OPT/SMF (b)

L02

Diskrétní systémy

model

lineární systém

$$A\ \vec{x} = \vec{b}$$

stav ... $\vec{x}:\ N\times 1$

data ... $\vec{b}:\ M\times 1$

měření ... $A:\ M\times N$

jádro (kernel, nullspace) $\mathcal{N}(A) = \{\vec{x} \mid A\vec{x} = \vec{0}\}$

obraz (range) $\mathcal{R}(A) = \{\vec{b} \mid \exists \vec{x}:\ A\vec{x} = \vec{b}\}$

informační úplnost (IC)

$$\vec{x}_1 \neq \vec{x}_2 \ \Rightarrow\ A\vec{x}_1 \neq A\vec{x}_2$$

pokud $A\vec{x}_1 = A\vec{x}_2\ \ \&\ \ \vec{x}_1 \neq \vec{x}_2$:

$$A(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \in \mathcal{N}(A)$$

úplné měření $\Rightarrow$ $\dim(\mathcal{N}) = 0$

SVD (singular-value decomposition)

$$A = U\ S\ V^{+}$$

$A:\ M \times N$

$U:\ M \times M,\ \ U^{+}U = U\,U^{+} = 1$ (unitární resp. ortogonální)

$V:\ N \times N,\ \ V^{+}V = V\,V^{+} = 1$

$S:\ M \times N\left(\text{diagonální}\right),\ \ s_i \geq 0$ (singulární čísla)

uvažujme $M = N$, ostatní případy řešíme obdobně

regulární A

$$\det\left(A\right) \neq 0 \text{ tedy } s_i > 0\ \forall i$$

inverze: $A^{-1} = V\ S^{-1}\ U^{+}$

singulární A

$$\det\left(A\right) = 0 \text{ tedy } \min s_i = 0$$

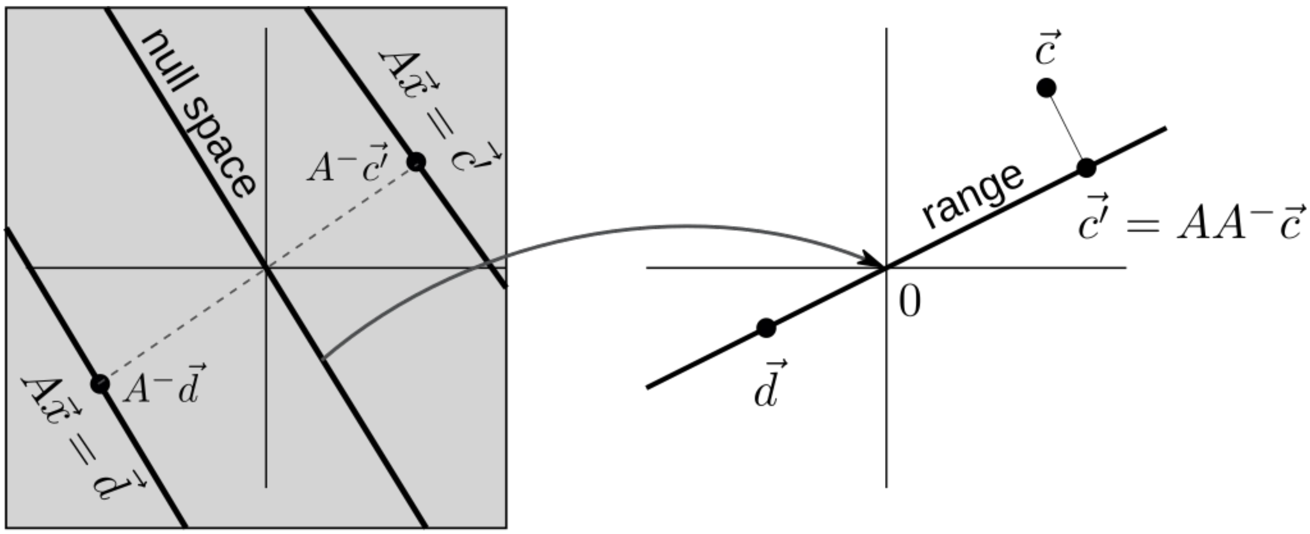
báze $\mathcal{N}\left(A\right)$: sloupce $\vec{v}_i$ odpovídající $s_i = 0$

báze $\mathcal{R}\left(A\right)$: sloupce $\vec{u}_i$ odpovídající $s_i \neq 0$

reprezentace matice A

$$A = \sum_i s_i\, \vec{u}_i \otimes \vec{v}_i \text{ nebo } A = \sum_i s_i |u_i\rangle\langle v_i|$$

