

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA EXPERIMENTÁLNÍ FYZIKY

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Vlastnosti akrečních disků
v okolí černých děr



Vedoucí diplomové práce:
Mgr. Lukáš Richterek, Ph.D.
Rok odevzdání: 2007

Vypracovala:
Miroslava Víchová
Učitelství pro střední školy M–F

Prohlášení

Prohlašuji, že na základě zadání jsem vytvořila tuto diplomovou práci samostatně za vedení odborného asistenta Mgr. Lukáše Richterka, Ph.D. a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny zdroje použité při zpracování práce.

V Olomouci dne 12. dubna 2007

Miroslava Víchová

Obsah

Úvod	4
1 Gravitační kolaps a černé díry	6
1.1 Bílí trpaslíci a neutronové hvězdy	6
1.2 Černá díra	10
1.3 Černá díra nemá vlasy	15
2 Základní charakteristika akrečního disku	17
2.1 Jak se ve vesmíru hledají černé díry?	17
2.2 Kde se ve vesmíru nacházejí černé díry?	21
2.3 Magnetická akrece	26
3 Pohyb částic akrečního disku	30
3.1 Příklad Schwarzschildovy černé díry	30
3.1.1 Částicové orbity	31
3.1.2 Fotonové orbity	43
3.2 Příklad Kerrovy černé díry	44
3.2.1 Význačné kruhové orbity	46
3.2.2 Vybrané případy trajektorií částic	51
4 Sférická akrece	58
4.1 Možné typy sférické akrece	59
4.2 Míra akrece	63
5 Záření akrečního disku	67
5.1 Rudý posuv záření akrečního disku	67
5.2 Energie záření akrečního disku	73
5.3 Energie částice vyzářená akrecí	76
6 Ekvipotenciální plochy akrečního disku	80
6.1 Rovnice ekvipotenciálních ploch akrečního disku	80
6.2 Význam hrotu jedné z ekvipotenciálních ploch akrečního disku	83

6.3	Topologie ekvipotenciálních ploch akrečního disku	87
	Závěr	94
	Literatura	96

Úvod

Černá díra, kolem které je utvořen akreční disk, je velmi pravděpodobně fyzikálním motorem aktivních galaktických jader ve vesmíru a to zejména kvazarů a radiových galaxií. Zároveň se předpokládá, že černou díru s akrečním diskem mohou obsahovat i některé binární systémy hvězd.

Silné rentgenové záření, které pozorujeme v případě kvazarů, pravděpodobně pochází z nejnvnitřnějších velmi rozžhavených částí akrečního disku okolo vysoce aktivní černé díry. Naopak obrovské radiové laloky charakteristické pro radiové galaxie mohou pocházet z méně aktivní černé díry, kterou obklopuje akreční disk, s velmi výraznými výtrysky hmoty ve směru osy rotace černé díry. Pokud je pozorován silný zdroj rentgenového záření v okolí klasické hvězdy, jedná se téměř jistě o binární systém hvězd. Jedna z nich je černá díra, v okolí které je utvořen akreční disk a který je syčen hmotou druhé, klasické hvězdy – jejího společníka.

Akreční disk v okolí černé díry je pravděpodobně příčinou charakteristického chování nejsilnějších rentgenových a radiových zdrojů ve vesmíru, a proto je této problematice v oblasti astrofyziky přikládán velký význam. Pozornost je soustředěna především na mechanismy, které způsobují a řídí proces akrece v okolí kompaktních objektů, a na charakter záření, které vzniká ve vnitřních částech akrečního disku. Toto záření je jediným zdrojem informací o akrečním disku.

Tato diplomová práce shrnuje klíčové poznatky o vlastnostech akrečních disků a je členěna do šesti kapitol. První dvě kapitoly jsou věnovány základnímu popisu černé díry, akrečního disku a aktivních galaktických jader. Ve třetí kapitole je diskutován pohyb volné testovací částice v gravitačním poli statické i rotující černé díry. Ve čtvrté kapitole je pomocí klasické mechaniky tekutin rozebrán případ sférické akrece. Na tyto poznatky pak navazuje pátá kapitola, která je věnována záření akrečního disku. Poslední šestá kapitola je zaměřena na ekvipotenciální plochy znázorňující rozložení tlaku v akrečním disku, které jsou zkoumány prostřednictvím relativistické mechaniky tekutin. Všechny historické poznámky byly čerpány z [24].

Práce je přehledným úvodem do problematiky akrečních disků a mo-

hou z ní čerpat případní zájemci o ni. Text je možno použít i jako doplňující materiál pro výuku na Přírodovědecké fakultě Univerzity Palackého v Olomouci.

Děkuji Mgr. Lukáši Richterkovi, Ph.D. za poskytnutí cizojazyčných studijních materiálů a za trpělivé vedení při tvorbě této diplomové práce.

Kapitola 1

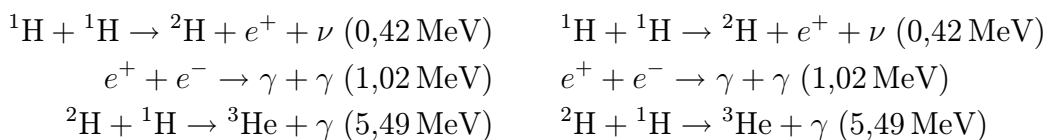
Gravitační kolaps a černé díry

Dříve než se začneme zabývat studiem akrečních disků, velmi stručně rozebereme základní vlastnosti černých děr. Začátek této kapitoly věnujeme gravitačnímu kolapsu a závěrečným vývojovým stádiím hvězd. Dále se zaměříme na černou díru a její charakteristiku. Soustředíme se na Schwarzschildovu a Kerrovu metriku, které popisují prostoročas v okolí statické a rotující černé díry.

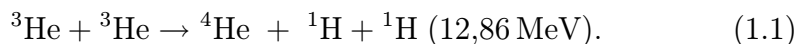
1.1 Bílí trpaslíci a neutronové hvězdy

Podle současných představ hvězda vzniká gravitačním kolapsem mraku plynu, jehož podstatnou část tvoří vodík a helium. V průběhu gravitační kontrakce tohoto oblaku v jeho nitru vzrůstá teplota, tlak i hustota. Jakmile teplota v nitru dosáhne asi 10^7 K, kinetická energie jader začne překonávat odpudivou bariéru a zapálí se termonukleární reakce. Probíhá syntéza jader vodíku na helium doprovázená uvolňováním velkého množství vazebné jaderné energie. Díky tomu se kontrakce hvězdy zastaví na velmi dlouhou dobu. Gravitační síla je vyvážena tlakovou silou rozžhaveného plynu uvnitř hvězdy. V tomto stádiu vývoje se nyní nachází také například Slunce.

Základní reakcí, při které se přeměňuje vodík na helium, je proton-protonový řetězec¹. Uvádíme zde jednu z variant jeho průběhu [9]



¹Helium z vodíku nemusí vznikat pouze proton-protonovým řetězcem. Při vyšších teplotách 10^{10} K probíhá uhlíkový neboli Betheho-Weizsäckerův cyklus a v tomto případě vzniká také ${}^4\text{He}$ a uvolní se energie 25 MeV [9].



Energie, která se v jednotlivých reakcích řetězce uvolňuje je uvedena v závorkách. Součtem těchto hodnot dostáváme celkovou energii uvolněnou v průběhu proton-protonového řetězce a její hodnota je 26,72 MeV.

Když se zásoby vodíku v jádru hvězdy vyčerpají, není tu momentálně palivo pro další termonukleární reakce a gravitační stlačování opět převáží. Díky tomu teplota v jádře stoupá a z helia začíná obdobnou cestou vznikat uhlík. Následně syntézou vznikají další prvky jako kyslík, hořčík, křemík, vápník až po železo.² Vznikem železa řetěz termonukleárních reakcí ve hvězdách končí, protože prvky kolem železa mají nejvyšší vazebnou energii na jeden nukleon, takže syntéza dalších prvků již není exotermickou reakcí. Končí tak nejdelší perioda aktivního života hvězdy.

Pak se chování hvězdy značně promění. Hvězda projevuje nestability: pulsuje, odvrhuje vnější vrstvy nebo dokonce vybuchuje jako nova nebo supernova³. Nyní nic nebrání gravitační síle, aby hvězdu výrazně stlačila. Prudce se zmenší její poloměr a hustota vzroste řádově až na $10^3 \text{ kg} \cdot \text{cm}^{-3}$. Hvězda se dostává do konečné fáze své evoluce. Takto stlačená hmota, tvořená převážně atomy železa (pokud je hvězda dostatečně hmotná na to, aby byl vznik železa v jejím centru možný), se začne bránit proti dalšímu stlačování. Vzniká Fermiho tlak degenerovaných elektronů, který vyvažuje gravitační síly. Hvězda se v tomto stádiu vývoje nazývá bílý trpaslík. Na obrázku 1.1 můžeme vidět příklad bílého trpaslíka, který se nachází ve středu planetární mlhoviny Kočičí oko.

V tomto stavu může zůstat již trvale, pokud její hmotnost není tak velká, aby gravitační síly překonaly Fermiho tlak. Hraniční hmotnost, při které je hvězda ve stádiu bílého trpaslíka ještě stabilní, se nazývá podle svého objevitele Chandrasekharova mez⁴. Chandrasekharova mez je $1,4 M_{\odot}$ pro nerotujícího trpaslíka. Pro rychle rotující hvězdu činí tato mez až $3 M_{\odot}$. Poloměr bílých trpaslíků se pohybuje řádově v tisících kilometrech. Je zřejmé, že konečným stádiem Slunce bude právě bílý trpaslík. Na obrázku 1.2 je znázorněn poměr velikosti Slunce dnes a jeho budoucího konečného stádia.

Pokud hmotnost hvězdy překročí Chandrasekharovu mez, pokračuje gravitační stlačování. Elektrony jsou natlačovány na jádra a přeměňují protony

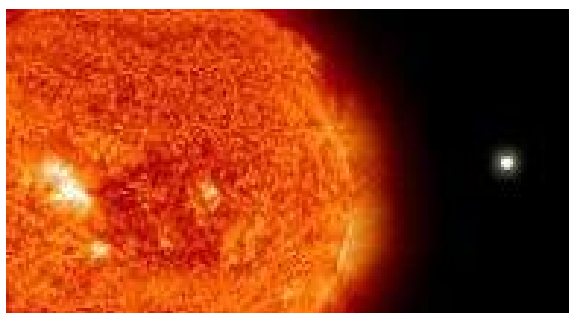
²Syntéza prvků s vyšším protonovým číslem záleží také na hmotnosti hvězdy. Pokud je hvězda málo hmotná, nevytvoří se v ní podmínky pro syntézu všech uvedených prvků až po železo. Syntéza v tomto případě končí některým prvkem s nižším protonovým číslem. Příkladem takto málo hmotné hvězdy může být Slunce.

³Při výbuchu supernovy mohou vznikat i těžší prvky až po uran.

⁴Subrahmanyan Chandrasekhar, americký fyzik indického původu, nositel Nobelovy ceny, mez vypočetl v roce 1930.



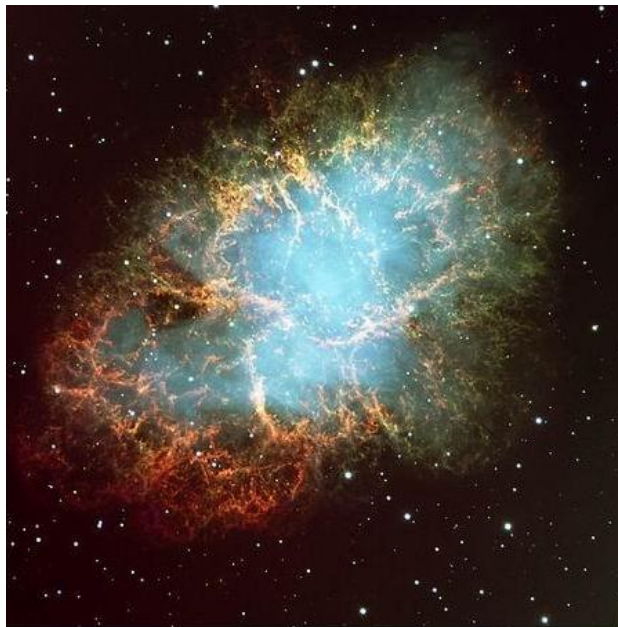
Obrázek 1.1: Planetární mlhovina NGC 6543, Kočičí oko. V jejím středu můžeme pozorovat jedno z konečných stadií hvězd – bílého trpaslíka [3]. Díky snímku v nepravých barvách jsou zřetelné jednotlivé prstence, které vyznačují hranice materiálu vyvrhovaného v intervalech 1500 let. Vyskytují se zde také velmi výrazné výtrysky rychlejšího plynu, které narážejí do jednotlivých prstenců pomalejšího plynu a vytvářejí tak rázové vlny [20].



Obrázek 1.2: Slunce ve svém konečném stádiu bílého trpaslíka v porovnání se svou současnou velikostí [3].

na neutrony a vzniká tak rovnováha mezi gravitačními silami a silami vyvolanými Fermiho tlakem degenerovaných neutronů. Hvězda v tomto stádiu se nazývá příznačně neutronová hvězda. Prudká imploze při vzniku neutronové hvězdy vyvolá často výbuch supernovy. Hvězda odhodí obrovské množství hmoty do mezihvězdného prostoru a vyzáří mnoho elektromagnetických a

gravitačních vln. Pozůstatkem po výbuchu supernovy je například Krabí mlhovina na obrázku 1.3.

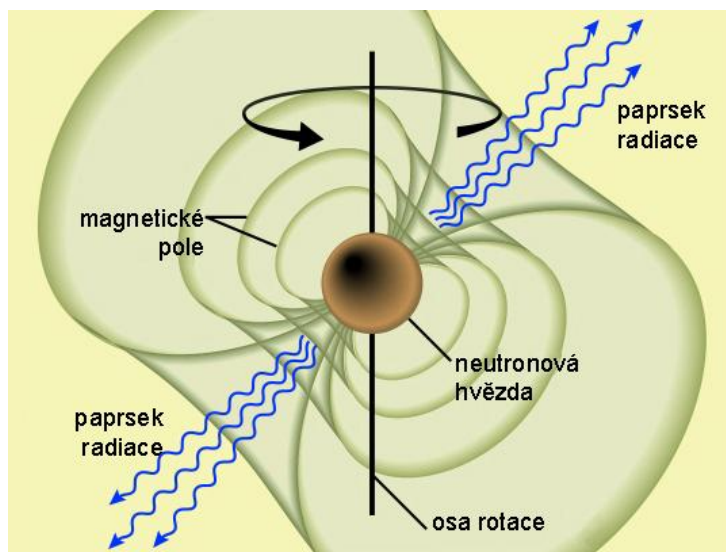


Obrázek 1.3: Krabí mlhovina (NGC 1952) v souhvězdí Býka je pozůstatkem po výbuchu supernovy, který pozorovali v roce 1054 čínští hvězdáři. Na denní obloze zářila po dobu jednoho měsíce [3].

Neutronové hvězdy mohou být také obklopeny silným magnetickým polem, ve kterém magnetická indukce dosahuje hodnot 10^7 T. Pokud tyto neutronové hvězdy rychle rotují, vznikají pulsary. Pulsar pozorujeme jako radiový zdroj, který vysílá pravidelné krátké pulsy. Schéma pulsaru na obrázku 1.4 znázorňuje vznik pulsů, který způsobuje rozdílný směr osy rotace a osy magnetického pole. Radiové záření pulsů vzniká díky spirálovému pohybu elektronů podél magnetických indukčních čar. Tento druh záření je nazýván synchrotronové záření [24].

Mohou nastat případy, kdy indukce magnetického pole v okolí neutronové hvězdy dosahuje hodnot až 10^{12} T. Takovéto objekty nazýváme magnetary. Jejich povrch je pokryt krustou, jejíž pukání spojené s pohybem magnetických indukčních čar může způsobit charakteristické otřesy doprovázené záblesky měkkého rentgenového záření [7].

Poloměr neutronové hvězdy se pohybuje řádově v desítkách kilometrů a hustota kolem 10^{11} $\text{kg} \cdot \text{cm}^{-3}$. Hvězda může zůstat neutronovou trvale, pokud její hmotnost není tak velká, aby gravitační síly překonaly Fermiho tlak a jaderné síly, které působí mezi neutrony. Obdobně jako u bílého trpaslíka



Obrázek 1.4: Schéma pulsaru [3].

je určena hraniční hmotnost, po kterou zůstává neutronová hvězda stabilní. Nazývá se Oppenheimerova–Landauova mez⁵ a její hodnota je $2 M_{\odot}$ ⁶.

Hvězdy při svém stárnutí odhazují obrovské množství hmoty. Hvězda zrozená s hmotností $8 M_{\odot}$ ztratí v průběhu vývoje dost hmoty na to, aby se navěky stala bílým trpaslíkem. Většina hvězd zrozených mezi $8 M_{\odot}$ a $20 M_{\odot}$ odmrští do mezihvězdného prostoru tolik hmoty, že jejich vývoj skončí ve stádiu neutronové hvězdy [24].

1.2 Černá díra

Pokud hvězda navždy nezůstane ani bílým trpaslíkem ani neutronovou hvězdou a je-li její hmotnost poté, co odhodí velké množství své hmoty do mezihvězdného prostoru, tak velká, že přesahuje Oppenheimerovu-Landauovu mez, nastane gravitační kolaps a vznikne černá díra⁷.

V centru černé díry nalezneme singularitu. Je to oblast, kde přestávají

⁵J. Robert Oppenheimer, americký teoretický fyzik, se svými spolupracovníky určil mez v roce 1938. Lev Davidovič Landau, ruský teoretický fyzik, svými úvahami o neutronových jádrech hvězd dal podnět k Oppenheimerovým výzkumům.

⁶Tato hodnota není zatím určena přesně, protože ještě nebylo dokonale pochopeno chování jaderných sil při velmi velkých hustotách. Víme ale jistě, že se pohybuje mezi hodnotami $1,5 M_{\odot}$ až $3 M_{\odot}$.

⁷Jako první začal používat termín „černá díra“ americký teoretický fyzik John Archibald Wheeler v roce 1967. Dříve se používal termín „kolapsar“.

platit rovnice pro popis gravitačního pole a všechny známé fyzikální zákony. Singularita je místo s extrémními hodnotami fyzikálních veličin, s nulovým poloměrem, nekonečnou hustotou a nekonečně velkými gradienty gravitačního pole. V singularitě je „jakoby“ soustředěna všechna hmota bývalé kolabující hvězdy. Každá světočára, která prochází singularitou, v ní nespojitě končí (částice pohybující se podél této světočáry v singularitě zaniká).

Singularita je obklopena horizontem⁸. Horizont není tvořen žádnou hmotou, je to hranice černé díry v prostoru. Na povrchu horizontu je gravitační pole nekonečně silné a úniková rychlost se zde rovná rychlosti světla. Pokud se tedy libovolná částice vyskytne v těsné blízkosti černé díry a překoná horizont, pak už neexistuje relativistický mechanismus, díky kterému by se částice dostala pryč z gravitačního působení černé díry (překonala by horizont v opačném směru). Částice je následně nucena gravitačními silami pohybovat se směrem ke středu černé díry (k singularitě), kde zaniká⁹. Jak už bylo řečeno, z povrchu černé díry nemůže uniknout nic, tedy ani fotony světelného záření. Z tohoto faktu plyne, že pro vzdáleného pozorovatele je z pohledu klasické fyziky černá díra neviditelná [24].

