OPT/SFA

L01

# Fourierova transformace

*definice 1D Fourierovy transformace (FT)*

$$G(f) = \mathscr{F}\{g(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i2\pi x f} dx$$

$$g(x) = \mathscr{F}^{-1}\{G(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{i2\pi x f} df$$

- $g(x)$ – předmět, $G(f)$ – obraz (spektrum), $x[\mathrm{m}]$ – prostorová souřadnice (poloha), $f[m^{-1}]$ – frekvenční souřadnice (prostorová frekvence)
- FT je rozklad do systému funkcí
- v optice rozklad do rovinných vln
- vyšší frekvence popisují jemnější detaily

konvoluce funkcí $g(x)$ a $h(x)$

$$s(x) = g(x) * h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) h(x-\xi) d\xi$$

- překryv vzájemně posunutých funkcí, z nichž jedna je zrcadlená vzhledem k počátku
- využití ve vlnové optice a mnoha dalších oblastech

*vlastnosti FT*

posuv předmětu FT

$$\mathscr{F}\{g(x-a)\} = G(f) e^{-i2\pi a f}$$

- posuv předmětu způsobí změnu fáze obrazu škálování předmětu FT

$$\mathscr{F}\{g(ax)\} = \frac{1}{|a|} G\left(\frac{f}{a}\right)$$

- zmenšení (stlačení) předmětu způsobí zvětšení(roztažení) obrazu a naopak

FT konvoluce

označme $S, G, H$ FT $s, g, h$

pro FT konvoluce $s = g * h$ platí

$S(f) = G(f)H(f)$, tj. $\mathscr{F}\{g(x) * h(x)\} = \mathscr{F}\{g(x)\}\mathscr{F}\{h(x)\}$

- přechodem do frekvenční domény se konvoluce zjednoduší na násobení

*diskrétní FT*

digitální počítač pracuje s diskrétními vstupy/výstupy

aproximace integrálu součtem $\int g(x)dx \rightarrow \delta \sum_n g(x_n)$ vede na

$$G_m = \delta \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n e^{-i2\pi f_m x_n} \quad , \quad g_n = g(x_n), \; G_m = G(f_m)$$

srovnáme s definicí DFT (diskrétní FT)

$$G_m = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} g_n e^{-i2\pi mn/N}$$

vzorkování polohy $x_n = n\delta$ určuje vzorkování frekvence

$$f_m = \frac{m}{N\delta} \rightarrow f_m = m\delta_f, \quad \delta_f = \frac{1}{N\delta}$$

- jemnější vzorkování v prostoru vede na hrubší vzorkování ve frekvencích
- DFT je efektivně implementována algoritmem FFT (funkce `fft`, `fft2` v Matlab, Octave)
- pouze kladné indexy v Matlab/Octave – před a po FFT je třeba rotovat vstup tak, aby první prvek odpovídal počátku souřadnic (funkce `fftshift`, `ifftshift`)

digitální FT

- vstup: $g(x_n), \quad x_n = n\delta, \quad n = -N/2 \ldots N/2-1$
- posuv indexu
- DFT
- posuv indexu
- výstup: $G(f_m)/\delta, \quad f_m = \frac{m}{N\delta}, \quad m = -N/2 \ldots N/2-1$

zpětná FT

- vstup: $G(f_m), \quad f_m = \frac{m}{N\delta}, \quad m = -N/2 \ldots N/2-1$
- posuv indexu
- zpětná DFT
- posuv indexu
- výstup: $\delta g(x_n), \quad x_n = n\delta, \quad n = -N/2 \ldots N/2-1$

kódy v Matlab/Octave

```
G=fftshift(fft(ifftshift(g)))*delta
g=fftshift(ifft(ifftshift(G)))*length(G)*delta_f
```

příklad:

Gaussova fce

$\mathscr{F}\left\{e^{-\pi x^2}\right\} = e^{-\pi f^2}$

posunutí

$\mathscr{F}\left\{e^{-\pi (x-a)^2}\right\} = e^{-\pi f^2} e^{-i 2\pi a f}$

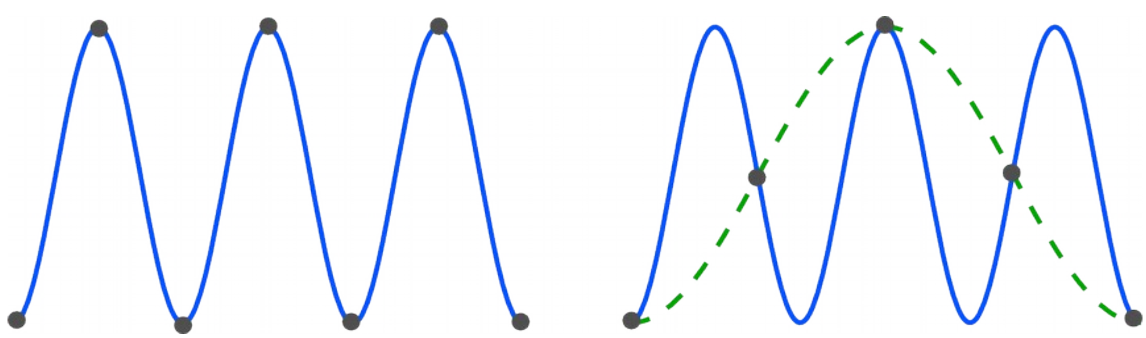
*vzorkovací teorém*

frekvenčně omezená fce $g(x)$

$G(f)=0$ pro $|f| > f_0$

přesná reprezentace $g(x)$ diskrétními vzorky (Shanonův teorém)

$\delta \leq \frac{1}{2 f_0}$, tj. alespoň dva vzorky na periodu



správně špatně (aliasing)

příklad:

$$g(x) = \mathrm{sinc}(x) \;\rightarrow\; G(f) = \mathrm{rect}(x) \;\rightarrow\; f_0 = 1/2$$

správné vzorkování

$$\delta \leq (2f_0)^{-1} = 1$$

*2D Fourierova transformace*

$$G(f_x, f_x) = \mathscr{F}\{g(x,y)\} = \iint_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\, e^{-i2\pi(xf_x + yf_y)} dx\, dy$$

$$g(x,y) = \mathscr{F}^{-1}\{G(f_x, f_y)\} = \iint_{-\infty}^{\infty} G(f_x, f_y)\, e^{i2\pi(xf_x + yf_y)} df$$

vzor/obraz je reprezentován maticí

vlastnosti a implementace jsou analogické 1D FT