OPT/OZI

L03

Vlnová analýza koherentních optických systémů

tenká čočka jako fázová transformace

tenká čočka: šíření paprsků uvnitř čočky lze zanedbat

transformace čočkou

pole před čočkou

$$U_l'(x,y) = t_l(x,y)\,U_l(x,y)$$

pole za čočkou

amplitudová propustnost čočky

osvětlení rovinnou vlnou $U_l(x,y) \propto 1$

sférická vlna konverguje do ohniska

$$U_l'(x,y) = t_l(x,y) \propto \frac{e^{-ikr}}{r}, \qquad r = \sqrt{f^2 + x^2 + y^2}$$

paraxiální aproximace

$$t_l(x,y) \propto \exp\left[-i\frac{k}{2f}(x^2+y^2)\right]$$

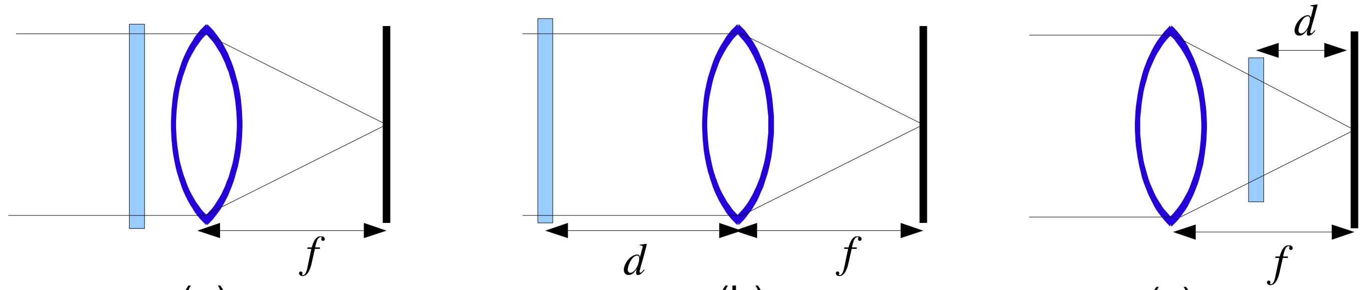
fourierovské vlastnosti čočky

základní konfigurace předmětu (vstupního signálu) a čočky

(a) předmět umístěn u čočky

(b) předmět umístěn před čočkou

(c) předmět umístěn za čočkou



(a) (b) (c)

(a) předmět umístěn na čočce

$$U_l'(x,y) = \underbrace{U_o(x,y)}_{U_l} \exp\left[-i\frac{k}{2f}(x^2+y^2)\right]$$

Fresnelův integrál (bez konstantního členu)

$$U(u,v) = \frac{e^{i\frac{k}{2z}(u^2+v^2)}}{i\lambda z}\iint_{-\infty}^{\infty} U_l'(x,y)\, e^{i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)}\, e^{-i\frac{2\pi}{\lambda z}(xu+yv)}\, dx\, dy$$

ve fokální rovině $z = f$

$$U_f(u,v) = \frac{e^{i\frac{k}{2f}(u^2+v^2)}}{i\lambda f}\underbrace{\iint_{-\infty}^{\infty} U_o(x,y)\, e^{-i\frac{2\pi}{\lambda f}(xu+yv)}\, dx\, dy}_{F_o\left(\frac{u}{\lambda f},\frac{v}{\lambda f}\right)}$$

tj. škálovaná FT + kvadratická fáze

(b) předmět umístěn před čočkou

$$F_o(f_x, f_y) = \mathcal{F}\{U_o\}, \quad F_l(f_x, f_y) = \mathcal{F}\{U_l\}$$

spektrum předmětu

spektrum na čočce

šíření objekt $\longrightarrow$ čočka

$$F_l(f_x, f_y) = F_o(f_x, f_y)\exp\left[-i\pi\lambda d(f_x^2+f_y^2)\right]$$

přenosová funkce volného prostoru

čočka + šíření do fokální roviny

$$U_f(u,v) = \frac{e^{i\frac{k}{2f}(u^2+v^2)}}{i\lambda f} F_l\left(\frac{u}{\lambda f}, \frac{v}{\lambda f}\right)$$

výsledné pole

$$U_f(u,v) = \frac{e^{i\frac{k}{2f}\left(1-\frac{d}{f}\right)(u^2+v^2)}}{i\lambda f} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} U_o(\xi,\eta)\, e^{-i\frac{2\pi}{\lambda f}(\xi u+\eta v)}\, d\xi\, d\eta$$

