

OPT/OZI

L02

Základy skalární teorie difrakce

difrakce (Sommerfeld 1954):

každá odchyłka od přímočarého šíření světla mimo lom a odraz

Maxwellovy rovnice

$$\text{rot } \vec{\mathcal{E}} = -\mu \frac{\partial \vec{\mathcal{H}}}{\partial t}, \quad \text{div}(\epsilon \vec{\mathcal{E}}) = 0$$

$$\text{rot } \vec{\mathcal{H}} = \epsilon \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t}, \quad \text{div}(\mu \vec{\mathcal{H}}) = 0$$

prostředí: lineární, izotropní, homogenní, nedisperzní, nemagnetické

vlnová rovnice:

$$\text{rot rot } \vec{\mathcal{E}} = \text{grad div } \vec{\mathcal{E}} - \nabla^2 \vec{\mathcal{E}}$$

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{E}} - \mu_0 \epsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial t^2} = 0, \quad \mu_0 \epsilon_0 = 1/v^2$$

složky $\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y, \mathcal{E}_z$ jsou nezávislé

skalární vlnová rovnice:

$$\nabla^2 u(\vec{r}, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0$$

platnost skalární teorie

- apertura způsobující difrakci je velká ve srovnání s λ
- difrakční obrazec se nepozoruje příliš blízko za objektem

Helmholtzova rovnice

monochromatická vlna

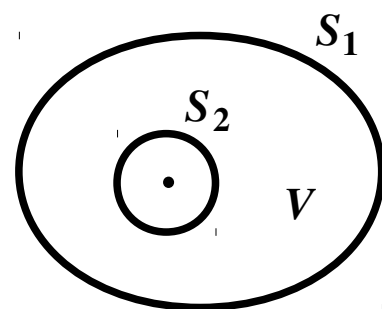
$$u(\vec{r}, t) = U(\vec{r}) \exp(-i \underbrace{2\pi \nu t}_{\omega})$$

z vlnové rovnice plyne

$$(\nabla^2 + k^2)U = 0, \quad k = \omega/\nu = 2\pi/\lambda$$

Holografický princip (Kirchhoff, Sommerfeld)

- řešení Helmholtzovy rovnice
- pole uvnitř oblasti je určeno chováním na hranici
- vede na Kirchhoffův difrakční integrál



Šíření prostorového (úhlového) spektra

pole v transverzální rovině

$$U(x, y; z) = \iint_{-\infty}^{\infty} G(f_x, f_y; z) \exp[i2\pi(f_x x + f_y y)] df_x df_y$$

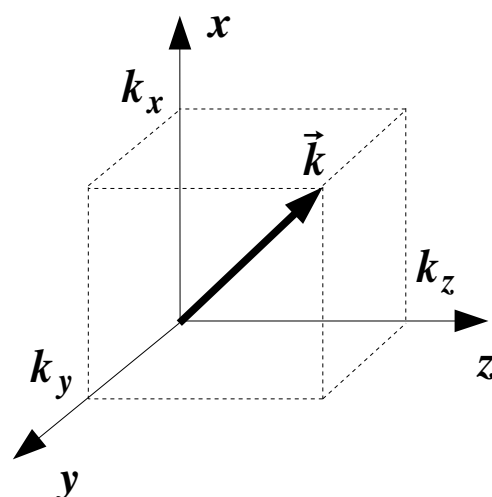
prostorové spektrum

rovinná vlna

$$U(x, y, z) = \exp(ik_x x + ik_y y + ik_z z)$$

vlnové číslo

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{2\pi}{\lambda}$$



elementární funkce

$$\exp[i2\pi(f_x x + f_y y)] \longrightarrow \text{rovinná vlna}$$

$$k_x = 2\pi f_x, \quad k_y = 2\pi f_y$$

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} = k \sqrt{1 - (\lambda f_x)^2 - (\lambda f_y)^2}$$

Šíření prostorového spektra

- rozklad do rovinných vln (inverzní FT)
- šíření rovinných vln - triviální

rozklad vstupu do rovinných vln

$$U(x, y; 0) = \iint_{-\infty}^{\infty} G(f_x, f_y; 0) \exp(ik_x x + ik_y y) df_x df_y$$

