

OPT/OZI

L10

# Aplikace III: Superrozlišení

rozlišení rozlehlého předmětu

standardní rozlišovací limit lze překonat digitálním zpracováním dat

- 2D FT prostorově omezené funkce je analytická funkce v rovině  $(f_x, f_y)$
- znalost analytické funkce na konečné oblasti umožňuje jednoznačně nalézt celou funkci (analytické prodloužení)

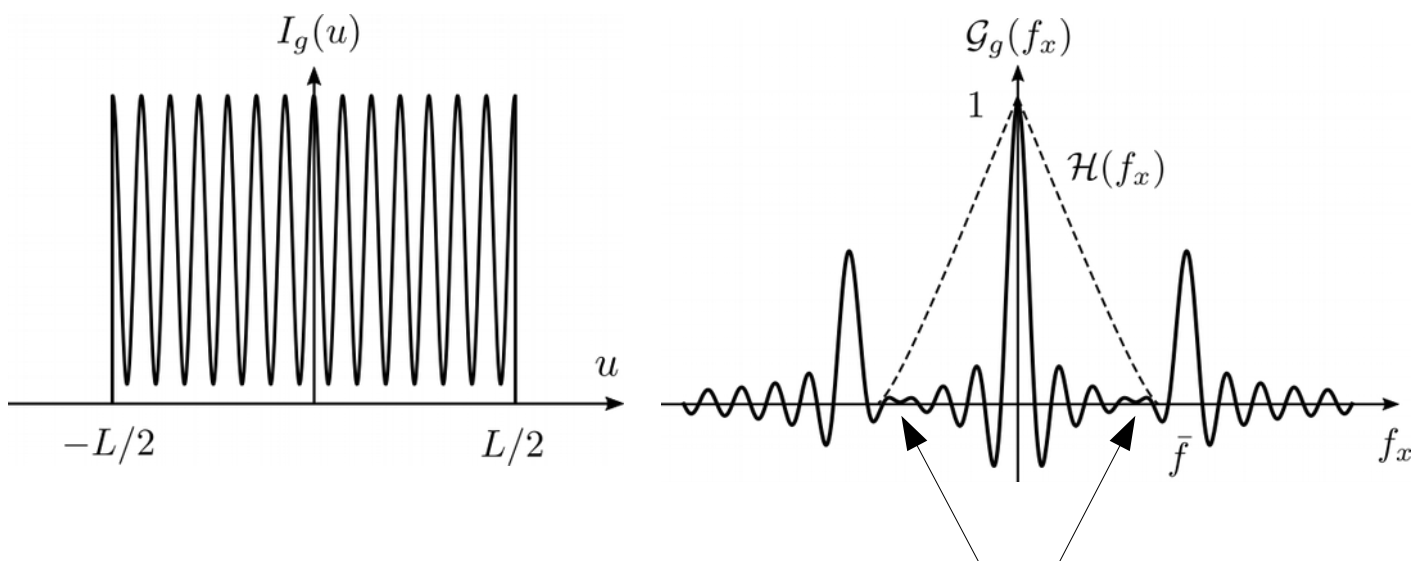
příklad:

geometrický obraz

$$I_g(u) = [1 + m \cos(2\pi \bar{f} u)] \text{rect}(u/L)$$

intenzitní spektrum geometrického obrazu

$$\mathcal{G}_g(f_x) = \text{sinc}(L f_x) + \frac{m}{2} \text{sinc}[L(f_x - \bar{f})] + \frac{m}{2} \text{sinc}[L(f_x + \bar{f})]$$



oscilace pronikají do přenášené oblasti spektra

exaktní diskrétní reprezentace spektra (vzorkovací teorém)

$$\mathcal{G}_g(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{G}_g\left(\frac{n}{L}\right) \text{sinc}\left[L\left(f - \frac{n}{L}\right)\right]$$

znám pouze pro  $|n/L| < f_c$

měříme libovolných  $2N + 1$  hodnot  $\mathcal{G}_g(f_k)$  v přenášeném pásmu

$$\underbrace{\mathcal{G}_g(f_k)}_{d_k} = \sum_{n=-N}^N \underbrace{\mathcal{G}_g\left(\frac{n}{L}\right)}_{g_n} \underbrace{\text{sinc}\left[L\left(f_k - \frac{n}{L}\right)\right]}_{C_{kn}}$$

