

PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA UNIVERZITY PALACKÉHO
KATEDRA TEORETICKÉ FYZIKY



Diplomová práce

Sbírka úloh z mechaniky kontinua

Vypracoval:
Michal Kolář
studující V. ročníku
obor M-F
studijní rok 2002/2003

Vedoucí diplomové práce:
Mgr. Lukáš Richterek, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně pod vedením
Mgr. Lukáše Richterka, Ph.D. za použití uvedené literatury.

V Olomouci 13. července 2006

.....

Obsah

Úvod.....	3
Tenzor napětí	4
Tenzor deformace.....	13
Zobecněný Hookův zákon.....	17
Statika tekutin	35
Pohybové rovnice ideálních tekutin	42
Dynamika vazkých tekutin.....	45
Dodatek.....	58
Literatura	60

Úvod

Tato sbírka je určena posluchačům druhých ročníků odborného studia aplikované fyziky, biofyziky a chemické fyziky, optiky a optoelektroniky a třetího ročníku učitelského studia matematiky–fyziky Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci a byla sestavena jako doplněk ke skriptu [8]. Obsahuje 27 úloh, ve kterých jsem se zaměřil na témata tenzor napětí, tenzor deformace, zobecněný Hookův zákon, statika tekutin, pohybové rovnice ideálních tekutin a dynamika vazkých tekutin. Toto členění tématicky odpovídá rozdělení části Mechanika kontinua na jednotlivé kapitoly ve výše uvedeném skriptu.

Příklady jsou v jednotlivých kapitolách řazeny (subjektivně) dle obtížnosti. Jsou koncipovány tak, aby upevnily pojmy užívané v [8] a procvičily metody práce s matematickým aparátem používaným v této části mechaniky. Sbíрка obsahuje i několik úloh praktického významu. Jako určité tématické rozšíření lze chápat úlohu 25, ve které je odvozena rovnice pro tok tepla při proudění vazkých tekutin. Jednoduchá aplikace této rovnice je naznačena v úloze 27 b).

Jako další bohatý zdroj řešených úloh doporučuji případným zájemcům publikaci [3].

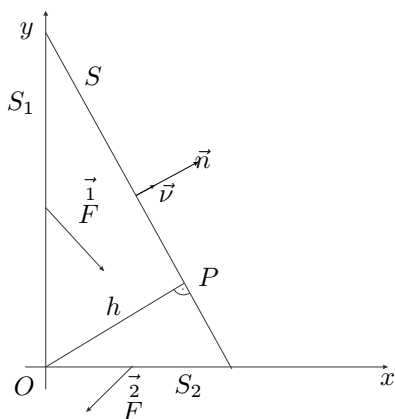
Na tomto místě bych také rád upřímně poděkoval Mgr. Lukáši Richterkovi, Ph.D. za poskytnutí potřebných materiálů a cenných rad, které přispěly ke zlepšení této sbírky jak po stránce obsahové, tak po stránce zpracování.

Tenzor napětí

Úloha 1. Pro rovinný případ daný (obr. 1) sestavte tenzor napětí v bodě O .

$$\vec{F}^1 = (3, -3)^T \text{ N}, \vec{F}^2 = (-2, -2)^T \text{ N}, S_1 = 3 \text{ m}^2, S_2 = 2 \text{ m}^2, \vec{n} = (3, 2)^T.$$

- a) Určete jeho hlavní napětí a hlavní směry napětí.
b) Určete napětí v bodě P pro $h \rightarrow 0$.



Obr. 1: K úloze 1.

ŘEŠENÍ: Plošné síly vztáhneme na jednotku plochy

$$\vec{T}^1 = \frac{\vec{F}^1}{S_1} = (1, -1)^T,$$

$$\vec{T}^2 = \frac{\vec{F}^2}{S_2} = (-1, -1)^T.$$

Složky vektorů napětí označíme $\vec{T}_i^j = \tau_{ji}$, $i, j=1,2$ [8]. Sestavíme tenzor napětí

$$\tau_{ji} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

a) Hlavní napětí: Podmínkou jejich nalezení je nulovost charakteristické rovnice

$$\begin{vmatrix} 1 - \tau & -1 \\ -1 & -1 - \tau \end{vmatrix} = 0,$$

$$-(1 + \tau)(1 - \tau) - 1 = 0 \Rightarrow \tau_{1,2} = \pm\sqrt{2},$$

pro $\tau_1 = \sqrt{2}$ se soustava se redukuje na rovnici

$$(1 - \sqrt{2})x - y = 0,$$

z čehož vlastní směr je generován vektorem $\vec{u}_1 = (1, 1 - \sqrt{2})^T$, takže jednotkový zástupce vlastního směru je vektor

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{u}_1}{|\vec{u}_1|} = \frac{1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}} (1, 1 - \sqrt{2})^T.$$

Pro $\tau_2 = -\sqrt{2}$ má soustava tvar

$$(1 + \sqrt{2})x - y = 0,$$

zástupce vlastního směru $\vec{u}_2 = (1, 1 + \sqrt{2})^T$, jednotkový zástupce je

$$\vec{e}_2 = \frac{\vec{u}_2}{|\vec{u}_2|} = \frac{1}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}} (1, 1 + \sqrt{2})^T.$$

b) Pro $h \rightarrow 0$ platí [8]

$$\overset{\nu}{T}_i = \sum_j \tau_{ij} \nu_j, \quad i = 1, 2 \quad (1.2)$$

kde ν_j jsou složky jednotkového vektoru normály plošky S . Pro $\vec{n} = (3, 2)^T$ je

$$\vec{\nu} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}} \right)^T,$$

takže výsledně $\overset{\nu}{T}_i$

$$\overset{\nu}{T}_1 = \tau_{11}\nu_1 + \tau_{12}\nu_2 = \frac{3}{\sqrt{13}} - \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{13}},$$

$$\overset{\nu}{T}_2 = \tau_{21}\nu_1 + \tau_{22}\nu_2 = -\frac{3}{\sqrt{13}} - \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{-5}{\sqrt{13}},$$

$$\vec{\overset{\nu}{T}} = \left(\frac{1}{\sqrt{13}}, -\frac{5}{\sqrt{13}} \right)^T.$$

Úloha 2. Pro tenzor τ_{ij} z předešlého příkladu určete kanonický tvar rovnice kvadriky napětí v bodě O .

ŘEŠENÍ: Normálová složka N vektoru \vec{T} působícího na plošku S je $N = \vec{T} \cdot \vec{\nu}$. $N = -7/\sqrt{13}$. Na normále zvolíme bod Q tak, aby $|PQ| = 1/\sqrt{|N|}$. Takže $N|PQ|^2 = -1$. Tedy kvadrika napětí má v bodě O tvar

$$\tau_{ij}x_ix_j = -1, \quad i, j = 1, 2.$$

Rozepsáno

$$\begin{aligned} \tau_{11}x_1^2 + 2\tau_{12}x_1x_2 + \tau_{22}x_2^2 &= -1, \\ x_1^2 - x_2^2 - 2x_1x_2 + 1 &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Z matematického hlediska jde o kuželosečku, jejíž matice [6] je

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že $\Delta = \det A \neq 0$, $\delta = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) < 0$, jde tedy o hyperbolu. Její střed je $S = [0, 0]$. To plyne z faktu, že bod, v němž studujeme napětí jsme umístili do počátku soustavy souřadné. Zbývá tedy provést transformaci otočením soustavy souřadné. Sloupce transformační matice jsou souřadnice vektorů (po řadě) \vec{e}_1, \vec{e}_2 (viz. úloha 1, část a)), transformační rovnice mají tedy tvar

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}x'_1 + \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}x'_2, \quad (2.2)$$

$$x_2 = \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}x'_1 + \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}x'_2. \quad (2.3)$$

Po dosazení (2.2) a (2.3) do (2.1) a úpravách dostáváme kanonický tvar rovnice kvadriky napětí

$$-\frac{x_1'^2}{\frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}}} + \frac{x_2'^2}{\frac{\sqrt{2}+1}{2+\sqrt{2}}} = 1.$$

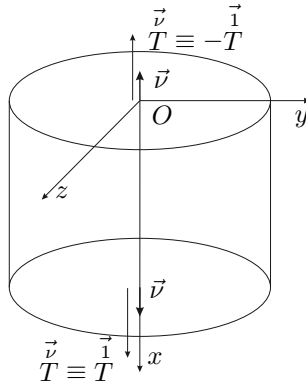
Nezapomeňme, že jsme danou úlohu řešili v řezu pro $z=0$ ($x_3 = 0$), tedy naše „kuželosečka“ je vlastně hyperbolickou válcovou plochou.

Úloha 3. (převzato z [5]) Odvoďte tvar tenzoru napětí pro tyč s kruhovým průřezem (válec) namáhanou čistým (jednoduchým) tahem.

ŘEŠENÍ: Soustavu souřadnou zvolíme tak, jak je naznačeno na (obr. 2).

Předpokládáme, že na plášti válce je vnější napětí nulové a na podstavách válce působí vnější čisté tahové napětí, které má podél celé plochy konstantní velikost rovnu F/S , kde F je velikost tahové síly, S je plocha podstavy. Příslušné napětí označíme \vec{T} . Pro celou horní podstavu tedy platí

$$\vec{T} \equiv -\vec{1}, \quad \vec{\nu} = (-1, 0, 0).$$



Obr. 2: K úloze 3.

Pro spodní podstavu analogicky

$$\vec{T} \equiv \vec{T}^1, \quad \vec{\nu} = (1, 0, 0).$$

Ve zvolené soustavě souřadné má tedy vektor \vec{T} horní podstavu složky

$$\vec{T} = \left(-\frac{F}{S}, 0, 0 \right)$$

a na spodní podstavě

$$\vec{T} = \left(\frac{F}{S}, 0, 0 \right).$$

Pro horní podstavu platí okrajové podmínky [8]

$$\vec{T}_i^\nu = \tau_{ij} \nu_j, \quad (3.1)$$

což po rozepsání dává

$$-\frac{F}{S} = \vec{T}_1^\nu = \tau_{11} \nu_1 + \tau_{12} \nu_2 + \tau_{13} \nu_3,$$

$$0 = \vec{T}_2^\nu = \tau_{21} \nu_1 + \tau_{22} \nu_2 + \tau_{23} \nu_3,$$

$$0 = \vec{T}_3^\nu = \tau_{31} \nu_1 + \tau_{32} \nu_2 + \tau_{33} \nu_3.$$

Tedy

$$\tau_{11} = \frac{F}{S}, \quad \tau_{21} = 0, \quad \tau_{31} = 0.$$

Zcela analogický výsledek obdržíme pro spodní podstavu, při použití

$$\vec{T} = \left(\frac{F}{S}, 0, 0 \right), \quad \vec{\nu} = (1, 0, 0).$$

Hodnoty dalších složek tenzoru vyplynou z následujících úvah. Na válcové ploše má vektor normály $\vec{\nu}$ nulovou 1. složku a alespoň 1 ze složek ν_2, ν_3 nenulovou. Obecně $\vec{\nu} = (0, \nu_2, \nu_3)$ a vektor $\vec{T} = (0, 0, 0)$ (dle předpokladů). Z rovnice (3.1) tedy na plášti dostaneme

$$0 = \tau_{22}\nu_2 + \tau_{23}\nu_3, \quad (3.2)$$

$$0 = \tau_{32}\nu_2 + \tau_{33}\nu_3.$$

Při vyšetřování tahu můžeme zanedbat objemové síly \vec{G} vzhledem k silám napětí. Z rovnic rovnováhy kontinua [8]

$$\frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + G_i = 0 \quad (3.3)$$

tudíž plyne

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{33}}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Tyto podmínky lze splnit pouze za předpokladu, že $\tau_{ij}(x_i) = \tau_{ij}$ tj., že složky tenzoru napětí jsou konstantní v celém válci. Toho využijeme právě při řešení soustavy (3.2). Pro libovolnou kombinaci ν_2 a ν_3 musí být levé strany obou rovnic identicky rovny 0, což při zachování konstantnosti τ_{ij} lze splnit pouze v případě $\tau_{22} = \tau_{32} = \tau_{33} \equiv 0$.

Tedy výsledný tenzor napětí má tvar

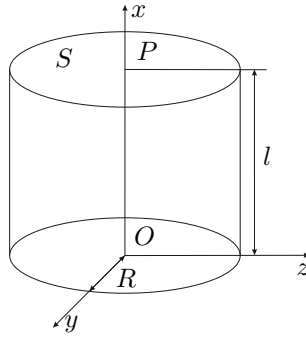
$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{F}{S} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Úloha 4. (převzato z [5]) Určete tenzor napětí v zavěšeném válci, u něhož *nezanedbáváme* vlastní hmotnost. Pro jednoduchost zvolme kruhový průřez a válec nechtě je homogenní ($\rho = \text{konst.}$) o výšce l a ploše podstavy S .

ŘEŠENÍ: Soustavu souřadnou zvolíme dle (obr. 3). Válec je upevněn tak, že jeho osa má směr tíhové síly \vec{G} (směr osy x) a bod P , v němž je upevněn, je průsečíkem osy a horní podstavy.

$$\vec{G} = (-\rho g, 0, 0). \quad (4.1)$$

Vnější síly působící na válec jsou objemová tíhová síla a plošné síly na povrchu válce. Na plášti válce a na spodní podstavě jsou vnější plošné síly a tedy i příslušné vektory napětí nulové. Na horní podstavě působí v bodě závěsu síla



Obr. 3: K úloze 4.

