OPT/OZI

L01

Optické zpracování informace
OPT/OZI

Sylabus:

1) Analýza dvoudimenzionálních signálů
2) Základy skalární teorie difrakce
3) Vlnová analýza koherentních optických systémů
4) Frekvenční analýza optických zobrazovacích systémů
5) Modulace vlnoplochy
6) Optické procesory
7) Aplikace I: příprava a měření optického signálu
8) Aplikace II: rekonstrukce obrazu
9) Úvod do teorie odhadu
10) Aplikace III: superrozlišení
11) Aplikace IV: atmosférická optika

Literatura

Joseph. W. Goodman: Introduction to Fourier Optics

Francis. T.S. Yu: Optical Signal Processing, Fourier Optics

Analýza dvoudimenzionálních signálů

Fourierova analýza v 2D

Fourierova transformace

$$\mathcal{F}\{g\} = \iint_{-\infty}^{\infty} g(x, y) \exp[-i 2\pi (f_x x + f_y y)] dx\, dy$$

inverzní Fourierova transformace

$$\mathcal{F}^{-1}\{G\} = \iint_{-\infty}^{\infty} G(f_x, f_y) \exp[i 2\pi (f_x x + f_y y)] df_x\, df_y$$

podmínky existence

- *g* integrovatelná s absolutní hodnotou v rovině *(x,y)*
- *g* má konečně mnoho bodů nespojitosti a konečný počet maxim a minim v libovolném konečném obdélníku
- *g* nemá žádný bod nekonečné nespojitosti

není splněno pro bodový zdroj (delta funkci)

$$\delta(x) = \lim_{N \to \infty} N \exp(-N^2 \pi x^2)$$

důležité vlastnosti

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i 2\pi f x) df = \delta(x)$$

zobecněná Fourierova transformace: limita transformací

$$\mathcal{F}\{\delta(x, y)\} = 1$$

interpretace

$$g(x,y)=\iint_{-\infty}^{\infty} G(f_X,f_Y)\exp[i2\pi(f_x x+f_y y)]\,df_x\,df_y$$

elementární funkce

váhové koeficienty

přímky konstantní fáze

směr $\tan\theta=f_y/f_x$, frekvence $f^2=f_x^2+f_y^2=\|(f_x,f_y)\|$

vlastnosti

- linearita $\mathcal{F}\{\alpha g+\beta h\}=\alpha\mathcal{F}\{g\}+\beta\mathcal{F}\{h\}$
- podobnost $\mathcal{F}\{g(ax,by)\}=\dfrac{1}{|ab|}G(f_x/a,f_y/b)$
- posuvný $\mathcal{F}\{g(x-a,y-b)\}=G(f_x,f_y)\exp[-i2\pi(f_x a+f_y b)]$
- Parsevalův $\iint_{-\infty}^{\infty}|g(x,y)|^2\,dx\,dy=\iint_{-\infty}^{\infty}|G(f_x,f_y)|^2\,df_x\,df_y$
- konvoluční $\mathcal{F}\left\{\iint_{-\infty}^{\infty} g(\xi,\eta)h(x-\xi,y-\eta)\,d\xi\,d\eta\right\}=G(f_x,f_y)H(f_x,f_y)$

  konvoluce $g(x)*h(x)$

- autokorelační $\mathcal{F}\left\{\iint_{-\infty}^{\infty} g(\xi,\eta)g^*(\xi-x,\eta-y)\,d\xi\,d\eta\right\}=|G(f_x,f_y)|^2$
- Fourierův integrální (v bodech spojitosti)

$$\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\{g(x,y)\}=\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\{g(x,y)\}=g(x,y)$$

ale $\mathcal{F}\mathcal{F}\{g(x,y)\}=g(-x,-y)$

separabilní funkce

- v pravoúhlých souřadnicích: $g(x,y) = g_x(x)\,g_y(y)$
- v polárních souřadnicích: $g(r,\theta) = g_R(r)\,g_\Theta(\theta)$

$$\mathcal{F}\{g_x(x)\,g_y(y)\} = \mathcal{F}_x\{g_x\}\,\mathcal{F}_y\{g_y\}$$

kruhově symetrické funkce

$$g(r,\theta) = g(r) \qquad x = r\cos(\theta),\quad y = r\sin(\theta)$$

$$f_x = \rho\cos(\psi),\quad f_y = \rho\sin(\psi)$$

Fourierova-Besselova transformace

$$G(\rho) = \mathcal{B}\{g(r)\} = 2\pi\int_0^\infty r\,g(r)\,J_0(2\pi r\rho)\,dr$$

$$g(r) = 2\pi\int_0^\infty \rho\,G(\rho)\,J_0(2\pi r\rho)\,d\rho$$

$$\mathcal{B}\mathcal{B}^{-1}\{g(r)\} = \mathcal{B}^{-1}\mathcal{B}\{g(r)\} = \mathcal{B}\mathcal{B}\{g(r)\} = g(r)$$