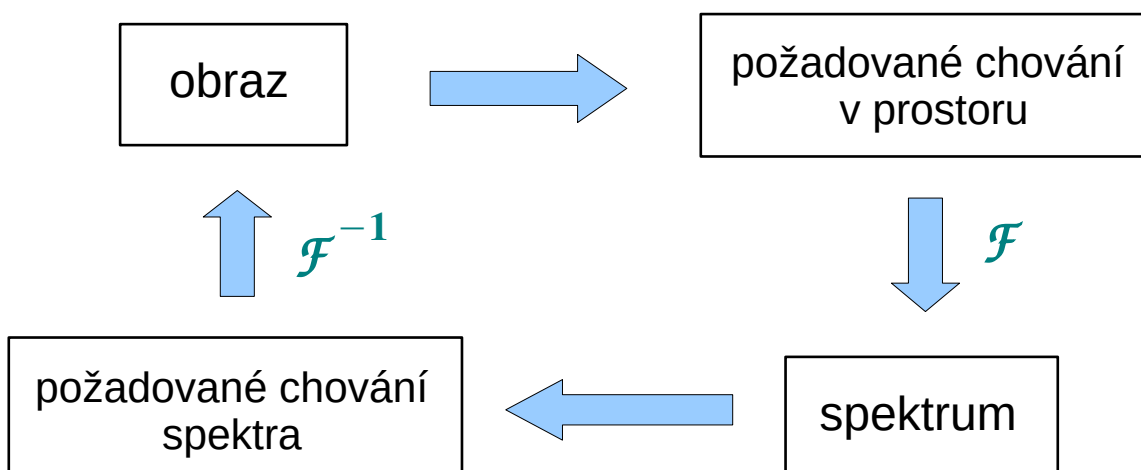
$$\vec{d} = \mathbf{C} \vec{g}$$

rekonstrukce

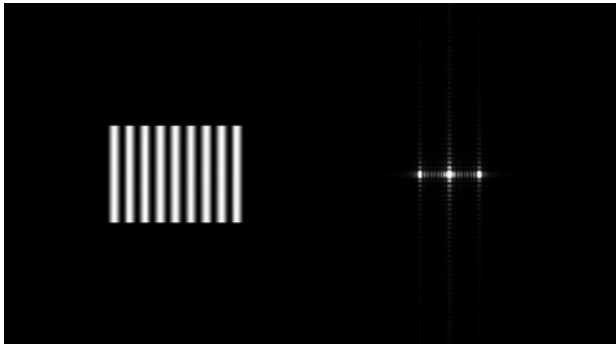
- LIN problém:  $2N + 1$  rovnic pro neznámé  $\mathcal{G}_g(n/L)$
- regularizace v přítomnosti detekčních chyb/šumu

iterační metoda

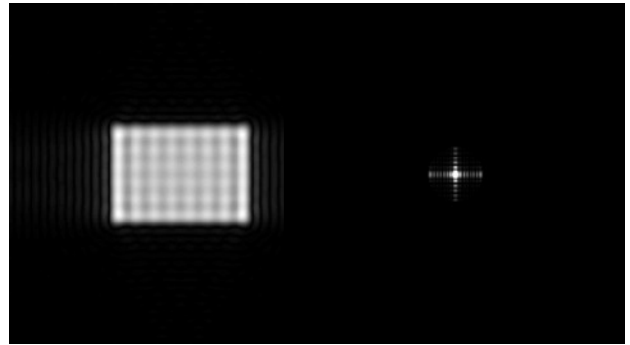
- iteruje mezi prostorovou a spektrální oblastí
- požadavek na chování v prostoru: omezená nezáporná fce
- požadavek na spektrum: změřené spektrum pro  $-f_c < f < f_c$