V případě statické sféricky symetrické hvězdy se radiální souřadnice horizontu (Schwarzschildovy sféry) r_g nazývá gravitační poloměr. Jeho velikost vyplývá z obecné teorie relativity, ale shodou okolností lze získat identický vztah z klasické newtonovské teorie gravitace následujícím způsobem. Uvažujme sférické těleso o hmotnosti M a poloměru r . Pak pro únikovou rychlost v částice z povrchu tohoto tělesa platí vztah

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{r}}, \quad (1.2)$$

kde G je gravitační konstanta. Vyplývá z něj, že nezáleží na hmotnosti a složení částice, ale pouze na její rychlosti v a hmotnosti tělesa M . Pokud položíme $v = c$, kde konstanta c označuje velikost rychlosti světla ve vakuu, a za M dosadíme hmotnost černé díry, můžeme z předcházejícího vzorce pouze pomocí klasické teorie gravitace odvodit gravitační poloměr¹⁰ [25]

$$r_g = \frac{2GM}{c^2}. \quad (1.3)$$

⁸Horizont v případě statické hvězdy je někdy označován jako Schwarzschildova sféra.

⁹Podle hypotézy kosmické cenzury se ve vesmíru vyskytují pouze singularity obklopené horizontem a existence „nahé“ singularity není přípustná.

¹⁰Toto odvození provedl v roce 1798 francouzský fyzik a matematik Pierre Simon Laplace. Samotnou ideu existence „temné hvězdy“ ve vesmíru prosazoval již o šest let dříve britský přírodovědec John Michell. Problému temných hvězd (později černých děr) nebyla dále věnována pozornost, do popředí zájmu se dostal znovu až ve 20. století.

Schwarzschildova sféra má význam horizontu událostí. To znamená, že z oblasti, kterou horizont událostí vymezuje, se nemohou k vnějšímu pozorovateli dostat žádné světelné signály (není zde možný přenos informací).

Pokud se částice pohybuje směrem k černé díře, překročí horizont událostí a svůj pohyb ukončí v singularitě, celou tuto dráhu urazí za konečnou hodnotu vlastního času. Z hlediska vnějšího pozorovatele částice do černé díry padá nekonečně dlouhou dobu. Čím více se částice blíží k horizontu, pohyb se z pohledu vnějšího pozorovatele zpomaluje a na horizontu se úplně zastaví. Tento jev je způsoben dilatací času a někdy je označován jako „zamrzání událostí na horizontu“.

Pokud pozorujeme kolabující hvězdu, její poloměr se zmenší na gravitační poloměr za konečný vlastní čas τ pozorovatele pevně spojeného s povrchem hvězdy, pro který platí vztah [9]

$$\tau = \frac{2r_g}{3c} \left[\left(\frac{r_0}{r_g} \right)^{3/2} - 1 \right], \quad (1.4)$$

kde r_0 je hodnota radiální souřadnice měřená na povrchu hvězdy při začátku kolapsu od středu Schwarzschildovy sféry. Dále se za konečný vlastní čas celá hmota hvězdy zhroutlí do singularity a vznik černé díry se dokončí. Libovolný interval vlastního času $\Delta\tau$ měřený vzdáleným pozorovatelem se prodlouží na interval Δt , pro který platí vztah [9]

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}}, \quad (1.5)$$

kde r je hodnota radiální souřadnice měřená na kolabující vrstvě od centra hvězdy. Z pohledu vzdáleného pozorovatele se bude gravitační kolaps zpomalovat a za nekonečně dlouhý čas „zamrzne“ na horizontu událostí.

Ve všech předchozích úvahách jsme předpokládali ideální případ černé díry, která vznikla ze sféricky symetrické nerotující hvězdy bez jakékoliv hmoty v jejím okolí. Prostorčas za takových podmínek popisuje Schwarzschildova geometrie, která je řešením Einsteinových rovnic ve vakuu¹¹. Schwarzschildova metrika se uvádí ve tvaru [10]

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) (c dt)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2). \quad (1.6)$$

¹¹Toto řešení našel v roce 1916 německý astrofyzik Karl Schwarzschild.

Často se zapisuje pomocí soustavy geometrodynamických jednotek¹², kde platí $c = G = 1$. Metrika zapsaná pomocí této soustavy vypadá takto [10]

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2), \quad (1.7)$$

metrický tenzor má tedy tvar

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -(1 - 2M/r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 - 2M/r)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\vartheta \end{pmatrix}.$$

Pro souřadnice singularity v Schwarzschildově geometrii platí, že $r = 0$ a hodnota radiální souřadnice horizontu je $r = 2M$. Schwarzschildova metrika je nezávislá na čase, sféricky symetrická a je zcela charakterizovaná hmotností černé díry M . Popisuje také prostoročas v okolí libovolné sféricky symetrické hvězdy, která je statická. Platí i pro případy pulsující, explodující nebo kolabující sféricky symetrické hvězdy. Metrika byla odvozena ve tvaru (1.7) se vztažnou soustavou s počátkem ve středu hvězdy, použité souřadnice nejlépe vyhovují vzdálenému pozorovateli.

Ze Schwarzschildovy metriky vyplývá vztah pro gravitační rudý posuv [10]

$$\omega_\infty = \omega_* \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2}, \quad (1.8)$$

kde ω_* je frekvence signálu, který byl vyslán statickým pozorovatelem ze vzdálenosti r od středu černé díry či hvězdy. Pozorovatel v nekonečnu (ve vzdálenosti mnohem větší než r) detekuje tento signál s menší hodnotou frekvence ω_∞ . Zmenšení hodnoty frekvence je dáno tím, že signál ztrácí energii při překonávání gravitačního působení černé díry. Můžeme poukázat na skutečnost, že pokud bychom vyslali signál libovolné frekvence ω_* přímo ze Schwarzschildovy sféry ($r = 2M$), nebude v nekonečnu detekován statickým pozorovatelem žádný signál ($\omega_\infty = 0$). Tímto jsme pomocí vztahu (1.8) ověřili již uváděné vlastnosti Schwarzschildovy sféry.

Předpokládá se, že výskyt statických černých děr není ve vesmíru příliš častý. Daleko přirozenější a častější je případ rotující černé díry, protože

¹²Pokud budeme chtít přejít od geometrodynamických jednotek zpět k původním jednotkám, musíme ve vztazích nahradit například čas t výrazem ct , hmotnost M výrazem $\frac{GM}{c^2}$, délka l zůstává zachována. Všechny tři zmiňované veličiny mají v geometrodynamických jednotkách rozměr délky. Seznam dalších veličin a jim odpovídajících výrazů je možno nalézt například v [10].

hvězdy, ze kterých černé díry vznikají, rovněž rotují. Proto zavádíme Kerrovu geometrii, která je opět řešením Einsteinových rovnic ve vakuu, ale pro případ rotující černé díry¹³. Prostorčas kolem rotující černé díry je tedy popsán Kerrovou metrikou (v geometrických jednotkách) [10]

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & - \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2} \right) dt^2 - \frac{4Mar \sin^2 \vartheta}{\rho^2} d\varphi dt + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + & (1.9) \\
 & \rho^2 d\vartheta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2 \sin^2 \vartheta}{\rho^2} \right) \sin^2 \vartheta d\varphi^2 \\
 a \equiv & J/M \quad \rho^2 \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta \quad \Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2
 \end{aligned}$$

Souřadnice $(t, r, \vartheta, \varphi)$ se nazývají Boyer–Lindquistovy a jsou analogické souřadnicím Schwarzschildovým. Kerrova metrika je závislá na dvou parametrech – momentu hybnosti J černé díry a její hmotnosti M . Podíl těchto veličin označujeme a , je nazýván Kerrův parametr a charakterizuje rotaci černé díry. V geometrických jednotkách má rozměr délky. Pokud platí $a = 0$ (hvězda tedy nerotuje), přechází Kerrova metrika na tvar Schwarzschildovy metriky (1.7). Kerrova geometrie je tedy zobecněním Schwarzschildovy geometrie pro případ rotující černé díry a použité souřadnice opět vyhovují vzdálenému pozorovateli. Další důležitou vlastností je nezávislost na čase a symetrie podle osy rotace černé díry (nezávislost na souřadnici φ).

Zvláštností rotující černé díry je, že má dva horizonty. Pro jejich radiální souřadnici platí [10]

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}. \quad (1.10)$$

Vnější horizont s radiální souřadnicí r_+ je horizontem událostí s obdobnými vlastnostmi jako horizont Schwarzschildovy černé díry. Toto tvrzení lze podpořit faktem, že pro $a = 0$ ze vztahu (1.10) plyne, že $r_+ = 2M$ v souladu se vztahem (1.3) po přechodu k geometrodynamickým jednotkám.

Pokud se částice dostane do gravitačního pole Kerrovy černé díry, její rotace způsobí, že částice je nucena kolem ní obíhat souhlasným směrem. Čím blíže černé díře se částice nachází, tím je její vliv na pohyb částice výraznější. Tento jev se označován jako strhávání prostoročasu rotující černou dírou. Se strháváním prostoročasu velice úzce souvisí oblast zvaná ergosféra, která se vytváří v prostoru nad horizonty a z vnějšku je ohraničena plochou danou rovnicí [10]

$$r = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \vartheta}, \quad (1.11)$$

kterou nazýváme statická mez. Z rovnice (1.11) vyplývá, že ergosféra je nejširší v ekvatoriální rovině rotující černé díry a přiléhá k horizontu událostí

¹³Toto řešení nalezl v roce 1963 novozélandský astrofyzik Roy Kerr.

v místech, kde ji protíná osa rotace. Vně statické meze mohou setrvat tělesa v klidu vzhledem k pozorovateli v nekonečnu nebo se mohou pohybovat ve směru či proti směru rotace černé díry. Pokud se objekt vyskytuje na statické mezi, nemůže se již pohybovat proti směru rotace černé díry. V oblasti ergosféry se žádné těleso nemůže udržet v klidu vůči vzdálenému pozorovateli a je nuceno obíhat souhlasně s černou dírou.

V případě rotující černé díry existuje hypotetická možnost čerpat z ní energii prostřednictvím ergosféry tzv. Penroseovým procesem. Tato problematika je více rozvedena například v [10, 25].

Předpokládá se, že černé díry nemusí vznikat pouze kolapsem hvězd, ale mohly také vzniknout po velkém třesku v období raného stádia vesmíru. Tyto černé díry by měly mít velmi malou hmotnost asi $10^{-19} M_{\odot}$ a nazýváme je primordiální. Díky takto nízké hmotnosti se u primordiálních černých děr velmi významně projevuje pokles hmotnosti způsobený tzv. Hawkingovým zářením¹⁴. Princip tohoto záření vychází z kvantové mechaniky a překračuje zaměření této práce, více v [10]. Podle tohoto principu sférická černá díra vyzařuje energii stejně jako absolutně černé těleso o tzv. Hawkingově teplotě¹⁵ [10]

$$k_{\text{B}}T = \frac{c^3 \hbar}{8\pi GM}, \quad (1.12)$$

kde k_{B} je Boltzmannova konstanta, \hbar je Planckova konstanta a π je Ludolfovo číslo. Tento jev bývá často označován jako kvantové vypařování černých děr¹⁶. U primordiálních černých děr se za konečný čas radiací vyzáří veškerá jejich hmotnost. Když se hodnota hmotnosti začne blížit k nule, nastane velmi prudký nárůst energie Hawkingova záření. Vypaření veškeré hmotnosti černé díry tedy provází na konci tohoto jevu exploze [10].

1.3 Černá díra nemá vlasy

Rotující černé díry mohou svou rotací vytvářet v zakřivení okolního prostoročasu vír podobný vodnímu víru. Když se do černé díry zřítí hvězda, planeta nebo nějaká jiná menší černá díra, vybudí se pulsace. Horizont černé díry se pohybuje nahoru a dolů jako například povrch Země při zemětřesení. Tento

¹⁴U supermasivích černých děr a černých děr s hmotností řádově odpovídající hmotnosti Slunce je energie uvolněná Hawkingovým zářením zanedbatelná.

¹⁵Z tohoto vztahu vidíme, že teplota T zmiňovaného absolutně černého tělesa závisí nepřímoúměrně na hmotnosti černé díry M . Tedy čím je hmotnost černé díry menší, tím roste hodnota energie záření uvažovaného absolutně černého tělesa odpovídajícího černé díře.

¹⁶Jak je asi z předchozího textu patrné, kvantové vypařování černých děr objevil v roce 1974 britský teoretický fyzik Stephen W. Hawking.

jev by měl vyvolat gravitační vlny¹⁷, tj. zvlnění křivosti prostoročasu, jež se šíří dále do vesmíru.

Ze všech vlastností černých děr je nepřekvapivější následující fakt, který je někdy popularizátory¹⁸ nazýván, že černá díra nemá vlasy. „Po dokončení gravitačního kolapsu je vnější elektromagnetické a gravitační pole stacionární černé díry ve vakuu zcela určeno jen třemi nezávislými parametry: celkovou hmotností M , elektrickým nábojem Q , a vlastním rotačním momentem hybnosti J , bez ohledu na to, z čeho a jakým způsobem hvězda vznikla“¹⁹ [25]. Z těchto tří čísel lze s dostatečnými matematickými znalostmi vypočítat tvar horizontu, sílu gravitačního působení černé díry, detaily zakřivení prostoročasu, frekvenci pulsací, atd. Také žádné měření, které můžeme provést na černé díře, nemůže odhalit vlastnosti hvězdy, ze které se černá díra zrodila, s výjimkou již zmíněných tří veličin.

Co je tedy těmi „vlasy“, které černá díra nemá? Například nemůžeme zjistit zda hvězda, ze které černá díra vznikla, byla tvořena hmotou či anti-hmotou, jestli byla tvořena protony a elektrony nebo neutriny a antineutriny. Také nelze zjistit tvar hvězdy před kolapsem, tj. jestli byla symetrická či obsahovala nerovnosti a „hrboly“. Tedy také platí, že pokud kolabuje mírně nesférické těleso, pak horizont této nově vzniklé černé díry se po krátké době ustálí jako úplně sférický.

Dalšími důležitými „vlasy“ je magnetické pole. Uvažujme černou díru, která vznikne kolapsem hvězdy obklopené magnetickým polem. Než zkolabuje pod svůj horizont, je magnetické pole ukotveno v jejím vnitřku. Poté co hvězdu obklopí horizont, pole proniká pouze horizontem a ten není schopen magnetické pole svázat. Pole se pak přeměňuje na elektromagnetické vlny, které ho odnášejí z části do černé díry a z části pryč. Nakonec zůstane jen černá díra bez magnetického pole [24].

¹⁷Gravitační vlny nebyly zatím prokázány žádným přímým pozorováním. Nepřímo však pozorovány byly v okolí binárních pulsarů.

¹⁸Autorem tohoto pojmenování je americký teoretický fyzik John Archibald Wheeler.

¹⁹Na řešení tohoto problému pracovalo nezávisle na sobě mnoho fyziků. Uvedme například ruské fyziky V. L. Ginzburga, I. D. Novikova, americké fyziky R. H. Priceho, J. B. Hartleho a kanadského fyzika jihoamerického původu Wernera Israele. Důkaz tohoto teorému byl dokončen v roce 1972. Pracovala na něm opět skupina vědců, jeho podstatnou část provedl britský teoretický fyzik Stephen W. Hawking.

Kapitola 2

Základní charakteristika akrečního disku

S existencí černých děr ve vesmíru je velmi úzce spjata problematika akrečních disků. V této kapitole budou rozebrány základní principy a děje, které jsou spojeny s akrecí. Zaměříme se rovněž objekty ve vesmíru, ve kterých se pravděpodobně černé díry s akrečními disky nacházejí. V závěru kapitoly se zmíníme v souladu s nejnovějšími poznatky o vlivu magnetického pole hmoty disku na proces akrece.

2.1 Jak se ve vesmíru hledají černé díry?

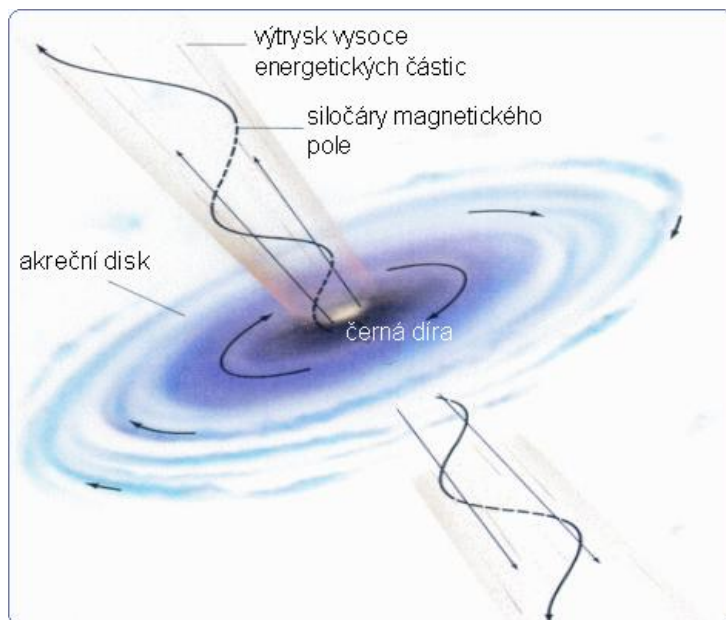
Na první pohled by se mohlo zdát, že černé díry nelze pozorovat, protože z pohledu klasické teorie relativity vůbec nezáří a jsou poměrně malé. Černé díry se však ve vesmíru nevyskytují samostatně, ale interagují s okolní hmotou a právě díky těmto interakcím je můžeme pozorovat. Tato pozorování se netýkají pouze viditelného světla, ale elektromagnetického záření všech vlnových délek.

Pokud se v dostatečně blízkém okolí rotující černé díry vyskytne hmota, černá díra na ni působí velice intenzivně gravitační silou a nutí hmotu pohybovat se směrem k jejímu středu. Představme si například proudy plynu, které padají do černé díry. Tento děj se nemusí odehrávat tak, že se plyn blíží přímočaře nejkratší cestou k černé díře. Naopak proudy plynu se mohou srážet, spojovat a následně začínají obíhat kolem díry po téměř kruhových orbitách. Díky tomu, že jsou černou dírou přitahovány a třením ztrácejí energii, se poloměr orbit stále zmenšuje. Pohybují se tedy po trajektorii, která se podobá spirále. Pokud se proudy plynu vyskytují v okolí rotující černé díry, působí na jejich pohyb zároveň strhávání prostoročasu způsobené její rotací

a v blízkém okolí černé díry jsou nuceny obíhat ji souhlasně se směrem jejího pohybu.

Během rotace se plyn kolem díry zformuje do tvaru disku, který nazýváme akreční. Tento název byl odvozen od pojmu akrece, čili narůstání hmoty centrálního objektu, v našem případě černé díry. Méně výrazné akreční disky lze také nalézt v okolí neutronových hvězd. V okolí méně hmotných objektů, jako například bílého trpaslíka, se akrece stává velmi slabou. Akreční disk jako první popsal v roce 1969 britský astrofyzik Donald Lynden-Bell [24].

Spolu s akrečním diskem vznikají na jeho vnitřním okraji dva obrovské výtrysky plynu, jejichž směr je orientován souhlasně s osou rotace disku, kolmo na rovníkovou rovinu černé díry¹. Na obrázku 2.1 je schéma černé díry s akrečním diskem a výtrysky.



Obrázek 2.1: Schéma černé díry s akrečním diskem a výtrysky [3].

