

OPT/SMF (b)

L03

ML odhad

Bayesova věta

$$P(\mathbf{d} \& \theta) = p(\mathbf{d}|\theta) p(\theta) = p(\theta|\mathbf{d}) p(\mathbf{d})$$

$$p(\theta|\mathbf{d}) = \frac{p(\mathbf{d}|\theta) p(\theta)}{p(\mathbf{d})}$$

věrohodnost (likelihood) ... $\mathcal{L} = p(\mathbf{d}|\theta)$

priorní rozdělení ... $p(\theta)$

posteriorní rozdělení ... $p(\theta|\mathbf{d})$

ML estimátor

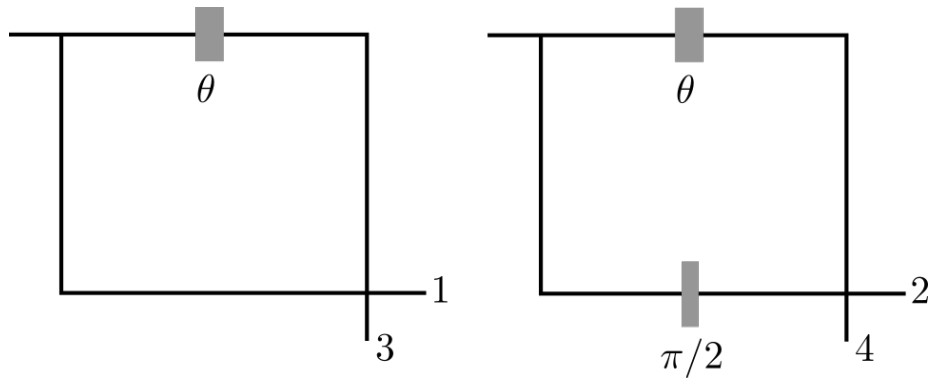
$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} \mathcal{L}(\theta)$$

- asymptoticky efektivní
- snadno lze zahrnout vazby
- často vede na konvexní úlohy – efektivní numerická implementace
- řešení může být na hranici přípustné oblasti

bayesovský odhad = středování θ s posteriorním rozdělením

- multidimenzionální integrace - numericky náročné
- řešení je uvnitř přípustné oblasti

měření fáze



$$\bar{n}_{13} = N(1 \pm V \cos \theta)$$

$$\bar{n}_{24} = N(1 \pm V \sin \theta)$$

$$\bar{n}_j = N[1 + V \cos(\theta - \Delta_j)], \quad \Delta_j = (j-1)\pi/2$$

(a) gaussovský šum

$$\mathcal{L} \propto e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_j [n_j - \bar{n}_j(\theta)]^2}$$

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} \log \mathcal{L}$$

$$\frac{d}{d\theta} \log \mathcal{L} \propto \frac{d}{d\theta} \sum_j (n_j - \bar{n}_j)^2 \propto \sum_j (n_j - \bar{n}_j) \sin(\theta - \Delta_j) = 0$$

nadefinujme

$$R = \sum_j n_j e^{i\Delta_j}$$

pak $e^{i\hat{\theta}} = \frac{R}{|R|}$

speciální případ:

$$\Delta_j = \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\} \rightarrow R = n_1 + i n_2 - n_3 - i n_4$$

$$e^{i\hat{\theta}} = \frac{n_1 - n_3 + i(n_2 - n_4)}{\sqrt{(n_1 - n_3)^2 + (n_2 - n_4)^2}}$$

(b) poissonovský šum

$$\mathcal{L}(\theta) = \prod_j \frac{\bar{n}_j^{n_j}}{n_j!} e^{-\bar{n}_j}$$

$$\log \mathcal{L}(\theta) = \sum_j n_j \log \bar{n}_j - \sum_j \bar{n}_j$$

rovnorné vzorkování fáze: $\sum_j \bar{n}_j = \text{konst.}$

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} \prod_j \bar{n}_j^{n_j}$$

$$\max (1+V \cos \theta)^{n_1} (1-V \cos \theta)^{n_3} (1+V \sin \theta)^{n_2} (1-V \sin \theta)^{n_4}$$

současný odhad θ, V : maximalizaci provedeme volbou

$$\alpha(1+V \cos \theta) = n_1$$

$$\alpha(1-V \cos \theta) = n_3$$

a podobně pro n_2, n_4 , dostaneme

$$\hat{V} = \sqrt{\left(\frac{n_1 - n_3}{n_1 + n_3}\right)^2 + \left(\frac{n_2 - n_4}{n_2 + n_4}\right)^2}$$

$$e^{i\hat{\theta}} = \frac{1}{V} \left(\frac{n_1 - n_3}{n_1 + n_3} + i \frac{n_2 - n_4}{n_2 + n_4} \right)$$

odhad samotné fáze nelze získat v uzavřeném tvaru – numerické metody

ML tomografie

Kullback-Leiblerova divergence (viz. níže)

$$\max \prod_j p_j^{q_j} \text{ pro } p_j = q_j$$

data I_j , teorie \bar{I}_j , $\sum_j \bar{I}_j \neq 1$

$$p_j = \frac{\bar{I}_j}{\sum_j \bar{I}_j}$$

model

$$\bar{I}_j = \sum_i c_{ji} \mu_i$$

$$\log \mathcal{L} = \sum_j I_j \log \left(\bar{I}_j / \sum_{j'} \bar{I}_{j'} \right)$$

vazba (pozitivita)

$$\mu_i = x_i^2$$

maximalizace $\log \mathcal{L}$

$$\mu_k = \mu_k \frac{\sum_j \bar{I}_j}{(\sum_j I_j)(\sum_j c_{jk})} \sum_j \frac{I_j}{\bar{I}_j} c_{jk}$$