\vec{F} míří v kladném směru osy x (reakce závěsu). Její velikost je $|\vec{F}| = GV$, kde V je objem válce. Toto diskrétní rozložení sil na horní podstavě (síla působí pouze v P) nahradíme dle *Saint-Venantova* principu (dále jen *S-V princip*) rozložením pro výpočet výhodnějším. Předpokládejme, že na horní podstavě působí napěťový vektor konstantní velikosti $|\vec{T}| = \rho gl$, mířící v kladném směru x . Velikost celkové síly, působící na podstavu je $|\vec{T}|S = \rho glS = \rho gV = GV$ a je shodná s velikostí síly \vec{F} . Na povrchu válce tedy působí vnější napěťové síly. Na horní podstavě

$$\vec{T} = (\rho gl, 0, 0),$$

na zbytku povrchu

$$\vec{T} = (0, 0, 0).$$

Okrajové podmínky [8]

$$\vec{T}_i = \tau_{ij} \nu_j$$

získáme analogicky jako v úloze 3, plyne z nich na plášti válce

$$\tau_{22} = \tau_{32} = \tau_{33} = 0, \quad (4.2)$$

na spodní podstavě ($x = 0$)

$$\tau_{11} = \tau_{12} = \tau_{13} = 0, \quad (4.3)$$

na horní podstavě ($x = l$)

$$\tau_{11} = \rho gl, \quad \tau_{12} = \tau_{13} = 0. \quad (4.4)$$

Rovnice rovnováhy kontinua [8] mají po dosazení za \vec{G} z (4.1) tvar

$$\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial z} - \rho g = 0,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{33}}{\partial z} &= 0.\end{aligned}\tag{4.5}$$

Předpokládejme, že τ_{ij} různá od τ_{11} , která jsou nulová na hraničních plochách válce, jsou nulová i v celém objemu válce. Proto jsou poslední dvě rovnice (4.5) splněny identicky a první rovnice dává

$$\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} = \rho g \Rightarrow \tau_{11} = \rho g x + f(y, z).\tag{4.6}$$

Dle (4.3) musí být $\tau_{11} = 0$ pro všechny body spodní podstavy, tj. pro

$$x = 0, \quad \forall y, z : y^2 + z^2 \leq R.$$

Na horní podstavě, tj. pro

$$x = l, \quad \forall y, z : y^2 + z^2 \leq R,$$

je $\tau_{11} = \rho g l$. Abychom splnili tyto podmínky, musíme v (4.6) položit $f(y, z) \equiv 0$, tedy

$$\tau_{11} = \rho g x, \quad \tau_{ij} = 0, \quad i \neq 1, j \neq 1.$$

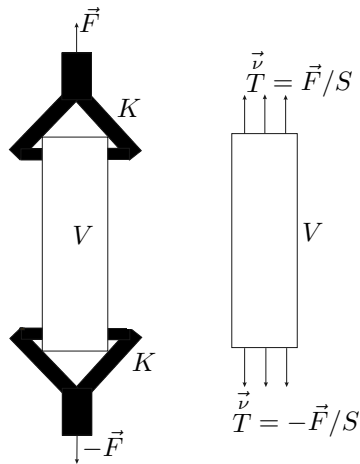
Tedy řešení

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} \rho g x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\tag{4.7}$$

splňuje podmínky rovnováhy kontinua i okrajové podmínky $\overset{\nu}{T}_i = \tau_{ij} \nu_j$ a splňuje i podmínky kompatibility [8]. Dá se ukázat, že daná úloha má při splnění uvedených podmínek jediné řešení a to právě (4.7).

POZNÁMKA: *Saint-Venantův princip* :

Slovní vyjádření by mohlo znít například takto [5]. Stav napětí a deformace v místech tělesa dostatečně vzdálených od povrchu na kterém působí vnější síly, je téměř stejný, nahradíme-li jedno rozložení sil jiným o stejné výsledné síle a momentu sil (rozložením staticky ekvivalentním). Například při běžné tahové zkoušce, kdy na vzorek V upevněný ve svorkách K působíme tahovými silami \vec{F} a $-\vec{F}$ (obr. 4). Dle *S-V principu* lze zanedbat vliv svorek na způsob přenosu sil \vec{F} a $-\vec{F}$ na vzorek. Napětí ve vzorku V , v dostatečné vzdálenosti od jeho konců, pokládáme za stejné, jaké by bylo způsobeno napěťovým vektorem \vec{T} , jehož velikost by na obou čelních plochách vzorku byla konstantní a rovna F/S , kde S je plocha průřezu vzorku. Směr a orientace vektoru \vec{T} na každé z čelních ploch splývá se skutečně působícími silami \vec{F} a $-\vec{F}$ (obr. 4).



Obr. 4: K úloze 4.

Úloha 5. Tuto úlohu doporučuji řešit až po seznámení se s výsledky úlohy 10. Pro situaci z úlohy 10 sestavte tenzor napětí.

ŘEŠENÍ: Zanedbáme-li vliv tíhové síly, potom jediná objemová síla působící na tyč je

$$\vec{G} = \frac{d\vec{F}}{dV}.$$

Z (10.1) plyne

$$\vec{G} = \frac{d\vec{F}}{S dx} = (\rho\omega^2 x, 0, 0).$$

Nyní si všimněme napěťových sil. Pro $x=0$, y , z libovolné, plyne z rovnic (3.1) pro $\vec{\nu} = (-1, 0, 0)$

$$T_1^\nu = -\frac{\omega^2 \rho l^2}{8} = -\tau_{11}, \quad (5.1)$$

$$T_2^\nu = 0 = T_3^\nu.$$

To se dá chápat tak, že v místě uchycení ($x=0$) působí na polovinu tyče síla \vec{T} , rovná reakci uchycení (obr. 5), která ji „natahuje“.



Obr. 5: K úloze 5.

Pro $x = l/2, y, z$ libovolné, $\vec{\nu} = (1, 0, 0)$, je síla působící na podstavu nulová, takže, opět z (3.1), plyne

$$\tau_{11} = 0. \quad (5.2)$$

Na plášti válce žádné vnější síly nepůsobí, proto stejně jako v úloze 4 předpokládáme

$$\tau_{ij} \equiv 0, \quad i \neq 1, j \neq 1. \quad (5.3)$$

Dle rovnic rovnováhy kontinua (3.3), s ohledem na (5.3), platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} &= -\rho\omega^2 x, \\ \tau_{11} &= -\rho\omega^2 \frac{x^2}{2} + f(y, z). \end{aligned} \quad (5.4)$$

S ohledem na (5.1) platí pro $x = 0, \forall y, z$

$$\frac{\rho\omega^2 l^2}{8} \equiv f(y, z).$$

Díky (5.2) platí pro $x = l/2, \forall y, z$

$$0 = -\rho\omega^2 \frac{l^2}{8} + f(y, z),$$

což také odpovídá

$$f(y, z) \equiv \frac{\rho\omega^2 l^2}{8}.$$

Takže výsledný tvar tenzoru napětí

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= \frac{\rho\omega^2}{2} \left(\frac{l^2}{4} - x^2 \right), \\ \tau_{ij} &\equiv 0, \quad i \neq 1, j \neq 1. \end{aligned}$$

Tenzor deformace

Úloha 6. (převzato z [5]) Určete význam nediagonálních složek tenzoru malé deformace [8].

ŘEŠENÍ: Pro jednoduchost budeme uvažovat rovinnou deformaci, tj. deformaci popsanou rovnicemi

$$y_i = y_i(x_j), \quad i = 1, 2 \quad . \\ j = 1, 2$$

Potom tenzor malých deformací e_{ij} má jen složky $e_{11}, e_{22}, e_{12} = e_{21}$. Pro naše potřeby budeme uvažovat deformaci, při které $e_{11} = e_{22} = 0$. Z definice tenzoru malých deformací plyne

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \neq 0. \quad (6.1)$$

Budeme dále vyšetřovat, kam při deformaci popsané tenzorem o složkách $e_{11} = e_{22} = 0, e_{12} \neq 0$, přejde element původně rovnoběžný s osou x_1 . Takový element, označme ho dx^I , má složky $(dx_1^I, 0)$. Složky, jemu po deformaci odpovídajícího elementu (označme ho dy^I), určíme z rovnic [8]

$$dy_j^I = dx_j + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dx_i. \quad (6.2)$$

Pro dy_1^I platí

$$dy_1^I = dx_1^I + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1^I + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2^I = dx_1^I,$$

protože $dx_2^I = 0$ a z (6.1) i $\partial u_1/\partial x_1 = 0$.

Podobně pro dy_2^I

$$dy_2^I = dx_2^I + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1^I + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2^I = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1^I,$$

opět $dx_2^I = 0$ a z (6.1) i $\partial u_2/\partial x_2 = 0$.

Element $dx^I = (dx_1^I, 0)$ tedy, při námi uvažované deformaci, přejde na

$$dy^I = \left(dx_1^I, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1^I \right).$$

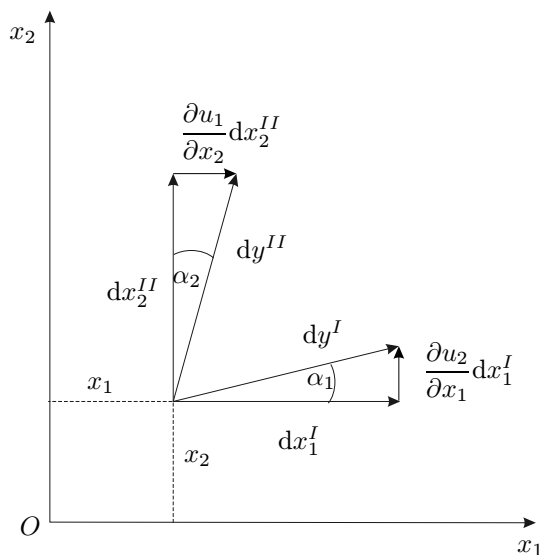
Analogicky zjistíme, kam, při uvažované deformaci, přejde element $dx^{II} = (0, dx_2^{II})$. Před deformací byl rovnoběžný s osou x_2 . Z rovnic (6.2) dostáváme pro dy^{II}

$$\begin{aligned} dy_1^{II} &= dx_1^{II} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1^{II} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2^{II} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2^{II}, \\ dy_2^{II} &= dx_2^{II} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1^{II} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2^{II} = dx_2^{II}. \end{aligned}$$

$dx^{II} = (0, dx_2^{II})$ tedy deformací přejde na

$$dy^{II} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2^{II}, dx_2^{II} \right).$$

Všechny čtyři vektory $dx^I, dx^{II}, dy^I, dy^{II}$ jsou naznačeny na (obr. 6).



Obr. 6: K úloze 6.

Pro úhel α_1 mezi směry vektorů dx^I a dy^I platí

$$\tan \alpha_1 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1}. \quad (6.3)$$

Pro α_2 úhel mezi směry vektorů dx^{II} a dy^{II}

$$\tan \alpha_2 = \frac{\partial u_1}{\partial x_2}. \quad (6.4)$$

Sečtením (6.3) a (6.4) dostáváme

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \tan \alpha_1 + \tan \alpha_2,$$

což, s užitím definice složky $e_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)$ a vztahu $\tan \alpha \approx \alpha$ pro malé α , dává

$$e_{12} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}. \quad (6.5)$$

Vztah (6.5) lze tedy vyjádřit: Smíšená složka tenzoru malé deformace e_{12} je rovna polovině úhlu $\alpha_1 + \alpha_2$, o který se deformací změní úhel mezi elementy původně původně rovnoběžnými s první a druhou osou kartézské soustavy souřadné. Úhel $\alpha_1 + \alpha_2$ se nazývá *úhel smyku*.

Úloha 7. (převzato z [5]) Pro pohyb kontinua zadaný rovnicemi

$$\begin{aligned} y_1 &= kx_2t + x_1, \\ y_2 &= x_2, \\ y_3 &= x_3, \end{aligned} \quad (7.1)$$

sestavte tenzor konečné deformace a tenzor malé deformace.

ŘEŠENÍ: Pro pohyb (7.1) určíme vektor posunutí, jehož složky jsou

$$u_i = y_i - x_i,$$

konkrétně

$$\begin{aligned} u_1 &= kx_2t, \\ u_2 &= 0, \\ u_3 &= 0. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Tenzor konečné deformace byl zaveden vztahem [8]

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right). \quad (7.3)$$

Tenzor malé deformace [8] vznikne zanedbáním kvadratických členů v (7.3), tedy

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (7.4)$$

Rozepsáním (7.3) dostáváme

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12} &= \varepsilon_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right), \\ \varepsilon_{13} &= \varepsilon_{31} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right), \\ \varepsilon_{23} &= \varepsilon_{32} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right), \\ \varepsilon_{11} &= \frac{1}{2} \left[2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (7.5)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{22} &= \frac{1}{2} \left[2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)^2 \right], \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{2} \left[2 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)^2 \right].\end{aligned}$$

Dosadíme-li (7.2) do (7.5) dostáváme

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0, \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{2} k^2 t^2, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} kt.$$

Při zanedbání kvadratických členů

$$e_{11} = e_{33} = e_{13} = e_{23} = e_{22} = 0, \quad e_{12} = \frac{1}{2} kt.$$

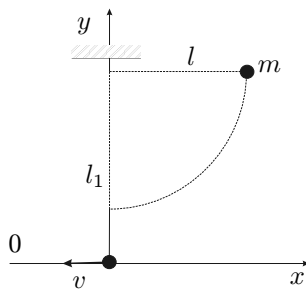
Jak je vidět z výsledků, pouze pro velmi malá t lze deformace při pohybu (7.1) popsat tenzorem malé deformace (tj. zanedbat ε_{22}), v obecném případě vede pohyb (7.1) k velkým deformacím kontinua.

POZNÁMKA: Rovnice (7.1) popisují velmi často uvažovaný případ proudění tekutiny, při kterém rychlost vzrůstá rovnoměrně ve směru kolmém na směr pohybu tekutiny. Například, proudění tekutiny mezi dvěma deskami, první pevná a druhá se pohybuje rychlostí v . Rychlost vrstev tekutiny, těsně u desek je shodná s rychlostí desek a mezi nimi se rychlost tekutiny v mění rovnoměrně.

Zobecněný Hookův zákon

Úloha 8. (převzato z [7]) Závaží je zavěšeno na gumovém vlákně, které má délku l v nezatíženém stavu. Závaží vychýlíme o 90° (bez napínání vlákna) a pustíme. Při průchodu vlákna svislou polohou je jeho délka l_1 . Určete rychlost závaží v tomto okamžiku. Hmotnost vlákna zanedbejte.

ŘEŠENÍ: Situace je zachycena na (obr. 7). Nulovou hladinu potenciální energie zvolíme ve vzdálenosti l_1 od bodu závěsu. Úlohu můžeme řešit na základě ener-



Obr. 7: K úloze 8.

getických úvah. Soustavu považujeme za izolovanou. Při počátečním vychýlení získá soustava v tíhovém poli Země potenciální energii. Ta se během pohybu mění v jiné formy – přesněji v kinetickou energii závaží a potenciální energii deformovaného vlákna. Situaci popisuje rovnice

$$mgl_1 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}F(l_1 - l), \quad (8.1)$$

kde F je velikost celkové síly působící na závaží při průchodu dolní úvratí. V tomto okamžiku působí na závaží síla tíhová a síla odstředivá. Obě mají týž směr, proto stačí skalární zápis

$$F = mg + m\frac{v^2}{l_1}. \quad (8.2)$$

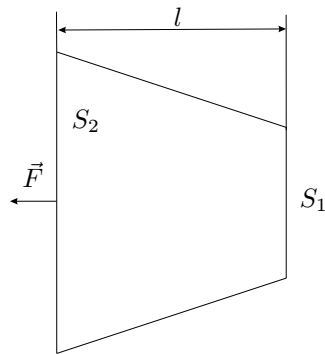
Po dosazení (8.2) do (8.1) a úpravách získáme rovnici

$$gl_1 = \frac{1}{2} \left[v^2 + \left(g + \frac{v^2}{l_1} \right) (l_1 - l) \right]. \quad (8.3)$$

Pro hledanou rychlost tedy získáme vyjádření

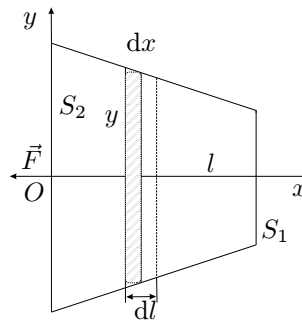
$$v = \sqrt{\frac{gl_1(l_1 + l)}{2l_1 - l}}.$$

Úloha 9. (převzato z [7]) Určete prodloužení tyče tvaru komolého kužele délky l o základnách S_1 a S_2 , která je napínána silou \vec{F} (obr. 8).