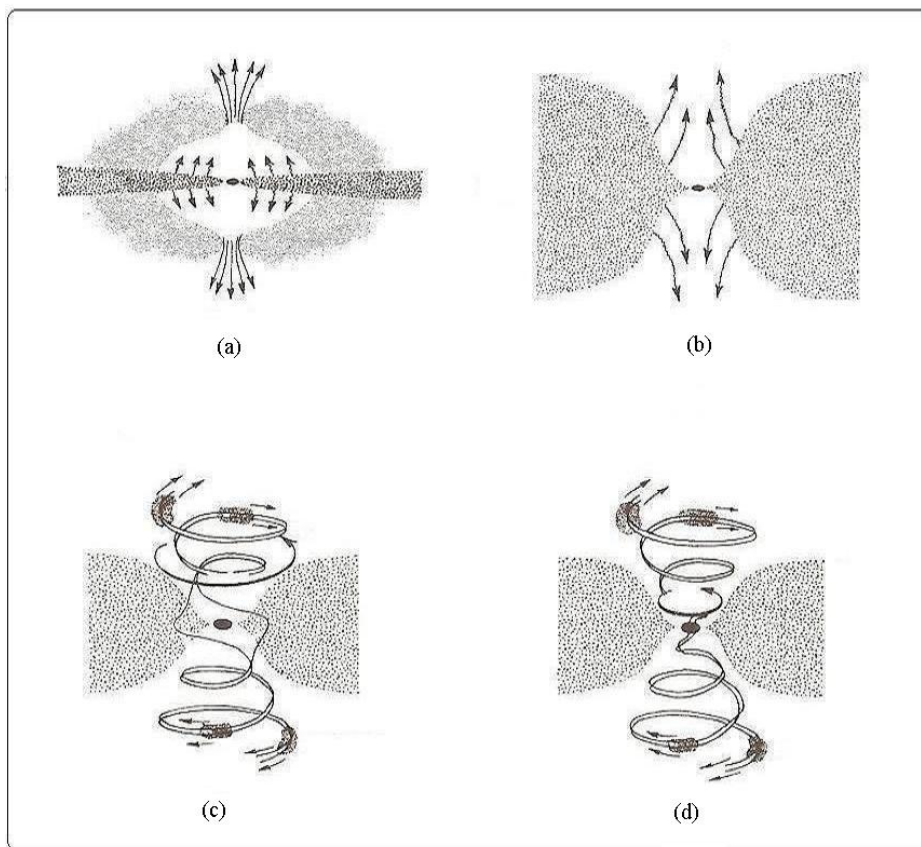
Pokud se černá díra rychle otáčí, zůstává osa její rotace neměnná. Jak jsme již uvedli, rotující plyn v bezprostřední blízkosti Kerovy černé díry je strháván vírem prostoru (jehož osa je rovnoběžná s osou rotace černé díry) a je nucen rotovat v rovníkové rovině černé díry souhlasně s ní. Čím je plyn blíže k ergosféře, tím sílí vliv rotace černé díry na něj. Rotace vnitřní části akrečního disku je tak plně určena, vnější části však ne. Rovina rotace vnější

¹Problematikou výtrysků se jako jedni z prvních zabývali britští astrofyzikové Rees a Blandford.

části může být od rovníkové roviny černé díry libovolně odkloněná a rotace plynu dokonce opačná než je rotace černé díry.

Při akreci se třením zahřívá okolní látka. Tento jev je tak výrazný, že akreční disk emituje záření všech vlnových délek, je tedy viditelný. Protože disk září v široké škále elektromagnetického vlnění, získáváme jeho pozorováním a měřením širokou paletu informací o jeho chování. Vnitřní části disku, které jsou velmi rozžhavené, emitují záření o velmi vysokých frekvencích. Je to většinou rentgenové záření, jehož spektrum je velmi významným zdrojem informací o akrečních discích.

Nyní se vraťme k výtryskům, které vznikají společně s akrečními disky. Na obrázku 2.2 jsou znázorněny čtyři různé způsoby vzniku, které se různou měrou uplatňují v různých případech.



Obrázek 2.2: Vznik výtrysků. Převzato z [24].

První případ, který je znázorněn na obrázku 2.2(a) nastává v situaci, kdy je tenký akreční disk obklopen vrstvou chladného plynu. Díky proudění

z horní a dolní strany disku, může vzniknout uprostřed chladné hmoty přímo nad a pod černou dírou bublina horkého plynu. Horký plyn z bubliny si poté prorazí otvor, kterým uniká ven. Jak už bylo výše uvedeno, výtrysk má směr rovnoběžný s osou rotace a kolmý na rovníkovou rovinu černé díry.

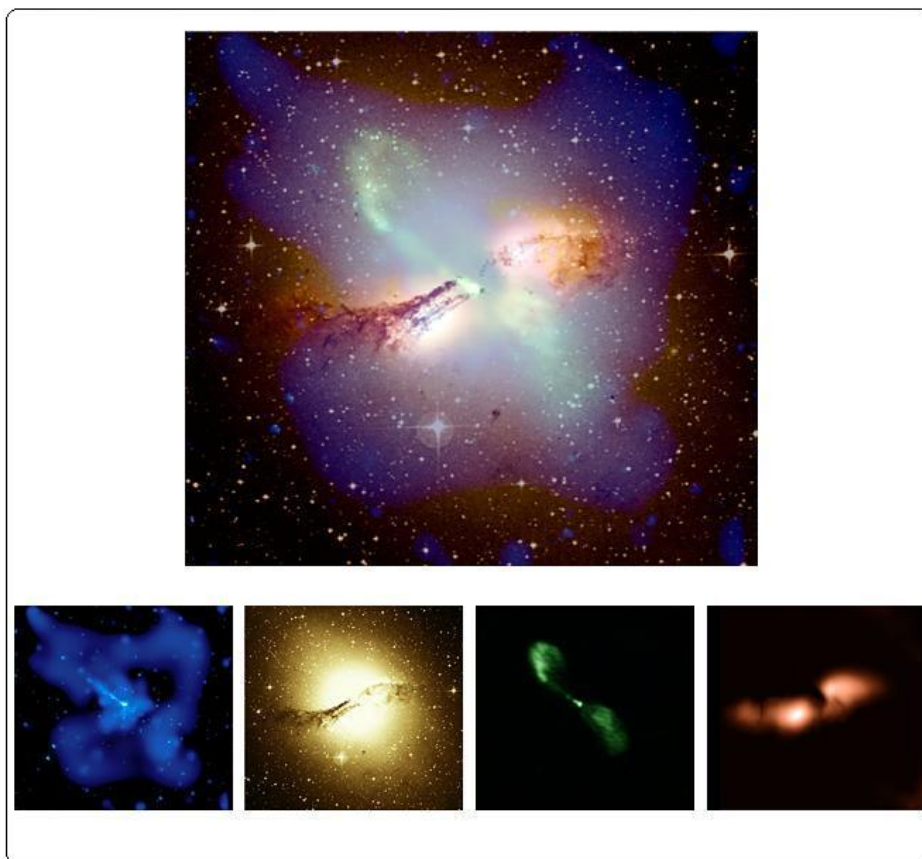
Druhý případ, který se týká obrázku 2.2(b), nastává tehdy, pokud je akreční disk v okolí černé díry tlustý. Díky odstředivé síle, která vzniká orbitálním pohybem částic v disku, se vytvoří nad a pod středem disku vír ve tvaru trychtýře. Třením víru o disk se styčná plocha rozžhaví natolik, že z ní vylétává mnoho částic, které jsou vírem soustředěny a následně vylétávají pryč. Vzniká tak výtrysk, jehož osa je totožná jako v předešlém případě.

V třetím případě znázorněném na obrázku 2.2(c) se uplatní magnetické pole akrečního disku. Magnetické siločáry vycházející z akrečního disku jsou strhávány jeho rotací a svinou se do tvaru pomyslné šroubovice, která vychází nahoru i dolů ze středu akrečního disku směrem rovnoběžným s osou rotace černé díry. Díky elektrickým silám se začne uvolňovat rozžhavený plyn z okraje disku a bude podél rotujících magnetických indukčních čar a také pomocí vznikající odstředivé síly unášen pryč. Opět vznikají dva výtrysky, jejichž osa je shodná s osou rotace černé díry.

Poslední způsob (obrázek 2.2(d)) vzniku výtrysku je na první pohled téměř identický s předchozím případem. Celý proces rotace do šroubovice zkroucených siločár ve směru osy rotace černé díry, které s sebou unášejí rozžhavený plyn, je totožný. Podstatný rozdíl je v tom, že magnetické siločáry procházejí přímo černou dírou. Tento jev si však zdánlivě odporuje s tvrzením o bezvlasosti černých děr². Magnetické siločáry však v tomto případě nemají původ v černé díře samotné, ale pocházejí z částic akrečního disku, které již pohltila černá díra. Rozžhavený akreční disk vypudí magnetické siločáry do svého středu a nutí je procházet přímo černou dírou. Tento jev nazýváme Blandfordův-Znajekův proces. Naznačuje, jak proudy plynů čerpají energii přímo z rotační energie černé díry [24].

Právě tyto výtrysky jsou astronomy velice dobře pozorovatelné. Někdy jsou velmi silné a daleko viditelnější než samotný akreční disk. Pozorovat je opět můžeme i v jiné škále elektromagnetického vlnění než je pouze viditelné světlo. Výtrysky z jádra galaxie Centaurus můžeme vidět na obrázku 2.3 a schéma této galaxie na obrázku 2.4.

²Roli zde hraje také fakt, že bezvlasost černých děr se týká případů, kdy černá díra nerotuje a neobklopuje ji akreční disk.



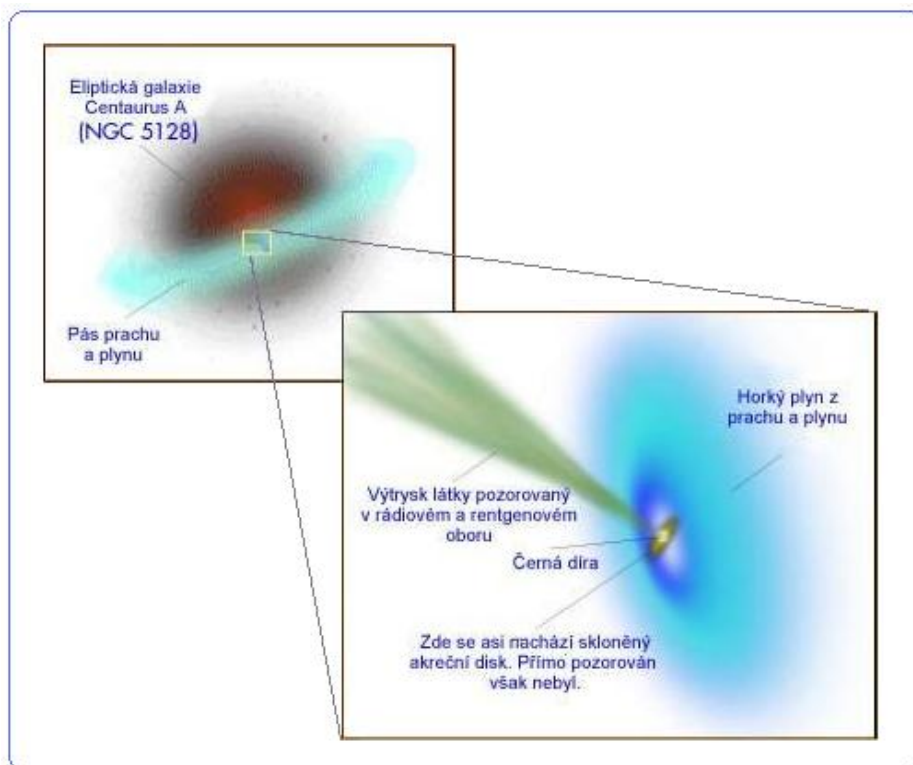
Obrázek 2.3: Centaurus A (NGC 5128) je klasická eliptická rádiová galaxie [13]. V centru se nachází černá díra s obrovským akrečním diskem a rádiovými výtrysky 1 milion světelných roků velkými. Její mohutný prachový pás pravděpodobně vznikl srážkou s jinou galaxií. Snímek galaxie, který se nachází v horní části obrázku, je v jeho dolní části rozložen po řadě na snímky, které zachycují pouze rentgenovou, optickou a rádiovou část záření. Poslední snímek představuje pouze rádiové záření s vlnovou délkou 21 cm [20].

2.2 Kde se ve vesmíru nacházejí černé díry?

Ve vesmíru existují objekty u kterých se předpokládá, že obsahují černou díru. Pro náš případ jsou zajímavé zejména binární systémy hvězd (dvojhvězdy) a masivní černé díry v centrech galaxií a to zejména aktivní galaktická jádra (AGN). Obrázek 2.5 znázorňuje masivní černou díru v centru eliptické galaxie NGC 4261.

Aktivní galaktická jádra se liší od ostatních jader galaxií³ zejména velice

³Pouze 1% – 5% galaktických jader řadíme mezi AGN.



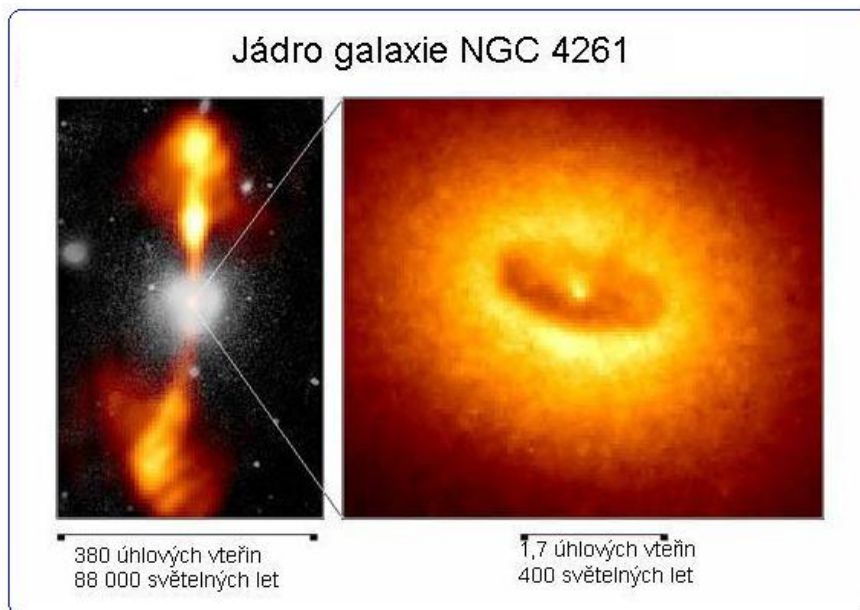
Obrázek 2.4: Schéma galaxie Centaurus A (NGC 5128) [2].

intenzivním, netepelným zářením s širokým rozsahem spektra. Záření může mít také proměnný charakter. Dalšími specifickými vlastnostmi AGN jsou malé rozměry (asi jeden světelný měsíc) a radiové výtrysky s rychlostí několika tisíců $\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$. Nejdůležitějšími zástupci AGN jsou kvasary a radiové galaxie, kterým se budeme nyní věnovat⁴.

V současné době se jejich podstata vysvětluje pomocí poznatků o obřích černých dírách, okolo kterých existuje akreční disk s výtrysky. Tyto teorie však nejsou prokázány se stoprocentní jistotou. Existují také hypotézy, které tvrdí, že charakteristické chování kvasarů a radiových galaxií způsobuje velice masivní magnetická rychle rotující hvězda. Většinou však bývají považovány za méně pravděpodobné a proto se jimi nebudeme zabývat [24].

Kvasary i radiové galaxie jsou tedy s velkou pravděpodobností tvořeny černou dírou o hmotnosti $10^6 M_{\odot}$ až $10^9 M_{\odot}$ s akrečním diskem a výtrysky. Oba objekty jsou obklopeny ostrovy hvězd dosahujících rozměrů až 100 000 světelných let. Kvasary a radiové galaxie se liší aktivitou černé díry, kterou obsahují.

⁴Mezi další reprezentanty AGN patří například Seyfertovy galaxie a blazary [18].



Obrázek 2.5: Eliptická galaxie NGC 4261 ve směru souhvězdí Panny. Předpokládá se, že v jejím centru se nachází supermasivní černá díra o hmotnosti $1,2 \cdot 10^{12} M_{\odot}$ znázorněná v pravé části obrázku. Toto černou díru obklopuje mohutný akreční disk o hmotnosti $10^5 M_{\odot}$. V levé části obrázku jsou zobrazeny rádiové výtrysky z tohoto objektu. Eliptická galaxie NGC 4261 je zvláštní tím, že černá díra se nenachází přesně v jejím centru. Pro tento neobvyklý jev se zatím nenašlo uspokojivé vysvětlení [3].

Černá díra uvnitř kvasaru je značně aktivní. Proces akrece se projevuje velice výrazně. Černá díra požírá plyn velmi rychle, v disku vzniká obrovské tření a ten následně díky tomu intenzivně září. Intenzita záření je natolik vysoká, že kvůli ní nelze pozorovat okolní hvězdy a je viditelný pouze disk. Nejvnitřnější část disku může být natolik žhavá, že emituje dokonce rentgenové záření. Chladnější části disku vzdálenější od jeho středu pak vysílají záření o nižší frekvenci. Objekt se jeví kvazihvězdně⁵, má velikost hvězdy (asi jeden světelný měsíc), ale září velice intenzivně skoro jako celá galaxie. První kvasar 3C 273 objevil v roce 1963 M. Schmidt. Dnes na obloze pozorujeme řádově tisíce kvasarů.

Černá díra v centru radiové galaxie má naopak velice nevýrazný akreční disk. Hmota disku je dírou pohlcována jen pozvolně, tření hmoty v disku není velké a disk téměř nezáří. Při pozorování tedy vidíme okolní hvězdy

⁵Ekvivalentem slova kvazihvězdně je výraz kvazistelárně (kvasistellar), jehož zkrácením vznikl název kvasar.

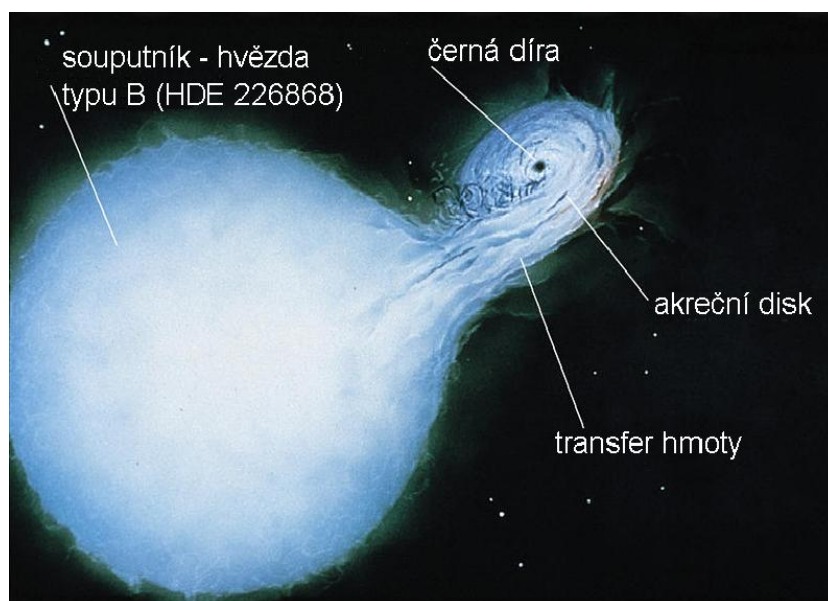
z galaxie, nikoliv akreční disk. Masivní černá díra a nevýrazný akreční disk Blandfordovým–Znajekovým procesem vyprodukuje obrovské výtrysky do mezigalaktického prostoru. Tyto výtrysky pozorujeme prostřednictvím radiových vln jako velké laloky. Laloky mohou vznikat skutečně obrovské, protože směr osy rotace masivní černé díry a tedy i směr osy výtrysků je velice stabilní. Odtud vznikl název pro galaxii, v jejím centru sídlí černá díra, radiová galaxie [24].