čistá škálovaná Fourierova transformace pokud $d = f$

(c) předmět umístěn za čočkou: osvětlení konvergentní kulovou vlnou

amplituda za předmětem

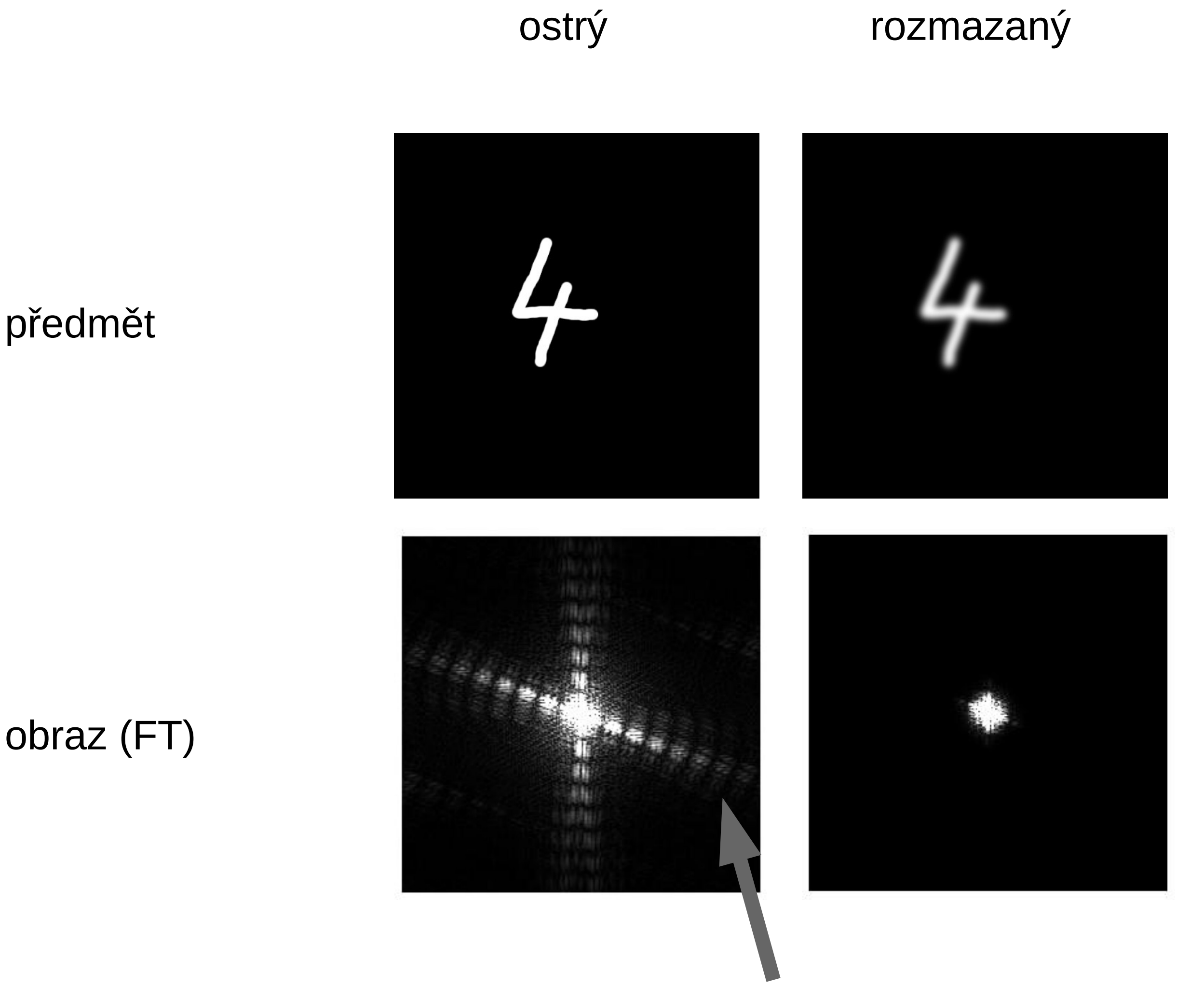
$$\exp\left[-i\frac{k}{2d}(\xi^2+\eta^2)\right] U_o(\xi,\eta)$$

