

OPT/OZI

L09

Úvod do teorie odhadu

odhad parametru

data ... \mathbf{D}

skutečná (true) hodnota parametru ... \mathbf{X}

Bayesova věta

$$P(\mathbf{X}|\mathbf{D}) = \frac{P(\mathbf{D}|\mathbf{X})P(\mathbf{X})}{P(\mathbf{D})}$$

věrohodnost (likelihood) $\mathcal{L}_{\mathbf{D}}(\theta)$

priorní rozdělení

posteriorní rozdělení

bodový odhad ... $\hat{\mathbf{X}}(\mathbf{D})$

odhad může ale nemusí být

- efektivní ... tj. nejlepší možný
- nevychýlený (unbiased)... $\langle \hat{\mathbf{X}}(\mathbf{D}) \rangle = \mathbf{X}$
- konzistentní ... konverguje k \mathbf{X} s rostoucí velikostí dat
- lineární

např. estimátor variance

$$\hat{V} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (\mathbf{D}_k - \hat{d})^2, \quad \hat{d} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{D}_k$$

je konzistentní ale vychýlený

střední hodnota souboru

optimální strategie

risk ... $R_D(\hat{X}) = \int C(\hat{X}, X) P(X|D) dX$

penalizace

optimalizace odhadu

$$\hat{X}_{\text{opt}}(D) = \arg \left\{ \min_{\hat{X}} R_D(\hat{X}) \right\}$$

ML odhad (maximum likelihood)

$$C(\hat{X}, X) = -\delta(\hat{X} - X) \rightarrow \hat{X}_{\text{opt}}(D) = \max_X P(X|D) \approx \mathcal{L}_D(X)$$

- asymptoticky efektivní a konzistentní
- lze zahrnout vazby
- často vede na konvexní úlohy

např. lokalizace gaussovského obrazu

detekce hledaný centroid

$$\mathcal{L} = P(\{x_1, x_2, \dots\} | x_c) \propto \prod_{j=1}^N e^{-\frac{(x_j - x_c)^2}{2\sigma^2}}$$

šířka PSF

$$\frac{d \log \mathcal{L}}{d x_c} = 0$$



$$\hat{x}_c = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j$$

tj střední hodnota vzorků

LIN problémy

lineární problém

$$\langle D_j \rangle = \sum \Pi_{jk} X_k$$

parametry signálu

měření

střední data

LIN estimátor

$$\hat{X} = \Pi^{-} D$$

data

pseudoinverze

nerespektuje vazby (normalizace, pozitivita ...)

EM algoritmus

uvažujeme

$$X_k \geq 0 \quad \text{např. pro intenzity}$$

$$\sum_k X_k = 1, \quad \sum_j D_j = 1 \quad \text{normalizace}$$

maximalizace

$$\log \mathcal{L} \propto \sum_j D_j \log \langle D_j \rangle$$

konvexní funkce

vede na algoritmus vhodný k iteraci

$$X_k R_k = X_k, \quad R_k = \sum_j \frac{D_j}{\langle D_j \rangle} \Pi_{jk}$$

využití pro tomografii, TMD detekci, měření intenzity v blízkém poli ...

efektivní odhad

Fisherova informace

$$F = \left\langle \left(\frac{d}{dX} \log \mathcal{L} \right)^2 \right\rangle \leftarrow \text{středování přes data}$$

nevychýlený odhad

$$\langle \hat{X} - X \rangle = 0$$

Cramérova-Raova dolní mez (CRLB)

$$(\Delta X)^2 \geq \frac{1}{F}$$

Fisherova matice (multiparametrický odhad)

$$F_{kl} = \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial X_k} \log \mathcal{L} \right) \left(\frac{\partial}{\partial X_l} \log \mathcal{L} \right) \right\rangle$$

kovariance odhadu

$$\Gamma_{kl} = \langle \Delta X_k \Delta X_l \rangle$$

CRLB pro multiparametrický odhad

$$\Gamma \geq F^{-1}$$

tzn. pro variance platí limity

$$(\Delta X_k)^2 = \Gamma_{kk} \geq (F^{-1})_{kk}$$

pro normálně rozdělená data

$$\mathcal{L} \propto \prod_j e^{-\frac{(n_j - \langle n_j \rangle)^2}{2\sigma_j^2}} \rightarrow F_{kl} = \sum_j \frac{1}{\sigma_j^2} \frac{\partial \langle n_j \rangle}{\partial X_k} \frac{\partial \langle n_j \rangle}{\partial X_l}$$

např. lokalizace gaussovského obrazu (astrometrie, PALM)

gaussovská PSF

- data = pozice detekcí na CCD (EMCCD ...) kameře

$$n_j \rightarrow x_j$$

- normalizovaná PSF = hustota pravděpodobnosti

$$\sigma_j \rightarrow \sigma \quad \text{vzorky jsou ze stejného rozdělení}$$

$$\langle n_j \rangle \rightarrow \langle x_j \rangle = x_c \quad \text{střední hodnota = centroid PSF}$$

$$\frac{d \langle n_j \rangle}{d x_c} = 1$$

Fisherova informace

$$F = \sum_j \frac{1}{\sigma_j^2} \left(\frac{d \langle n_j \rangle}{d x_c} \right)^2 = \sum_j \frac{1}{\sigma^2} = \frac{N}{\sigma^2}$$

CRLB

$$(\Delta x_c)^2 \geq \frac{\sigma^2}{N}$$

variance PSF

počet detekovaných fotonů

- v principu je možná libovolně přesná lokalizace
- chyba určení centroidu $\propto N^{-1/2}$