Šíření rovinných vln

$$U(x, y; z) = \iint_{-\infty}^{\infty} G(f_x, f_y; 0) \exp(ik_x x + ik_y y + ik_z z) df_x df_y$$

inverzní FT výstupu

$$U(x, y; z) = \iint_{-\infty}^{\infty} G(f_x, f_y; z) \exp(ik_x x + ik_y y) df_x df_y$$

prostorové spektrum se při šíření filtruje

$$G(f_x, f_y; z) = \underbrace{\exp(ik_z z)}_{H(f_x, f_y)} G(f_x, f_y; 0)$$

výstupní spektrum přenosová funkce vstupní spektrum

Šíření jako lineární systém

přenosová funkce volného prostoru

$$H(f_x, f_y) = \begin{cases} e^{i2\pi\frac{z}{\lambda}\sqrt{1-(\lambda f_x)^2-(\lambda f_y)^2}} & \sqrt{f_x^2 + f_y^2} < 1/\lambda \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

ořezání
evanescentních vln

- šíření je lineární invariantní systém
- šíření je lineární disperzní prostorový filtr s konečnou šířkou přenosového pásma

Fresnelova (paraxiální) aproximace

pro malé úhly $|\lambda f_x| \ll 1, |\lambda f_y| \ll 1$

$$\sqrt{1-(\lambda f_x)^2-(\lambda f_y)^2} \approx 1 - \frac{(\lambda f_x)^2}{2} - \frac{(\lambda f_y)^2}{2}$$

přenosová funkce pro Fresnelovu difrakci

$$H(f_x, f_y) = e^{ikz} \exp\left[-i\pi\lambda z(f_x^2 + f_y^2)\right]$$

impulsní odezva

$$h(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{H(f_x, f_y)\} = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \exp\left[\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)\right]$$

Fresnelův integrál

$$U(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) h(x-\xi, y-\eta) d\xi d\eta$$

ekvivalentní zápis jako škálovaná FT

$$U(x, y) = A(x, y) \mathcal{F} \left\{ U(\xi, \eta) e^{i \frac{k}{2z} (\xi^2 + \eta^2)} \right\}_{f_x = \frac{x}{\lambda z}, f_y = \frac{y}{\lambda z}}$$

$$A(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i \frac{k}{2z} (x^2 + y^2)}$$

Fraunhoferova aproximace

daleké pole

$$z \gg \frac{k(\xi^2 + \eta^2)_{\max}}{2}$$

$$U(x, y) = A(x, y) \mathcal{F} \{ U(\xi, \eta) \}_{f_x = \frac{x}{\lambda z}, f_y = \frac{y}{\lambda z}}$$

tj. dostáváme škálovanou FT vstupní amplitudy

- platnost Fraunhoferovy aproximace pouze v dalekém poli
- Fraunhoferova difrakce nemá přenosovou funkci

Fraunhoferova difrakce: příklady

- obdélníková apertura (osvětlení kolmou rovinnou vlnou)

amplituda za štěrbinou (1D)

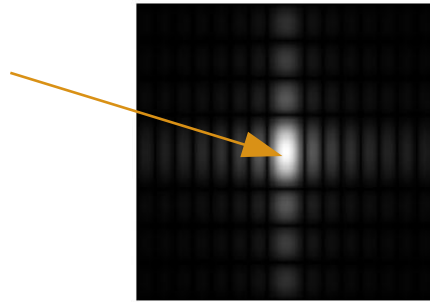
$$U(\xi) = \text{rect} \left(\frac{\xi}{2w_x} \right)$$

výsledná intenzita

$$I(x) = |U(x)|^2 \propto \text{sinc}^2 \left(\frac{2w_x x}{\lambda z} \right)$$

šířka centrální části

$$\Delta x = \frac{\lambda z}{w_x}$$



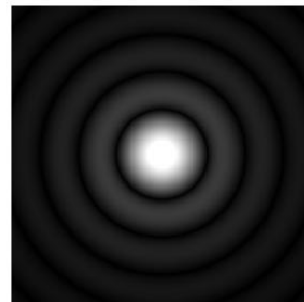
difrakční obrazec (2D)