často používané funkce

$$\mathrm{rect}(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1/2 \\ 1/2 & |x| = 1/2 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}, \qquad \mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}, \qquad \mathrm{comb}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n)$$

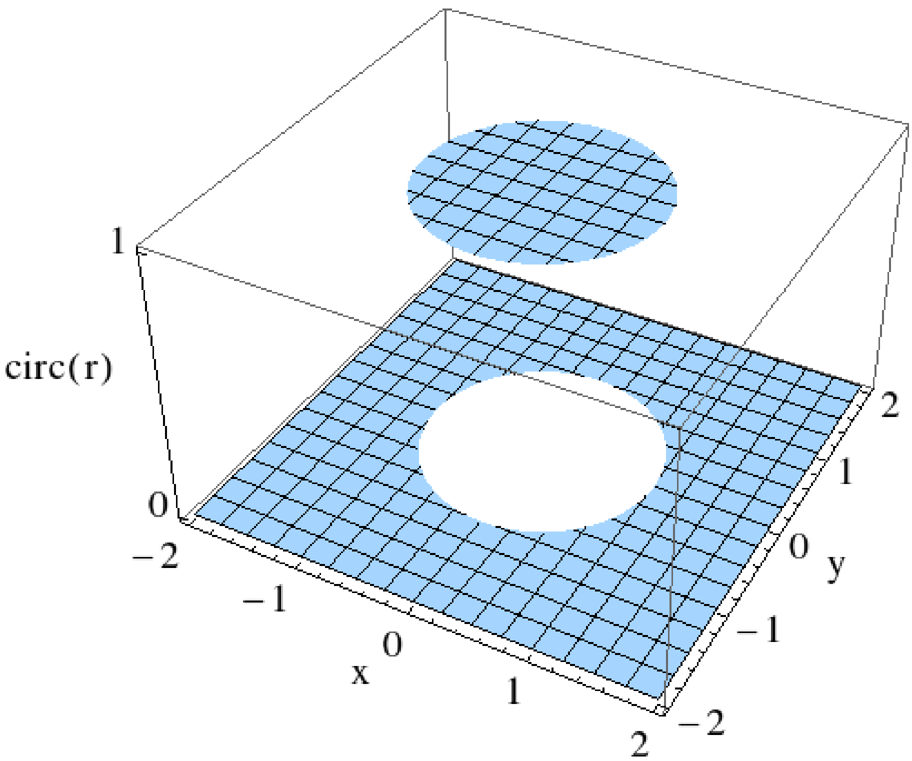
$$\Lambda(x) = \begin{cases} 1-|x| & |x| \le 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}, \qquad \mathrm{circ}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = \begin{cases} 1 & \sqrt{x^2+y^2} < 1 \\ 1/2 & \sqrt{x^2+y^2} = 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