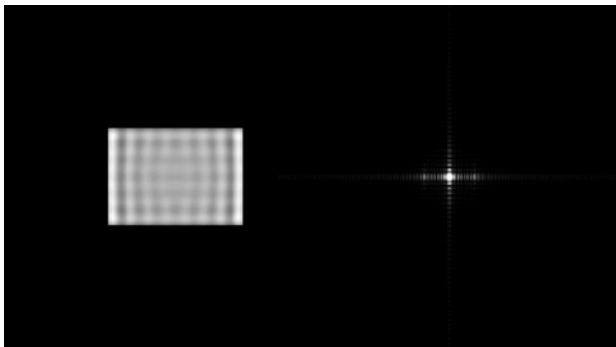
příklad: rekonstrukce mřížky



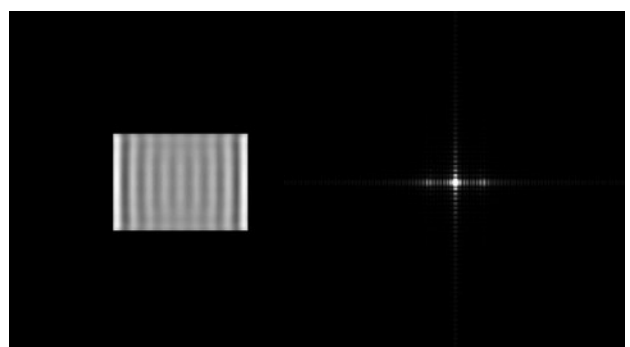
skutečný objekt/spektrum



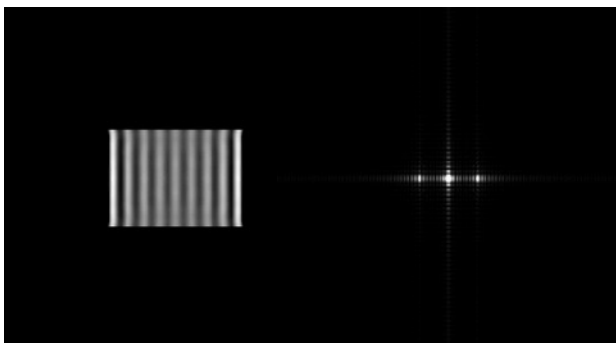
obraz/spektrum obrazu



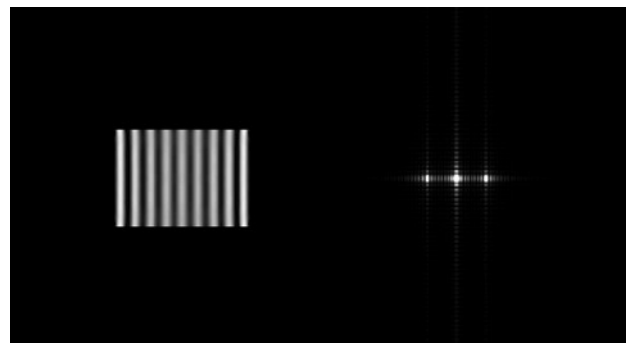
rekonstrukce – 2 iterace



rekonstrukce – 10 iterací



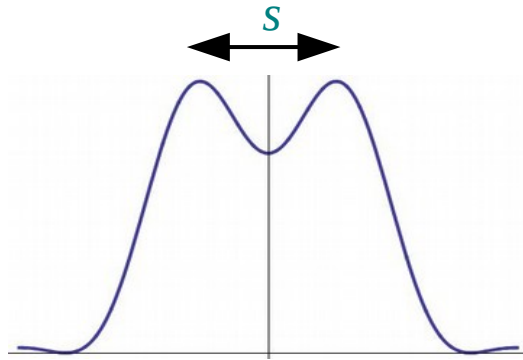
rekonstrukce – 100 iterací



finální rekonstrukce

## rozlišení bodových předmětů

dva nekoherentní bodové zdroje



intenzity se sčítají

$$p(x, s) = I(x - s/2)/2 + I(x + s/2)/2$$

posunutě PSF

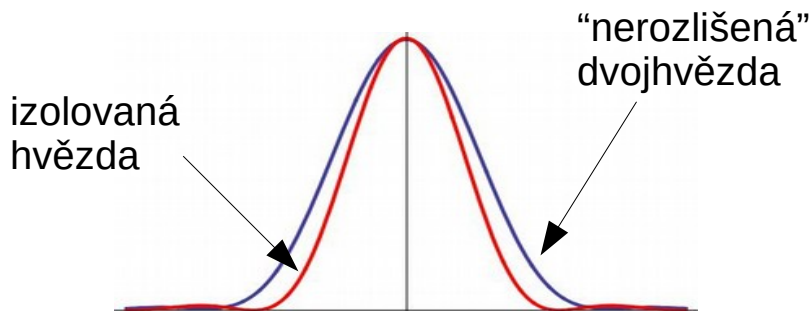
standardní rozlišovací limit (Rayleigh)

$$\delta \propto \lambda/D [\text{rad}]$$

- odpovídá vizuálnímu hodnocení
- lze překonat digitálním zpracováním obrazu

oblast superrozlišení

$$s \ll \delta$$



výsledný intenzitní profil  $p(x, s)$  se vždy liší od PSF  $p(x, 0) = I(x)$

- neexistuje fundamentální rozlišovací limit
- praktický limit je určen detekčním šumem