řešení problému $A\ \vec{x} = \vec{b}$ se singulární A



(a) $\vec{b} = \mathbf{0}$ pak řešení jsou $\forall\, x \in \mathcal{N}(A)$

(b) $\vec{b} \neq \mathbf{0}\ \ \&\ \ \vec{b} \in \mathcal{R}(A)$

řešení s minimální normou $\|x\|_2$: Moore-Penrose pseudoinverze

$$A^{-} = V\ S^{-}\ U^{+},\ \ s_i > 0 \to s_i^{-} = 1/s_i,\ \ s_i = 0 \to s_i^{-} = 0$$

k partikulárnímu řešení lze přičíst libovolný vektor z jádra

(c) $\vec{b} \neq \mathbf{0}\ \ \&\ \ \vec{b} \notin \mathcal{R}(A)$

přibližné řešení ve smyslu $\min\|A\vec{x} - \vec{b}\|_2$ (LS): pseudoinverze *regularizace*

$$A\ \vec{x} = \vec{b}$$

$$U\,S\,V^{+}\ \vec{x} = \vec{b}$$

$$S\,V^{+}\ \vec{x} = U^{+}\ \vec{b}$$

$$S\ \vec{x}\,' = \vec{b}\,'$$

filtr analogický k přenosové funkci

malé s_i : nestabilita, velké zesílení komponent s malým SNR

(a) odstranění malých singulárních čísel (cutoff)

$$s_i < \varepsilon \ \rightarrow\ s_i = 0$$

(b) regularizace estimátoru

- nechci extrémy
- lépe ztráta detailů než artefakty

př. Tichonovova regularizace

LS + norma

$$\min\ \|A\,\vec{x} - \vec{b}\|_2 + \|x\|_2$$

- preference malých komponent vektoru řešení
- malá norma = regularizace

$$\frac{\partial}{\partial\langle x|}\Big[\big(\langle x|A^{+} - \langle b|\big)\big(A|x\rangle - |b\rangle\big) + \langle x|x\rangle\Big] = 0$$

$$A^{+}A|x\rangle - A^{+}|b\rangle + |x\rangle = 0$$

$$(A^+ A + 1)|x\rangle = A^+|b\rangle$$

$$|x\rangle = (A^+ A + 1)^{-1} A^+|b\rangle$$

regulární A

$$(A^+ A)^{-1} A^+ = A^{-1}(A^+)^{-1} A^+ = A^{-1}$$

obdélníková A (IC)

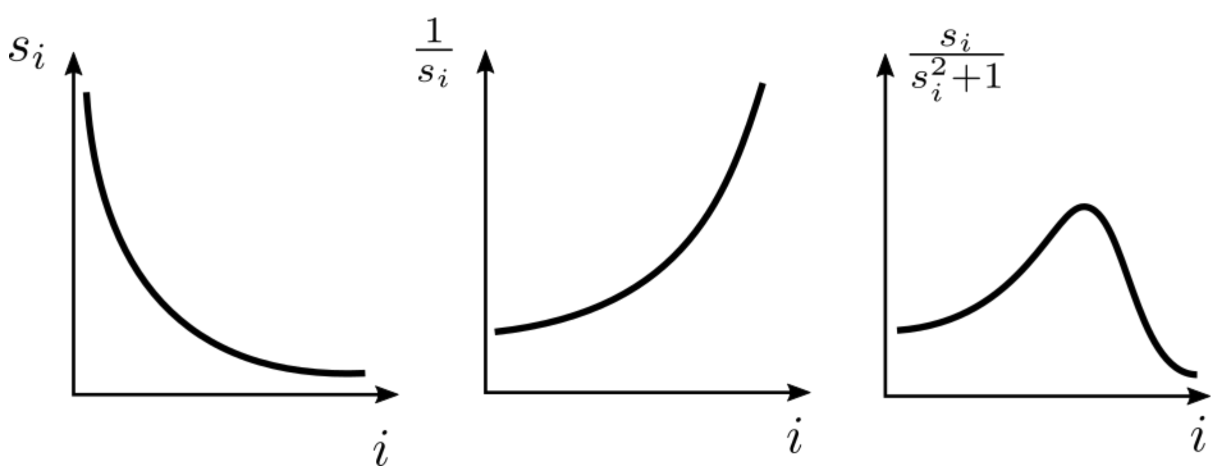
$$(A^+ A)^{-1} A^+ = A^-$$ (pseudoinverze)