Obr. 8: K úloze 9.

ŘEŠENÍ: Zvolíme soustavu souřadnou dle (obr. 9). Pro délkový element dx lze



Obr. 9: K úloze 9.

z elementárního Hookova zákona [8] určit prodloužení dl

$$dl = \frac{F dx}{ES}.$$

Celkové prodloužení určíme integrací dl přes délku tyče. Platí

$$S_1 = \pi y_1^2, \quad S_2 = \pi y_2^2,$$

$$y = \frac{(y_2 - y_1)}{l} x + y_1,$$

kde y je průběh poloměru tyče.

$$S = \pi y^2 = \pi \left[\frac{(y_2 - y_1)}{l} x + y_1 \right]^2,$$

$$\Delta l = \int_0^l \frac{F dx}{ES} = \frac{F}{E\pi} \int_0^l \frac{dx}{[Ax + y_1]^2}, \quad (9.1)$$

kde A jsme označili výraz $(y_2 - y_1)/l$. Nyní zavedeme substituci

$$Ax + y_1 = z, \quad A dx = dz.$$

Integrál (9.1) přejde na tvar

$$\Delta l = \frac{F}{E\pi A} \int_{y_1}^{y_2} \frac{dz}{z^2}. \quad (9.2)$$

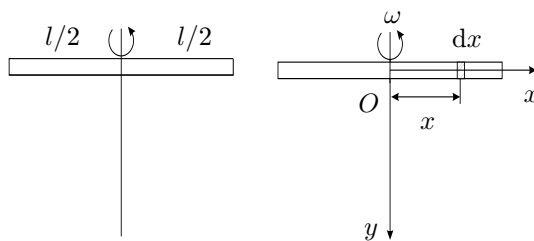
Po integraci (9.2) a dosazení za A dostáváme

$$\Delta l = \frac{Fl}{\pi(y_2 - y_1)E} \left(\frac{1}{y_1} - \frac{1}{y_2} \right) = \frac{Fl}{\pi(y_2 - y_1)E} \frac{(y_2 - y_1)}{y_1 y_2} = \frac{Fl}{E\sqrt{S_1 S_2}},$$

kde jsme za y_1, y_2 dosadili z vyjádření S_1, S_2 .

Úloha 10. (převzato z [7]) Vodorovná ocelová tyč délky $l = 150$ cm se otáčí kolem svislé osy (obr. 11) procházejícím jejím středem. Při jaké frekvenci otáčení se tyč přetrhne? Mez pružnosti materiálu $\sigma_p = 600$ MPa, hustota tyče $\rho = 7,8$ g · cm⁻³.

ŘEŠENÍ: Zvolíme soustavu souřadnou dle (obr. 11).



Obr. 11: K úloze 10.

Na element dx , ve vzdálenosti x od osy otáčení, působí odstředivá síla

$$dF = x\omega^2 dm, \quad (10.1)$$

kde dm je hmotnostní element $dm = \rho S dx$.

Celkovou sílu působící v místě uchycení tyče určíme integrací (10.1) v mezích od 0 do $l/2$

$$F = \int_0^{\frac{l}{2}} x\omega^2 \rho S dx = \omega^2 \rho S \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{l}{2}} = \omega^2 \rho S \frac{l^2}{8}. \quad (10.2)$$

Aby došlo k přetržení tyče, musí napětí v ní dosáhnout (přesáhnout) pevnost materiálu, tj. $\sigma = F/S = \sigma_p$. Za F dosadíme z (10.2)

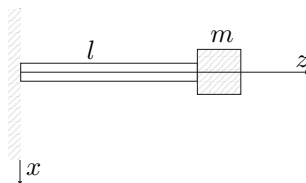
$$\frac{\omega^2 \rho S l^2}{8S} = \sigma_p \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1}{\pi l} \sqrt{\frac{2\sigma_p}{\rho}}.$$

Po dosazení číselných hodnot obdržíme pro mezní frekvenci hodnotu asi 83,2 Hz. Takže k přetržení tyče dojde asi při frekvenci otáčení $f=84$ Hz.

Úloha 11. S využitím výsledků řešení čistého ohybu tyče [8], určete vlastní frekvenci ω_0 kmitů:

a) (převzato z [4]) Kovové tyče obdélníkového průřezu s rozměry a, b a délky l , která je jedním koncem vetknuta a k jejímu volnému konci je upevněno závaží o hmotnosti m (obr. 12). Předpokládejte, že hmotnost tyče $M \ll m$ a rozměry závaží jsou zanedbatelné.

b) Kovové tyče kruhového průřezu o poloměru r . Další předpoklady jsou stejné jako v části a).



Obr. 12: K úloze 11.

ŘEŠENÍ: a) Z výsledků z výše uvedeného zdroje plyne pro výchylku na konci tyče

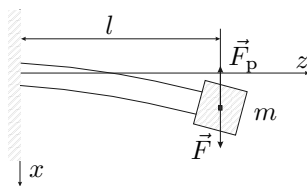
$$x(l) = \frac{Fl^3}{3EI_y}, \quad (11.1)$$

kde E je Youngův modul pružnosti materiálu, F je vnější síla působící na konci tyče a $I_y = \int_S x^2 dS$ je moment setrvačnosti průřezu tyče vzhledem k ose y .

Jestliže na konci tyče působí vnější síla F , způsobující výchylku x , a tyč je v rovnováze, musí proti směru výchylky x působit síla pružnosti (stejně velikosti a opačného směru než F) snažící se tyč narovnat – označme ji F_p (obr. 13). To znamená, že situace je analogická jako u lineárního harmonického oscilátoru. Jestliže přestane působit síla F , tyč se rozkmitá.

Pro danou situaci sestavíme diferenciální rovnici plynoucí z 2. Newtonova zákona

$$m\ddot{x} = F_p, \quad (11.2)$$



Obr. 13: K úloze 11.

$$m\ddot{x} = -F. \quad (11.3)$$

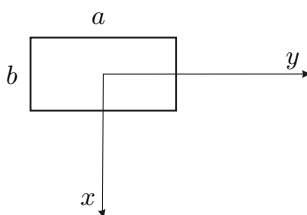
Dosadíme-li do (11.3) ze vztahu (11.1) získáme rovnici

$$\ddot{x} + \frac{3I_y E}{ml^3} x = 0. \quad (11.4)$$

Výraz $3I_y E/ml^3$ je kladný a můžeme ho označit jako ω_0^2 . Z tohoto plyne

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3I_y E}{ml^3}}. \quad (11.5)$$

Nyní zbývá jen dopočítat I_y (obr. 14).



Obr. 14: K úloze 11.

$$I_y = \int_S x^2 dS = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2 dx dy = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy = \frac{1}{3} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{b^3}{4} dy = \frac{ab^3}{12}. \quad (11.6)$$

Dosazením (11.6) do (11.5) dostáváme

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{ab^3 E}{4ml^3}}.$$

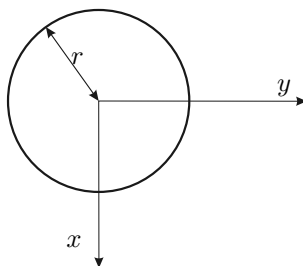
b) I v tomto případě je postup zcela analogický. Určíme

$$I_y = \int_S x^2 dS. \quad (11.7)$$

Protože se jedná o kruhově symetrický problém, zavedeme polární souřadnice (obr. 15)

$$x = \rho \cos \varphi,$$

$$y = \rho \sin \varphi.$$



Obr. 15: K úloze 11.

Dostáváme

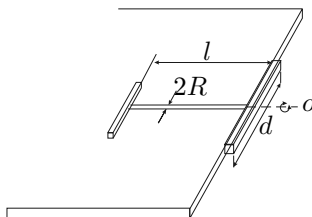
$$I_y = \int_S \rho^3 \cos^2 \varphi \, d\rho \, d\varphi = \int_0^r \rho^3 \, d\rho \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi = \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^r \left[\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4} \right]_0^{2\pi} = \frac{\pi r^4}{4}. \quad (11.8)$$

Výraz (11.8) dosadíme do (11.5) a obdržíme

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3\pi r^4 E}{4ml^3}}.$$

Úloha 12. S využitím výsledků pro torzi kruhového válce [8] určete frekvenci vlastních kmitů ω_0 torzního kyvadla „MOTÝL“.

ŘEŠENÍ: Nejdříve popíšeme torzní kyvadlo „motýl“. Dá se realizovat více způsoby. Jeden z nich je na (obr. 16). K výrobě stačí dvě tyče obdélníkového průřezu,



Obr. 16: K úloze 12.

do jejichž středu se vyvrtají otvory. Do těchto otvorů se potom napevno vtlačí jednotlivé konce drátu. Kyvadlo klademe na stůl, jedna (kratší) tyč leží na stole,

druhá (delší) přečnává přes okraj stolu. Tato přečnávající tyč vykonává torzní kmity, kolem osy téměř totožné s osou drátu. Tyč na stole je fixována pouze vlastní vahou.

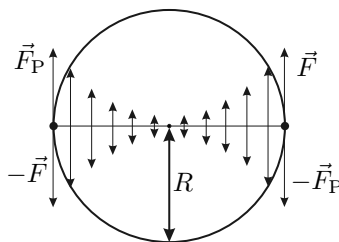
Z teorie [8] plyne, že úhel φ stočení válce, způsobeného silovým momentem \vec{M} , vypočítáme jako

$$\varphi = \frac{Ml}{\mu I_p}, \quad (12.1)$$

kde M je silový moment působící na spodní podstavě válce, l je výška válce, μ je modul pružnosti ve smyku daného materiálu válce, I_p je polární moment setrvačnosti kruhového průřezu

$$I_p = \int_S (x^2 + y^2) dS = \frac{\pi R^4}{2}.$$

Další úvahy budou analogické jako v úloze 11. Působí-li na dolní podstavu válce dvojice sil způsobující silový moment \vec{M} , je-li válec v rovnováze, musí být tento moment \vec{M} vyrovnán momentem sil pružnosti \vec{M}_P , opačného směru a stejné velikosti – rovnice (12.2) (obr. 17)



Obr. 17: K úloze 12.

$$-\vec{M} = \vec{M}_P. \quad (12.2)$$

Sestavíme pohybovou rovnici

$$I\ddot{\varphi} = M_P, \quad (12.3)$$

kde I je moment setrvačnosti kmitajícího tělesa vzhledem k ose o . Do této rovnice dosadíme z (12.2), dostáváme

$$I\ddot{\varphi} = -M. \quad (12.4)$$

Využijeme-li v (12.4) vztahu (12.1), dostáváme konečné vyjádření

$$\ddot{\varphi} + \frac{\mu I_p}{Il} \varphi = 0. \quad (12.5)$$

Označíme-li v (12.5) kladnou konstantu $\mu I_p / Il = \omega_0^2$, dostáváme pro ω_0 vyjádření

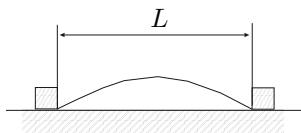
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\mu I_p}{Il}}.$$

Pro námi uvažovaný případ je I moment setrvačnosti tyče, vzhledem k ose otáčení jdoucí těžištěm, kolmo k její podélné ose. Tedy $I = md^2/12$, kde d je délka tyče. Finálně tedy pro ω_0 dostáváme

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{6\pi\mu R^4}{lmd^2}}.$$

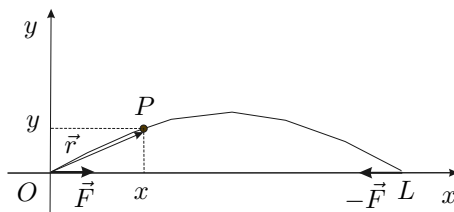
Úloha 13. (převzato z [4]) Ocelové pravítko délky $l=30$ cm, šířky $a=1,5$ cm a tloušťky $b=0,08$ cm se oběma konci opírá o dvě lišty přibité ke stolu ve vzdálenosti $L=29$ cm (obr. 18).

- Jakou křivku vytváří ohnuté pravítko?
- Jakou silou působí pravítko na lišty?



Obr. 18: K úloze 13.

ŘEŠENÍ: Na problém se můžeme dívat následovně. Na původně přímé pravítko začaly na koncích působit dvě opačné síly, které způsobí vybočení pravítka a tento stav udržují (obr. 19). V souřadnicové soustavě na obr. 19 označme souřad-



Obr. 19: K úloze 13.

nice bodu $P = [x, y(x)]$. V bodě P působí ohýbající silový moment, způsobený silou \vec{F}

$$\vec{M}(P) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ F & 0 & 0 \end{vmatrix} = -Fy\vec{k}. \quad (13.1)$$

Protože pravítko je v rovnováze, je moment (13.1) vyrovnán opačným momentem sil pružnosti. Použitím zcela analogických úvah, jako v odvození čistého ohybu tyče (viz. [8]) pro náš případ dostáváme

$$M_z^{P1} = \frac{E}{R} \int_S y^2 dS = \frac{E}{R} I_z. \quad (13.2)$$

Momenty (13.1) a (13.2) se při statické rovnováze vyrovnávají, proto musí platit

$$\frac{EI_z}{R} = Fy \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{R} = \frac{F}{EI_z}y, \quad (13.3)$$

kde $1/R$ je křivost křivky vytvořené pravítkem. Je známo (viz. [9]), že křivost rovinné křivky je dána vztahem

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (13.4)$$

V našem případě můžeme zanedbat člen $(dy/dx)^2$ proti 1, protože uvažujeme pouze malé průhyby. Výraz (13.4) tedy přechází na tvar

$$\frac{1}{R} = -\frac{d^2y}{dx^2}, \quad (13.5)$$

kde uvažujeme záporné znaménko, protože křivost směřuje v záporném směru osy y . Dosazením (13.5) do (13.3) dostáváme

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{F}{EI_z}y = 0. \quad (13.6)$$

Což je diferenciální rovnice sinusoidy, která musí navíc splňovat okrajové podmínky

$$y(0) = 0, \quad y(L) = 0.$$

Řešením rovnice (13.6), s využitím okrajových podmínek, dostáváme vyjádření

$$y = K \sin \frac{\pi x}{L}. \quad (13.7)$$

Pro výraz π/L dále platí

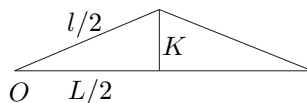
$$\frac{\pi}{L} = \sqrt{\frac{F}{EI_z}}, \quad (13.8)$$

z čehož dostáváme pro sílu, působící na koncích

$$F = \frac{\pi^2 EI_z}{L^2}. \quad (13.9)$$

Konstantu K v (13.7), která má význam maximální výšky ohnutého pravítka, určíme následovně. Jde o malé průhyby, proto se ohnutá polovina pravítka nebude příliš lišit od úsečky (obr. 20).

$$K \approx \frac{1}{2} \sqrt{(l^2 - L^2)} \doteq 3,8 \text{ cm.}$$



Obr. 20: K úloze 13.

