OPT/SMF (b)

L04

Fisherova informace

Cramérova-Raova dolní mez (CRLB)

likelihood

$$\mathcal{L}(\theta) = p(n|\theta)$$

Fisherova informace

$$F = \left\langle \left(\frac{d}{d\theta} \log \mathcal{L} \right)^2 \right\rangle$$ - středování přes data

nevychýlený (unbiased) odhad $\hat{\theta}$

$$\langle \hat{\theta} - \theta \rangle = 0$$

CRLB pro jeden parametr

$$(\Delta\theta)^2 \geq \frac{1}{F}$$

saturace nerovnosti

- efektivní estimátor
- ML asymptoticky pro velká data
- BLUE (GLS)

pozn. vychýlený odhad může porušit CRLB

Fisherova matice – více parametrů

$$F_{kl} = \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial\theta_k} \log \mathcal{L} \right) \left(\frac{\partial}{\partial\theta_l} \log \mathcal{L} \right) \right\rangle$$

kovariance odhadu

$$\Gamma_{kl} = \langle \Delta\theta_k \Delta\theta_l \rangle$$

CRLB pro multiparametrický odhad

$$\Gamma \succcurlyeq \boldsymbol{F}^{-1}$$

speciální případ – variance

$$\sigma_k^2 = \Gamma_k \geq \left(\boldsymbol{F}^{-1}\right)_{kk}$$

alternativní forma Fisherovy matice

$$\boldsymbol{F}_{kl} = -\left\langle \frac{\partial^2}{\partial\theta_k \partial\theta_l} \log \mathcal{L}(\theta) \right\rangle$$

Fisherova informace – příklady

(a) multinomiální statistika

$$\mathcal{L}(\theta) \propto \prod_j p_j^{n_j}, \quad \langle n_j \rangle = n\, p_j$$

$$\boldsymbol{F}_{kl} = n \sum_j \frac{1}{p_j} \frac{\partial p_j}{\partial\theta_k} \frac{\partial p_j}{\partial\theta_l}$$

(b) poissonovská statistika

$$\mathcal{L}(\theta) = \prod_j \frac{\langle n_j \rangle^{n_j}}{n_j!} e^{-\langle n_j \rangle}, \quad \sum_j p_j = 1$$

$$F_{kl}^{\text{poiss}} = F_{kl}^{\text{multi}}$$

(c) gaussovská/normální statistika

$$\mathcal{L} \propto \prod_j e^{-\frac{(n_j - \langle n_j \rangle)^2}{2\sigma_j^2}}$$

$$F_{kl} = \sum_j \frac{1}{\sigma_j^2} \frac{\partial \langle n_j \rangle}{\partial \theta_k} \frac{\partial \langle n_j \rangle}{\partial \theta_l}$$

praktický příklad – lokalizace bodu (astrometrie, mikroskopie)

předpoklady

- poissonovský detekční šum
- gaussovská PSF
- centroid PSF - a

$$F = \sum_j \frac{1}{\langle n_j \rangle} \left(\frac{d \langle n_j \rangle}{d a} \right)^2$$

spojitá limita CCD detekce

$$\langle n_j \rangle \approx I(x_j) \delta x$$

$$F \underset{\delta x \to 0}{\approx} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{I(x)} \left(\frac{d I(x)}{d a} \right)^2 dx$$

PSF

$$I(x) = \frac{n}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \quad , \qquad n \text{ ... celková intenzita}$$

výsledek

$$\langle(\Delta a)^2\rangle \geq \frac{\sigma^2}{n}$$

kvantová rekonstrukce stavu

odhad

$$\rho \rightarrow \hat{\rho}$$

chyba

$\varepsilon = \mathrm{Tr}[(\hat{\rho} - \rho)^2]$ (HS/Frobeniova norma)

střední chyba

$\bar{\varepsilon} = \langle \mathrm{Tr}[(\hat{\rho} - \rho)^2] \rangle$ středování přes data tj. opakování odhadu

reálná reprezentace stavu

$$\rho = \sum_k r_k \Gamma_k \quad \rightarrow \quad \bar{\epsilon} = \sum_k (\Delta r_k)^2$$

CRLB

$\bar{\varepsilon} \geq \mathrm{Tr}(F^{-1})$ kde F je pro parametry r_k

reálná reprezentace POVM

$$\Pi_j = \sum_k c_{jk} \Gamma_k$$

Fisherova informace

$$F_{kl} = n \sum_j \frac{c_{jk} c_{jl}}{p_j}$$

$$F = n\left(C^T P^{-1} C\right)$$

$$\bar{\varepsilon} \geq \frac{1}{n} \mathrm{Tr}\left[\left(C^T P^{-1} C\right)^{-1}\right]$$

optimální měření

dvě měření

$\{\Pi_j\}_1,\ j=1,\ldots,M$ a $\{\Pi_j\}_2,\ j=1,\ldots,M$

jejich konvexní kombinace

$$p_1\{\Pi_j\}_1 + p_2\{\Pi_j\}_2, \quad p_1 + p_2 = 1$$

Fisherova informace

$$F = p_1 F_1 + p_2 F_2$$

konvexita funkce $1/x$ pro operátory

$$F^{-1} \leq p_1 F_1^{-1} + p_2 F_2^{-1}$$

středování přes unitárně ekvivalentní stavy (čisté stavy)

$$\overline{F^{-1}} \leq p_1 \overline{F_1^{-1}} + p_2 \overline{F_2^{-1}}$$

pokud $\{\Pi_j\}_1$ a $\{\Pi_j\}_2$ jsou unitárně ekvivalentní pak

$$\overline{F^{-1}} \leq \overline{F_1^{-1}} = \overline{F_2^{-1}}$$

- kombinace unitárně ekvivalentních měření vede ke zlepšení
- rovnost je saturována pro kovariantní měření

superoperátory

$$\rho \rightarrow \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \equiv |\rho\rangle\rangle$$

Fisherova informace pomocí superoperátorů

$$F = \sum_j \frac{|\Pi_j\rangle\rangle\langle\langle\Pi_j|}{p_j(\rho)}, \quad \mathrm{Tr}(\Gamma_k) = 0$$ (v bezestopé bázi)

popř. i v libovolné hermitovské bázi, pokud nahradíme

$$\Pi_j \rightarrow \Pi_j - \frac{1}{d}\mathrm{Tr}(\Pi_j) = \bar{\Pi}_j$$ (projekce do bezestopé báze)

kovariantní měření

$$F = d\int \frac{1}{\langle\psi|\rho|\psi\rangle} |\bar{\Pi}_\psi\rangle\rangle\langle\langle\bar{\Pi}_\psi| \, d\mu(\psi)$$

pro čistý a maximálně smíšený stav dostaneme

$$\mathrm{Tr}(F^{-1}) = \begin{cases} 2(d-1), & \rho = |\phi\rangle\langle\phi| \\ d^2 + d - 1 - \dfrac{1}{d}, & \rho = 1/d \end{cases}$$