zruší kvadratický člen pod Fresnelovým integrálem

parametr d určuje škálování Fourierovy transformace

$$f_x = \frac{u}{\lambda d}, \quad f_y = \frac{v}{\lambda d}$$

příklad Fourierovy transformace



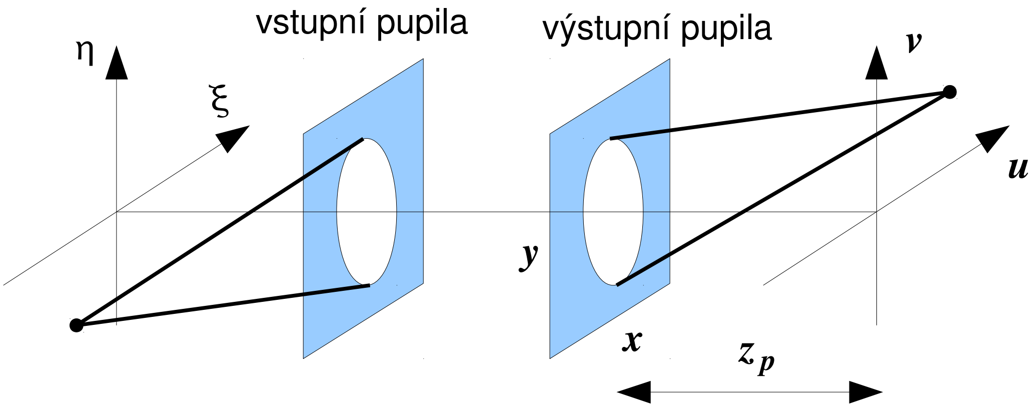
vysoké frekvence způsobené
výskytem ostrých hran

zobecnění předchozí analýzy:

- Fourierova transformace se vždy objeví v rovině, kde vznikne obraz bodového zdroje

- kvadratický fázový člen před Fourierovou transformací odpovídá fázi generované ve fourierovské rovině bodovým zdrojem ležícím na optické ose v předmětové rovině

Optické zobrazení v koherentním světle



hledám impulsní odezvu tj. výstupní amplitudu pro bodový předmět

difrakčně limitovaný systém

- vstupní pupila: divergentní sférická vlna z bodu (ξ, η)
- výstupní pupila: sférická vlna konverguje do bodu $(u = m\xi, v = m\eta)$
- prostorová invariance (přibližně)

zvětšení

$$U_i(u,v) = \iint \tilde{h}(u - m\xi, v - m\eta) U_o(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta$$

$$= \frac{1}{|m|}\iint \tilde{h}(u-\xi, v-\eta) \underbrace{\frac{1}{|m|} U_o\left(\frac{\xi}{m}, \frac{\eta}{m}\right)}_{U_g(\xi,\eta)} d\xi\, d\eta$$

geom. obraz

pupila je osvětlena konverg. sférickou vlnou tj. případ (c) výše

$$\tilde{h}(u,v) \propto \mathcal{F}\{P(x,y)\}_{f_x = \frac{u}{\lambda z_p},\, f_y = \frac{v}{\lambda z_p}}$$

tj.