obecně

$$(A^+ A + 1)^{-1} A^+ = (V S^+ U^+ U S V^+ + 1)^{-1} V S^+ U^+$$

$$= [V(S^+ S + 1)V^+]^{-1} V S^+ U^+ \;=\; V(S^+ S + 1)^{-1} V^+ V S^+ U^+$$

$$= V \operatorname{diag}\left(\frac{1}{s_i^2 + 1}\right) S^+ U^+ \;=\; V \operatorname{diag}\left(\frac{s_i}{s_i^2 + 1}\right) U^+$$



QSE – tomografie kvantového stavu

stav

$$\rho, \quad \rho \geqslant \mathbf{0}, \quad \mathrm{Tr}(\rho) = \mathbf{1}, \quad \dim \rho = d$$

měření

$$\{\Pi_j\}, \quad \Pi_j \geqslant \mathbf{0}, \quad \sum_j \Pi_j = \mathbf{1}, \quad j = 1, \ldots, M$$

pravděpodobnosti

$$p_j = \mathrm{Tr}(\rho \Pi_j)$$

naměřené relativní frekvence ... $f_j = \frac{n_j}{n}$

n kopií : multinomiální rozdělení

$$p(n_1, n_2, \ldots, n_M) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_M!} \prod_{j=1}^{M} p_j^{n f_j}$$

rekonstrukce

$$\{f_j\} \rightarrow \rho$$

lineární problém – parametrizace

operátorová báze

$$\{\Gamma_k\}, \quad \mathrm{Tr}(\Gamma_k \Gamma_l) = \delta_{kl}, \quad k, l = 1, \ldots, d^2 = N$$

stav

$\rho = \sum_k r_k \Gamma_k \quad \rightarrow \quad |\rho\rangle\rangle$ (super-ket) měření

$$\Pi_j = \sum_k c_{jk} \Gamma_k \quad \rightarrow \quad |\Pi_j\rangle\rangle$$

pravděpodobnosti

$$p_j = \mathrm{Tr}(\rho \Pi_j) = \sum_k \sum_l r_k c_{jl} \mathrm{Tr}(\Gamma_k \Gamma_l) = \sum_k c_{jk} r_k = \langle\langle \Pi_j | \rho \rangle\rangle$$

$\vec{p} = C \vec{r}$ - systém $M \times N$

LIN odhad: pseudoinverze

IC měření

$$M \geq N = d^2$$

minimální IC měření

$$M = N = d^2$$

symetrické minimální IC měření (SIC)

$$\{|\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|\},\ j = 1, \ldots, N,\ \langle\varphi_i | \varphi_{j \neq i}\rangle = \lambda$$

vazby – fyzikální podmínky

$\mathrm{Tr}(\rho) = 1$ (pravděpodobnosti jsou normované)

$\rho \succcurlyeq 0$ (pravděpodobnosti jsou nezáporné)

LIN odhad nezaručí $\rho \succcurlyeq 0$ v přítomnosti šumu/chyb měření

teorie detekce – odhad s pomocí optimalizace se zahrnutím vazeb