- kruhová apertura

$$U(\mathbf{q}) = \text{circ}(q/w)$$

$$U(\mathbf{r}) \propto \mathcal{B}\{U(\mathbf{q})\} \Big|_{\rho = r/(\lambda z)}$$

$$I(\mathbf{r}) \propto \left[\frac{J_1(k w r/z)}{k w r/z} \right]^2$$



průměr centrální části $d = 1.22 \frac{\lambda z}{w}$

- amplitudová mřížka (1D)

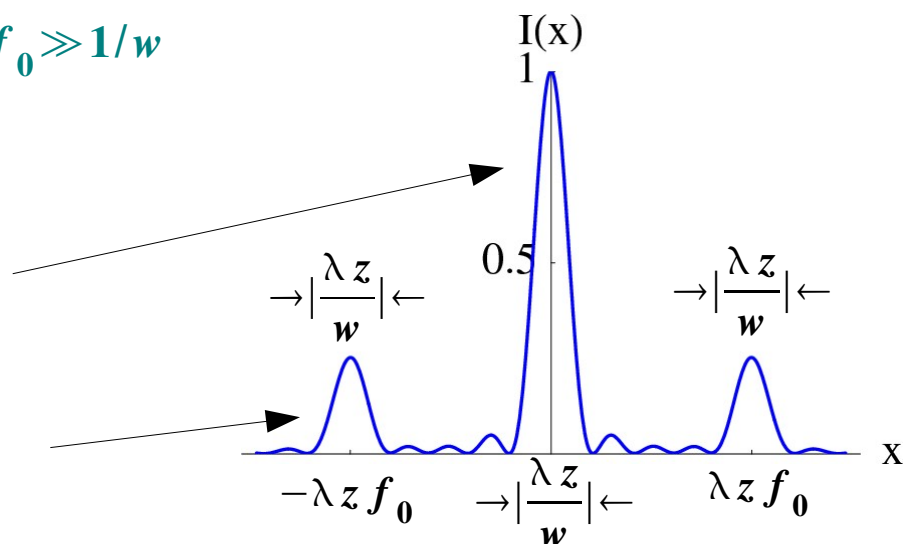
$$U(\xi) = \left[\frac{1}{2} + \frac{m}{2} \cos(2\pi f_0 \xi) \right] \text{rect}\left(\frac{\xi}{2w}\right)$$

$$U(x) \propto \text{sinc}\left(\frac{2w}{\lambda z} x\right) + \frac{m}{2} \text{sinc}\left[\frac{2w}{\lambda z} (x + f_0 \lambda z)\right] + \frac{m}{2} \text{sinc}\left[\frac{2w}{\lambda z} (x - f_0 \lambda z)\right]$$

malý překryv pokud $f_0 \gg 1/w$

difrakční účinnosti

$$\begin{aligned} \eta_0 &= 1/4 \\ \eta_1 &= m^2/16 \\ \eta_{-1} &= m^2/16 \end{aligned}$$



Fresnelova difrakce: příklady

- čtvercová apertura

$$U(x) \propto \iint_{-w}^w \exp\left\{i \frac{\pi}{\lambda z} (x - \xi)^2\right\} d\xi$$