Jako první byla objevena radiová galaxie Cygnus A. Dalšími radiovými galaxiemi jsou například Centaurus A (NGC 5128), Virgo A (NGC 4486) a Perseus A (NGC 1275). Na obrázku 2.3 je znázorněna radiová galaxie Centaurus A s výtrysky. Na obrázku 2.4 pak můžeme vidět její schéma zpracované graficky.

Předpokládá se, že se černé díry nemusí nacházet jenom v kvasarech, radiových galaxiích a aktivních galaktických jádrech. Existují hypotézy, že masivní černá díra sídlí v centru každé galaxie. Pokud nemá akreční disk, tedy se nijak výrazně neprojevuje a my ji nemůžeme pozorovat. Výskyt velice hmotných objektů, ze kterých následně vznikají černé díry v centrech galaxií, je přirozený. Pokud se srazí v určité galaxii dvě hvězdy, je vždy jedna z nich odvržena do centra galaxie a druhá na její okraj. Čím více nastává hvězdných srážek, tím hmotnost objektu v centru galaxie narůstá [10].

Zaměřme se nyní na binární systémy hvězd čili dvojhvězdy, které jsou tvořeny dvěma hvězdami obíhajícími kolem sebe. Předpokládejme, že jedna z nich je natolik hmotná, že po tom, co jí dojde palivo pro termonukleární fúzi, se zhroutí do černé díry. Pokud jsou jejich dráhy málo vzdálené, hvězda se dostává příliš blízko k černé díře, černá díra na ni působí velice intenzivně gravitační silou a přitahuje si k sobě hmotu z vrchních vrstev hvězdy. Díky zákonu zachování momentu hybnosti hmota z vrchních vrstev hvězdy neputuje přímo k černé díře, ale rotuje kolem ní a vzniká tak v okolí černé díry akreční disk, jak je znázorněno na obrázku 2.6.

Pokud pozorujeme světlo přicházející od takového binárního systému, pak samozřejmě vidíme pouze hvězdu. Světlo z ní však přichází dopplerovsky posunuté. Tento posun se periodicky mění do modré a do rudé oblasti s tím, jak se hvězda při otáčení kolem neviditelného souputníka přibližuje a vzdaluje vzhledem k Zemi. Z Dopplerova posunu záření hvězdy je možno vypočítat hmotnost neviditelného společníka a ověřit tak, že druhé neviditelné těleso je skutečně černá díra. Bohužel tento výpočet není dostatečně přesný [10], abychom mohli jistě tvrdit, že neviditelná složka je skutečně černá díra a ne masivní neutronová hvězda. Kromě světla přicházejícího z hvězdy můžeme také pozorovat akreční disk možné černé díry. Hmota se při pohybu v disku tře a zahřívá se natolik, že emituje rentgenové záření, které je možno detekovat. To znamená, že pokud pozorujeme ve vesmíru hvězdu, od které přichází



Obrázek 2.6: Binární systém hvězd Cygnus X1 a HDE226868 v souhvězdí Labutě. Cygnus X1 je zdroj radiového záření, pravděpodobná černá díra. HDE226868 je klasická hvězda, kterou lze pozorovat ve viditelném světle. Obrázek ilustruje akreci hmoty hvězdy HDE226868 na pravděpodobnou černou díru Cygnus X1 [3].

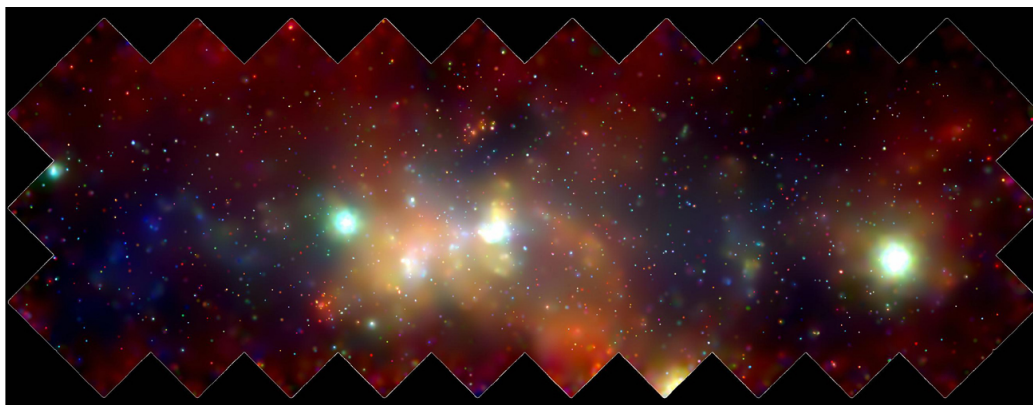
světlo s výše uvedeným Dopplerovým posuvem a v její bezprostřední blízkosti se vyskytuje silný zdroj rentgenového záření, můžeme si být téměř jisti, že pozorujeme dvojhvězdu jejíž jedna složka je možná černá díra [24].

Na obrázku 2.6 je známá dvojhvězda tohoto charakteru Cygnus X1 a HDE226868. Temná složka Cygnus X1 této dvojhvězdy (pravděpodobně černá díra) má hmotnost $6 M_{\odot}$.

Centrum Galaxie

Předpokládá se, že ve 26 000 světelných let vzdáleném centru naší Galaxie sídlí černá díra o hmotnosti $3 \cdot 10^6 M_{\odot}$, která je ztotožňována s radiovým zdrojem Sagitarius A* [20]. Ukazuje se, že nyní tato supermasivní černá díra je méně aktivní než v průběhu minulých stovek let (detailněji v [26]). Centrum naší Galaxie je zahaleno oblaky mezihvězdného prachu a plynu, které nepropouští světlo. Můžeme jej však pozorovat pomocí infračerveného, radiového a rentgenového záření. Na obrázku 2.7 je snímek centra Mléčné dráhy v oblasti rentgenového záření. V této oblasti se nachází mnoho bílých trpaslíků, neutronových hvězd a černých děr obklopených akrečními disky. Nejvýrazněj-

šími z nich jsou dva binární systémy 1E1743.1–2843 a 1E1740.7–2942, které jsou na obrázku 2.7 zachyceny jako velmi výrazně zářící body v jeho střední a pravé části. Pravděpodobná supermasivní černá díra – radiový zdroj Sagittarius A* se nachází uprostřed jasné oblasti ve střední části obrázku 2.7 mezi zmiňovanými binárními systémy [26, 8, 13].



Obrázek 2.7: Snímek centra naší Galaxie v oblasti rentgenového záření pořízený Chandra X-ray observatoří v červenci 2001. Záření s hodnotami energie v rozmezí 1–3 keV je vyznačeno červeně, 3–5 keV je vyznačeno zeleně a 5–8 keV je vyznačeno modře [26, 13].

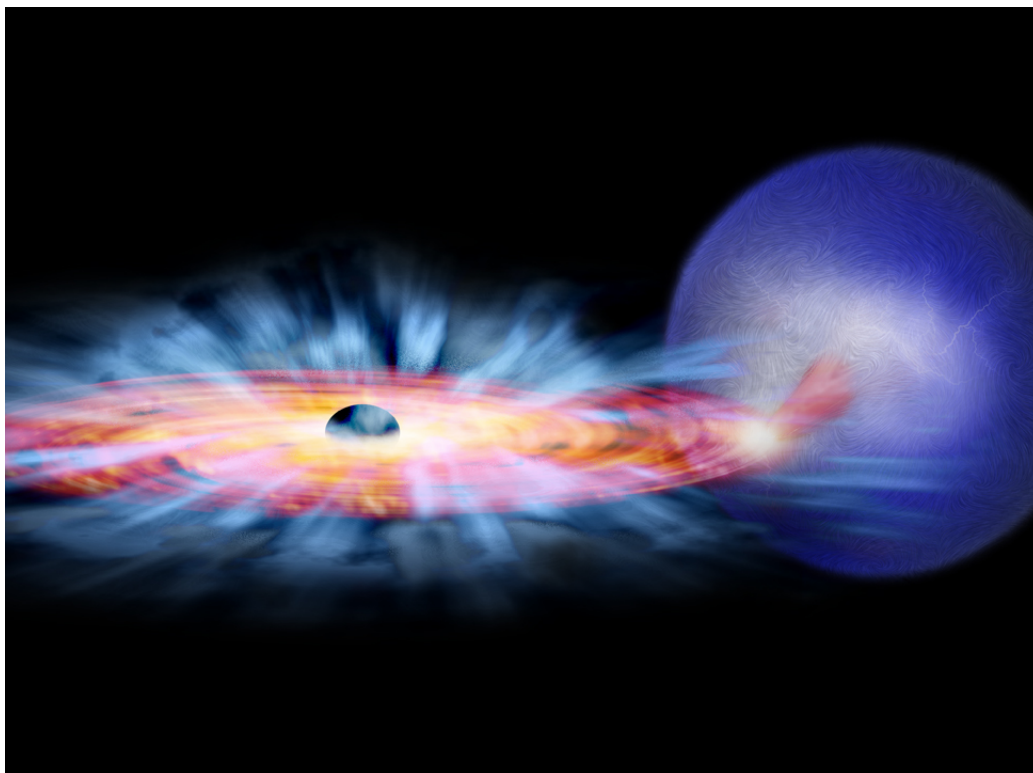
2.3 Magnetická akrece

Akreční disk je tvořen plynem, který vlivem gravitační síly černé díry okolo ní obíhá. Kromě zmiňované gravitační síly na plyn proti ní působí odstředivá síla, která je důsledkem pohybu plynu. Celý tento děj je tlumen třením mezi jednotlivými částicemi plynu, prostřednictvím kterého je mechanická energie plynu přeměněna na spojitě elektromagnetické záření všech vlnových délek. Toto záření je rozptýleno částicemi plynu a následně opouští akreční disk.

Zůstává však nevyřešená otázka, jak přesně probíhá přeměna mechanické energie na teplo a energii námi pozorovaného záření. Jisté řešení nám nabízí mechanika tekutin. Vychází z existence turbulencí, které by mohly vznikat při proudění plynu v disku. Interakce jednotlivých vírů, vzniklých turbulencí v disku, by mohla způsobovat tření plynu dostatečně velké na to, aby míra akrece a intenzita záření disku odpovídala pozorovaným hodnotám. Dosud se však nenalezlo uspokojivé vysvětlení vzniku sil, které by podporovaly vznik turbulencí v akrečním disku a bránily jejich zániku. Ucelená teorie mechaniky tekutin akrečního procesu tedy neexistuje.

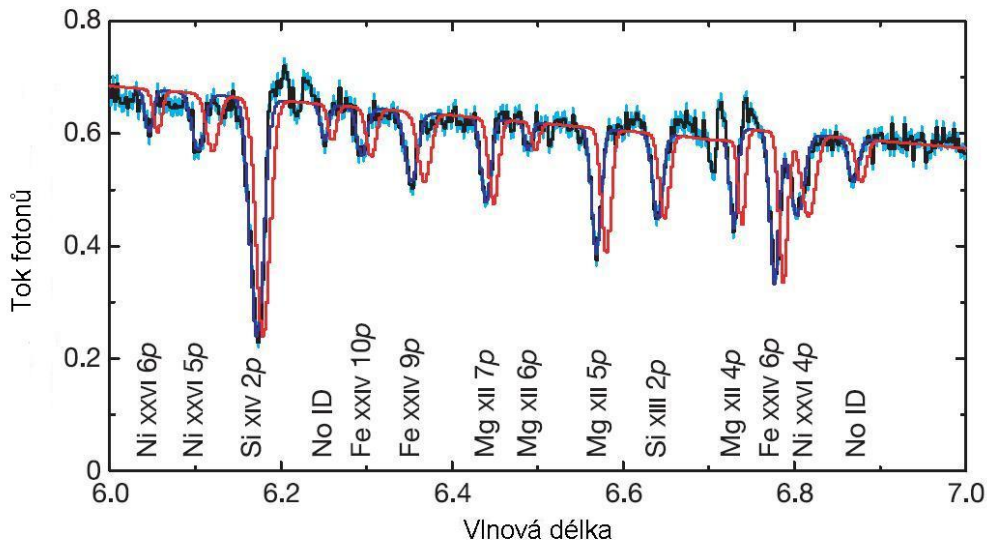
Dalším otevřeným problémem, který s předchozí otázkou úzce souvisí, je neznámá příčina přesunu momentu hybnosti od vnitřních částí akrečního disku směrem k jeho okrajům. Gravitační síla působící na plyn akrečního disku může být vyrovnána odstředivou silou a tím pádem by plyn obíhal černou díru po stejné orbitě do nekonečna. Velmi intenzivní záření, které pozorujeme, by v akrečním disku nemohlo vzniknout. Musí tedy existovat mechanismus, který způsobí přesun momentu hybnosti plynu směrem k okrajům akrečního disku. Tím nastane pokles rychlosti plynu a tedy i pokles odstředivé síly, působící na částici plynu pohybující se po dané orbitě [19].

Řešením celé situace by mohlo být vysvětlení těchto jevů pomocí magnetických sil. V květnu 2005 byl Chandra X-ray družicí pozorován binární systém GRO J1655–40. Tato dvojhvězda je vzdálená 3,2 kpc a její složky černá díra o hmotnosti $7M_{\odot}$ a hvězda o hmotnosti $2,3M_{\odot}$ se vzájemně obíhají s periodou 2,6 dnů. Akreční disk kolem černé díry, který je syčen hmotou hvězdy a má sklon $67^{\circ} - 85^{\circ}$, je tedy natočen téměř bokem k nám jako pozorovateli.



Obrázek 2.8: Výtvarné zpracování předpokládaného vzhledu dvojhvězdy GRO J1655–40 s diskutovaným větrem v okolí akrečního disku, který proudí směrem od jeho středu k okrajům [13].

Z rentgenového spektra dvojhvězdy GRO J1655–40 uvedeného na obrázku 2.9 bylo určeno, že v okolí akrečního disku v rovině s velmi malým sklonem k rovině disku existují proudy řídkého vysoce ionizovaného plynu tzv. vítr. Ten se pohybuje směrem k nám, což dokládá modrý Dopplerův posuv pozorovaného spektra. Z výše uvedených údajů vyvodíme, že vítr



Obrázek 2.9: Část rentgenového spektra větru v okolí akrečního disku černé díry o hmotnosti $7M_{\odot}$, která je složkou binárního systému GRO J1655 pozorovaného v květnu 2006 Chandra X-ray observatoří. Poklesy ve spektru jsou způsobeny absorpcí fotonů dané vlnové délky částicemi větru v okolí akrečního disku. Modrá čára v grafu znázorňuje naměřené hodnoty Chandra X-ray observatoří a červená čára znázorňuje modelové spektrum, které odpovídá přirozeným vlnovým délkám jednotlivých prvků plynu. Z grafu je patrný posuv spektra ke kratším vlnovým délkám, tedy Dopplerův modrý posuv, ze kterého vyplývá, že vítr v okolí akrečního disku vane směrem k nám (od středu disku k jeho okrajům). Vzhledem k odhadovanému sklonu akrečního disku lze soudit, že vítr vane v rovině, která svírá s rovinou disku velmi malý úhel [15, 13].

vane ze středu disku k jeho okrajům a nikoliv z jiného objektu, například z hvězdy (druhé složky dvojhvězdy). Celá situace je znázorněna na obrázku 2.8. Vítr se v tomto případě stává důležitým zdrojem informací o akrečním disku okolo černé díry v objektu GRO J1655 [15].

Aby mohl vítr tohoto druhu v okolí akrečního disku vzniknout, musí

existovat zdroj v akrečním disku, ze kterého proudění větru získá energii na překonání gravitačního působení černé díry. Tímto zdrojem může být tepelná energie či energie záření akrečního disku nebo energie pocházející z magnetického pole hmoty akrečního disku. Možná je také kombinace všech uvedených variant. V případě binárního systému GRO J1655–40 je plyn větru příliš chladný na to, aby čerpal energii z tepelné energie akrečního disku. Ionizace plynu větru je příliš vysoká na to, aby byl vítr poháněn tlakem záření akrečního disku. Z toho plyne, že vítr čerpá energii z magnetického pole akrečního disku, které rotuje společně s ním. Tato hypotéza byla následně potvrzena pomocí počítačových simulací.

Ve vesmíru existuje více černých děr s akrečními disky, v jejichž okolí lze pozorovat obdobné větry. Nikdy však nebylo jasně prokázáno, že jejich příčinou je magnetická pole jako v případě binárního systému GRO J1655–40.

Podářilo se prokázat, že magnetické pole akrečního disku je zdrojem energie větru, který proudí v jeho bezprostředním okolí. Naskytá se otázka, zda například nestabilní magnetické pole akrečního disku není hledanou příčinou výše zmiňovaných turbulencí a zda rovněž nezprostředkovává přenos momentu hybnosti od středu disku směrem k jeho okrajům⁶. V současné době se těmto tvrzením přikládá značná váha avšak neexistují jejich dostatečně přesvědčivé důkazy [15, 19].

⁶Předpokládá se, že magnetické pole rotuje společně s hmotou disku, tedy magnetické síly mohou mít rovněž odstředivé účinky.

Kapitola 3

Pohyb částic akrečního disku

V předchozích kapitolách jsme rozebírali základní charakteristiky a vlastnosti akrečního disku a také jsme se zabývali objekty, které jsou s akrečními disky bezprostředně spojeny. Na tyto informace navážeme a budeme se zabývat pohybem jednotlivých částic akrečního disku, který je formován jak v okolí statické, tak i rotující černé díry. Zaměříme se na tvar těchto orbit a detailně budeme diskutovat význačné kruhové orbity, jejich radiální souřadnice a hodnoty energie, momentu hybnosti a v některých případech i úhlové rychlosti částic, které se po nich pohybují. Tyto orbity hrají významnou roli při popisu vnitřní oblasti akrečního disku a vlastního průběhu akrečního procesu nebo při určování energie částice vyzárené v průběhu akrece. Pro úplnost se krátce zmíníme i o fotonových orbitách. Na závěr kapitoly uvedeme některé zajímavé případy pohybu částice v gravitačním poli rotující černé díry, která se pohybuje ve směru souhlasném i nesouhlasném s její rotací.

Budeme uvažovat pohyb testovací částice akrečního disku v okolí černé díry po časupodobných geodetikách. Testovací částice má natolik zanedbatelnou hmotnost, že sama o sobě nezpůsobí ve svém okolí zakřivení prostoročasu.

3.1 Příklad Schwarzschildovy černé díry

Při popisu pohybu částice v poli nerotující černé díry budeme vycházet z velikosti celkové energie částice v závislosti na průběhu jejího efektivního potenciálu. Tímto způsobem budou diskutovány stabilní orbity v okolí Schwarzschildovy černé díry. Rovněž se zmíníme o vázaných orbitách.