Zbývá tedy ještě určit sílu působící na lišty. V (13.9) má E tabulkovou hodnotu 220 GPa a I_z určíme pro naše rozměry pravitka z (11.6). Po dosazení tedy dostáváme

$$F = \frac{\pi^2 \cdot 220 \cdot 10^9 \cdot \frac{1,5 \cdot 10^{-2} (8 \cdot 10^{-4})^3}{12}}{(0,29)^2} \text{ N} \doteq 16,5 \text{ N}.$$

Tyto výsledky platí ovšem, dle našich předpokladů, pouze pro malé ohyby, tj., když je dy/dx zanedbatelně malé. Pokud tomu tak není, musíme ponechat (13.4) v úplném tvaru. Řešení této rovnice je pak třeba hledat numericky. V tom případě je výhodnější zavést nové proměnné popisující křivku. S -vzdálenost podél křivky a θ -úhel sklonu tečny ke křivce vzhledem ke kladnému směru osy x , tedy $P = [S, \theta(S)]$. Křivost je rychlost změny úhlu θ se vzdáleností

$$\frac{1}{R} = \frac{d\theta}{dS}.$$

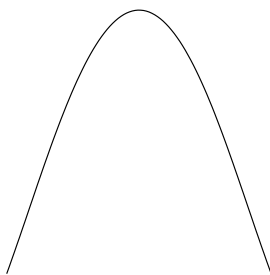
Potom (přesný) výraz (13.3) lze psát jako

$$\frac{d\theta}{dS} = -\frac{F}{EI_z} y.$$

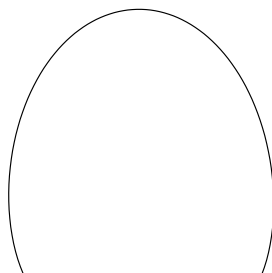
Jestliže tento vztah zderivujeme dle S a (dy/dS) nahradíme sinem úhlu θ , dostaneme

$$\frac{d^2\theta}{dS^2} = -\frac{F}{EI_z} \sin \theta. \quad (13.10)$$

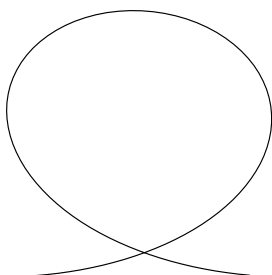
Výsledkem řešení této rovnice jsou křivky zvané *křivky elastiky*. Na (obr. 21) až (obr. 23) jsou znázorněna některá řešení pro rostoucí sílu F . Výpis programu pro numerické řešení je uveden v Dodatku (str. 58).



Obr. 21: K úloze 13.



Obr. 22: K úloze 13.



Obr. 23: K úloze 13.

POZNÁMKA: Síla F (13.9) se někdy nazývá *Eulerova síla*. Je to kritická hodnota síly působící na konec tyče, která způsobí prohnutí. Pokud je působící síla menší než *Eulerova síla*, k prohnutí vůbec nedojde. Když ji naopak jen málo překročí, dojde k vybočení tyče. Například, když tíha nákladu v prvním poschodí budovy překročí *Eulerovu sílu* pro podpůrné sloupy, budova se zhroutí. Tato fakta můžeme aplikovat v následujícím příkladě.

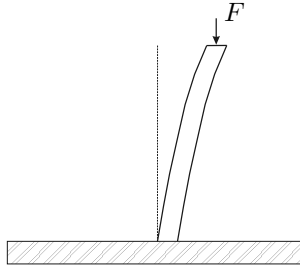
Úloha 14. (převzato z [4]) Dolní konec svislé tyče je vetknut do podlahy a na její horní konec působí svislá síla F směrem dolů. Délka tyče je L . Příčný průřez tyče má tvar obdélníku se stranami t (tloušťka) a d (šířka). Najděte Eulerovu sílu, která právě vyvolá deformaci znázorněnou na obr. 24.

ŘEŠENÍ: Jak plyne z poznámky za úlohou 13, tato síla F má význam kritické síly, proto z (13.9) dostáváme

$$F_{\text{kr}} = \frac{\pi^2 EI_z}{(2L)^2},$$

kde L je délka *neprohnuté* tyče. Vyjádříme-li ze vztahu pro kritickou sílu

$$L = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{EI_z}{F_{\text{kr}}}}$$



Obr. 24: K úloze 14.

a zaměníme-li L za l , což je libovolná délka, a F_{kr} za F dostáváme

$$F < F_{kr} \Rightarrow l > L,$$

$$F = F_{kr} \Rightarrow l = L,$$

$$F > F_{kr} \Rightarrow l < L.$$

První implikace zachycuje situaci, kdy nedochází k průhybu, poslední implikace je případ prohnutí.

Úloha 15. (převzato z [5]) S užitím výsledku (4.6) určete nejprve tenzor malé deformace e_{ij} a z něj vektor posunutí $u_j(x_i)$ pro válec z úlohy 4 deformovaný vlastní vahou.

ŘEŠENÍ: Najdeme deformace příslušné napětím (4.6). Pro homogenní izotropní těleso platí inverzní Hookův zákon [8] ve tvaru

$$e_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\tau_{ij} - \delta_{ij} \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \theta \right), \quad (15.1)$$

kde θ je stopa tenzoru τ_{ij} , λ, μ jsou *Laméovy koeficienty*.

Konstanty λ, μ v (15.1) nahradíme konstantami

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)},$$

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu},$$

kde ν je Poissonova konstanta, E je Youngův modul [8].

Dostaneme tedy tvar

$$e_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \tau_{ij} - \delta_{ij} \frac{\nu}{E} \theta. \quad (15.2)$$

Konkrétně užitím (4.6)

$$e_{11} = \frac{\rho g x_1}{E}, \quad e_{22} = e_{33} = -\frac{\nu \rho g x_1}{E}, \quad e_{12} = e_{13} = e_{23} = 0. \quad (15.3)$$

Ze složek tenzoru deformace stanovíme vektor posunutí $u_j = u_j(x_i)$. Z rovnice (7.4) dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} &= \frac{\rho g x_1}{E}, & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} &= 0, \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= -\frac{\nu \rho g x_1}{E}, & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} &= 0, \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_3} &= -\frac{\nu \rho g x_1}{E}, & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} &= 0. \end{aligned} \quad (15.4)$$

Z rovnic na levé straně systému (15.4) plyne

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\rho g x_1^2}{2E} + f_1(x_2, x_3), \\ u_2 &= -\frac{\nu \rho g x_1 x_2}{E} + f_2(x_1, x_3), \\ u_3 &= -\frac{\nu \rho g x_1 x_3}{E} + f_3(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (15.5)$$

První z rovnic na pravé straně systému (15.4) po dosazení u_1 a u_2 z (15.5) dává

$$\frac{\partial f_1(x_2, x_3)}{\partial x_2} = \frac{\nu \rho g x_2}{E} - \frac{\partial f_2(x_1, x_3)}{\partial x_1}. \quad (15.6)$$

Je-li na levé straně rovnice (15.6) funkce proměnných x_2, x_3 , může být $\partial f_2(x_1, x_3)/\partial x_1$ pouze funkcí x_3 . Označme

$$-\frac{\partial f_2(x_1, x_3)}{\partial x_1} = f_4(x_3). \quad (15.7)$$

Integrací (15.6) dostáváme

$$f_1(x_2, x_3) = \frac{\nu \rho g x_2^2}{2E} + x_2 f_4(x_3) + f_5(x_3). \quad (15.8)$$

Z druhé rovnice na pravé straně systému (15.4), dosadíme-li z (15.5), plyne

$$\frac{\partial f_1(x_2, x_3)}{\partial x_3} = \frac{\nu \rho g x_3}{E} - \frac{\partial f_3(x_1, x_2)}{\partial x_1}. \quad (15.9)$$

Opět musí být

$$-\frac{\partial f_3(x_1, x_2)}{\partial x_1} = f_6(x_2). \quad (15.10)$$

Integrací (15.9) dostáváme

$$f_1(x_2, x_3) = \frac{\nu \rho g x_3^2}{2E} + x_3 f_6(x_2) + f_7(x_2). \quad (15.11)$$

Odbočme na chvíli a odvoďme si ještě jednu užitečnou podmínku, kterou později využijeme. Jestliže z první rovnice (15.5) dosadíme za u_1 do první a druhé rovnice vpravo systému (15.4), dostáváme

$$\begin{aligned} -\frac{\partial f_1}{\partial x_2} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \Rightarrow u_2 = -x_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + v(x_2, x_3), \\ -\frac{\partial f_1}{\partial x_3} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \Rightarrow u_3 = -x_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_3} + w(x_2, x_3). \end{aligned}$$

Dosazením tohoto mezivýsledku do třetí rovnice vpravo systému (15.4) vychází

$$2x_1 \frac{\partial^2 f_1(x_2, x_3)}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial v(x_2, x_3)}{\partial x_3} + \frac{\partial w(x_2, x_3)}{\partial x_2}.$$

Zde opět na pravé straně stojí pouze funkce proměnných x_2, x_3 , proto levá strana nesmí být funkcí x_1 , tedy

$$\frac{\partial^2 f_1(x_2, x_3)}{\partial x_2 \partial x_3} = 0. \quad (15.12)$$

Z (15.7) a (15.10) plyne integrací

$$f_2(x_1, x_3) = -x_1 f_4(x_3) + f_8(x_3), \quad (15.13)$$

$$f_3(x_1, x_2) = -x_1 f_6(x_2) + f_9(x_2).$$

Z poslední rovnice pravé strany systému (15.4), s uvažováním (15.5) a (15.13), dostáváme

$$-x_1 \frac{df_4(x_3)}{dx_3} + \frac{df_8(x_3)}{dx_3} = x_1 \frac{df_6(x_2)}{dx_2} - \frac{df_9(x_2)}{dx_2}. \quad (15.14)$$

Rovnice (15.14) může být splněna pouze, jestliže

$$\frac{df_4(x_3)}{dx_3} = k_1 = -\frac{df_6(x_2)}{dx_2}, \quad (15.15)$$

$$\frac{df_8(x_3)}{dx_3} = k_2 = -\frac{df_9(x_2)}{dx_2}.$$

Tedy

$$\begin{aligned} f_4(x_3) &= k_1 x_3 + k_3, \\ f_6(x_2) &= -k_1 x_2 + k_4, \\ f_8(x_3) &= k_2 x_3 + k_5, \\ f_9(x_2) &= -k_2 x_2 + k_6, \end{aligned} \quad (15.16)$$

kde k_i pro $i = 1, \dots, 6$ jsou konstanty.

Porovnáme-li vyjádření $f_1(x_2, x_3)$ rovnicemi (15.8) a (15.11), do nichž dosadíme z (15.16), dostáváme

$$\frac{\nu \rho g x_2^2}{2E} + k_1 x_2 x_3 + k_3 x_2 + f_5(x_3) = \frac{\nu \rho g x_3^2}{2E} - k_1 x_2 x_3 + k_4 x_3 + f_7(x_2). \quad (15.17)$$

S ohledem na (15.12) musí pro $f_1(x_2, x_3)$ platit $k_1 = 0$, důsledkem čehož dostáváme (společnou konstantu jsme nazvali k_7)

$$f_5(x_3) = \frac{\nu\rho g x_3^2}{2E} + k_4 x_3 + k_7, \quad (15.18)$$

$$f_7(x_2) = \frac{\nu\rho g x_2^2}{2E} + k_3 x_2 + k_7.$$

Dosadíme-li tedy do (15.11) z (15.16) a (15.18), platí

$$f_1(x_2, x_3) = \frac{\nu\rho g}{2E} (x_2^2 + x_3^2) + k_3 x_2 + k_4 x_3 + k_7.$$

Dosazením posledního vztahu do (15.13) z (15.16) a položením $k_1 = 0$, dle (15.18), dostaneme

$$f_2(x_1, x_3) = -k_3 x_1 + k_2 x_3 + k_5,$$

$$f_3(x_1, x_2) = -k_4 x_1 - k_2 x_2 + k_6.$$

Po dosazení posledních dvou výrazů do (15.5) obdržíme vektor posunutí

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\rho g}{2E} [x_1^2 + \nu(x_2^2 + x_3^2)] + k_3 x_2 + k_4 x_3 + k_7, \\ u_2 &= \frac{-\nu\rho g x_1 x_2}{E} - k_3 x_1 + k_2 x_3 + k_5, \\ u_3 &= \frac{-\nu\rho g x_1 x_3}{E} - k_4 x_1 - k_2 x_2 + k_6, \end{aligned} \quad (15.19)$$

kde k_2 až k_7 určíme z následujících úvah. Předpokládejme dále, že válec je upevněn tak, že se nemůže otáčet kolem osy x_1 , ani kývat například v rovině $x_3 = 0$ kolem bodu závěsu P . Fakt, že válec nemůže rotovat kolem x_1 znamená například, že pro bod $(0, x_2, 0)$ je $u_3 = 0$, z čehož, dosadíme-li do (15.19), plyne $k_2 = k_6 = 0$. To, že válec nemůže kývat kolem bodu P v důsledku znamená nemožnost posunutí bodů osy x_1 ve směru x_2, x_3 , tj. pro $x_2 = x_3 = 0$ musí být $u_2 = u_3 = 0$, tedy $k_3 = k_4 = k_5 = 0$. Pro $x_1 = l, x_2 = x_3 = 0$ (bod P), musí platit i $u_1 = 0$, dostáváme tedy

$$k_7 = -\frac{\rho g l^2}{2E}.$$

Po dosazení hodnot k_2 až k_7 do (15.19) dostáváme tedy finální výsledek

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\rho g}{2E} [x_1^2 - l^2 + \nu(x_2^2 + x_3^2)], \\ u_2 &= \frac{-\nu\rho g x_1 x_2}{E}, \\ u_3 &= \frac{-\nu\rho g x_1 x_3}{E}. \end{aligned} \quad (15.20)$$

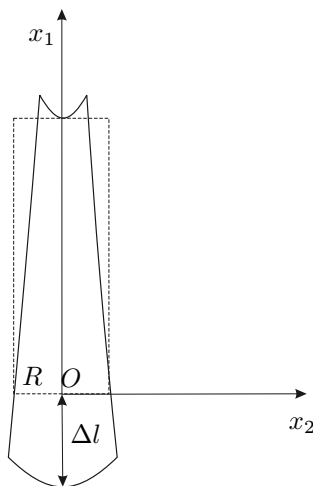
Nyní se podívejme, jak budou vypadat původně rovinné průřezy válce. Vzhledem k jeho symetrii stačí, když budeme zkoumat osový řez $x_3 = 0$. Dosadíme-li do (15.20) $x_1 = x_0$, dostáváme z $u_1 = y_1 - x_1$

$$y_1 = x_0 + \frac{\rho g}{2E} [x_0^2 - l^2 + \nu x_0^2], \quad (15.21)$$

což jsou rovnice parabol, takže ve skutečnosti se rovinný průřez změní v rotační paraboloid. Co se stane s přímkou ležící na povrchu válce (tj. $x_2 = R$)? Z (15.20) plyne

$$u_2 = -\frac{\nu \rho g x_1 R}{E} \Rightarrow y_2 = R - \frac{\nu \rho g x_1 R}{E}. \quad (15.22)$$

Znovu to tedy bude přímka, ale už nebude rovnoběžná s osou x_1 , ale bude se k ní blížit s rostoucím x_1 , to znamená, že deformovaný válec se bude směrem k horní podstavě zužovat. Tyto výsledky jsou v osovém řezu $x_3 = 0$ znázorněny na (obr. 25). Čárkovaně je naznačen nedeformovaný válec, plnou čarou jeho deformovaná podoba.