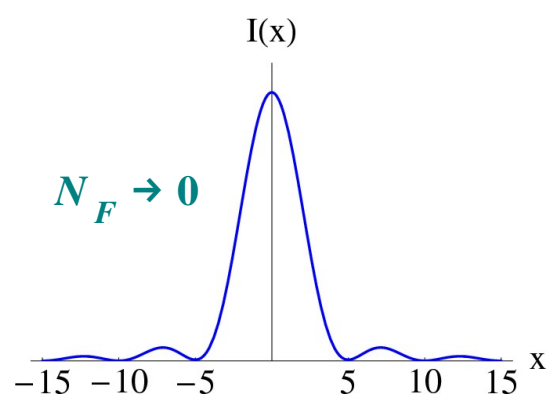
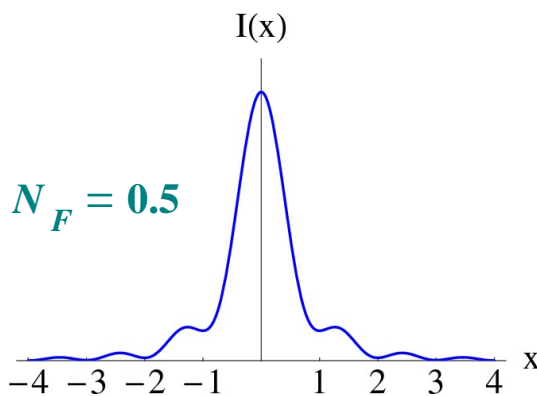
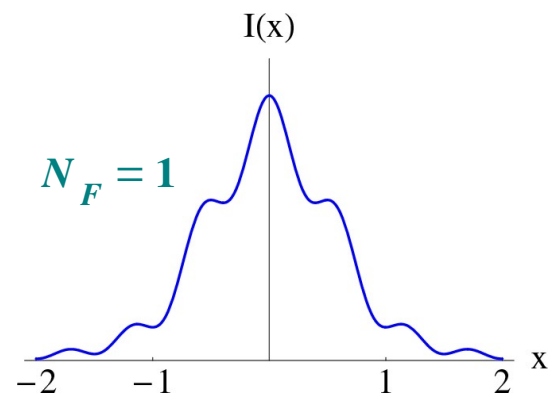
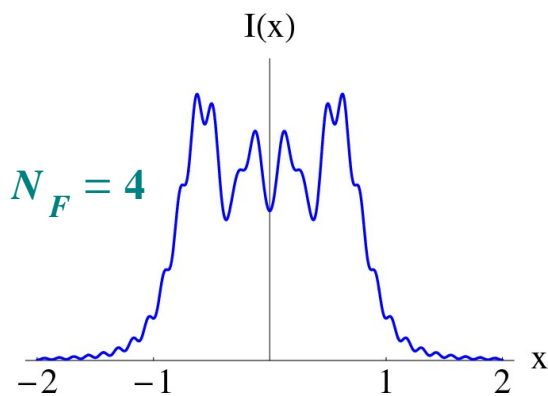
přechod mezi blízkým a dalekým polem

Fresnelovo číslo $N_F = w^2 / (\lambda z)$

$N_F \rightarrow \infty$ předpověď geometrické optiky

$N_F \approx 1$ blízké pole, Fresnelova difrakce

$N_F \rightarrow 0$ daleké pole, Fraunhoferova difrakce



- *neomezená amplitudová mřížka – Talbotův obraz*

$$U(\xi) = \frac{1}{2} + \frac{m}{2} \cos(2\pi\xi/L)$$

přenosová funkce

$$H(f_x, f_y) = \exp[-i\pi\lambda z(f_x^2 + f_y^2)]$$

výsledné spektrum

$$G(f_x, f_y) = \frac{1}{2}\delta(f_x, f_y) + \frac{m}{4}e^{-i\frac{\pi\lambda z}{L^2}}\delta(f_x - \frac{1}{L}, f_y) + \frac{m}{4}e^{-i\frac{\pi\lambda z}{L^2}}\delta(f_x + \frac{1}{L}, f_y)$$

$$U(x, y) = \frac{1}{2} + \frac{m}{2}e^{-i\frac{\pi\lambda z}{L^2}}\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

Talbotův obraz

$$\frac{\pi\lambda z}{L^2} = 2n\pi \quad \Rightarrow \quad U(x, y) = \frac{1}{2} + \frac{m}{2}\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

obrácený kontrast

$$\frac{\pi\lambda z}{L^2} = (2n+1)\pi \quad \Rightarrow \quad U(x, y) = \frac{1}{2} - \frac{m}{2}\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

totéž platí pro obecný periodický objekt s periodou L