EM algoritmus

- iterace
- inicializace $\mu_k^0 > 0$
- monotonní konvergence

ML rekonstrukce kvantového stavu

signál ... n kopií ρ

data ... $d = \{n_1, n_2, \dots, n_M\}$

model ... $p_j = \text{Tr}(\rho \Pi_j), \sum_j p_j = 1$

multinomiální statistika

$$p(d|\rho) \propto \prod_j p_j^{n_j}$$

$$\log \mathcal{L}(\rho) \propto \sum_j f_j \log p_j(\rho) \equiv L(\rho)$$

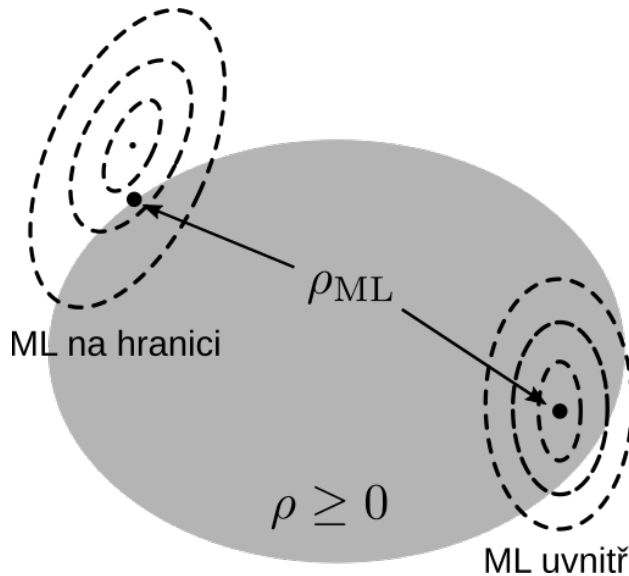
ML odhad

$$\hat{\rho} = \arg \max_{\rho} L(\rho)$$

konkavita

$$L[(1-\lambda)\rho_1 + \lambda\rho_2] \geq (1-\lambda)L(\rho_1) + \lambda L(\rho_2)$$

konkávnní fce na konvexní oblasti



Jensenova nerovnost pro konkávnní funkci ($a_i > 0$)

$$f\left(\frac{\sum_i a_i x_i}{\sum_i a_i}\right) \geq \frac{\sum_i a_i f(x_i)}{\sum_i a_i}$$

speciální případ $\sum_i a_i = 1$

$$f\left(\sum_i a_i x_i\right) \geq \sum_i a_i f(x_i)$$

Kullback-Leiblerova divergence

$$D_{KL}(q \| p) = \sum_i q_i \log \frac{q_i}{p_i} \geq 0 \quad (\text{plyne z Jensenovy nerovnosti})$$

aplikací na $L(\rho)$ dostaneme

$$L(\rho) \leq \sum_i f_i \log f_i$$

globální maximum (ne vždy přípustné) nabývá $L(\rho)$ pro $p_i = f_i$

obecně řešíme konvexní problém

$$\max_{\rho} L(\rho) = \sum_j f_j \log p_j(\rho)$$

s.t.

$$\text{Tr}(\rho) = \mathbf{1} \quad \rightarrow \quad \text{Lagrangeův multiplikátor } \lambda$$

$$\rho \succeq \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \rho = \mathbf{A}^+ \mathbf{A}$$

extremální rovnice

$$\mathbf{R}\rho = \rho, \quad \mathbf{R} = \sum_j \frac{f_j}{p_j} \Pi_j$$

iterace $\mathbf{R}\rho\mathbf{R} = \rho$

- $\rho^0 \propto \mathbf{1}$
- zředění $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{1} + \alpha \mathbf{R}$ pro zpomalení kroku

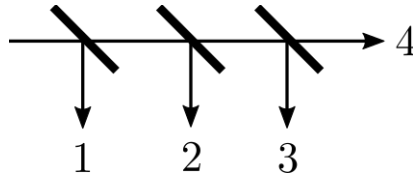
speciální případ

$\Pi_{j,\rho}$... diagonální ve stejné bázi

vede na

$$r_k = r_k \sum_j \frac{f_j}{p_j} c_{jk} \quad \text{EM algoritmus pro diagonální prvky } \Pi_{j,\rho}$$

příklad: TMD detekce (time-multiplexed device)



pravděpodobnosti

$$\{p_j\}, \quad j = 0000, 0001, 0010, \dots, 1111$$

model

$$p_j = \sum_n c_{jn} \rho_n, \quad \rho_n = \langle n | \rho | n \rangle, \quad \rho_n \geq 0$$

EM algoritmus $\rightarrow \hat{\rho}_n$

příklad: homodynní tomografie kvantového stavu

kvadrurní operátory

$$q_\theta = x \cos(\theta) + p \sin(\theta)$$

projekční operátory

$$\Pi_j = |q_\theta\rangle\langle q_\theta|$$

tomografické zobrazení Wignerovy funkce $W(x, p)$

- přímá inverze: filtrovaná zpětná projekce (FBP), Fourier slice theorem
- nelze zahrnout vazby na stav

ML rekonstrukce

$$\Pi_j \rightarrow \text{výpočetní báze } \{|n\rangle\} \rightarrow \text{ML} \rightarrow \hat{\rho} \rightarrow W(x, p)$$