3.1.1 Částicové orbity

Protože Schwarzschildova metrika je sféricky symetrická a nezávislá na čase, platí zde zákony zachování energie a momentu hybnosti. Matematicky zákon zachování energie vztážený na jednotku klidové hmotnosti vyjádříme pomocí veličiny $e = -\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{u}$, která je neměnná. Zde \mathbf{u} je vektor čtyřrychlosti a $\xi^\alpha = (1, 0, 0, 0)$ je Killingův vektor¹. Zákon zachování momentu hybnosti vztážený na jednotku klidové hmotnosti matematicky vyjadřujeme pomocí neměnné veličiny $l = \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{u}$. Zde je opět \mathbf{u} vektor čtyřrychlosti a $\eta^\alpha = (0, 0, 0, 1)$ je Killingův vektor asociovaný se symetrií podle osy z (Schwarzschildova metrika je nezávislá na souřadnici φ). Platí tedy [10]

$$e = -\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{u} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\tau}, \quad (3.1)$$

$$l = \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{u} = r^2 \sin^2 \vartheta \frac{d\varphi}{d\tau}. \quad (3.2)$$

Částice se v okolí černé díry pohybuje po oběžné dráze, která díky zákonu zachování hybnosti leží v rovině. Můžeme tedy bez újmy na obecnosti předpokládat, že oběžná dráha částice leží v ekvatoriální rovině černé díry a tedy platí: $\vartheta = \pi/2$ a $u^\vartheta = 0$. Díky normalizaci vektoru čtyřrychlosti platí

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = -1. \quad (3.3)$$

Užitím vztahu (3.3), Schwarzschildovy metriky (1.7), podmínek $\vartheta = \pi/2$ a $u^\vartheta = 0$ získáme vyjádření složek čtyřrychlosti [10]

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (u^t)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} (u^r)^2 + r^2 (u^\varphi)^2 = -1. \quad (3.4)$$

Pokud složky čtyřrychlosti nahradíme podle vztahů $u^t = \frac{dt}{d\tau}$, $u^r = \frac{dr}{d\tau}$, $u^\varphi = \frac{d\varphi}{d\tau}$, užitím vztahů (3.1) a (3.2) můžeme vztah (3.4) upravit do následujícího tvaru

$$- \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} e^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{l^2}{r^2} = -1. \quad (3.5)$$

Tento vztah dále jednoduchými úpravami převedeme na tvar

$$\frac{e^2 - 1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{l^2}{r^2}\right) - 1 \right]. \quad (3.6)$$

¹Schwarzschildova metrika je nezávislá na čase (na souřadnici x^0). Vektor $\xi^\alpha = (1, 0, 0, 0)$ nazýváme Killingovým vektorem asociovaným se symetrií podle časové souřadnice x^0 .

Definujeme novou konstantu \mathcal{E} a efektivní potenciál V_{ef} vztahy [10]

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &\equiv \frac{e^2 - 1}{2}, \\ V_{\text{ef}} &\equiv \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{l^2}{r^2}\right) - 1 \right].\end{aligned}\quad (3.7)$$

Vztah (3.6) přejde do tvaru [10]

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + V_{\text{ef}}. \quad (3.8)$$

Ze vztahu (3.8) je velice dobře patrná analogie relativistického případu popsaného Schwarzschildovou metrikou s klasickou mechanikou (Keplerova úloha). Díky této analogii můžeme provádět diskusi oběžných drah testovací částic obdobně jako v klasické mechanice. Pokud vztah (3.7) pro efektivní potenciál V_{ef} upravíme na tvar

$$V_{\text{ef}} = -\frac{M}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{Ml^2}{r^3}, \quad (3.9)$$

je patrná i analogie s Newtonovým tvarem potenciálu. Členy $-\frac{M}{r}$ a $\frac{l^2}{2r^2}$ se vyskytují v klasickém i relativistickém případě, ale člen $-\frac{Ml^2}{r^3}$ je obsažen pouze v relativistickém případě. Další vlastnosti efektivního potenciálu V_{ef} vyplývají z hodnot pro $r = 2M$ a pro velké hodnoty r

$$V_{\text{ef}}(2M) = -\frac{1}{2}, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} V_{\text{ef}} = -\frac{M}{r}. \quad (3.10)$$

Pro velké hodnoty r se výsledky relativistické a klasické mechaniky shodují. S klesajícím r v obou případech efektivní potenciál mírně klesá a nabývá lokálního minima a začíná pozvolna růst. Čím menší r , tím narůstá vliv členu $-\frac{Ml^2}{r^3}$ díky třetí mocnině r ve jmenovateli a klasický případ se začíná velice výrazně odlišovat od relativistického. Zatímco v klasickém případě hodnota efektivního potenciálu s klesajícím r utíká do nekonečna, tak v případě Schwarzschildovy geometrie hodnota efektivního potenciálu V_{ef} dosáhne ve většině případů lokálního maxima a pak prudce klesá podle vztahu (3.10) k hodnotě $-\frac{1}{2}$ a vytváří potenciálovou bariéru.

Opustíme nyní srovnávání newtonovské mechaniky se Schwarzschildovou geometrií a budeme se opět zabývat pouze relativistickým případem. Pokud chceme přesně určit hodnoty lokálního minima a maxima efektivního potenciálu V_{ef} , musíme řešit rovnici

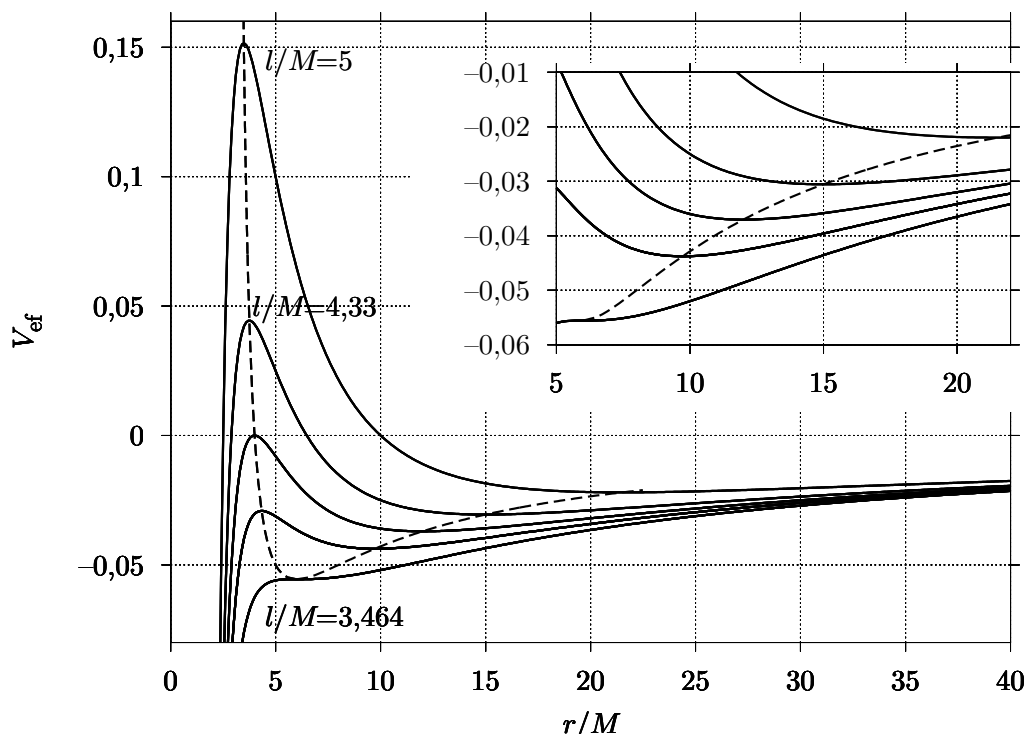
$$\frac{dV_{\text{ef}}}{dr} = 0. \quad (3.11)$$

Po derivaci vztahu (3.9) a následné úpravě dostáváme mezivýsledek

$$Mr^2 - l^2r + 3Ml^2 = 0.$$

Z řešení této kvadratické rovnice vyplývá, že efektivní potenciál V_{ef} nabývá lokálních extrémů pro následující hodnoty r_m [10]

$$r_m = \frac{l^2}{2M} \left[1 \pm \sqrt{1 - 12 \left(\frac{M}{l} \right)^2} \right]. \quad (3.12)$$



Obrázek 3.1: Graf průběhu hodnot efektivního potenciálu $V_{\text{ef}}(r)$ v závislosti na $\frac{r}{M}$. Jednotlivé křivky v grafu udávají průběhy pro různé hodnoty $\frac{l}{M}$.

Diskutujme nyní vztah (3.12). Pokud platí $\frac{l}{M} < \sqrt{12}$, tak výraz pod odmocninou ve vztahu (3.12) nabývá záporných hodnot a neexistuje reálná hodnota radiální souřadnice r_m , pro kterou efektivní potenciál V_{ef} nabývá lokálního extrému. V opačném případě, kdy je $\frac{l}{M} > \sqrt{12}$, efektivní potenciál V_{ef} nabývá jednoho lokálního maxima a jednoho lokálního minima podle vzorce (3.12). Pokud je $\frac{l}{M} > 4$, nabývá maximum $V_{\text{ef}}(r_{\text{max}})$ kladných hodnot, v opačném případě nabývá maximum hodnot záporných. Hodnoty $V_{\text{ef}}(r_{\text{min}})$

jsou vždy záporné. Vzniká zde tedy potenciálová bariéra, ale s konečnou výškou. Na obrázku 3.1 vidíme průběhy V_{ef} pro některé hodnoty $\frac{l}{M}$ v závislosti na $\frac{r}{M}$.

Pro diskusi chování oběžných drah testovací částice, budeme vycházet ze vztahu (3.8) a z analogie s klasickou mechanikou. Pokud pro určitou radiální souřadnici r_0 platí podmínka, že člen $\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2$ ze vztahu (3.8) je nulový, můžeme najít tzv. body obratu. Pro případ $\frac{l}{M} < \sqrt{12}$ body obratu nejsou a částice, která se vyskytuje v gravitačním poli černé díry, padá do ní².

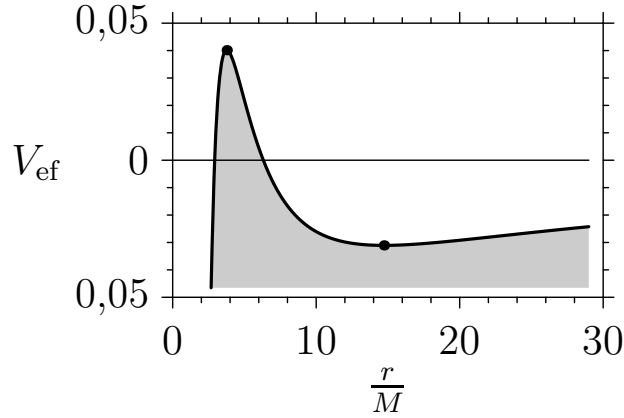
Pro případ $\frac{l}{M} > \sqrt{12}$ již mohou body obratu pro určitou radiální souřadnici r_0 existovat a testovací částice v gravitačním poli černé díry již nemusí do černé díry přímo spadnout, ale může ji obíhat po různých oběžných drahách. Rozlišujeme čtyři druhy orbit podle toho, jak velká je energie \mathcal{E} částice.

1. Prvním případem jsou kruhové orbity, které jsou možné tehdy, když efektivní potenciál V_{ef} a tedy i energie \mathcal{E} nabývá lokálního extrému. Tedy v případě, kdy radiální souřadnice orbit nabývá hodnot r_m podle vzorce (3.12). V případě maximální energie $\mathcal{E}(r_{\max})$, efektivního potenciálu $V_{ef}(r_{\max})$ a radiální souřadnice r_{\max} je tato kruhová orbita nestabilní. Stačí malá změna energie a částice buď spadne do černé díry a nebo unikne do nekonečna. V případě minimální energie $\mathcal{E}(r_{\min})$, efektivního potenciálu $V_{ef}(r_{\min})$ a radiální souřadnice r_{\min} je tato kruhová orbita stabilní. Na obrázku 3.2 jsou vyznačeny hodnoty efektivního potenciálu V_{ef} pro případ kruhových orbit a na obrázku 3.3 je znázorněn tvar těchto orbit³.

Rozviňme dále problematiku stabilních kruhových orbit s radiální souřadnicí r_{\min} danou vzorcem (3.12). Radiální souřadnice stabilních kruhových orbit klesá s klesající hodnotou podílu $\frac{l}{M}$. Toto klesání hodnoty r_m však nemůže být libovolně veliké. Radiální souřadnice r_{ms} nejbližší stabilní kruhové orbity nastává pro hodnotu $\frac{l}{M} = \sqrt{12}$, která vyplývá ze vztahu (3.12) již výše zmiňovaným způsobem. Dosazením hodnoty $\frac{l}{M} = \sqrt{12}$ do vztahu (3.12) pro radiální souřadnici nejbližší stabilní

²Zde je opět viditelný rozdíl s newtonovskou mechanikou. V klasickém případě je potenciálová bariéra nekonečná a tedy částice nemůže nikdy proniknout k centru gravitačního působení, ale naopak je odražena odstředivou bariérou od centra gravitačního působení pryč.

³Na obrázku 3.3 a na odpovídajících obrázcích 3.5, 3.7 a 3.9 v následujících bodech diskuse je vyznačeny rovněž nejbližší stabilní, hraniční vázaná a fotonová kruhová orbita. Označení radiálních souřadnic nejbližší stabilní kruhové orbity r_{ms} , hraniční vázané kruhové orbity r_{mb} a fotonové kruhové orbity r_{ph} je po řadě zkratkou anglických výrazů innermost stable circular orbit, marginally bound circular orbit a photon circular orbit. Tyto orbity budou studovány v průběhu diskuse a na konci této části.



Obrázek 3.2: Graf průběhu hodnot efektivního potenciálu $V_{\text{ef}}(r)$ v závislosti na $\frac{r}{M}$ pro hodnotu $\frac{l}{M} = 4,3$ v prvním diskutovaném případě. Černými body jsou vyznačeny body obratu o radiální souřadnici r_0 , které se v tomto případě shodují s radiálními souřadnicemi r_m , tedy $r_0 = r_m$. Černými body je zároveň vyznačena hodnota energie \mathcal{E} pro případ kruhové orbity, která je zde vždy totožná s hodnotou efektivního potenciálu V_{ef} .

kruhové orbity dostáváme [10]

$$r_{\text{ms}} = 6M. \quad (3.13)$$

2. Pokud pro energii \mathcal{E} testovací částice platí $\mathcal{E}(r_{\text{min}}) < \mathcal{E} < 0$, pak zde existují orbity, po kterých se částice pohybuje mezi dvěma body obratu zvaných periastrum a apoastrum. Tyto orbity jsou neuzavřené, tedy poloha periastra i apoastra se neustále mění. Tento jev nazýváme stáčení periastra⁴. Na obrázku 3.4 jsou vyznačeny hodnoty energie \mathcal{E} a na obrázku 3.5 je znázorněn tvar orbit pro tento případ.

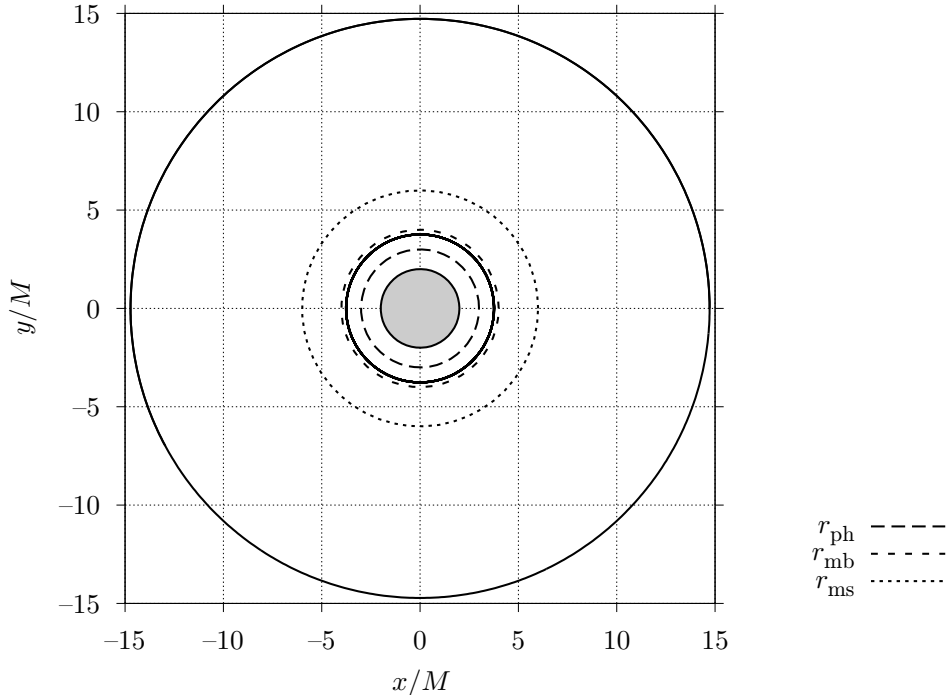
Tvar těchto orbit v ekvatoriální rovině můžeme získat, pokud rovnice (3.8) vyjádříme $\frac{dr}{d\tau}$ a z rovnice (3.2) vyjádříme $\frac{d\varphi}{d\tau}$ a uijeme podmínku $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. Vydělením těchto výrazů získáme [10]

$$\frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{l}{r^2} \frac{1}{[2(\mathcal{E} - V_{\text{ef}}(r))]^{1/2}}, \quad (3.14)$$

dosazením ze vztahu (3.7) dostáváme

$$\frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{l}{r^2} \left[e^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(1 + \frac{l^2}{r^2} \right) \right]^{-1/2}. \quad (3.15)$$

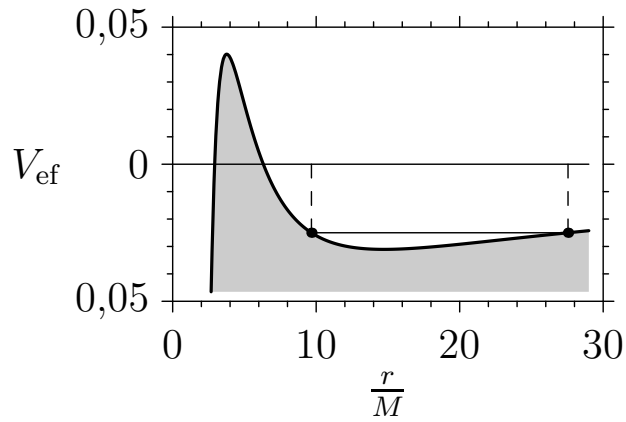
⁴Stáčení perihelia se projevuje také u planet Sluneční soustavy (zejména u Merkura), ale relativistický příspěvek tohoto jevu je v tomto případě málo výrazný.



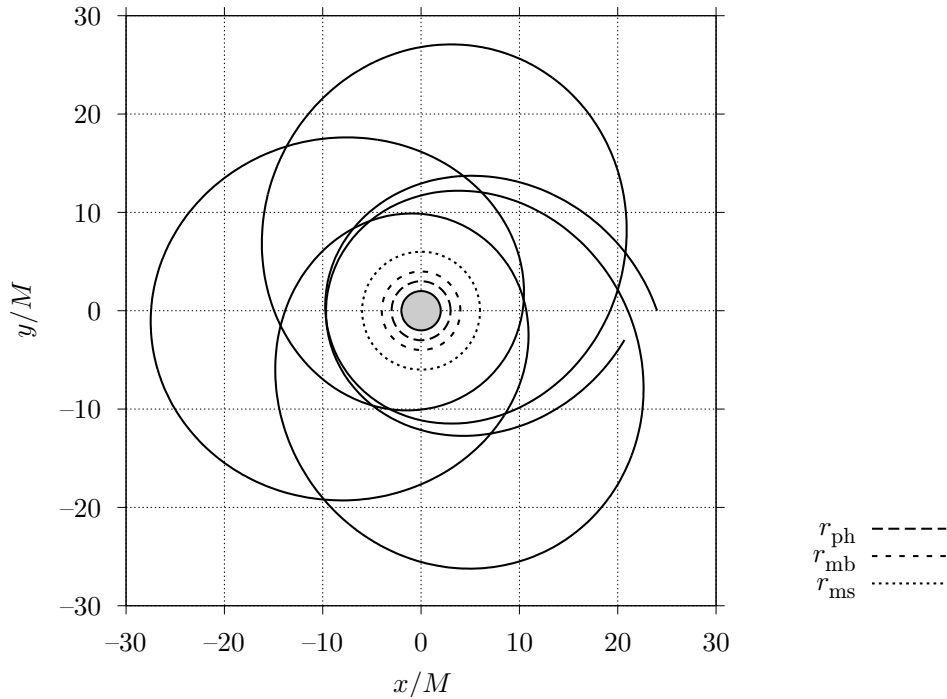
Obrázek 3.3: Znázornění tvaru orbit v prvním případě. Schwarzschildovy souřadnice r a φ jsou zde znázorněny jako polární souřadnice v ekvatoriální rovině. Větší orbita o radiální souřadnici r_{\min} je stabilní, zatímco menší orbita o radiální souřadnici r_{\max} stabilní není a dokonce pro daný poměr $\frac{l}{M}$ není ani vázaná. Je kruhová geometricky, ale ne energeticky. Stačí malé vychýlení směrem od centra černé díry a částice unikne do nekonečně velké vzdálenosti od černé díry. Dále jsou zde vyznačeny nejbližší stabilní kruhová orbita, hraniční vázaná kruhová orbita a fotonová kruhová orbita.