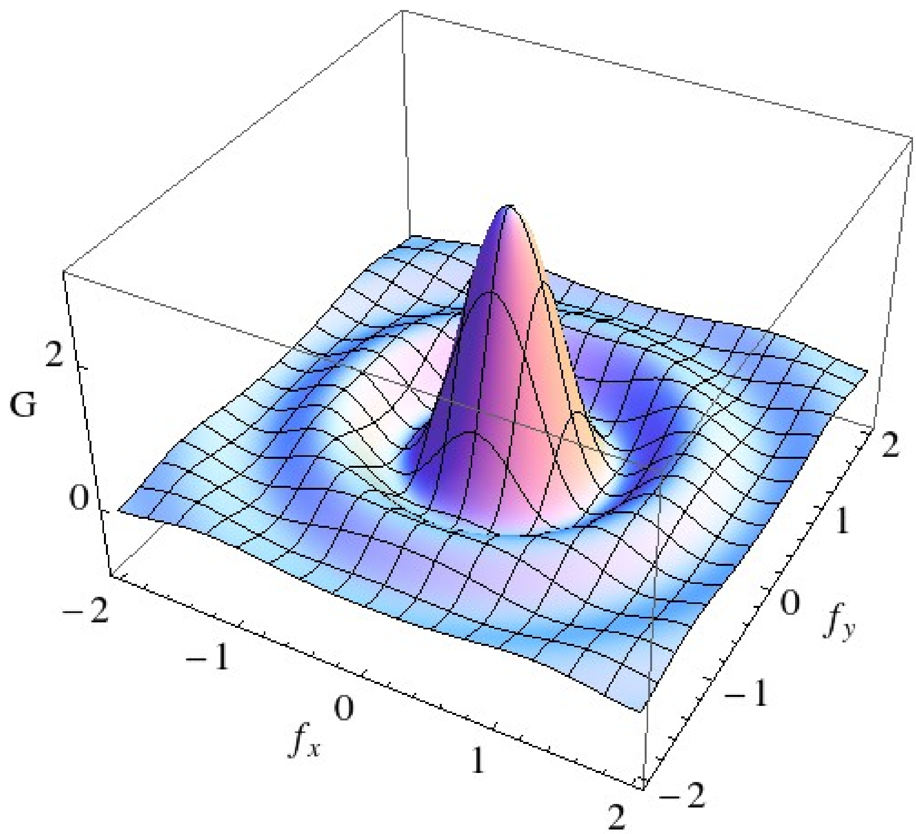
funkce a jejich obrazy

funkce	FT
$\exp[-\pi(a^2x^2+b^2y^2)]$	$\frac{1}{\lvert ab\rvert}\exp\left[-\pi\left(\frac{f_x^2}{a^2}+\frac{f_y^2}{b^2}\right)\right]$
$\mathrm{rect}(ax)\,\mathrm{rect}(by)$	$\frac{1}{\lvert ab\rvert}\mathrm{sinc}(f_x/a)\,\mathrm{sinc}(f_y/b)$
$\Lambda(ax)\Lambda(by)$	$\frac{1}{\lvert ab\rvert}\mathrm{sinc}^2(f_x/a)\,\mathrm{sinc}^2(f_y/b)$
$\delta(ax,by)$	$\frac{1}{\lvert ab\rvert}$
$\exp[i\pi(ax+by)]$	$\delta(f_x-a/2, f_y-b/2)$
$\mathrm{sgn}(ax)\,\mathrm{sgn}(by)$	$\frac{ab}{\lvert ab\rvert}\frac{1}{i\pi f_x}\frac{1}{i\pi f_y}$
$\mathrm{comb}(ax)\,\mathrm{comb}(by)$	$\frac{1}{\lvert ab\rvert}\mathrm{comb}(f_x/a)\,\mathrm{comb}(f_y/b)$
$\exp[i\pi(a^2x^2+b^2y^2)]$	$\frac{i}{\lvert ab\rvert}\exp\left[-i\pi\left(f_x^2/a^2+f_y^2/b^2\right)\right]$
$\exp[-(a\lvert x\rvert+b\lvert y\rvert)]$	$\frac{1}{\lvert ab\rvert}\frac{2}{1+(2\pi f_x/a)^2}\frac{2}{1+(2\pi f_y/b)^2}$

speciální případ kruhové symetrie

$$\mathcal{B}\{\mathrm{circ}(r)\} = 2\pi\int_0^1 r J_0(2\pi r\rho)\,dr = \frac{J_1(2\pi\rho)}{\rho}$$


1
circ(r)
0
−2
−1
0
x
1
2
2
1
0
y
−1
−2


2
G
0
−2
−1
0
f_x
1
2
2
1
0
f_y
−1
−2

lineární systémy

systém

$$g_2(x_2, y_2) = \mathcal{S}\{g_1(x_1, y_1)\}$$

lineární systém

$$\mathcal{S}\{a\,p(x_1, y_1) + b\,q(x_1, y_1)\} = a\,\mathcal{S}\{p(x_1, y_1)\} + b\,\mathcal{S}\{q(x_1, y_1)\}$$

dekompozice

$$g_1(x_1, y_1) = \iint_{-\infty}^{\infty} g_1(\xi, \eta)\,\delta(x_1 - \xi, y_1 - \eta)\,d\xi\,d\eta$$