## superrozlišení z pohledu teorie odhadu

odhad separace  $s$

pravděpodobnost detekce ...  $p(x)$ ,  $\int p(x) dx = 1$

poissonovský model

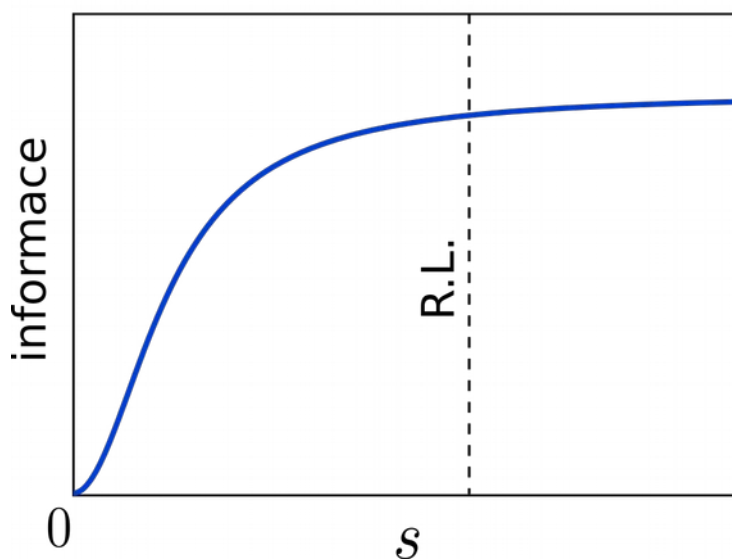
Fisherova informace pro jednu detekci

$$F = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p'(x, s)^2}{p(x, s)} dx, \quad p'(x, s) = \frac{\partial p(x, s)}{\partial s}$$

CRLB

$$(\Delta s)^2 \geq \frac{1}{NF}$$

počet detekcí



oblast standardního rozlišení

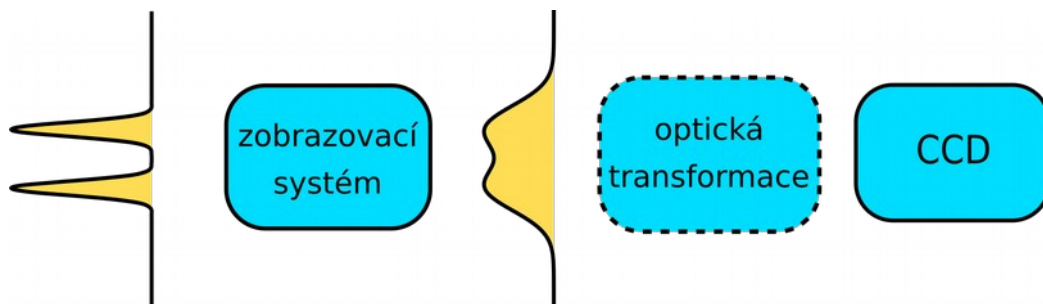
- informace téměř nezávisí na separaci
- rozlišení ~ lokalizace (snadné)

oblast superrozlišení

- informace rychle klesá se separací
- rostou nároky na zdroje a kvalitu signálu (obtížné)

## fundamenální meze rozlišení

intenzitní detekce nemusí být optimální → optimalizace měření



amplitudová PSF

generátor transformace

$$|\psi_{\pm}\rangle = e^{\pm iGs/2}|\psi\rangle$$

signál

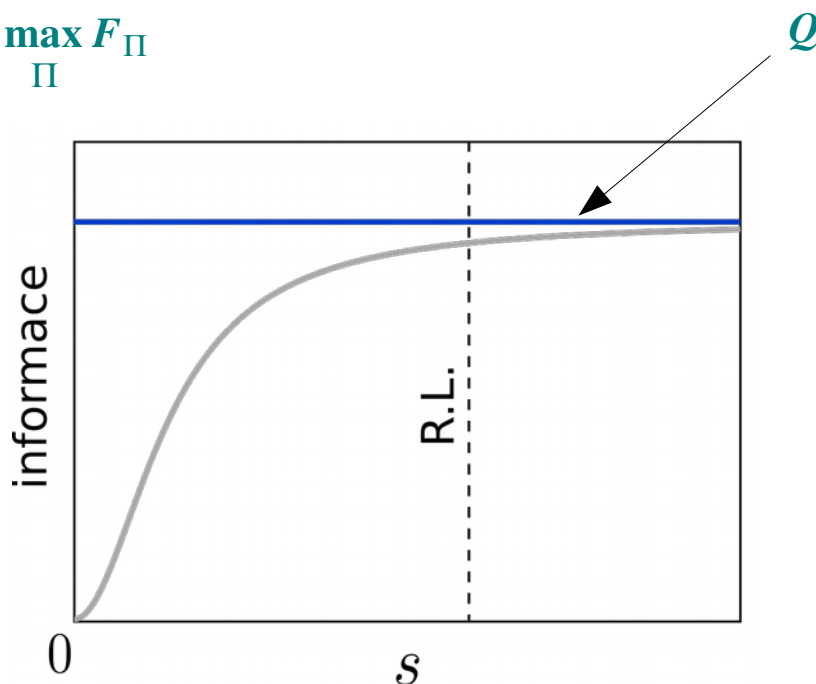
$$\rho = \frac{1}{2}|\psi_{-}\rangle\langle\psi_{-}| + \frac{1}{2}|\psi_{+}\rangle\langle\psi_{+}|$$

detekční pravděpodobnosti

$$p_{\Pi}(x, s) = \text{Tr}(\rho \Pi_x), \quad \Pi_x \geq 0, \quad \sum_x \Pi_x = 1$$

kvantová mez

$$Q = \max_{\Pi} F_{\Pi}$$



chyba optimálního rozlišení nezávisí na separaci