Znaménko volíme podle toho, zda ve směru souřadnice φ roste nebo klesá hodnota radiální souřadnice r . Tvar těchto orbit vyjádřený funkcí $\varphi(r)$ získáme integrací vztahu (3.15). Důležitou vlastností je zde uzavřenost orbit. Jednou orbitou rozumíme část trajektorie, kterou částice urazí mezi dvěma periastry nebo mezi dvěma apoasty. Pokud změna úhlové souřadnice $\Delta\varphi = 2\pi$, pak mluvíme o uzavřené orbitě. Pokud je tato změna jiná, nastává výše zmiňované stáčení periastra $\delta\varphi$, které můžeme vyjádřit vztahem [10]

$$\delta\varphi = \Delta\varphi - 2\pi. \quad (3.16)$$



Obrázek 3.4: Graf průběhu hodnot efektivního potenciálu $V_{\text{ef}}(r)$ v závislosti na $\frac{r}{M}$ pro hodnotu $\frac{l}{M} = 4,3$ v druhém diskutovaném případě. Černými body jsou vyznačeny body obratu o radiální souřadnici r_{01} a r_{02} (periastrum a apoastrum). Silnou černou vodorovnou čarou je znázorněna hodnota energie \mathcal{E} , která se opět shoduje s hodnotou efektivního potenciálu V_{ef} v bodech obratu.



Obrázek 3.5: Znázornění tvaru orbit pro druhý diskutovaný případ. Schwarzschildovy souřadnice r a φ jsou zde znázorněny jako polární souřadnice v ekvatoriální rovině. U tohoto bodu diskuse je významný jev stáčení periastra, který je z obrázku rovněž patrný. Dále jsou zde vyznačeny nejbližší stabilní kruhová orbita, hraniční vázaná kruhová orbita a fotonová kruhová orbita.

Úhel $\Delta\varphi$, který částice urazí mezi dvěma následujícími periastry o odpovídající radiální souřadnici r_{01} je dvakrát větší než úhel, který částice urazí mezi po sobě následujícím periastrum a apoastrem o odpovídajících radiálních souřadnicích r_{01} a r_{02} . Hodnotu $\Delta\varphi$ tedy lze vyjádřit [10]

$$\Delta\varphi = 2l \int_{r_{01}}^{r_{02}} \frac{1}{r^2} \left[e^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(1 + \frac{l^2}{r^2} \right) \right]^{-1/2} dr. \quad (3.17)$$

3. V třetím případě pro energii \mathcal{E} testovací částice platí $0 < \mathcal{E} < \mathcal{E}(r_{\max})$. Pak částice pohybující se po této trajektorii přichází z nekonečna, přiblíží se k černé díře, kterou oběhne, a opět uniká z gravitačního pole černé díry. Tato orbita se v oblastech blízkých černé díře liší od klasického případu hyperboly z newtonovské mechaniky. Na obrázku 3.6 jsou vyznačeny hodnoty energie \mathcal{E} a na obrázku 3.7 je znázorněn tvar trajektorie pro tento případ.
4. Ve čtvrtém případě pro energii \mathcal{E} testovací částice platí $\mathcal{E}(r_{\max}) < \mathcal{E}$. Jelikož částice má příliš vysokou hodnotu energie \mathcal{E} , nemohou v tomto případě nastat body obratu. Testovací částice po své trajektorii putuje do černé díry. Na rozdíl od výše zmiňovaného případu, kdy částice rovněž padá do černé díry, tato trajektorie není přímá, ale částice černou díru obkrouží po trajektorii, která je podobná spirále. Tento případ nemá analogii v klasickém pojetí. Na obrázku 3.8 je vyznačena hodnota energie \mathcal{E} a na obrázku 3.9 je znázorněn tvar trajektorie v tomto případě.

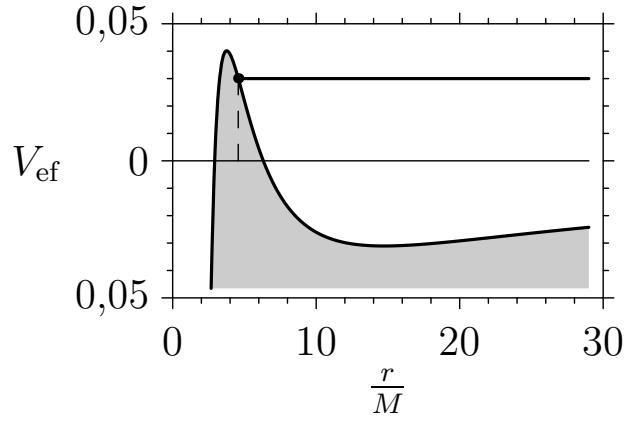
Na závěr této části odvodíme vztah pro úhlovou rychlost Ω částice obíhající po kruhové orbitě. Budeme uvažovat čas měřený statickým pozorovatelem v nekonečnu, který se shoduje s časem určeným Schwarzschildovou souřadnicí t . Tedy pro libovolnou stabilní kruhovou orbitu v ekvatoriální rovině platí [10]

$$\Omega \equiv \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi/d\tau}{dt/d\tau}. \quad (3.18)$$

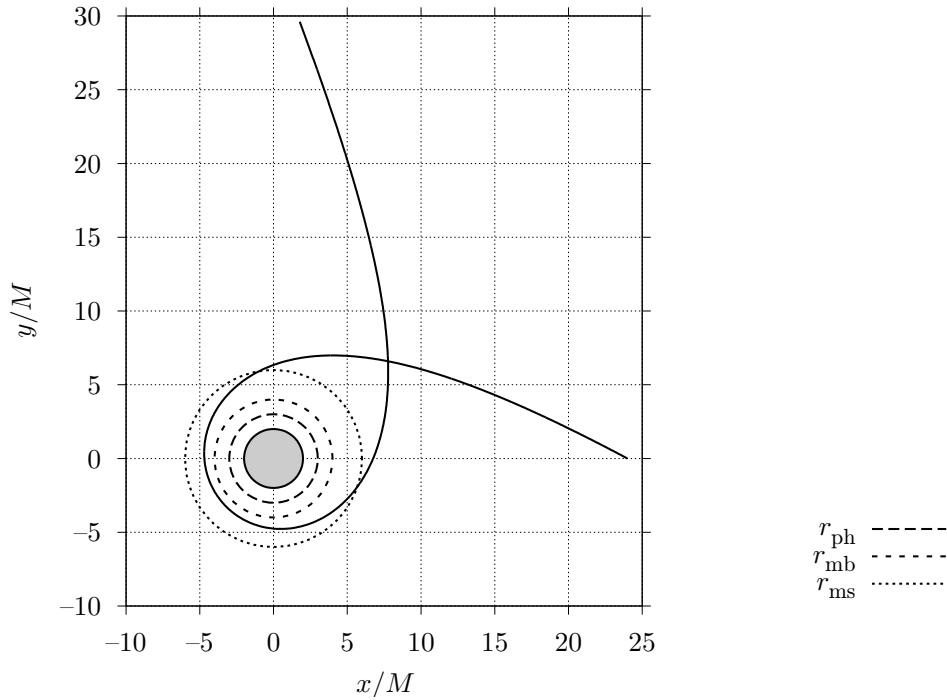
Do poslední rovnosti můžeme dosadit ze vztahů (3.1) a (3.2) [10]

$$\Omega = \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(\frac{l}{e} \right). \quad (3.19)$$

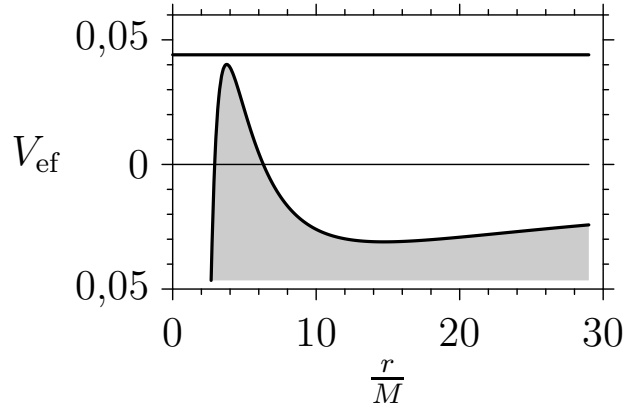
Pro hodnoty e a l kruhové orbity o poloměru r platí dvě podmínky. Aby byla orbita kruhová, musí být člen $\left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2$, který vyjadřuje radiální složku čtyřrychlosti, vztahu (3.6) nulový (všechny body kruhové orbity jsou tedy body obratu).



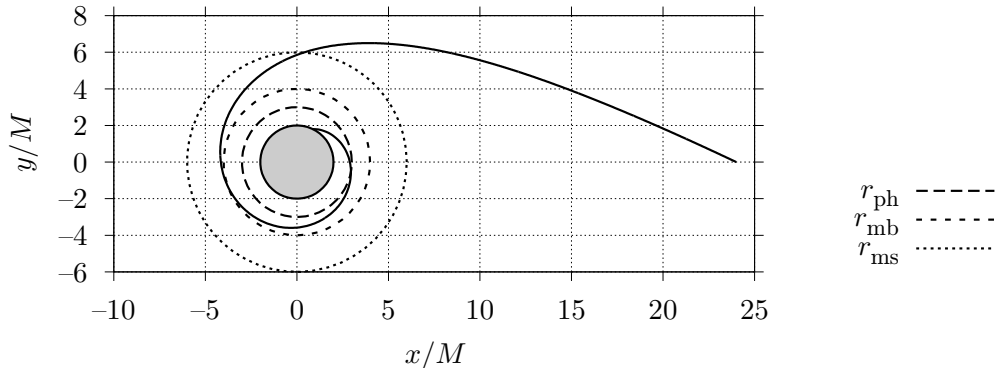
Obrázek 3.6: Graf průběhu hodnot efektivního potenciálu $V_{\text{ef}}(r)$ v závislosti na $\frac{r}{M}$ pro hodnotu $\frac{l}{M} = 4,3$ v třetím diskutovaném případě. Černým bodem je vyznačen bod obratu o radiální souřadnici r_0 . Silnou černou vodorovnou čarou je znázorněna hodnota energie \mathcal{E} , která se opět shoduje s hodnotou efektivního potenciálu V_{ef} v bodě obratu.



Obrázek 3.7: Tvar trajektorie v třetím diskutovaném případě. Schwarzschildovy souřadnice r a φ jsou zde znázorněny jako polární souřadnice v ekvatoriální rovině. Dále jsou zde vyznačeny nejbližší stabilní kruhová orbita, hraniční vázaná kruhová orbita a fotonová kruhová orbita.



Obrázek 3.8: Graf průběhu hodnot efektivního potenciálu $V_{\text{ef}}(r)$ v závislosti na $\frac{r}{M}$ pro hodnotu $\frac{l}{M} = 4,3$ ve čtvrtém diskutovaném případě. Energie \mathcal{E} , která je v grafu vyznačena silnou černou vodorovnou čarou, dosahuje příliš vysokých hodnot, a proto zde body obratu nenastávají.



Obrázek 3.9: Tvar trajektorie ve čtvrtém diskutovaném případě. Schwarzschildovy souřadnice r a φ jsou zde znázorněny jako polární souřadnice v ekvatoriální rovině. Dále jsou zde vyznačeny nejbližší stabilní kruhová orbita, hraniční vázaná kruhová orbita a fotonová kruhová orbita.

Ve shodě s prvním bodem předcházející diskuse musí v případě kruhové orbity efektivní potenciál V_{ef} nabývat minima, které je dané vztahem (3.12). Pokusme se nyní za předpokladu předchozích podmínek vyjádřit poměr l/e pomocí M a r . Ze vztahu (3.6) vyjádříme e^2

$$e^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{l^2}{r^2}\right). \quad (3.20)$$

Dále ze vztahu (3.12) vyjádříme l^2

$$l^2 = \frac{Mr}{1 - \frac{3M}{r}}, \quad (3.21)$$

tento výraz dosadíme do vztahu (3.20) a dostaneme e^2

$$e^2 = \frac{(r - 2M)^2}{r(r - 3M)}. \quad (3.22)$$

Nyní už můžeme stanovit poměr $\frac{l}{e}$ pouze pomocí veličin M a r

$$\frac{l}{e} = \frac{\sqrt{Mr}}{1 - \frac{2M}{r}}. \quad (3.23)$$

Pokud tento vztah dosadíme do vztahu (3.19), dostáváme výsledný vztah pro úhlovou rychlost testovací částice na kruhové orbitě⁵ [10]

$$\Omega^2 = \frac{M}{r^3}. \quad (3.24)$$

Složky čtyřrychlosti částice na stabilní kruhové orbitě jsou

$$u^\alpha = u^t(1, 0, 0, \Omega). \quad (3.25)$$

Složku u^t určíme díky normování vektoru čtyřrychlosti podle vztahu (3.3). Dostáváme

$$-(u^t)^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) + (u^t)^2 \Omega^2 r^2 = -1, \quad (3.26)$$

pro u^t vyplývá následně vztah, do kterého dosadíme za Ω^2 podle vztahu (3.24)

$$u^t = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{3M}{r}}}. \quad (3.27)$$

⁵Vztah má analogický tvar jako Keplerův zákon. Tato shoda mezi relativistickou a nerelativistickou fyzikou je pouze náhodná. Pokud bychom provedli odvození vzhledem k vlastnímu času testovací částice, dostali bychom mnohem komplikovanější tvar. Dále také neplatí pro eliptické orbity jako v klasickém případě, ale pouze pro orbity kruhové.

Kromě stabilních orbit s uvedených v předchozí diskusi, uvažujeme také vázané orbity. Pokud se částice pohybuje po vázané trajektorii, nemůže uniknout do nekonečně velké vzdálenosti od černé díry, ale pohybuje se stále v jejím okolí. Vázaná orbita s nejmenší možnou hodnotou radiální souřadnice je kruhová⁶ a označujeme ji hraniční vázaná kruhová orbita. Částice, která se pohybuje po vázané orbitě, nesmí mít větší energii než je hodnota její klidové energie⁷ $e = 1$. Pokud by její hodnota energie byla větší, pak stačí velmi malé vychýlení směrem od centra černé díry a částice unikne do nekonečna po trajektorii, která se asymptoticky blíží k hyperbole. Pro hraniční vázanou kruhovou trajektorii tedy platí podmínka $e = 1$, kterou vyjádříme pomocí vztahu (3.22)

$$\frac{(r - 2M)^2}{r(r - 3M)} = 1. \quad (3.28)$$

Vyjádřením r dostáváme radiální souřadnici hraniční vázané kruhové orbity

$$r_{\text{mb}} = 4M. \quad (3.29)$$

Hraniční vázané kruhové orbity jsou rovněž vyznačeny na obrázcích 3.3, 3.5, 3.7 a 3.9.

Pokud se částice vyskytne natolik blízko černé díry, že gravitační síla černé díry převáží všechny ostatní interakce, stane se součástí jejího akrečního disku. Začne se pohybovat kolem černé díry po některé z již popsaných orbit v této části práce. Druh orbity závisí zejména na velikosti energie \mathcal{E} částice a její hybnosti. Třením a dalšími mechanismy však částice pozvolna ztrácí energii a hybnost, kterou následně vyzáří ve formě elektromagnetického záření o různých frekvencích. Díky tomu se postupně pohybují po stále bližších orbitách. Částice se tedy pohybuje akrečním diskem po trajektorii, kterou je možné zhruba přirovnat ke spirále.

Poslední možná stabilní orbita, po které se může částice pohybovat, je nejbližší stabilní kruhová orbita s poloměrem $r_{\text{ms}} = 6M$, viz (3.13). Jakmile částice dosáhne této orbity a její energie klesne například vlivem tření, nastane prudká změna jejího pohybu. Částice se dostane na některou z vázaných orbit, po kterých není dále schopna trvalejšího pohybu. Putuje tedy přímo k centru černé díry, překročí horizont a zanikne v singularitě.

⁶Obdobně jako v případě stabilních orbit je orbita s nejmenší možnou hodnotou radiální souřadnice r_{ms} kruhová.

⁷Klidová energie částice je vyjádřena vztahem $E = mc^2$. Z tohoto vztahu pro hodnotu e vyplývá $e = E/m = c^2 = 1$.

3.1.2 Fotonové orbity

Jen krátce se zmíníme o také o fotonových orbitách v ekvatoriální rovině Schwarzschildovy černé díry. Diskuse se v případě fotonových trajektorií provádí analogickým způsobem jako u částicových orbit. Zákony zachování energie a momentu hybnosti (3.1) a (3.2) vyjádříme pro fotony ve tvaru

$$e = -\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{u} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\lambda}, \quad l = \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{u} = r^2 \sin^2 \vartheta \frac{d\varphi}{d\lambda}, \quad (3.30)$$

kde λ je vhodně zvolený afinní parametr podél světočáry fotonu. Dále platí pro světlupodobný vektor čtyřrychlosti odlišná normalizační podmínka [10]

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0. \quad (3.31)$$

Obdobně jako jsme získali vztah (3.8) budeme provádět další kroky. Užitím podmínky (3.31), Schwarzschildovy metriky (1.7) a podmíněk $\vartheta = \pi/2$ a $u^\vartheta = 0$ získáme vyjádření složek čtyřrychlosti [10]

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 = 0. \quad (3.32)$$

Užitím vztahů (3.30) vztah (3.32) upravíme do tvaru

$$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} e^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{l^2}{r^2} = 0. \quad (3.33)$$

Vynásobením vztahu (3.33) výrazem $(1 - \frac{2M}{r})/l^2$ dostáváme výsledný vztah analogický vztahu (3.8)

$$\frac{1}{b^2} = \frac{1}{l^2} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + W_{\text{ef}}(r), \quad (3.34)$$

kde jsme definovali impaktní faktor b vztahem

$$b \equiv \frac{l}{e}. \quad (3.35)$$

Převrácená hodnota druhé mocniny impaktního faktoru $1/b^2$ hraje v případě fotonů stejnou roli, jako energie \mathcal{E} v případě částic. Vlastnosti fotonových orbit neurčují hodnoty e a l , jak je tomu v případě částic, ale pouze poměr těchto hodnot. Tato skutečnost je způsobena volnou volbou afinního parametru λ . Pro efektivní potenciál fotonů W_{ef} platí

$$W_{\text{ef}} \equiv \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right). \quad (3.36)$$

Nyní lze pomocí průběhu efektivního potenciálu fotonů W_{ef} provést obdobnou diskusi jako v části 3.1.1, která je podrobněji uvedena například v [10]. V našem případě se zaměříme pouze na kruhovou fotonovou orbitu (pouze na jeden bod příslušné diskuse).