Obr. 25: K úloze 15.

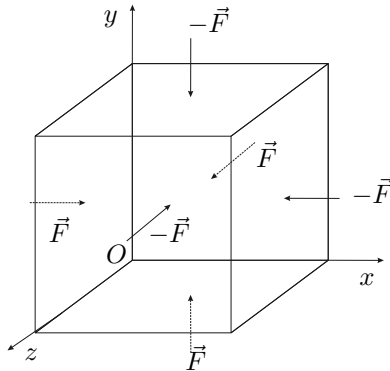
Ještě si můžeme povšimnout celkového prodloužení válce ve směru x_1 . Z první rovnice (15.20) plyne, že bod na ose válce ($x_2 = x_3 = 0$) klesne o úsek délky

$$\Delta l = \frac{\rho g}{2E} (l^2 - x_1^2).$$

Tedy střed spodní podstavě válce (počátek soustavy souřadné) klesne o

$$\Delta l = \frac{\rho g}{2E} l^2.$$

Úloha 16. Určete změnu objemu ocelové krychle o hraně 10 cm, na jejíž každou stěnu působí kolmo tlaková síla 3000 N.



Obr. 26: K úloze 16.

ŘEŠENÍ: Soustavu souřadnou zvolíme jako na (obr. 26). Změnu objemu ΔV můžeme vypočítat pomocí lineárního invariantu tenzoru deformace

$$\vartheta = \sum_{i=1}^3 e_{ii}$$

jako ϑV , neboť ϑ má význam relativní změny objemu elementu. Při určení ϑ uijeme jeho souvislosti (16.1) [8] s lineárním invariantem tenzoru napětí

$$\vartheta = \frac{1}{(3\lambda + 2\mu)} \Theta, \quad \Theta = \sum_{i=1}^3 \tau_{ii}. \quad (16.1)$$

Kde λ, μ jsou tzv. *Laméovy koeficienty*, které můžeme nahradit pomocí konstant v praxi užívaných

$$\mu = G, \quad \lambda = \frac{G(E - 2G)}{3G - E},$$

kde G je modul pružnosti ve smyku, E je Youngův modul pružnosti v tahu. Takže jedinou neznámou v (16.1) zůstává Θ , proto sestavíme tenzor τ_{ij} . Z podmínek rovnováhy kontinua (3.3), za předpokladu, že lze zanedbat objemové síly \vec{G} vzhledem k silám napětí, plyne analogicky s (3.4)

$$\tau_{ij}(x, y, z) = \tau_{ij}. \quad (16.2)$$

Tedy složky tenzoru jsou konstantní. Pro všechny stěny krychle dále musí platit okrajové podmínky (3.1), což dává

$$\begin{aligned} \text{pro } \vec{v} = (-1, 0, 0), \quad \vec{T} = \left(\frac{F}{S}, 0, 0\right), \quad & \begin{aligned} \frac{F}{S} &= -\tau_{11} + 0 + 0, \\ 0 &= -\tau_{21} + 0 + 0 \\ 0 &= -\tau_{31} + 0 + 0 \end{aligned} \\ \\ \text{pro } \vec{v} = (0, -1, 0), \quad \vec{T} = \left(0, \frac{F}{S}, 0\right), \quad & \begin{aligned} 0 &= 0 - \tau_{12} + 0, \\ \frac{F}{S} &= 0 - \tau_{22} + 0 \\ 0 &= 0 - \tau_{32} + 0 \end{aligned} \end{aligned}$$

$$\text{pro } \vec{\nu} = (0, 0, -1), \quad \vec{T} = (0, 0, \frac{F}{S}), \quad \begin{aligned} 0 &= 0 + 0 - \tau_{13} \\ 0 &= 0 + 0 - \tau_{23} \\ \frac{F}{S} &= 0 + 0 - \tau_{33} \end{aligned} .$$

Takže výsledný tenzor napětí má tvar

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} -\frac{F}{S} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{F}{S} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{F}{S} \end{pmatrix}, \quad (16.3)$$

$$\Theta = -\frac{3F}{S}. \quad (16.4)$$

Po dosazení (16.4) do (16.1) dostáváme

$$\vartheta = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{-\frac{3F}{S}}{\left[\frac{3G(E-2G)}{3G-E} + 2G \right]}. \quad (16.5)$$

Což po dosazení číselných hodnot dává

$$\Delta V = -1,7 \text{ mm}^3.$$

POZNÁMKA: Koeficient

$$\frac{-\frac{3F}{S}}{\left[\frac{3G(E-2G)}{3G-E} + 2G \right]} = \frac{1}{K}$$

dává do souvislosti působící tlak a jím vyvolanou změnu objemu. K se nazývá *modul stlačitelnosti*.

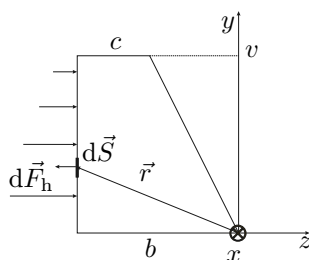
Statika tekutin

Úloha 17. (převzato z [2]) Projektovaná betonová přehradní zeď, o délce $e = 50$ m a výšce $v = 20$ m, má příčný průřez tvaru lichoběžníku, jehož svislá vnitřní strana je $v = 20$ m, vodorovná základna spodní $b = 12$ m, horní $c = 2$ m. Hustota použitého betonu je $\rho_b = 2400 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

a) Vypočítejte hydrostatickou tlakovou sílu působící na zeď, jestliže hladina vody v přehradě dosahuje horní hrany zdi.

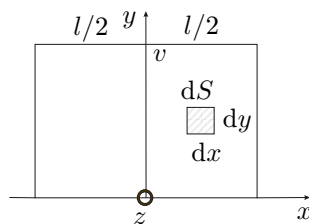
b) Přesvědčte se, jestli při zatížení hydrostatickou tlakovou silou podle a), je zajištěna stabilita přehradní zdi proti překlopení.

ŘEŠENÍ: Soustavu souřadnou zvolíme dle (obr. 27).



Obr. 27: K úloze 17.

a) Na element plochy přehradní stěny působí hydrostatická síla (obr. 28)



Obr. 28: K úloze 17.

$$d\vec{F}_h = -p d\vec{S},$$

kde p je hydrostatický tlak v hloubce $(v - y)$ pod hladinou

$$d\vec{F}_h = -(v - y)\rho g dx dy(-\vec{k}). \quad (17.1)$$

Celkovou sílu \vec{F}_h získáme integrací (17.1)

$$\vec{F}_h = \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \int_0^v (v - y)\rho g \vec{k} dx dy = \frac{1}{2}\rho g e v^2 \vec{k}.$$

Dosadíme-li číselné hodnoty

$$|\vec{F}_h| \doteq 10^8 \text{ N.}$$

b) K ověření stability, je třeba se přesvědčit, jestli výsledný klopný moment hydrostatické síly vzhledem k vnější spodní hraně (ose x) zdi je menší, než moment tíhové síly k téže hraně. Moment elementárních hydrostatických sil určíme ze vztahu

$$d\vec{M}_h = \vec{r} \times d\vec{F}_h, \quad (17.2)$$

kde \vec{r} je polohový vektor elementární plošky dS vzhledem k ose otáčení, $d\vec{F}_h$ je elementární hydrostatická síla (17.1). Celkový moment hydrostatické síly určíme integrací (17.2)

$$\begin{aligned} \vec{M}_h &= \int_S (\vec{r} \times d\vec{F}_h) = \int_S \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & y & -b \\ 0 & 0 & \rho g(v - y) dx dy \end{vmatrix} = \\ &= \int_0^v \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} y \rho g(v - y) dx dy \vec{i} = \frac{1}{6} \rho g e v^3 \vec{i}. \end{aligned} \quad (17.3)$$

Po dosazení číselných hodnot vychází

$$|\vec{M}_h| \doteq 6,7 \cdot 10^8 \text{ N} \cdot \text{m.}$$

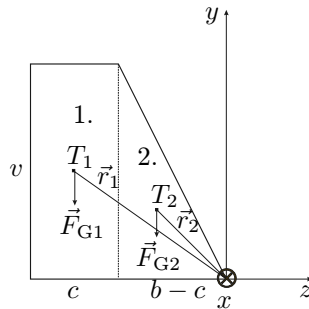
K určení momentu tíhové síly rozdělíme zeď na 2 části (obr.31).

1. na hranol obdélníkového průřezu,
2. na hranol trojúhelníkového průřezu.

Výsledný moment $\vec{M}_G = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$ je součtem momentů 1. a 2. tělesa vzhledem k ose x . Těžiště obou částí mají souřadnice (obr. 29)

$$T_1 = \left[0, \frac{v}{2}, -\left(b - \frac{c}{2}\right) \right],$$

$$T_2 = \left[0, \frac{v}{3}, -\frac{2}{3}(b - c) \right],$$



Obr. 29: K úloze 17.

kde $V_1 = cv$ je objem části 1., $V_2 = ev(b-c)/2$ je objem části 2. Moment tělesa 1. vzhledem k ose x

$$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{G1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \frac{v}{2} & -(b - \frac{c}{2}) \\ 0 & -\rho_b V_1 g & 0 \end{vmatrix} = -\rho_b V_1 g \left(b - \frac{c}{2}\right) \vec{i},$$

kde ρ_b je hustota betonu.

Moment tělesa 2. vzhledem k ose x

$$\vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_{G2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \frac{v}{3} & -\frac{2}{3}(b-c) \\ 0 & -\rho_b V_2 g & 0 \end{vmatrix} = -\frac{2}{3} \rho_b V_2 g (b-c) \vec{i}.$$

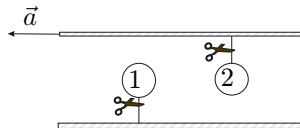
Tedy

$$\vec{M}_G = -\rho_b g \left[V_1 \left(b - \frac{c}{2}\right) + V_2 \frac{2}{3} (b-c) \right] \vec{i},$$

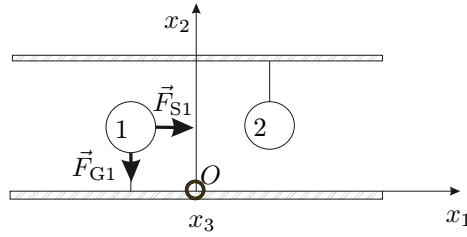
$$|\vec{M}_G| \doteq 1,3 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Zed' bude stabilní proti překlolení, jestliže $|\vec{M}_G| > |\vec{M}_h|$, což je splněno. V praxi musí platit $|\vec{M}_G| > k|\vec{M}_h|$, kde $k > 1$ je míra bezpečnosti proti převržením.

Úloha 18. Mějme dva nafukovací balóny stejného objemu, umístěné v autobuse. Jeden naplněný He (upevněný provázkem k podlaze) druhý plněný CO_2 a upevněný ke stropu ve stejné výši jako první. Určete, jak se budou balóny pohybovat, jestliže se autobus začíná rozjíždět s konstantním zrychlením a a my přestřihneme provázky (obr. 30).



Obr. 30: K úloze 18.



Obr. 31: K úloze 18.

ŘEŠENÍ: Balónky se budou pohybovat tím směrem, kterým bude působit výsledná síla. Soustavu souřadnou zvolíme jako na obr. 31. Jedná se o neinerciální vztažnou soustavu pevně spojenou s autobusem. Kromě sil tíhové a vztlakové v ní působí i síly setrvačné $\vec{F}_S = m(-\vec{a})$, kde $\vec{a} = -a\vec{i}$.

Na první balónek působí tedy výsledná síla

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{G1} + \vec{F}_{VZ1} + \vec{F}_{S1}, \quad (18.1)$$

kde \vec{F}_{G1} je tíhová síla, \vec{F}_{S1} je setrvačná síla a \vec{F}_{VZ1} je vztlaková síla působící na první balónek. V naší soustavě souřadné platí

$$\vec{F}_{G1} = -m_1 g \vec{j} = -\rho_{\text{He}} V g \vec{j},$$

$$\vec{F}_{S1} = m_1 a \vec{i} = \rho_{\text{He}} V a \vec{i}.$$

Sílu \vec{F}_{VZ1} určíme jako výslednici elementárních plošných sil působících na balónek

$$(F_{VZ1})_i = \oint_S -p \nu_i dS. \quad (18.2)$$

Vztah (18.2) lze, pomocí Gaussovy věty, přepsat do tvaru

$$(F_{VZ1})_i = \int_V -\frac{\partial p}{\partial x_i} dV. \quad (18.3)$$

Vezmeme-li v úvahu, že platí rovnice rovnováhy tekutin ve tvaru [8]

$$\text{grad } p = \frac{\rho}{\rho_{\text{He}} V} (\vec{F}_{G1} + \vec{F}_{S1}),$$

lze výrazy $\partial p / \partial x_i$, tj. složky gradientu tlaku, nahradit

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \rho a, \quad \frac{\partial p}{\partial x_2} = -\rho g, \quad \frac{\partial p}{\partial x_3} = 0, \quad (18.4)$$

kde $\rho = \text{konst.}$ je hustota vzduchu. Dosazením (18.4) do (18.3) dostáváme

$$\vec{F}_{VZ1} = (-\rho a V, \rho g V, 0).$$

Dosadíme-li tedy vyjádření pro \vec{F}_{G1} , \vec{F}_{S1} , \vec{F}_{VZ1} do (18.1), dostáváme

$$\vec{F}_1 = (Va(\rho_{\text{He}} - \rho), Vg(\rho - \rho_{\text{He}}), 0). \quad (18.5)$$

Zcela analogickým postupem určíme \vec{F}_2 , tj. výslednou sílu působící na druhý balónek

$$\vec{F}_2 = \vec{F}_{G2} + \vec{F}_{VZ2} + \vec{F}_{S2}, \quad (18.6)$$

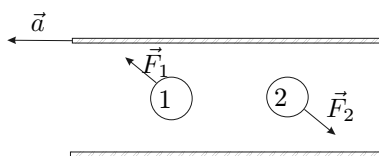
$$\vec{F}_{G2} = (0, -\rho_{\text{CO}_2}Vg, 0), \quad \vec{F}_{S2} = (\rho_{\text{CO}_2}Va, 0, 0).$$

\vec{F}_{VZ2} vychází rovna $\vec{F}_{VZ1} = (-\rho aV, \rho gV, 0)$.