elementární funkce

výstup

$$g_2(x_2, y_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} g_1(\xi, \eta)\,h(x_2, y_2; \xi, \eta)\,d\xi\,d\eta$$

impulsní odezva

$$h(x_2, y_2; \xi, \eta) = \mathcal{S}\{\delta(x_1 - \xi, y_1 - \eta)\}$$

prostorově invariantní lineární systémy

$$h(x_2, y_2; \xi, \eta) = h(x_2 - \xi, y_2 - \eta)$$ (izoplanatický systém)

$$g_2 = g_1 * h$$ (konvoluce)

$$G_2(f_x, f_y) = H(f_x, f_y)\,G_1(f_x, f_y)$$

přenosová funkce

$$H(f_x, f_y) = \mathcal{F}\{h(x, y)\}$$

- komplexní exponenciely jsou vlastní funkce lineárních invariantních systémů *vzorkovací teorém*

frekvenčně omezený signál, t.j. $G \neq 0$ v oblasti $2B_x \times 2B_y$

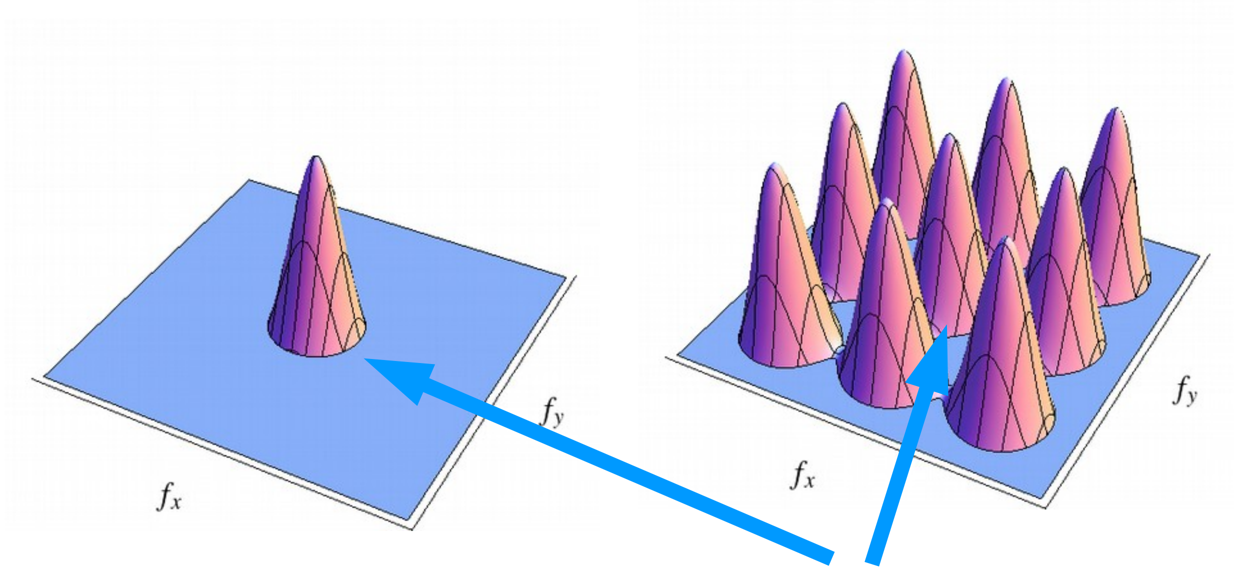
vzorkování

$$g_s(x, y) = \mathrm{comb}(x/X)\,\mathrm{comb}(y/Y)\,g(x, y)$$

spektrum

$$G_S(f_x, f_y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} G(f_x - n/X, f_y - m/Y)$$

posunutá původní spektra



obnovení signálu: propuštění komponenty $n = 0, m = 0$

$$X \leq \frac{1}{2B_x}, \quad Y \leq \frac{1}{2B_y}$$ (nechci aliasing)

$$G(f_x, f_y) = G_s(f_x, f_y)\,\mathrm{rect}\left(\frac{f_x}{2B_x}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{f_y}{2B_y}\right)$$

vzorkovací teorém (Whittaker-Shannon)

$$g(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{n}{2B_x}, \frac{m}{2B_y}\right) \times \mathrm{sinc}\left[2B_x\left(x - \frac{n}{2B_x}\right)\right]\mathrm{sinc}\left[2B_y\left(y - \frac{m}{2B_y}\right)\right]$$