Obdobně jako pro částice existuje fotonová kruhová orbita, pokud platí podmínka $\frac{dr}{d\lambda} = 0$ a efektivní potenciál W_{ef} nabývá vzhledem k r extrému. Při vyšetřování extrému dostáváme

$$\frac{dW_{\text{ef}}}{dr} = 0. \quad (3.37)$$

Po derivaci vztahu (3.36) a vyjádření r získáme radiální souřadnici r_{ph} jediné kruhové fotonové orbity ve Schwarzschildově případě⁸ [10]

$$r_{\text{ph}} = 3M. \quad (3.38)$$

Efektivní potenciál W_{ef} tedy nabývá pouze jednoho extrému a provedením druhé derivace efektivního potenciálu W_{ef} zjistíme, že tento extrém je maximum. Z předchozí úvahy vyplývá, že jediná možná kruhová fotonová orbita je nestabilní. Fotonové kruhové orbity jsou rovněž vyznačeny na obrázcích 3.3, 3.5, 3.7 a 3.9.

Pro úplnost dodejme, že hodnotu radiální souřadnice kruhové fotonové orbity $r_{\text{ph}} = 3M$ dané vztahem (3.38) můžeme získat také ze vztahu (3.22), kde položíme hodnotu $e = \infty$. Nekonečná hodnota energie fotonů e vztažená na jednotku klidové hmotnosti vyplývá z jejich nulové hodnoty klidové hmotnosti.

3.2 Příklad Kerrový černé díry

Situace v případě akrečního disku v okolí rotující černé díry je z velké části analogická jako v předchozím případě. Drobné odlišnosti se vyskytují například v tom, že radiální souřadnice význačných kruhových orbit nezávisí pouze na hmotnosti M černé díry, ale i na míře rotace černé díry, která je popsána Kerrovým parametrem a . Dále je nezbytné vzít v úvahu směr rotace černé díry a strhávání prostoročasu. Budeme rozlišovat případy, kdy částice obíhá černou díru směrem souhlasným či nesouhlasným s její rotací a zaměříme se rovněž na chování částice v oblasti ergosféry.

Vzhledem k tomu, že Schwarzschildova metrika je sféricky symetrická, leží všechny orbity testovacích částic kolem statické černé díry v rovině. Pro

⁸Kruhová fotonová orbita kolem Slunce nemůže vzniknout, protože poloměr hvězdy je větší než poloměr orbity. V případě černé díry taková situace nenastává.

případ Kerrovy metriky, která je pouze osově symetrická, platí zákon zachování hybnosti pouze pro složku hybnosti ve směru osy symetrie. Orbity testovacích částic tedy nemusí obecně ležet v rovině, ale mohou být prostoro-
rové. Výjimku tvoří orbity v ekvatoriální rovině rotující černé díry, které jsou rovinné⁹. Celková analýza orbit v případě Kerrovy černé díry je složitá. V následujícím textu se soustředíme právě na tyto orbity a zejména na nejbližší stabilní kruhové orbity.

Budeme postupovat analogicky jako v případě Schwarzschildovy metriky. Kerrova metrika (1.10) za podmínky $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ přejde do tvaru [10]

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \frac{4aM}{r} dt d\varphi + \frac{r^2}{\Delta} dr^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r}\right) d\varphi^2. \quad (3.39)$$

Jak už bylo výše uvedeno, platí zde zákon zachování hybnosti pouze ve směru osy rotace (zákon zároveň vyjadřuje celkový moment hybnosti částice obíhající po orbitě v ekvatoriální rovině) a zákon zachování energie¹⁰. Tyto zákony můžeme matematicky vyjádřit podobnou formou jako vztahy (3.1) a (3.2) [10]

$$e \equiv -\xi \cdot \mathbf{u} = -g_{tt}u^t - g_{t\varphi}u^\varphi = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} + \frac{2Ma}{r} \frac{d\varphi}{d\tau}, \quad (3.40)$$

$$l \equiv \eta \cdot \mathbf{u} = g_{\varphi t}u^t + g_{\varphi\varphi}u^\varphi = -\frac{2Ma}{r} \frac{dt}{d\tau} + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r}\right) \frac{d\varphi}{d\tau}. \quad (3.41)$$

Pokud ze vztahů (3.40) a (3.41) vyjádříme $\frac{dt}{d\tau}$ a $\frac{d\varphi}{d\tau}$ dostaneme

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\Delta} \left[\left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r}\right) e - \frac{2Ma}{r} l \right], \quad (3.42)$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{1}{\Delta} \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right) l + \frac{2Ma}{r} e \right]. \quad (3.43)$$

Užitím normalizační podmínky (3.3), do které dosadíme za složky čtyřrychlosti u^t , u^φ ze vztahů (3.42) a (3.43) ($v^\vartheta = 0$), můžeme poměrně složitými algebraickými úpravami s využitím počítačového programu [14] vyjádřit poslední složku čtyřrychlosti u^r . Toto vyjádření převedeme do tvaru, který je

⁹Díky osové symetrii Kerrovy metriky platí $\vartheta = \pi - \vartheta$ a v ekvatoriální rovině ($\vartheta = \frac{\pi}{2}$) se mohou vyskytovat orbity s $u^\vartheta = 0$.

¹⁰Tyto zákony platí pro objekty s nenulovou klidovou hmotností a jako ve Schwarzschildově geometrii jsou vztaheny na jednotku klidové hmotnosti a odpovídají hodnotám naměřeným pozorovatelem v nekonečnu

analogický se vztahem (3.6)

$$\frac{e^2 - 1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - \frac{M}{r} + \frac{l^2 - a^2(e^2 - 1)}{2r^2} - \frac{M(l - ae)^2}{r^3}. \quad (3.44)$$

Obdobně definujeme konstantu \mathcal{E} a efektivní potenciál V_{ef} vztahy

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &\equiv \frac{e^2 - 1}{2}, \\ V_{\text{ef}} &\equiv -\frac{M}{r} + \frac{l^2 - a^2(e^2 - 1)}{2r^2} - \frac{M(l - ae)^2}{r^3}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Vztah (3.44) přejde do stejného tvaru jako vztah (3.8)

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + V_{\text{ef}}. \quad (3.46)$$

Pokud srovnáme vztahy (3.7) a (3.45) dostáváme důležitý rozdíl mezi diskusí v případě Schwarzschildovy a Kerrovovy metriky. Na rozdíl od statického případu Kerrův efektivní potenciál V_{ef} je závislý na energii (vyjádřené pomocí e) a rotaci černé díry (charakterizované Kerrovým parametrem a). Je tedy důležitá skutečnost, zda oběh částic má souhlasný či nesouhlasný směr s rotací černé díry. U rotující černé díry se projevuje vliv strhávání prostoročasu, který brzdí částici rotující nesouhlasně a napomáhá částici rotující souhlasně s černou dírou. Strhávání prostoročasu souvisí s pojmem ergosféry, který zmiňujeme v části 1.2.

3.2.1 Význačné kruhové orbity

Zaměřme se nyní na kruhové orbity. Pro radiální složku čtyřrychlosti kruhové orbity o poloměru r platí podmínka $\frac{dr}{d\tau} = 0$. Vztah (3.46) přejde do následujícího tvaru

$$\mathcal{E} = V_{\text{ef}}(r, e, l), \quad (3.47)$$

Aby částice setrvala na této orbitě, musí být v souladu s klasickou Keplerovou úlohou také radiální složka čtyřzrychlení nulová. Osamostatněním výrazu $\frac{dr}{d\tau}$ ze vztahu (3.46) a následnou derivací podle vlastního času τ dostaneme vztah pro radiální složku čtyřzrychlení, kterou položíme rovnu nule¹¹ [10]

$$\frac{\partial V_{\text{ef}}(r, e, l)}{\partial r} = 0. \quad (3.48)$$

¹¹Ze vztahu (3.48) vyplývá, že podmínka nulové hodnoty radiální složky čtyřrychlosti vede na podmínku extrému efektivního potenciálu V_{ef} .

Po rozvedení vztahů (3.47) a (3.48), provedení případných derivací a po substitucích $u = 1/r$ a $x = l - ae$ dostáváme [12]

$$e^2 = 1 - Mu + Mx^2u^3, \quad (3.49)$$

$$2axe u = x^2u(3Mu - 1) - a^2u + M. \quad (3.50)$$

Pokud ze soustavy rovnic (3.49) a (3.50) vyloučíme e , dostáváme bikvadratickou rovnici pro proměnnou x [12]

$$x^4u^2 [(3Mu - 1)^2 - 4Mu^3a^2] + 2x^2u [3M^2u - Mu^2a^2 - M - ua^2] + (M - ua^2)^2 = 0. \quad (3.51)$$

Pomocí počítačového programu Maxima [14] tuto rovnici řešíme, pro další výpočet použijeme pouze nezáporné kořeny

$$x_{1,2} = \frac{M^{\frac{1}{2}} \mp au^{\frac{1}{2}}}{u^{\frac{1}{2}} \left(\pm 2a(Mu^3)^{\frac{1}{2}} - 3Mu + 1 \right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.52)$$

Získané výsledky dosadíme do rovnice (3.50) a vyjádříme e . Pomocí substituce $l = x + ae$ získáme rovněž l . V souladu s [12] dostáváme

$$e = \frac{1 - 2Mu \pm a(Mu^3)^{\frac{1}{2}}}{\left[1 - 3Mu \pm 2a(Mu^3)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}}, \quad (3.53)$$

$$l = \frac{\pm M^{\frac{1}{2}} \left[1 + a^2u^2 \mp 2a(Mu^3)^{\frac{1}{2}} \right]}{\left\{ u \left[1 - 3Mu \pm 2a(Mu^3)^{\frac{1}{2}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.54)$$

Po dosazení substituce $u = 1/r$ získáváme vztahy pro $e = e(M, a, r)$ a $l = l(M, a, r)$ pro obecný kruhový pohyb v ekvatoriální rovině [4]

$$e = \frac{r^{\frac{3}{2}} - 2Mr^{\frac{1}{2}} \pm aM^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{3}{4}} \left(r^{\frac{3}{2}} - 3Mr^{\frac{1}{2}} \pm 2aM^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (3.55)$$

$$l = \frac{\pm M^{\frac{1}{2}} \left(r^2 \mp 2aM^{\frac{1}{2}}r^{\frac{1}{2}} + a^2 \right)}{r^{\frac{3}{4}} \left(r^{\frac{3}{2}} - 3Mr^{\frac{1}{2}} \pm 2aM^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.56)$$

Ve všech vztazích horní znaménko platí pro souhlasný oběh částice a dolní znaménko pro nesouhlasný oběh částice vzhledem k rotaci černé díry. Pro $a = 0$ v případě Schwarzschildovy černé díry přecházejí vztahy (3.55) a (3.56) po umocnění na vztahy (3.22) a (3.21).

Mezi kruhovými trajektoriemi existují tři významné typy, na které se nyní zaměříme. Představují limitní případy třídy kruhových pohybů.

Kruhové fotonové orbity

Pro kruhové fotonové orbity je charakteristická nekonečně velká hodnota e energie vztažené na jednotku hmotnosti, neboť klidová hmotnost fotonů je nulová. Proto hledáme limitu vztahu (3.55) pro $e \rightarrow \infty$. Tato podmínka bude splněna v případě, že jmenovatel zlomku (3.55) bude roven nule. Po substituci $y = \sqrt{r}$ získáváme kubickou rovnici

$$y^3 - 3yM \pm 2a\sqrt{M} = 0, \quad (3.57)$$

Tato kubická rovnice nemá kvadratický člen. Podle [5] jde o rovnici v tzv. redukovaném tvaru s koeficienty $p = -3M$ u lineárního členu a $q = \pm 2a\sqrt{M}$ u absolutního členu. Její diskriminant

$$D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = a^2M - M^3$$

bude pro uvažované hodnoty $a \in \langle 0, M \rangle$ záporný. Reálné kořeny rovnice proto nelze určit pomocí Cardanových vzorců, lze však nalézt goniometrické řešení. Podle [5] dostáváme

$$y = 2\sqrt{\frac{|p|}{3}} \cos \frac{\alpha}{3}, \quad \cos \alpha = \frac{-\frac{q}{2}}{\sqrt{\left(\frac{|p|}{3}\right)^3}}.$$

V našem případě $\cos \alpha = \mp a/M$. Řešení příslušné kubické rovnice jsme získali ve tvaru

$$y = 2\sqrt{M} \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \left(\mp \frac{a}{M} \right) \right]. \quad (3.58)$$

Dosazením do substituce $r = y^2$ a užitím vzorce $\cos^2 \alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ získáváme radiální souřadnici fotonové orbity [4]

$$r_{\text{ph}} = 2M \left\{ 1 + \cos \left[\frac{2}{3} \arccos \left(\mp \frac{a}{M} \right) \right] \right\}. \quad (3.59)$$

Pro $a = 0$ přecházíme ke Schwarzschildovu prostoročasu a pro obě znaménka platí $r_{\text{ph}} = 3M$. Tento výsledek se shoduje se vztahem (3.38). V mezním případě Kerrovy černé díry pro $a = M$ dostáváme pro souhlasné obíhání fotonu okolo černé díry hodnotu $r_{\text{ph}} = M$ a pro nesouhlasné obíhání hodnotu $r_{\text{ph}} = 4M$.

Hraniční vázané kruhové orbity

Vázané orbity se vyznačují tím, že částice jsou na těchto orbitách při svém pohybu omezeny jen na určitou oblast a nemohou z ní uniknout do nekonečna. Pro orbity, po kterých se můžou pohybovat částice, platí $r > r_{\text{ph}}$. Ne všechny tyto orbity jsou však vázané. Pokud energie částice v této oblasti bude větší než klidová $e > 1$, sebemenší porucha směrem od černé díry způsobí, že se částice vzdálí do nekonečna po trajektorii, která se asymptoticky blíží hyperbole. Takovéto kruhové trajektorie jsou sice kruhové geometricky, ale ne energeticky. Tato vlastnost způsobuje jejich nestabilitu [4].

Vázané kruhové orbity musí splňovat podmínku $r > r_{\text{mb}}$, kde r_{mb} je radiální souřadnice hraniční vázané kruhové orbity dané podmínkou $e = 1$. Tyto trajektorie jsou z hlediska energetického parabolické. Minimální radiálně měřená souřadnice – periastrum parabolického pohybu je dána právě hodnotou r_{mb} . Pokud částice na této orbitě pronikne do oblasti $r < r_{\text{mb}}$, bude neodvratně pohlcena černou dírou. Hodnotu r_{mb} určíme pomocí vztahu (3.55) a již zmiňované podmínky $e = 1$. Po úpravě dostáváme

$$r^2 - 4rM \pm 4a\sqrt{Mr} - a^2 = 0. \quad (3.60)$$

Substituce $z = \sqrt{r}$ vede k rovnici čtvrtého řádu

$$z^4 - 4z^2M \pm 4az\sqrt{M} - a^2 = 0. \quad (3.61)$$

Pomocí počítačového programu [14] nalezneme její nezáporné kořeny

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{M} + \sqrt{M - a}, \\ z_2 &= \sqrt{M} - \sqrt{M - a}, \\ z_3 &= -\sqrt{M} + \sqrt{M - a}, \\ z_4 &= \sqrt{M} + \sqrt{M + a}, \end{aligned}$$

kde kořeny z_1, z_2, z_3 přísluší souhlasnému oběhu (horní znaménko) a kořen z_4 odpovídá nesouhlasnému oběhu (dolní znaménko) okolo černé díry. Po návratu k původní proměnné $r = z^2$ dostáváme odpovídající hodnoty

$$\begin{aligned} r_1 &= 2M - a + 2\sqrt{M^2 - Ma}, \\ r_2 &= 2M - a - 2\sqrt{M^2 - Ma}, \\ r_3 &= 2M + a - 2\sqrt{M^2 - Ma}, \\ r_4 &= 2M + a + 2\sqrt{M^2 - Ma}. \end{aligned}$$

Správné řešení rovnice (3.60) musí pro $a = 0$ odpovídat Schwarzschildovu případu $r_{\text{mb}} = 4M$, který se shoduje se vztahem (3.29). Ve shodě s [4] této podmínce vyhovují pouze následující kořeny

$$r_{\text{mb}} = 2M \mp a + 2\sqrt{M^2 \mp Ma}, \quad (3.62)$$

kde stále platí horní znaménko pro souhlasný a dolní znaménko pro nesouhlasný oběh částice kolem černé díry. Pro limitní případ $a = M$ vycházejí hodnoty pro souhlasný oběh $r_{\text{mb}} = M$ a pro nesouhlasný oběh $r_{\text{mb}} = (3 + 2\sqrt{2})M \doteq 5,83M$.

Nejbližší stabilní kruhové orbity

Charakteristickou vlastností stabilní kruhové orbity je, že částice po mírném vychýlení se vrací zpět na tuto orbitu. Aby byla vázaná kruhová orbita stabilní, musí efektivní potenciál V_{ef} částice na této orbitě nabývat minima. Dostáváme tedy [10]

$$\frac{\partial^2 V_{\text{ef}}(r, e, l)}{\partial r^2} \geq 0. \quad (3.63)$$

Rovnice (3.47), (3.48) a (3.63) určují hodnoty r , e a l stabilní kruhové orbity v Kerrově geometrii. Nejbližší stabilní kruhová orbita s poloměrem r_{ms} je hraniční orbita všech stabilních kruhových orbit. Podmínka (3.63) pro nejbližší stabilní kruhovou orbitu přechází do tvaru [10]

$$\frac{\partial^2 V_{\text{ef}}(r_{\text{ms}}, e, l)}{\partial r^2} = 0. \quad (3.64)$$

Po rozvedení podmínky (3.64) a provedení příslušných derivací dostáváme rovnici

$$-2r^2M - 12l^2M + 24aelM - 12a^2e^2M + 3l^2r - 3a^2e^2r + 3a^2r = 0. \quad (3.65)$$

Obdobně jako v předchozích případech provedeme substituce $r = 1/u$ a $l = x + ae$

$$-12u^2x^2M - 2M + 3ux^2 + 6aeux + 3a^2u = 0. \quad (3.66)$$

Nyní za e dosadíme ze vztahu (3.50). Po úpravách dostáváme

$$3u^2x^2 - 1 = 0 \quad (3.67)$$

a opět dosadíme za x obecný tvar pro kruhové orbity ze vztahu (3.52). Po úpravách v souladu s [4, 12] dostáváme

$$1 - 6Mu - 3a^2u^2 \pm 8a(Mu^3)^{\frac{1}{2}} = 0, \quad (3.68)$$

po návratu k r získáme

$$r^2 - 6rM \pm a\sqrt{Mr} - 3a^2 = 0. \quad (3.69)$$

Zavedeme další substituci $r = z^2$, abychom dospěli k rovnici čtvrtého řádu

$$z^4 - 6Mz^2 \pm az\sqrt{M} - 3a^2 = 0, \quad (3.70)$$

kde stále horní znaménko značí souhlasnou a dolní nesouhlasnou povahu oběhu částice kolem černé díry.