Dosazením těchto vztahů do (18.6) dostáváme

$$\vec{F}_2 = (Va(\rho_{\text{CO}_2} - \rho), Vg(\rho - \rho_{\text{CO}_2}), 0). \quad (18.7)$$

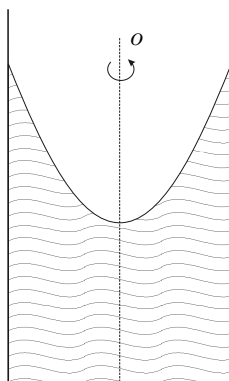
Uvážíme-li platnost nerovnosti $\rho_{\text{He}} < \rho < \rho_{\text{CO}_2}$, lze alespoň schematicky znázornit výsledky (18.5) a (18.7) do obrázku (obr. 32).



Obr. 32: K úloze 18.

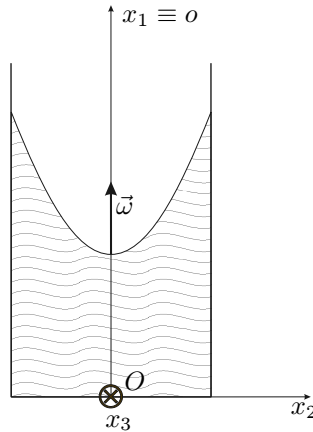
POZNÁMKA: Stejně jako se He balónek pohybuje ve směru síly \vec{F}_1 , naklonil by se ve směru síly \vec{F}_1 plamínek svíčky. Ten míří vždy ve směru vztahové síly (teplejší vzduch stoupá).

Úloha 19. (převzato z [5]) Určete průběh tlaku v kapalině umístěné v nádobě rotující konstantní úhlovou rychlostí $\vec{\omega}$ kolem svislé osy o (Newtonovo vědro) – viz obr. 33.



Obr. 33: K úloze 19.

ŘEŠENÍ: Soustavu souřadnou zvolíme dle (obr. 34). Tato soustava je pevně spojena s nádobou, je to soustava neinerciální. Působí v ní síla odstředivá a Coriolisova síla, ta se ovšem neuplatní, protože kapalina se otáčí spolu s nádobou, a tedy rychlost částic kapaliny vůči neinerciální soustavě je nulová. Jediná působící objemová síla je síla tíhová. Odstředivá síla, vyjádřená jako objemová,



Obr. 34: K úloze 19.

má složky

$$\vec{F}^o = (0, \rho\omega^2 x_2, \rho\omega^2 x_3).$$

Objemová tíhová síla

$$\vec{F}^G = (-\rho g, 0, 0).$$

Výslednou objemovou sílu $\vec{F} = \vec{F}^o + \vec{F}^G$ dosadíme do rovnice rovnováhy tekutin [8]

$$\text{grad } p = \vec{F}. \quad (19.1)$$

Ve složkovém vyjádření

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x_1} &= -\rho g, \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} &= \rho\omega^2 x_2, \\ \frac{\partial p}{\partial x_3} &= \rho\omega^2 x_3. \end{aligned} \quad (19.2)$$

Z první rovnice (19.2) plyne integrací

$$p = -\rho g x_1 + f_1(x_2, x_3). \quad (19.3)$$

Dosazením (19.3) do (19.2) dostáváme

$$\frac{\partial f_1(x_2, x_3)}{\partial x_2} = \rho\omega^2 x_2,$$

integrací

$$f_1(x_2, x_3) = \frac{\rho\omega^2 x_2^2}{2} + f_2(x_3). \quad (19.4)$$

Užijeme-li třetí rovnice (19.2)

$$\frac{df_2(x_3)}{dx_3} = \rho\omega^2 x_3.$$

Integrací obdržíme

$$f_2(x_3) = \frac{\rho\omega^2 x_3^2}{2} + k. \quad (19.5)$$

Dosazením (19.5) do (19.4) a (19.4) do (19.3) dostáváme celkové vyjádření tlaku v kapalině

$$p = -\rho g x_1 + \frac{\rho\omega^2}{2} (x_2^2 + x_3^2) + k. \quad (19.6)$$

Hodnoty konstanty k můžeme určit, jestliže známe absolutní velikost tlaku v některém bodě rotující kapaliny. Plochy konstantního tlaku (izobarické plochy) pro $p = K$ jsou rotační paraboloidy. Z (19.6) plynou jejich rovnice

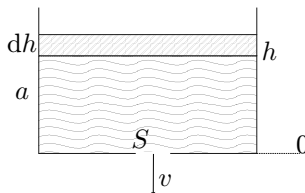
$$x_1 = \frac{\omega^2}{2g} (x_2^2 + x_3^2) + \frac{k - K}{\rho g}.$$

Jednou takovou plochou je i hladina rotující kapaliny.

Pohybové rovnice ideálních tekutin

Úloha 20. (převzato z [7]) Krychle o hraně a je naplněna až po okraj vodou. V jejím dně je otvor o průřezu S (obr. 35). Za jakou dobu se krychle vyprázdní? Porovnejte tuto dobu s dobou potřebnou k výtoku téhož množství vody, jestliže by hladina zůstávala přítokem nové vody stále ve stejné výši.

ŘEŠENÍ: Je-li hladina ve výšce h , elementární objem, který z nádoby vyteče



Obr. 35: K úloze 20.

je roven

$$-dV = Sv dt, \quad (20.1)$$

kde S je průřez otvoru a v je okamžitá rychlost výtoku kapaliny.

Dle Torricelliho vzorce pro rychlost výtoku kapaliny otvorem v hloubce h pod hladinou platí

$$v = \sqrt{2gh}, \quad (20.2)$$

kde h je *okamžitá* výška vodního sloupce nad otvorem. Dosadíme-li tedy (20.2) do (20.1) dostáváme

$$-a^2 dh = S\sqrt{2gh} dt.$$

Separujeme-li proměnné a integrujeme

$$\int_0^t dt = -\frac{a^2}{S\sqrt{2g}} \int_a^0 \frac{dh}{\sqrt{h}},$$

tedy

$$t = \frac{2\sqrt{aa^2}}{S\sqrt{2g}}. \quad (20.3)$$

Jestliže by hladina zůstávala stále ve stejné výšce, neměnila by se ani výtoková rychlost kapaliny. Takže $v' = \sqrt{2ga}$ a (20.1) bude platit v elementárním tvaru $V = Svt'$, z čehož

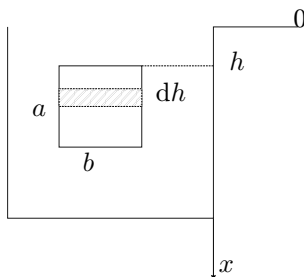
$$t' = \frac{V}{Sv} = \frac{a^3}{S\sqrt{2ga}}. \quad (20.4)$$

Porovnáním (20.3) a (20.4) vidíme, že

$$t = 2t',$$

což znamená, že bude-li voda do nádoby přitékat, totéž množství vody vyteče za poloviční čas.

Úloha 21. (převzato z [7]) Určete, jaké množství vody vyteče z nádoby za vteřinu obdélníkovým otvorem o základně b a výšce a , je-li nádoba tak velká, že hladina vody v nádobě prakticky neklesá, a je-li otvor tak vysoký, že rychlost výtoku *nelze* považovat za konstantní. Horní okraj otvoru je v hloubce h pod hladinou (obr. 36).



Obr. 36: K úloze 21.

ŘEŠENÍ: S užitím (20.1) pro velikost elementárního úbytku objemu kapaliny plyne

$$dV = dS v dt, \quad (21.1)$$

kde dS je elementární plocha otvoru. Vyjádřením dS v (21.1) dostáváme

$$dV' = \frac{dV}{dt} = b\sqrt{2gh} dh,$$

a tedy integrací

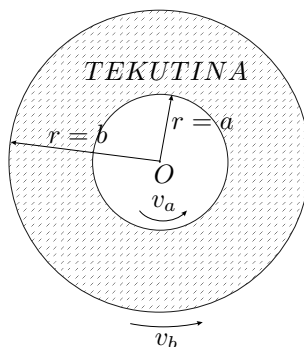
$$V' = b\sqrt{2g} \int_h^{h+a} \sqrt{h} dh = b\sqrt{2g} \left[\frac{2}{3} h^{\frac{3}{2}} \right]_h^{h+a} = \frac{2b\sqrt{2g}}{3} \left[(h+a)^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}} \right].$$

Za jednu vteřinu tedy otvorem vyteče objem

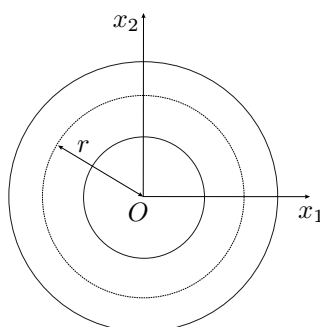
$$V' = \frac{2b\sqrt{2g}}{3} \left[(h+a)^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}} \right].$$

Dynamika vazkých tekutin

Úloha 22. (převzato z [4]) Určete rozložení rychlosti pohybu nestlačitelné vazké tekutiny, mezi dvěma souosými válcovými plochami, rotujícími obvodovými rychlostmi kolem společné osy, v_a pro vnitřní plochu o poloměru a , v_b pro vnější plochu o poloměru b (obr. 37).



Obr. 37: K úloze 22.



Obr. 38: K úloze 22.

ŘEŠENÍ: Soustavu souřadnou zvolíme dle obr. 38. Na základě symetrie problému lze předpokládat, že proudění je vždy tangenciální a že jeho rychlost je

závislá jen na r , tj. $v = v(r)$. Každá částice tekutiny ve vzdálenosti r od společné osy, se pohybuje po trajektorii dané rovnicemi

$$x_1 = r \cos \omega t, \quad (22.1)$$

$$x_2 = r \sin \omega t,$$

kde $\omega = v/r$. Složky rychlosti tedy jsou

$$v_1 = \dot{x}_1 = -\omega x_2, \quad (22.2)$$

$$v_2 = \dot{x}_2 = \omega x_1.$$

Z Navier-Stokesova zákona [8] plyne pro složky tenzoru napětí

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \bar{\lambda}\delta_{ij}\dot{\vartheta} + 2\bar{\mu}\dot{e}_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \quad (22.3)$$

kde $\bar{\lambda}$ je *druhá vazkost* (pro nestlačitelné kapaliny je nulová), $\bar{\mu}$ je *dynamická vazkost*. Nás bude zajímat viskózní smykové napětí ve vzdálenosti r od osy. Z (22.3) plyne

$$\tau_{12} = \bar{\mu} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right).$$

Dosažením z (22.2) dostáváme

$$\tau_{12} = \bar{\mu} \left[\frac{\partial}{\partial x_2}(-\omega x_2) + \frac{\partial}{\partial x_1}(\omega x_1) \right] = \bar{\mu} \left[x_1 \frac{\partial \omega}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right]. \quad (22.4)$$

Vzhledem k symetrii našeho problému můžeme závislost $v = v(r)$ zkoumat v libovolném směru. Zvolme například směr osy x_1 . Pak $x_2 \equiv 0$ a $\partial\omega/\partial x_2 \equiv 0$ tedy (22.4) přechází v

$$(\tau_{12})_{x_2=0} = \bar{\mu} r \frac{d\omega}{dr},$$

protože x_1 získalo význam vzdálenosti od osy rotace. Nyní určíme moment síly působící na válcové ploše o poloměru r a výšce l

$$M = r(\tau_{12})_{x_2=0}S = 2\pi\bar{\mu}lr^3 \frac{d\omega}{dr}. \quad (22.5)$$

Uvažujeme-li ale již ustálené proudění (v tekutině neexistuje úhlové zrychlení) výsledný moment síly působící na válcovou vrstvu mezi r a $r + dr$ musí být nulový pro libovolné r , tj. M musí být nezávislý na r . To znamená, že v (22.5) musí platit

$$r^3 \frac{d\omega}{dr} = A. \quad (22.6)$$

Integrací (22.6) dostáváme

$$\omega(r) = -\frac{A}{2r^2} + B. \quad (22.7)$$

Konstanty A, B určíme z podmínek

$$\omega(a) = \omega_a,$$

$$\omega(b) = \omega_b.$$

Dostáváme

$$\begin{aligned} A &= \frac{2a^2b^2}{b^2 - a^2}(\omega_b - \omega_a), \\ B &= \frac{b^2\omega_b - a^2\omega_a}{b^2 - a^2}. \end{aligned} \quad (22.8)$$

Dosazením (22.8) do (22.7) tedy získáme

$$\omega(r) = -\frac{2a^2b^2(\omega_b - \omega_a)}{2r^2(b^2 - a^2)} + \frac{b^2\omega_b - a^2\omega_a}{b^2 - a^2}.$$

Uvážíme-li, že platí $v = \omega r$, našli jsme hledanou závislost. Chceme-li zjistit velikost momentu síly, pouze se vrátíme k rovnici (22.5) s užitím (22.6) a (22.8)

$$M = \frac{4\pi\bar{\mu}la^2b^2}{b^2 - a^2}(\omega_b - \omega_a).$$

Tento vztah se standardně využívá k měření dynamické viskozity $\bar{\mu}$, kdy se siloměrem měří síla potřebná k udržení vnějšího válce v klidu. Zkusme ještě vypočítat

$$\lim_{r \rightarrow a^+} \omega(r).$$

Výsledkem je samozřejmě ω_a , protože $\omega(r)$ je, na námi uvažovaném intervalu, spojitá. Jak lze tento výsledek interpretovat? Mezní vrstva tekutiny se pohybuje stejnou rychlostí jako stěna-tekutina tak zvané *lme* ke stěnám. Tento závěr platí pro viskózní tekutiny obecně.

