OPT/SMF (b)

L01

Lineární rekonstrukce a filtrace

Fourierova analýza

Fourierova transformace

$$\mathcal{F}\{g(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\exp[-i2\pi f x]dx$$

inverzní Fourierova transformace

$$\mathcal{F}^{-1}\{G(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)\exp[i2\pi f x]df$$

podmínky existence

- *g* integrovatelná s absolutní hodnotou v *R*
- *g* má konečně mnoho bodů nespojitosti a konečný počet maxim a minim v libovolném konečném intervalu
- *g* nemá žádný bod nekonečné nespojitosti

není splněno pro bodový zdroj (delta funkci)

$$\delta(x) = \lim_{N\to\infty} N\exp(-N^2\pi x^2)$$

důležité vlastnosti

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)f(x)dx = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i2\pi f x)df = \delta(x)$$

zobecněná Fourierova transformace: limita transformací

$$\mathcal{F}\left\{N e^{-N^2 \pi x^2}\right\} = e^{-\pi f^2/N^2}$$

$$\mathcal{F}\{\delta(x)\} = \lim_{N\to\infty} e^{-\pi f^2/N^2} = 1$$

$$\mathcal{F}\{1\} = \delta(f)$$

vlastnosti FT

linearita $\mathcal{F}\{\alpha g + \beta h\} = \alpha \mathcal{F}\{g\} + \beta \mathcal{F}\{h\}$

podobnost $\mathcal{F}\{g(ax)\} = \dfrac{1}{|a|} G(f/a)$

posuv $\mathcal{F}\{g(x-a)\} = G(f)\exp(-i\,2\pi f a)$

Parseval $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df$

konvoluce

$$g * h \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\xi) h(x-\xi) d\xi$$

$$\mathcal{F}\{g * h\} = G(f) H(f)$$

Fourierův integrální teorém (v bodech spojitosti)

$$\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\{g(x)\} = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\{g(x)\} = g(x)$$

v bodech nespojitost dá střední hodnotu v okolí

dvě FT

$$\mathcal{F}\mathcal{F}\{g(x)\} = g(-x)$$

lineární systémy

systém

$$g_2(x_2) = \mathcal{S}\{g_1(x_1)\}$$

lineární systém

$$\mathcal{S}\{\alpha g(x_1) + \beta h(x_1)\} = \alpha \mathcal{S}\{g(x_1)\} + \beta \mathcal{S}\{h(x_1)\}$$

reprezentace (rozklad) vstupu

$$g_1(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\xi)\delta(x_1 - \xi)\,d\xi$$

výstup

$$g_2(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\xi)h(x_2, \xi)\,d\xi$$

impulsní odezva (PSF)

$$h(x_2, \xi) = \mathcal{S}\{\delta(x_1 - \xi)\}$$

invariance vůči posuvu (např. prostorově invariantní systém)

$h(x_2, \xi) = h(x_2 - \xi)$, tj. $g_2 = g_1 * h$

po FT (frekvenční doména)

$$G_2(f) = H(f)G_1(f)$$

přenosová funkce

$$H(f) = \mathcal{F}\{h(x)\}$$

př. vlastní funkce invariantního systému:

$$g_1(x_1) = \int G_1(f) e^{i2\pi f x_1} df$$

$$g_2(x_2) = \int G_2(f) e^{i2\pi f x_2} df = \int H(f) G_1(f) e^{i2\pi f x_2} df$$

zároveň

$$g_2(x_2) = \int G_1(f) \mathcal{S}\left\{e^{i2\pi f x_1}\right\} df$$

a tedy

$\mathcal{S}\left\{e^{i2\pi f x_1}\right\} = H(f) e^{i2\pi f x_2}$ (vlastní čísla a stavy systému)

rekonstrukce signálu

data ... $d(x)$

signál ... $r(x)$

PSF ... $s(x)$

výstup invariantního lineárního systému

$$d(x) = s(x) * r(x)$$

FT

$$D(f) = S(f) R(f)$$

lineární rekonstrukční filtr ... $H(f)$

rekonstrukce

$$\hat{R}(f) = H(f) D(f)$$

inverzní filtr

$$H(f) = S^{-1}(f) \quad \rightarrow \quad \hat{R}(f) = S^{-1}(f) S(f) R(f) = R(f)$$

problémy

- nulové body $S(f)$
- model nezahrnuje šum
- nejvíce jsou zesíleny frekvence s nejmenším SNR – nestabilita

optimální filtrace – Wienerův filtr

detekční šum ... $n(x)$

model detekce

$$d(x) = s(x) * r(x) + n(x)$$

$$D(f) = S(f)R(f) + N(f)$$

rekonstrukce

$$\hat{R}(f) = H(f)D(f) = H(f)S(f)R(f) + H(f)N(f)$$

chyba rekonstrukce

$$\varepsilon = \left\langle \left|\hat{R}(f) - R(f)\right|^2 \right\rangle$$

středování přes opakované realizace šumu a signálu

$$\varepsilon = \left\langle [R(HS-1) + HN][R^*(H^*S^*-1) + H^*N^*] \right\rangle$$

$$= (HS-1)(H^*S^*-1)\phi_R + HH^*\phi_N$$

spektrální hustoty:

šum ... $\phi_N = \langle |N(f)|^2 \rangle$

signál ... $\phi_R = \langle |R(f)|^2 \rangle$

optimalizace, tj. minimalizace chyby rekonstrukce

$$\frac{d\varepsilon}{dH^*} = \left(H\,|S|^2 - S^*\right)\phi_R + H\,\phi_n = 0$$

výsledný Wienerův filtr

$$H(f) = \frac{S^*}{|S|^2 + \phi_N/\phi_R}$$

SNR ... ϕ_R/ϕ_N

speciální případy:

$$\mathrm{SNR} \gg 1 \quad \rightarrow \quad H(f) = \frac{1}{S(f)}$$ (inverzní filtr)

$$\mathrm{SNR} \ll 1 \quad \rightarrow \quad H(f) \propto S^*(f)$$ (tlumený přizpůsobený filtr)

př. rozmazání obrazu pohybem

$$s(x) = \mathrm{rect}\left(\frac{x - a/2}{a}\right)$$

$$S(f) = \mathcal{F}\{s(x)\} = e^{-i\pi f a}\,\mathcal{F}\{\mathrm{rect}(x/a)\} = a\,e^{-i\pi f a}\,\mathrm{sinc}(a f)$$

$$H(f) = \frac{a\,e^{i\pi f a}\,\mathrm{sinc}(a f)}{a^2\,\mathrm{sinc}^2(a f) + \phi_N/\phi_R}$$

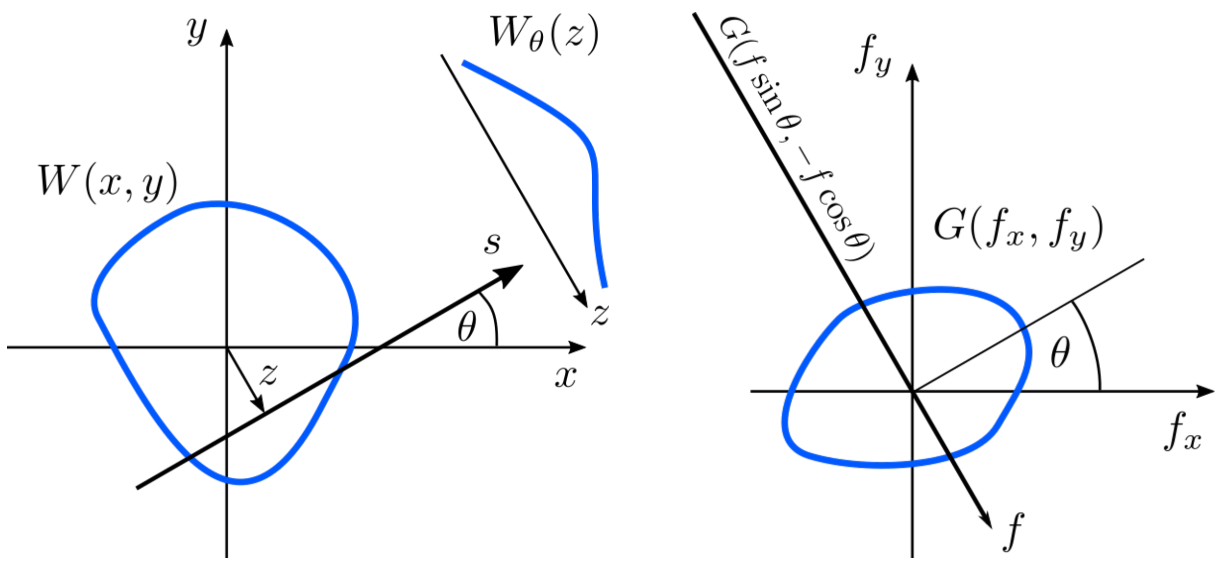
na frekvencích, kde $S(f) = 0$ přenos filtru vymizí $H(f) = 0$

tomografie

2D → 1D

projekce = integrace (marginální rozdělení)

řez = přímka (podmíněné rozdělení)



2D FT objektu

$$G(f_x, f_y) = \mathcal{F}\{W(x,y)\}$$

Fourier slice theorem

$$\mathcal{F}\{W_\theta(z)\} = G(f \sin\theta, -f\cos\theta)$$

1D FT projekce = řez 2D FT objektu

inverze

vzorky $G(f_x, f_y)$ na polární síti → interpolace na pravoúhlou síť

→ inverzní FT → vzorky $W(x,y)$

teorém lze snadno ověřit (bez újmy na obecnosti) pro $\theta = \pi/2$:

$$\mathcal{F}\left\{W_{\frac{\pi}{2}}(z)\right\} = \iint W(z, y)\, dy\, e^{-i 2\pi f z}\, dz$$

$$G(f, 0) = \iint W(x, y)\, e^{-i 2\pi (f_x x + f_y y)}\, dx\, dy \Big|_{f_x = f,\, f_y = 0}$$

$$= \iint W(x, y)\, e^{-i 2\pi f x}\, dx\, dy$$

diskretizace – rozdělení oblasti na buňky

data

$d_j = \sum_i c_{ji} w_i$ tj. $\vec{d} = C \vec{w}$

rekonstrukce

$\vec{w} = C^{-1} \vec{d}$

vede na řešení soustavy M lineárních rovnic pro N neznámých