$$\tilde{h}(u,v) = \frac{|m|}{\lambda^2 z_p^2}\iint P(x,y)\, e^{-i\frac{2\pi}{\lambda z_p}(ux+vy)}\, dx\, dy$$

$$= |m| \underbrace{\iint P(\lambda z_p x, \lambda z_p y)\, e^{-i 2\pi (ux+vy)}\, dx\, dy}_{h(u,v)}$$

interpretace

$$U_i(u,v) = h(u,v) * U_g(u,v)$$

obraz dle vlnové optiky je konvoluce ideálního (geometrického) obrazu a škálované FT (tj Fraunhoferova obrazu) pupily

přechod ke geometrické optice

$$\lambda \to 0 \quad \Rightarrow \quad h(u,v) \to \delta(u,v) \quad \Rightarrow \quad U_i(u,v) \to U_g(u,v)$$

analýza složitých optických sytémů – operátory

operátory popisující jednoduché optické transformace a pravidla pro jejich manipulaci

- aplikace kvadratické fázové modulace (např. čočka)

$$\mathcal{Q}[c]\{U(x)\} = e^{i\frac{k}{2}cx^2} U(x), \quad \mathcal{Q}^{-1}[c] = \mathcal{Q}[-c]$$

- škálování

$$\mathcal{V}[b]\{U(x)\} = \sqrt{|b|}\,U(bx), \quad \mathcal{V}^{-1}[b] = \mathcal{V}[1/b]$$

- Fourierova transformace

$$\mathcal{F}\{U(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} U(x) e^{-i2\pi f x} dx, \quad \mathcal{F}^{-1} = \dots$$

- volné šíření

$$\mathcal{R}[d]\{U(x)\} = \frac{1}{\sqrt{i\lambda d}} \int_{-\infty}^{\infty} U(\xi) e^{i\frac{k}{2d}(x-\xi)^2} d\xi, \quad \mathcal{R}^{-1}[d] = \mathcal{R}[-d]$$

vlastnosti: $\mathcal{V}[t_1]\mathcal{V}[t_2] = \mathcal{V}[t_2 t_1], \quad \mathcal{F}\,\mathcal{V}[t] = \mathcal{V}[1/t]\mathcal{F}$

$$\mathcal{Q}[c_2]\mathcal{Q}[c_1] = \mathcal{Q}[c_2+c_1], \quad \mathcal{F}\,\mathcal{F} = \mathcal{V}[-1]$$

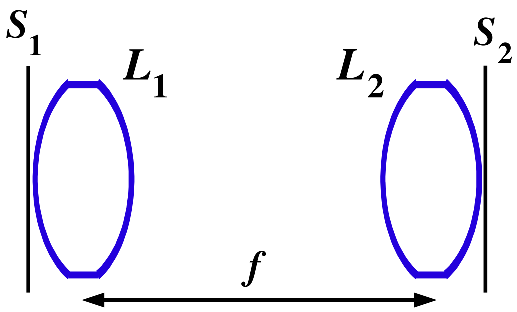
$$\mathcal{R}[d] = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{Q}[-\lambda^2 d]\mathcal{F}, \quad \mathcal{Q}[c]\mathcal{V}[t] = \mathcal{V}[t]\mathcal{Q}[c/t^2]$$

přenosová funkce

$$\mathcal{R}[d] = \mathcal{Q}\left[\frac{1}{d}\right]\mathcal{V}\left[\frac{1}{\lambda d}\right]\mathcal{F}\,\mathcal{Q}\left[\frac{1}{d}\right]$$ (Fresnelův integrál)

$$\mathcal{V}\left[\frac{1}{\lambda f}\right]\mathcal{F} = \mathcal{R}[f]\mathcal{Q}\left[-\frac{1}{f}\right]\mathcal{R}[f]$$ (FT čočkou)

příklad použití



systém: přenos z S_1 do S_2

$$\mathcal{S} = \mathcal{Q}\left[-\frac{1}{f}\right]\mathcal{R}[f]\mathcal{Q}\left[-\frac{1}{f}\right]$$

$$= \mathcal{Q}\left[-\frac{1}{f}\right]\mathcal{Q}\left[\frac{1}{f}\right]\mathcal{V}\left[\frac{1}{\lambda f}\right]\mathcal{F}\,\mathcal{Q}\left[\frac{1}{f}\right]\mathcal{Q}\left[-\frac{1}{f}\right]$$

$$= \mathcal{V}\left[\frac{1}{\lambda f}\right]\mathcal{F}$$

tj. systém provede čistou škálovanou FT