Úloha 23. (převzato z [4]) Motivace pro zavedení Reynoldsova čísla \Re . Vyjděme z Navier-Stokesovy rovnice pro vazkou nestlačitelnou tekutinu [8]

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \vec{G} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\bar{\mu}}{\rho} \Delta \vec{v}. \quad (23.1)$$

Předpokládejme, že jediné síly působící na jednotku hmotnosti jsou konzervativní, tj. $\vec{G} = \nabla \varphi$. Užijeme-li vektorové identity

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = (\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v} + \frac{1}{2} \nabla v^2,$$

lze (23.1) psát ve tvaru

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v} + \frac{1}{2} \nabla v^2 = \nabla \varphi - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\bar{\mu}}{\rho} \Delta \vec{v}.$$

Protože nás zajímá pouze pole rychlostí, můžeme z našich rovnic vyloučit tlak. Aplikujeme-li na poslední rovnici operátor rotace a uvědomíme si, že $\rho = \text{konst.}$ a rotace libovolného gradientu je nulová, dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{v}) + \nabla \times (\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v} = \frac{\bar{\mu}}{\rho} \Delta(\nabla \times \vec{v}).$$

Zavedeme-li do poslední rovnice *vektor vírovosti* vztahem $\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{v}$, získáme konečný tvar rovnice

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{\Omega} \times \vec{v}) = \frac{\bar{\mu}}{\rho} \Delta \vec{\Omega}, \quad (23.2)$$

která spolu s rovnicemi

$$\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{v}, \quad (23.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (23.4)$$

plně popisuje vírové proudění vazké nestlačitelné tekutiny. Rovnice (23.4) popisuje námi předpokládanou nestlačitelnost. Nyní řešíme následující problém. Chceme najít řešení rovnic (23.2) a (23.3) v případě obtékání dlouhého válce s průměrem D nestlačitelnou vazkou tekutinou za podmínky, že rychlost ve velké vzdálenosti od osy válce je konstantní

$$\vec{v} = (V, 0, 0), \quad \text{pro } x^2 + y^2 + z^2 \gg D,$$

zatímco na povrchu válce je nulová (s přihlédnutím k závěrům úlohy 22)

$$v_x = v_y = v_z = 0, \quad \text{pro } x^2 + y^2 = \frac{D^2}{4}.$$

Toto plně určuje náš matematický model. Z předchozích rovnic vidíme, že v úloze vystupují čtyři různé parametry $\bar{\mu}, \rho, D, V$. Nyní snížíme tento počet. Provedme transformaci

$$\begin{aligned} x &= x' D, \\ y &= y' D, \\ z &= z' D. \end{aligned} \quad (23.5)$$

Podobně transformujme rychlost v

$$v = v' V. \quad (23.6)$$

Ve velké vzdálenosti, je v' rovno 1. Těmito transformacemi jsme změnili jednotky délky a rychlosti, nyní musíme předefinovat i jednotky času. Novou jednotkou času budiž D/V

$$t = t' \frac{D}{V}. \quad (23.7)$$

V našich nových jednotkách se derivace v rovnici (23.3) změni z $\partial/\partial x$ na $(1/D)(\partial/\partial x')$ a podobně. Rovnice (23.3) se změni na

$$\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{v} = \frac{V}{D} \nabla' \times \vec{v}' = \frac{V}{D} \vec{\Omega}'. \quad (23.8)$$

Naše hlavní rovnice (23.2) potom zní

$$\frac{\partial \vec{\Omega}'}{\partial t'} + \nabla' \times (\vec{\Omega}' \times \vec{v}') = \frac{\bar{\mu}}{\rho V D} \Delta' \vec{\Omega}'. \quad (23.9)$$

Všechny konstanty se soustředily do jediného činitele, označovaného dle dohody $1/\Re$.

$$\Re = \frac{\rho}{\bar{\mu}} V D. \quad (23.10)$$

Jak lze tento výsledek interpretovat fyzikálně? Vyřešíme-li problém obtékání určitou tekutinou pro jednu rychlost V_1 a určitý poloměr válce D_1 , a pak se zajímáme o obtékání v případě jiného poloměru a jiné tekutiny, bude proudění stejné při rychlosti V_2 , která odpovídá stejnému *Reynoldsovu číslu* \Re , tedy při

$$\Re_1 = \frac{\rho_1}{\bar{\mu}_1} V_1 D_1 = \frac{\rho_2}{\bar{\mu}_2} V_2 D_2 = \Re_2.$$

Pro každé dvě situace, které mají stejné \Re , se budou proudění „chovat“ stejně – budou *podobná*.

Úloha 24. (převzato z [3]) Určete rychlost disipace energie (přeměny mechanické energie v teplo) v objemové jednotce pro vazkou nestlačitelnou tekutinu. **ŘEŠENÍ:** Budeme vyšetřovat bilanci mechanické energie A za čas dt . Uvažujme v tekutině libovolný prostor o objemu V , ohraničený uzavřenou plochou S . Kinetická energie tekutiny obsažené v objemu V je dána výrazem

$$T = \int_V \frac{1}{2} \rho v^2 dV = \int_V \frac{1}{2} \rho v_i v_i dV, \quad (24.1)$$

takže pro její změnu za čas dt platí

$$dT = \int_V \rho v_i \frac{dv_i}{dt} dt dV. \quad (24.2)$$

Objemová síla \vec{G} , vztažená na jednotku hmotnosti, působí na hmotnost ρdV objemového elementu dV silou $\vec{G} \rho dV$. Při posunutí $\vec{v} dt$ tohoto elementu vykoná práci $\vec{G} \cdot \vec{v} \rho dt dV = G_i v_i \rho dt dV$, takže práce objemových sil působících v celém objemu V je rovna

$$\int_V G_i v_i \rho dt dV.$$

Dále určíme práci vnitřních sil (napětí) na ploše S . Jsou-li $\overset{\nu}{T}_i$ složky vektoru napětí \vec{T} , působícího na plošný element dS plochy S , pak práce plošné síly $\vec{T} dS$ za čas dt je dána výrazem $\vec{T} \cdot \vec{v} dt dS = \overset{\nu}{T}_i v_i dt dS$. Užijeme-li vztah (1.2), dostaneme pro celkovou práci výraz

$$\oint_S \tau_{ij} \nu_j v_i dt dS.$$

Pro celkovou práci dA objemových a plošných sil za dobu dt tedy platí

$$dA = \int_V G_i v_i \rho dt dV + \oint_S \tau_{ij} \nu_j v_i dt dS. \quad (24.3)$$

Převědeme-li plošný integrál na objemový (pomocí Gaussovy věty) a uvažíme-li, že obecné pohybové rovnice tekutin, vztažené na jednotku hmotnosti, mají tvar [8]

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + G_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j,$$

dostaneme postupně

$$\begin{aligned} dA &= \int_V \left[\rho G_i v_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij} v_i) \right] dV dt = \int_V \left[\left(\rho G_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right) v_i + \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] dV dt = \\ &= \int_V \left(\rho \frac{dv_i}{dt} v_i + \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) dV dt. \end{aligned}$$

Druhý člen integrandu lze upravit následovně

$$\tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \tau_{ij} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \tau_{ij} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \tau_{ij} \dot{e}_{ij} + \tau_{ij} \dot{\omega}_{ij}, \quad (24.4)$$

kde význam \dot{e}_{ij} , $\dot{\omega}_{ij}$ lze nalézt např. v [8]. Ze symetrie τ_{ij} a antisymetrie $\dot{\omega}_{ij}$ plyne $\tau_{ij} \dot{\omega}_{ij} = 0$, pak s přihlédnutím k rovnici (24.2) máme

$$dA = dT + \int_V \tau_{ij} \dot{e}_{ij} dV dt.$$

Dosadíme-li v této rovnici za τ_{ij} z (22.3) a vezmeme-li v úvahu podmínku nestlačitelnosti tekutiny, dospějeme k výrazu

$$dA = dT + 2\bar{\mu} \int_V \dot{e}_{ij} \dot{e}_{ij} dV dt.$$

Z této rovnice je vidět, že pouze část práce objemových a plošných sil dA se spotřebuje na změnu kinetické energie T , zbytek této práce se přemění v teplo (je-li tekutina nestlačitelná). Pro ztrátu mechanické energie za jednotku času (tj. disipovaný výkon) tedy dostáváme vyjádření

$$\dot{E} = 2\bar{\mu} \int_V \dot{e}_{ij} \dot{e}_{ij} dV,$$

kde veličinu \dot{E} nazýváme *disipační funkce*. Lze zavést i hustotu disipovaného výkonu vztahem

$$\frac{d\dot{E}}{dV} = 2\bar{\mu} \dot{e}_{ij} \dot{e}_{ij} dV. \quad (24.5)$$

Úloha 25. (převzato z [3]) Odvození rovnice pro tok tepla v proudící stlačitelné tekutině.

Z výkladu uvedeného v úloze 24 je zřejmé, že zákon zachování energie musíme uvažovat v obecnější formě, tj. musíme přihlídnout i k tepelným změnám v proudící tekutině. Hledanou rovnici pro tepelný tok si odvodíme pro tekutinu stlačitelnou.

Uvažujme tekutinu, jejíž vnitřní energie je pouze funkcí teploty ϑ . Předpokládáme-li, že tekutina obsažená v objemovém elementu dV má vnitřní energii $c_v \rho \vartheta dV$, pak vnitřní energie U v objemu V je rovna

$$U = \int_V c_v \rho \vartheta dV, \quad (25.1)$$

kde c_v je měrná tepelná kapacita tekutiny (na jednotku hmotnosti) při stálém objemu. Dále předpokládejme, že c_v je konstantní.

Při pohybu viskózní tekutiny musíme vzít v úvahu i sdílení tepla, které se může dít vedením, zářením apod. Množství tepla, které vedením za jednotku času projde ploškou dS , je podle *Fourierova zákona* přímo úměrné spádu teploty a plošnému obsahu plošky dS , takže plochou S projde vedením za jednotku času množství tepla

$$\oint_S k \frac{\partial \vartheta}{\partial \nu} dS, \quad (25.2)$$

kde ν je vnější normála plošného elementu dS a k koeficient tepelné vodivosti. V dalším výkladu uvažujeme jen tuto formu přestupu tepla, tj. zanedbáváme například i změny vyvolané zářením.

Zákon zachování energie vyjadřuje skutečnost, že časová změna kinetické a vnitřní energie tekutiny se rovná výkonu (práci za jednotku času) vnějších a tlakových sil a teple, které uvažovaný obor tekutiny získal vedením za jednotku času. S přihlédnutím ke vztahům (24.1), (25.1) a (25.2) můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\int_V \frac{1}{2} \rho v_i v_i dV + \int_V c_v \rho \vartheta dV \right) &= \\ &= \int_V G_i v_i \rho dV + \oint_S \tau_{ij} \nu_j v_i dS + \oint_S k \frac{\partial \vartheta}{\partial \nu} dS. \end{aligned} \quad (25.3)$$

Zde se integrace vztahuje na tekutý objem V a jemu příslušnou plochu S .

Nyní se budeme snažit přejít od integrální formulace zákona zachování energie (25.4) k formulaci diferenciální. K tomu účelu musíme na levé straně (25.4) provést naznačenou derivaci a na pravé straně pak potřebujeme převést integrály plošné na objemové. Vzhledem k rovnici kontinuity ve tvaru

$$\frac{d}{dt}(\rho dV) = 0$$

můžeme levou stranu (25.4) psát takto

$$\frac{d}{dt} \left(\int_V \frac{1}{2} \rho v_i v_i dV + \int_V c_v \rho \vartheta dV \right) = \int_V \rho v_i \frac{dv_i}{dt} dV + \int_V c_v \frac{d\vartheta}{dt} \rho dV. \quad (25.4)$$

Na pravé straně (25.4) upravme nejprve poslední člen. Jelikož pro derivaci ve směru normály můžeme psát

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \nu} = \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} \nu_i,$$

dostáváme užitím Gaussovy věty

$$\oint_S k \frac{\partial \vartheta}{\partial \nu} dS = \oint_S k \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} \nu_i dS = \int_V \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} \right) dV. \quad (25.5)$$

Pokud jde o druhý člen na pravé straně rovnice (25.4), je převedení plošného integrálu na objemový ihned zřejmé

$$\oint_S \tau_{ij} \nu_j v_i dS = \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij} v_i) dV. \quad (25.6)$$

Po všech těchto úpravách nabývá rovnice (25.4) tvar

$$\int_V \left[\rho v_i \frac{dv_i}{dt} + \rho c_v \frac{d\vartheta}{dt} - \rho G_i v_i - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij} v_i) \right] dV = 0.$$

Jelikož byl objem V zvolen libovolně a všechny funkce, popř. jejich derivace, považujeme za spojité, plyne odtud

$$\rho v_i \frac{dv_i}{dt} + \rho c_v \frac{d\vartheta}{dt} = \rho G_i v_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij} v_i). \quad (25.7)$$

To je hledaná rovnice pro *tok tepla*. Lze ji upravit na přehlednější tvar pomocí rovnic (22.3), (24.4), obecných pohybových rovnic tekutin ve tvaru

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + G_i$$

a rovnice kontinuity v úpravě

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0. \quad (25.8)$$

Pak pro poslední člen v (25.7) dostáváme vyjádření

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij} v_i) = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} v_i + \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \rho v_i \frac{dv_i}{dt} - \rho G_i v_i + \tau_{ij} \dot{e}_{ij},$$

jehož použitím nabývá rovnice (25.7) tvaru

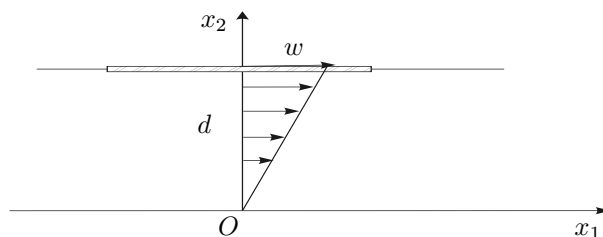
$$\rho c_v \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} \right) + \left(-\delta_{ij} p + \bar{\lambda} \delta_{ij} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} + 2\bar{\mu} \dot{\epsilon}_{ij} \right) \dot{\epsilon}_{ij}.$$

Přihlédneme-li znovu k rovnici kontinuity, dostaneme po úpravě konečný tvar rovnice

$$\rho c_v \frac{d\vartheta}{dt} - \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} \right) + \bar{\lambda} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right)^2 + 2\bar{\mu} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}. \quad (25.9)$$

Úloha 26. S využitím výsledků úlohy 24.

a) (převzato z [4]) Řešte: Dno širokého bazénu je pokryto tenkou vrstvou vody (nebo nějaké jiné nestlačitelné kapaliny s dynamickou viskozitou $\bar{\mu}$). Na hladině vody pluje tenká dřevěná deska, jejíž spodní strana je ve vzdálenosti d ode dna bazénu. Všechny ostatní rozměry desky jsou mnohem větší než d . Deska se pohybuje vodorovně malou rychlostí w (obr. 39). Určete rychlost disipace energie



Obr. 39: K úloze 26.

v jednotce objemu ve vodě v blízkosti středu desky.

b) Určete rychlost disipace energie v jednotkovém objemu pro stacionární proudění vazké nestlačitelné tekutiny trubicí s kruhovým průřezem ve směru její osy, je-li průběh rychlosti v průřezu dán rovnicí

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4\bar{\mu}l} (R^2 - r^2), \quad (26.1)$$

kde $(p_1 - p_2)/l$ je rozdíl tlaků ve dvou místech na ose trubice vzdálených o l , $\bar{\mu}$ je dynamická viskozita, R je poloměr trubice a r^2 vzdálenost hmotnostního elementu od osy trubice.

