů $y_1 = f(x_1),\ \ y_2 = f(x_2), \ldots, y_N = f(x_N)$ proložíme polynomem řádu $N-1$ (Lagrange)

$$P(x)=\frac{(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_N)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_N)}y_1+\frac{(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_N)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_N)}y_2$$
$$+\cdots+\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{N-1})}{(x_N-x_1)(x_N-x_2)\cdots(x_N-x_{N-1})}y_N$$

- každý člen je polynom řádu $N-1$
- v tabulovaných bodech přispívá vždy jen jeden člen

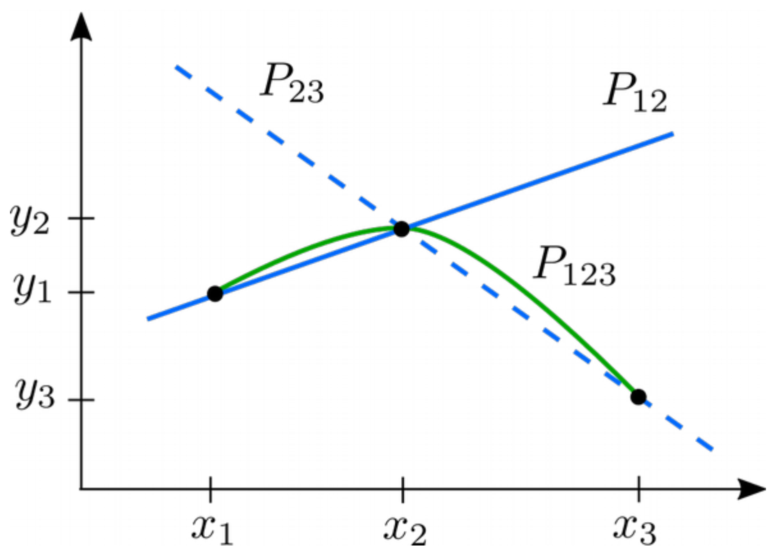
praktický algoritmus (Neville)

$$\begin{array}{llll} x_1: & y_1=P_1 & & \\ & & P_{12} & \\ x_2: & y_2=P_2 & & P_{123} \\ & & P_{23} & \\ x_3: & y_3=P_3 & & \end{array}$$

postupné doplňování

$$P_{12}=\frac{(x-x_2)\,P_1+(x_1-x)\,P_2}{x_1-x_2}\ ,\ P_{23}=\frac{(x-x_3)\,P_2+(x_2-x)\,P_3}{x_2-x_3}$$

$$P_{123}=\frac{(x-x_3)\,P_{12}+(x_1-x)\,P_{23}}{x_1-x_3}$$



- funguje, protože P_{12} a P_{23} již souhlasí v bodě x_2
- přírustky $P_{123}-P_{12}$ a $P_{123}-P_{23}$ lze použít pro odhad chyby interpolace

Trigonometrická interpolace

interpolace periodickou funkcí - perioda 2π
ekvidistantní body (pro jednoduchost)

$$x_n = 2\pi\frac{n}{N}, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

koeficienty diskrétní Fourierovy transformace

$$a_k = \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{-i2\pi nk/N}, \quad k = 0, 1, \ldots, N$$

zpětná diskrétní Fourierova transformace

$$y_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{i2\pi nk/N}$$

interpolace prodloužením

$$y(x) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{ixk}$$

- 2π periodicita interpolační funkce je zjevná
- podobně lze využít diskrétní kosinovou a diskrétní sinovou transformaci pro data se sudou/lichou symetrií

Interpolace kubickými splajny (cubic spline)

lineární interpolace mezi body x_j a x_{j+1}

$$y = Ay_j + By_{j+1} \tag{1}$$

$$B = 1-A, \; A(x_j) = 1, \; A(x_{j+1}) = 0$$

$$A = \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j}$$

požadujeme spojitou druhou derivaci

- přidáme k (1) kubický polynom, jehož druhá derivace se lineárně mění mezi y''_j a y''_{j+1}
- polynom vymizí v bodech x_j, x_{j+1}

výsledná interpolace

$$y = A y_j + B y_{j+1} + C y_j'' + D y_{j+1}''$$

$$C = \frac{1}{6}(A^3 - A)(x_{j+1} - x_j)^2, \quad D = \frac{1}{6}(B^3 - B)(x_{j+1} - x_j)^2$$

je jednoduché ověřit, že platí:

$$C(x_j) = C(x_{j+1}) = D(x_j) = D(x_{j+1}) = 0$$

dále

$$\frac{d^2 A}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2 B}{dx^2} = 0$$

dostaneme

$$\frac{d^2 C}{dx^2} = A, \quad \frac{d^2 D}{dx^2} = B$$

zjistili jsme, že druhá derivace interpolačního polynomu

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = A y_j'' + B y_{j+1}''$$

se spojitě mění mezi intervaly (x_{j-1}, x_j) a (x_j, x_{j+1}), jak jsme požadovali

kubický splajn

- neznámé hodnoty y_j'' určíme navázáním první derivace mezi intervaly
  $$\frac{d}{dx} y[x_j \in (x_{j-1}, x_j)] = \frac{d}{dx} y[x_j \in (x_j, x_{j+1})]$$
- tj. $N-2$ rovnic pro N neznámých $y_1'', y_2'', \ldots y_N''$
- zbylé dva parametry – okrajové podmínky, např. zvolíme $y_1'' = y_N'' = 0$
- vede na tridiagonální lineární soustavu rovnic
- speciální metody pro řešení tridiagonálních soustav

Koeficienty interpolačního polynomu

polynom $y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \cdots + c_N x^{N-1}$ známe v bodech $y_i = y(x_i)$

soustava rovnic pro koeficienty

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{N-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_N & x_N^2 & \cdots & x_N^{N-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}$$ (Vandermondova matice)

řešení

- standardní metody (LU dekompozice)
- speciální metody
- často téměř singulární $\rightarrow$ malá přesnost vypočtených c_i

jiná možnost: využití interpolace, např. $y(0) = c_1$, $\tilde{y}_i = (y_i - c_1)/x_i \rightarrow \tilde{y}(0) = c_2$, atd.

Interpolace ve dvou (a více) dimenzích

nejjednodušší: bilineární interpolace

$$y(x_1, x_2) = (1-t)(1-u)\, y_{\mathrm{ld}} + t(1-u)\, y_{\mathrm{pd}} + t\, u\, y_{\mathrm{ph}} + (1-t)\, u\, y_{\mathrm{lh}}$$

$$t = \frac{x_1 - x_{1\mathrm{l}}}{x_{1\mathrm{r}} - x_{1\mathrm{l}}}, \quad u = \frac{x_2 - x_{2\mathrm{d}}}{x_{2\mathrm{h}} - x_{2\mathrm{d}}}$$

např. y_{ld} je tabulovaná hodnota levého dolního rohu čtverce obsahujícího bod (x_1, x_2)

vyšší řády

- ke zvýšení přesnosti: blok $m \times n$ obsahující bod (x_1, x_2); nejprve m **1D** interpolací ve směru x_2 (po řádcích), pak jedna **1D** interpolace ve směru x_1
- k dosažení spojitosti derivací
  - bikubická interpolace
  - bikubický splajn: nejprve m **1D** splajnů po řádcích následovaných jedním **1D** splajnem výsledného sloupce