ŘEŠENÍ: a) Vzhledem k poznámce za úlohou 7 budeme předpokládat rovnice pohybu kontinua ve tvaru (7.1). Složky tenzoru rychlosti deformace $\dot{\epsilon}_{ij}$ [8] jsou

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{11} &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = 0, \\ \dot{\epsilon}_{12} &= \dot{\epsilon}_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) = \frac{k}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{e}_{13} &= \dot{e}_{31} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) = 0, \\
\dot{e}_{23} &= \dot{e}_{32} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) = 0, \\
\dot{e}_{22} &= \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0, \\
\dot{e}_{33} &= \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0.
\end{aligned}$$

Hustotu disipovaného výkonu tedy určíme z (24.5)

$$\frac{d\dot{E}}{dV} = 2\bar{\mu} \dot{e}_{ij} \dot{e}_{ij}.$$

Provedeme-li naznačenou dvojitou sumaci, dostáváme

$$\frac{d\dot{E}}{dV} = 2\bar{\mu}(\dot{e}_{11}^2 + \dot{e}_{12}^2 + \dot{e}_{13}^2 + \dot{e}_{21}^2 + \dot{e}_{22}^2 + \dot{e}_{23}^2 + \dot{e}_{31}^2 + \dot{e}_{32}^2 + \dot{e}_{33}^2) = 2\bar{\mu} 2 \dot{e}_{12}^2 = \bar{\mu} k^2.$$

Konstantu k určíme z podmínky $v_1(d) = w$, tedy $k = w/d$. Po dosazení za k lze tedy psát

$$\frac{d\dot{E}}{dV} = \bar{\mu} \frac{w^2}{d^2}.$$

b) Zvolíme-li soustavu souřadnou tak, aby směr proudění odpovídal směru osy x_1 , tedy $v \equiv v_1$, $v_2 = 0$, $v_3 = 0$, lze (26.1) psát ve tvaru

$$\begin{aligned}
v_1 &= k(R^2 - x_2^2 - x_3^2), \\
v_2 &= v_3 = 0,
\end{aligned}$$

kde k jsme označili výraz $(p_1 - p_2)/4\bar{\mu}l$. Nyní určíme složky tenzoru \dot{e}_{ij}

$$\begin{aligned}
\dot{e}_{11} &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = 0, \\
\dot{e}_{12} &= \dot{e}_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) = -kx_2, \\
\dot{e}_{13} &= \dot{e}_{31} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) = -kx_3, \\
\dot{e}_{23} &= \dot{e}_{32} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) = 0, \\
\dot{e}_{22} &= \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0, \\
\dot{e}_{33} &= \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0.
\end{aligned}$$

Vztah (24.5) lze tedy rozepsat analogicky s případem a). Po dosazení dostáváme

$$\frac{d\dot{E}}{dV} = 2\bar{\mu}(2\dot{\epsilon}_{12}^2 + 2\dot{\epsilon}_{13}^2) = 4\bar{\mu}k^2(x_2^2 + x_3^2).$$

Dosadíme-li zpět za k a $(x_2^2 + x_3^2)$, lze výsledek psát

$$\frac{d\dot{E}}{dV} = \frac{(p_1 - p_2)^2}{4\bar{\mu}l^2} r^2.$$

Úloha 27. (převzato z [3]) Určete

a) rozdělení rychlosti v průřezu při proudění viskózní nestlačitelné tekutiny mezi dvěma rovnoběžnými stěnami.

b) pomocí rovnice pro tok tepla (25.9) průběh teploty v průřezu pro proudění z části a).

ŘEŠENÍ: a) Pohybové rovnice viskózní tekutiny lze exaktně integrovat jen v několika případech. Jedním z nich je naše úloha. O pohybu tekutiny předpokládejme, že se děje jen ve směru jedné osy, např. x , takže v každém okamžiku platí

$$v_x \neq 0, \quad v_y = 0, \quad v_z = 0.$$

Pro jednoduchost zanedbáme objemové síly (takže pohyb tekutiny je stacionární), tj. položíme $G_x = G_y = G_z = 0$. Jelikož dle předpokladu je tekutina nestlačitelná ($\rho = \text{konst.}$), redukuje se rovnice kontinuity (25.8) v uvažovaném případě na podmínku

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0. \quad (27.1)$$

Požadavek stacionárnosti je dán podmínkou

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = 0.$$

Za těchto předpokladů vede Navierova–Stokesova rovnice (23.1), rozepsaná pro všechny tři složky, na soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\bar{\mu}}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right), \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \quad (27.2)$$

Z posledních dvou rovnic je vidět, že (dynamický) tlak p není funkcí souřadnic y a z , takže může být funkcí pouze x , tj. $p = p(x)$. Z rovnice (27.1) plyne, že v_x není funkcí x a může tedy být funkcí y a z , $v_x = v = v(y, z)$. Píšeme-li první rovnici (27.2) takto

$$\frac{1}{\bar{\mu}} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}, \quad (27.3)$$

je pravá strana poslední rovnice závislá jen na y a z , levá jen na x (o $\bar{\mu}$ předpokládáme, že je konstantní). Tuto rovnici lze tedy splnit, jen když její levá i pravá strana je rovna téže konstantě. V dalších úvahách považujeme tedy výraz $(1/\bar{\mu})(\partial p/\partial x)$ za konstantní.

Předpokládejme, že tekutina proudí mezi deskami přímočaře, čili že jde o pohyb laminární.

Vzdálenost obou desek nechť je $2h$, jedna deska nechť se pohybuje konstantní rychlostí U_1 ve směru osy x , druhá pak ve stejném směru konstantní rychlostí U_2 . Jelikož v není závislé na x , bude pohyb tekutiny v každé rovině kolmé na osu x , tj. kolmé na směr proudění, stejný. Počátek O soustavy souřadnic zvolíme uprostřed mezi deskami a osu z kolmou na roviny desek. Jelikož tekutina *lne* ke stěnám desek, má při stěně stejnou rychlost jako stěny, takže v našem případě máme okrajové podmínky

$$\begin{aligned} v &= U_1, & \text{pro } z &= +h, \\ v &= U_2, & \text{pro } z &= -h. \end{aligned} \quad (27.4)$$

Problém považujeme za rovinný, takže průběh proudění je stejný ve všech rovinách rovnoběžných s rovinou xy . Pak ale v není funkcí y , tj. $v = v(z)$, takže rovnice (27.3) nabývá tvaru

$$\frac{d^2v}{dz^2} = \frac{1}{\bar{\mu}} \frac{\partial p}{\partial x} = \text{konst.}$$

Odtud integrací dostáváme

$$v = \frac{1}{2\bar{\mu}} \frac{\partial p}{\partial x} z^2 + C_1 z + C_2. \quad (27.5)$$

Z podmínek (27.5) plyne pro integrační konstanty C_1 a C_2 vyjádření

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2h}(U_1 - U_2), \\ C_2 &= \frac{1}{2}(U_1 + U_2) - \frac{1}{2\bar{\mu}} \frac{\partial p}{\partial x} h^2, \end{aligned}$$

takže hledané řešení má tvar

$$v = -\frac{1}{2\bar{\mu}} \frac{\partial p}{\partial x} (h^2 - z^2) + \frac{z}{2h}(U_1 - U_2) + \frac{1}{2}(U_1 + U_2). \quad (27.6)$$

Toto je parabolický zákon rozdělení rychlosti. Nyní vyšetříme případ, kdy obě desky jsou v klidu, tj. $U_1 = U_2 = 0$, takže pro rychlost máme vyjádření

$$v = -\frac{1}{2\bar{\mu}} \frac{\partial p}{\partial x} (h^2 - z^2). \quad (27.7)$$

Rychlost proudění je největší uprostřed desek ($z = 0$), kde nabývá hodnoty

$$v_{\max} = -\frac{1}{2\bar{\mu}} \frac{\partial p}{\partial x} h^2. \quad (27.8)$$

b) Nejdříve si určíme složky tenzoru rychlosti deformace \dot{e}_{ij} . Z definičních rovnic [8]

$$\dot{e}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

plyne, že pouze \dot{e}_{xz} je různá od nuly a je rovna

$$\dot{e}_{xz} = \frac{1}{2\bar{\mu}} \frac{\partial p}{\partial x} z. \quad (27.9)$$

Z rovnice pro tok tepla (25.9)

$$\rho c_v \frac{d\vartheta}{dt} - \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} \right) + \bar{\lambda} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right)^2 + 2\bar{\mu} \dot{e}_{ij} \dot{e}_{ij}$$

(25.9) můžeme určit změny teploty v proudící tekutině. Při jejím použití předpokládejme, že ve všech místech obou desek máme tutéž teplotu ϑ_0 , tj.

$$\vartheta = \vartheta_0, \quad \text{pro } z = \pm h. \quad (27.10)$$

Pak můžeme dále předpokládat, že ϑ nebude závislé na x , tj. $\partial\vartheta/\partial x = 0$ a z důvodů stacionárnosti nebude ϑ závislá na t . Pak je zřejmé, že levá strana poslední rovnice vymizí, neboť ρ je konstantní.

Na pravé straně této rovnice prostřední člen vypadne, neboť tekutina je nestlačitelná a tedy $\partial v_j/\partial x_j = 0$. Tak dostáváme použitím (27.9) rovnici

$$0 = k \frac{d^2\vartheta}{dz^2} + 4\bar{\mu} \dot{e}_{xz}^2 = k \frac{d^2\vartheta}{dz^2} + \frac{1}{\bar{\mu}} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 z^2. \quad (27.11)$$

Zde jsme předpokládali, že koeficient tepelné vodivosti k není funkcí místa. Dále budeme o něm a také o dynamické viskozitě $\bar{\mu}$ předpokládat, že nejsou závislé na teplotě.

Jelikož ϑ je funkcí jen z , není obtížné rovnici (27.11) integrovat. Vyjádříme-li $\partial p/\partial x$ z rovnice (27.8), tj.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{2\bar{\mu}v_{\max}}{h^2},$$

dvojitou integrací (27.11) dostáváme řešení ve tvaru

$$k\vartheta = -\frac{\bar{\mu}v_{\max}^2}{3h^4} z^4 + D_1 z + D_2,$$

kde D_1, D_2 jsou integrační konstanty. Ty určíme z podmínek (27.10). Po jednoduchých úpravách máme výsledek

$$\vartheta = \vartheta_0 + \frac{\bar{\mu}v_{\max}^2}{3kh^4} (h^4 - z^4).$$

Tím jsme určili průběh teploty při proudění viskózní nestlačitelné tekutiny mezi dvěma rovnoběžnými nepohyblivými deskami.

Dodatek

Výpis programu použitého pro numerické řešení rovnice (13.10) v úloze 13. Pro řešení byl použit volně šiřitelný program GNU Octave, <http://www.octave.org>. Obr. 21 odpovídá hodnotám parametrů $k = 15$, $s_0 = \pi/8$, $\alpha = 0.53$; obr. 22: $k = 17$, $s_0 = \pi/3.5$, $\alpha = 7.87$; obr. 23: $k = 18$, $s_0 = 3.1\pi/3$, $\alpha = 3.4$.

```
# Diferenciální rovnice pro ohyb tyče
# Vestavěné funkce programu octave
# metoda střelby: E. Vitásek, Numerické metody, SNTL Praha 1987
clear *
format long
# gset yrange [0:]
gset nokey
#####
# Konstanty
#####
# k=F/(E*I)
global k=18;
#####
# Zadání vstupních parametrů
#####
# Počáteční podmínky pro diferenciální rovnici
#####
# Počáteční podmínky
global s0=3.1*pi/3;
global alpha=3.4;
#
global deleni=100;
s=linspace(0,1,deleni)';
#####
# Řešení diferenciální rovnice
#####
function rdot=fce(theta,s)
```

```

global k~alpha
rdot=zeros(2,1);
rdot(1)=theta(2);
rdot(2)=-k*sin(theta(1));
endfunction
tv=lsode("fce",[s0,alpha],s);
#####
# Vykreslení závislosti
#####
y=-tv(:,2)/k;
for i=1:rows(tv)
    x(i)=0;
    # y(i)=0;
    for j=1:i
        x(i)=x(i)+1/deleni*cos(tv(j,1));
        # y(i)=y(i)+1/deleni*sin(tv(j,1));
    endfor
endfor
#plot(s,tv(:,1),'3')
#hold on
#plot(s,y,'3')
gset size square
gset noborder
gset noxtics
gset noytics
plot(x,y,'3')
#hold off
# END OF FILE #####

```

Literatura

- [1] BANÍK, I., BANÍK, R., ZÁMEČNÍK, J.: *Fyzika netradičně–Mechanika*. ALFA, Bratislava 1989.
- [2] BINKO, J., KAŠPAR, I. a kol.: *Fyzika stavebního inženýra*. SNTL/ALFA, Praha 1983.
- [3] BRDIČKA, M., SAMEK, L., SOPKO, B.: *Mechanika kontinua*. Academia, Praha 2000.
- [4] FEYNMAN, R. P., LEIGHTON, R. B., SANDS, M.: *Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady*. Fragment, Praha 2001.
- [5] HAVRÁNEK, A.: *Mechanika II. Kontinuum*. Karolinum, Praha 1995.
- [6] JUKL, M.: *Analytická geometrie kuželoseček a kvadrik*. UP, Olomouc 1999.
- [7] ŠIROKÁ, M., TILICH, J.: *Cvičení z experimentální fyziky, Mechanika a akustika*. Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1966.
- [8] TILICH, J.: *Klasická mechanika*. UP, Olomouc 1984.
- [9] VANŽUROVÁ, A.: *Diferenciální geometrie křivek a ploch*. UP, Olomouc 1996.