Po návratu k původní proměnné pomocí vztahu $r = z^2$, získáme pomocí počítačového programu [14] obecně osm kořenů r_{ms} rovnic (3.69). Z těchto kořenů vybereme pouze ty, pro které při přechodu k Schwarzschildově prostoročasu dosazením $a = 0$ platí $r_{\text{ms}} = 6M$. Výpočet nelze provést přímo, ale jako limitu Taylorova rozvoje v bodě $a = 0$. S pomocí [14] dostáváme pro radiální souřadnici nejbližší stabilní kruhové orbity

$$r_{\text{ms}} = \frac{\sqrt{2}}{4c^{\frac{1}{2}}} \left[\sqrt{\frac{c^{\frac{1}{2}} \left(\sqrt{2}M^2 + 4\sqrt{2}b^{\frac{1}{3}}M + \sqrt{2}b^{\frac{2}{3}} - \sqrt{2}a^2 \right) + 8ab^{\frac{1}{3}}\sqrt{M}}{b^{\frac{1}{3}}}} \mp \sqrt[4]{2c^{\frac{3}{4}}} \right]^2, \quad (3.71)$$

kde

$$\begin{aligned} b &= M^3 - aM^2 - a^2M + a^3 = (M - a)^2(M + a), \\ c &= \frac{-M^2 + 2b^{\frac{1}{3}}M - b^{\frac{2}{3}} + a^2}{b^{\frac{1}{3}}}. \end{aligned}$$

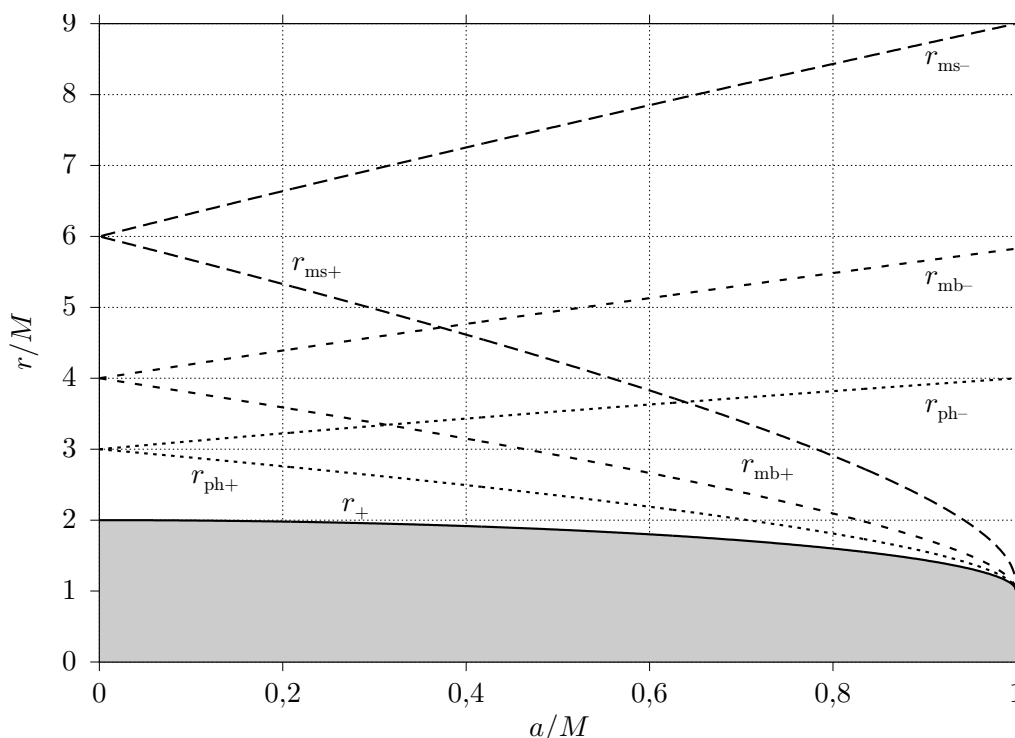
Abychom zjistili hodnoty nejbližší stabilní kruhové orbity r_{ms} pro extrémní rotaci černé díry pro ($a = M$), musíme opět místo dosazení použít limitu Taylorova rozvoje v bodě $a = M$. Pro souhlasný a nesouhlasný oběh vychází po řadě hodnoty

$$r_{\text{ms}_s} = M, \quad r_{\text{ms}_n} = 9M. \quad (3.72)$$

Na obrázku 3.10 je graficky znázorněna závislost radiální souřadnice význačných kruhových orbit na míře rotace černé díry. V případě souhlasného oběhu s rotací černé díry pro hodnotu $a/M = 1$ můžeme v grafu pozorovat splnutí všech význačných kruhových orbit a horizontu událostí s hodnotou $r/M = 1$. Tato skutečnost je však pouze zdánlivá. Lze ukázat, že vlastní vzdálenost měřená lokálním pozorovatelem zůstává mezi těmito orbitami nenulová [4, 12].

3.2.2 Vybrané případy trajektorií částic

Zaměříme se na některé zajímavé případy trajektorií částic v ekvatoriální rovině rotující černé díry. Na následujících obrázcích je znázorněna ekvatoriální rovina Kerrovy černé díry pomocí Boyer–Lindquistových souřadnic r a φ .



Obrázek 3.10: Grafické znázornění závislosti Boyer-Lindquistovy radiální souřadnice nejbližší stabilní kruhové orbity r_{mb} , hraniční vázané kruhové orbity r_{ms} a fotonové orbity r_{ph} na momentu hybnosti černé díry o hmotnosti M ($a \equiv J/M$). Přerušovanou čarou a indexem plus je vyznačen případ souhlasné rotace s černou dírou. Čerchovanou čarou a indexem mínus je vyznačen případ rotace nesouhlasné. V grafu je rovněž vyznačena Boyer-Lindquistova radiální souřadnice r_+ horizontu událostí.

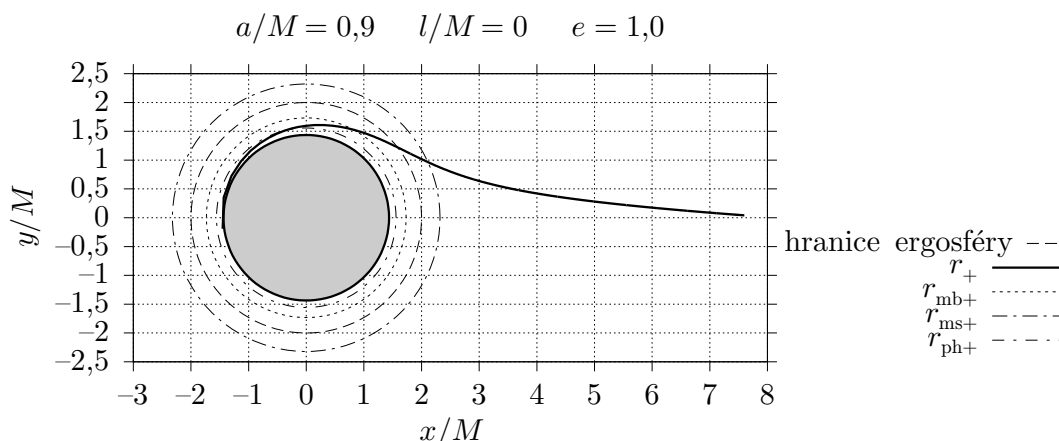
Jsou zde vyznačeny: radiální souřadnice horizontu událostí r_+ daná vztahem (1.10), radiální souřadnice kruhové fotonové orbity r_{ph} daná vztahem (3.59), radiální souřadnice limitní vázané kruhové orbity r_{mb} daná vztahem (3.62), radiální souřadnice nejbližší stabilní kruhové orbity r_{ms} daná vztahem (3.71) a radiální souřadnice statické meze daná vztahem (1.11), která ohraničuje ergosféru¹².

Trajektorie částice s počátečním nulovým momentem hybnosti

Uvažujme částici, která má vzhledem k pozorovateli v nekonečnu nulovou kinetickou energii a nachází se ve velmi velké vzdálenosti od rotující černé

¹²Kladným směrem rotace je myšlen pohyb proti směru hodinových ručiček.

díry. Tato částice se začne pohybovat přímo směrem k černé díře v důsledku gravitačního působení. V tomto případě platí¹³ $l = 0$ a $e = 1$. Vlivem rotace černé díry se přímý pohyb částice postupně mění a ta začne černou díru obíhat. Trajektorie částice je znázorněna na obrázku 3.11.



Obrázek 3.11: Znázornění trajektorie částice v gravitačním poli rotující černé díry s Kerrovým parametrem $a = 0,9M$. Na počátku pohybu byla částice ve velké vzdálenosti od černé díry, s nulovým momentem hybnosti a pouze s klidovou energií vzhledem k pozorovateli v nekonečnu. Její počáteční radiální směr pohybu se postupně měnil a částice díky strhávání prostoročasu začala rotovat kolem černé díry souhlasným směrem.

Tvar trajektorie $\varphi(r)$ můžeme určit vyjádřením výrazu $\frac{d\varphi}{dr}$ takto [10]

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{d\varphi/d\tau}{dr/d\tau} = -\frac{\frac{2Ma}{r\Delta}}{\sqrt{\frac{2M}{r} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)}}. \quad (3.73)$$

Výrazy $d\varphi/d\tau$ a $dr/d\tau$ jsme odvodili ze vztahů (3.43) a (3.44)¹⁴ za současné platnosti podmínek $l = 0$ a $e = 1$. Výsledný vztah $\varphi(r)$ získáme integrací vztahu (3.73) [10]

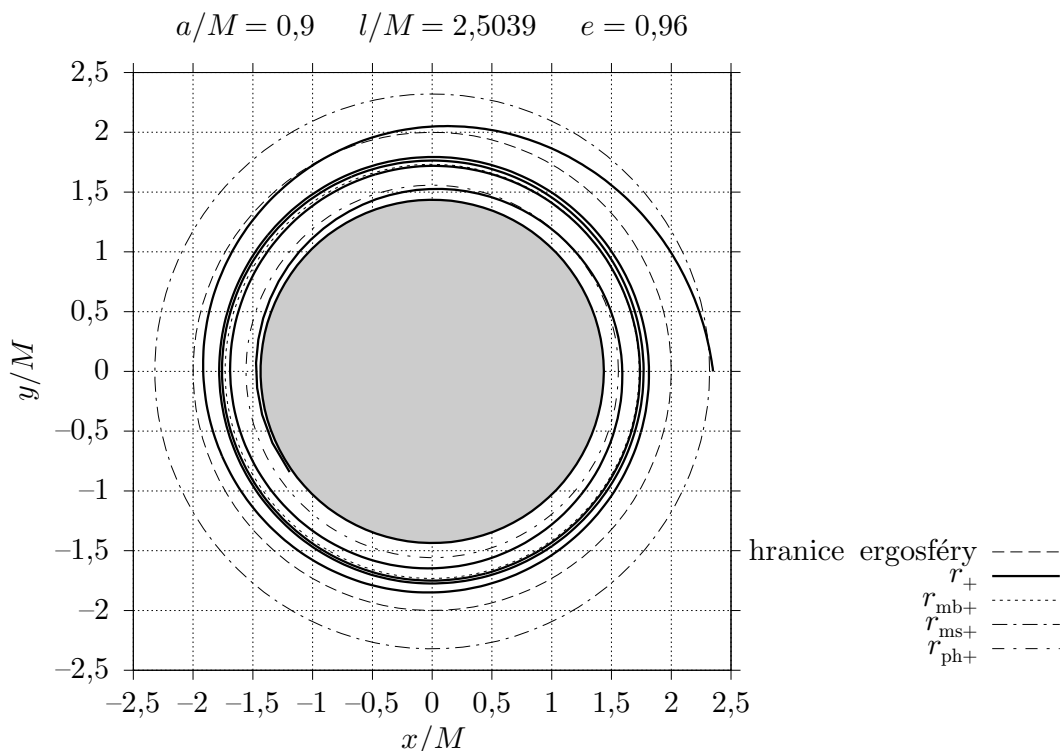
$$\varphi(r) = \int_{\infty}^r -\frac{\frac{2Ma}{r\Delta}}{\sqrt{\frac{2M}{r} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)}} dr. \quad (3.74)$$

¹³Podmínka $l = 0$ vyplývá z nulové hodnoty momentu hybnosti uvažované částice. Částice má v nekonečnu pouze klidovou energii, tedy platí $e = 1$.

¹⁴Při odmocňování během osamostatňování výrazu $dr/d\tau$ ze vztahu (3.44) musíme brát v úvahu, že $dr/d\tau < 0$.

Trajektorie částice s počátečním nenulovým momentem hybnosti

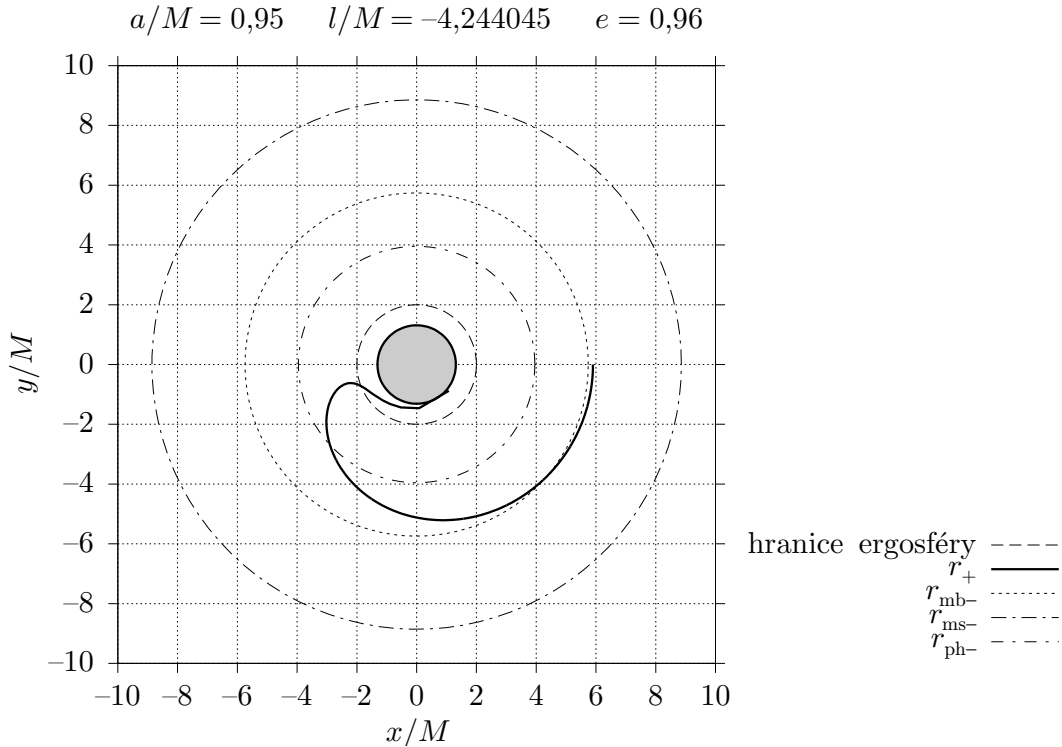
Pokud uvažujeme částici s počátečním nenulovým momentem hybnosti, její chování v okolí rotující černé díry velmi závisí na tom, zda částice obíhá černou díru ve směru souhlasném či nesouhlasném s její rotací.



Obrázek 3.12: Znázornění trajektorie částice obíhající velmi rychle rotující černou díru směrem souhlasným se směrem její rotace.

V prvním případě znázorněném na obrázku 3.12 uvažujeme částici s kladnou hodnotou momentu hybnosti $l = 2,5039M$, která se pohybuje v gravitačním poli velmi rychle rotující černé díry s Kerrovým parametrem $a = 0,9M$. Částice tedy obíhá černou díru souhlasně se směrem její rotace po orbitách velmi podobných kružnicím. Radiální souřadnice těchto kružnic se pozvolna zmenšuje. Tento pokles se výrazně zpomalí v blízkosti hraniční vázané kruhové orbity. Toto pozastavení pádu do černé díry nastává díky tomu, že energie částice $e = 0,96$ je blízká hodnotě energie $e = 1$ částice obíhající po hraniční vázané kruhové orbitě. Poté se opět pokles radiální souřadnice trajektorie částice urychlí až částice dosáhne horizontu událostí.

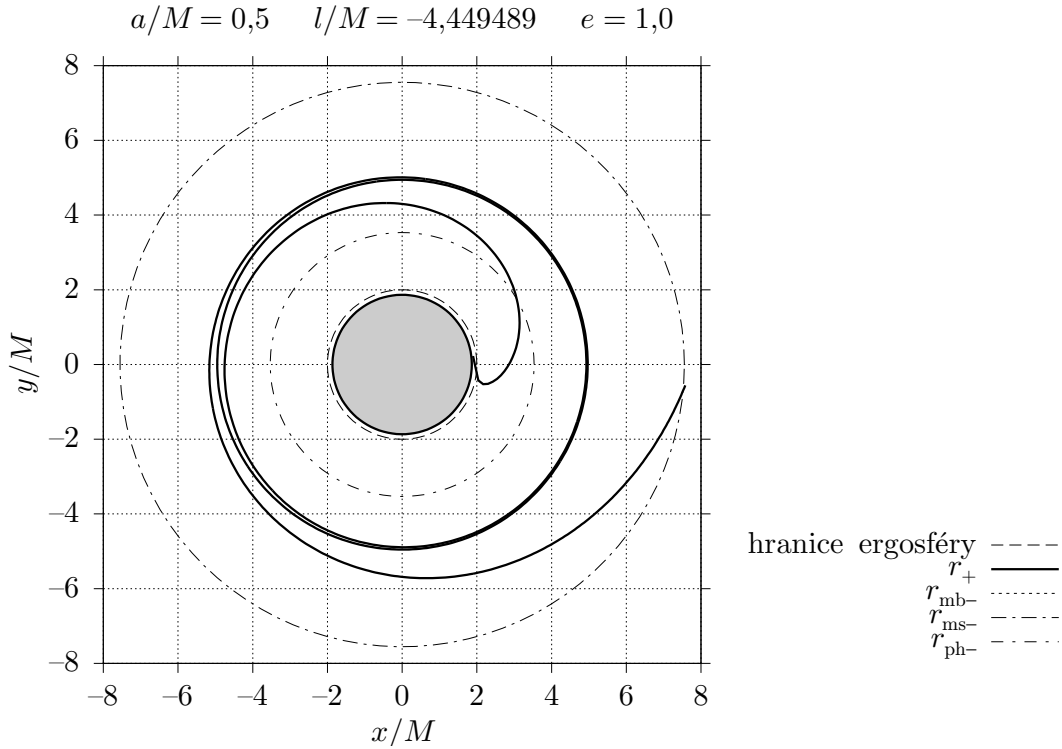
V druhém případě, který vidíme na obrázku 3.13, se zabýváme černou dírou s obdobnou velikostí rotace jako v prvním případě ($a = 0,95M$). Pod-



Obrázek 3.13: Znázornění trajektorie částice obíhající velmi rychle rotující černou díru proti směru její rotace.

statný rozdíl oproti prvnímu případu je v záporné hodnotě momentu hybnosti částice $l = -4,244045M$. Částice se tedy pohybuje proti směru rotace černé díry. Tato vlastnost se projeví rovněž změnou velikostí radiálních souřadnic všech význačných kruhových orbit. Protisměrný pohyb částice jako v prvním případě určitou dobu kopíruje hraniční vázanou kruhovou orbitu, díky hodnotě energie $e = 0,96$, která se blíží hodnotě $e = 1$. Poté se urychlí pád částice směrem k centru gravitačního působení. Čím více se částice přibližuje k statické mezi, stává se její pohyb proti směru rotace černé díry obtížnější. Protisměrný oběh částice je utlumen a již před vstupem do oblasti ergosféry rotuje částice souhlasně s černou dírou. Po průchodu ergosférou částice překoná horizont událostí. Kvůli rychlé rotaci černé díry částice není schopna vykonat ani jeden oběh proti směru rotace černé díry.

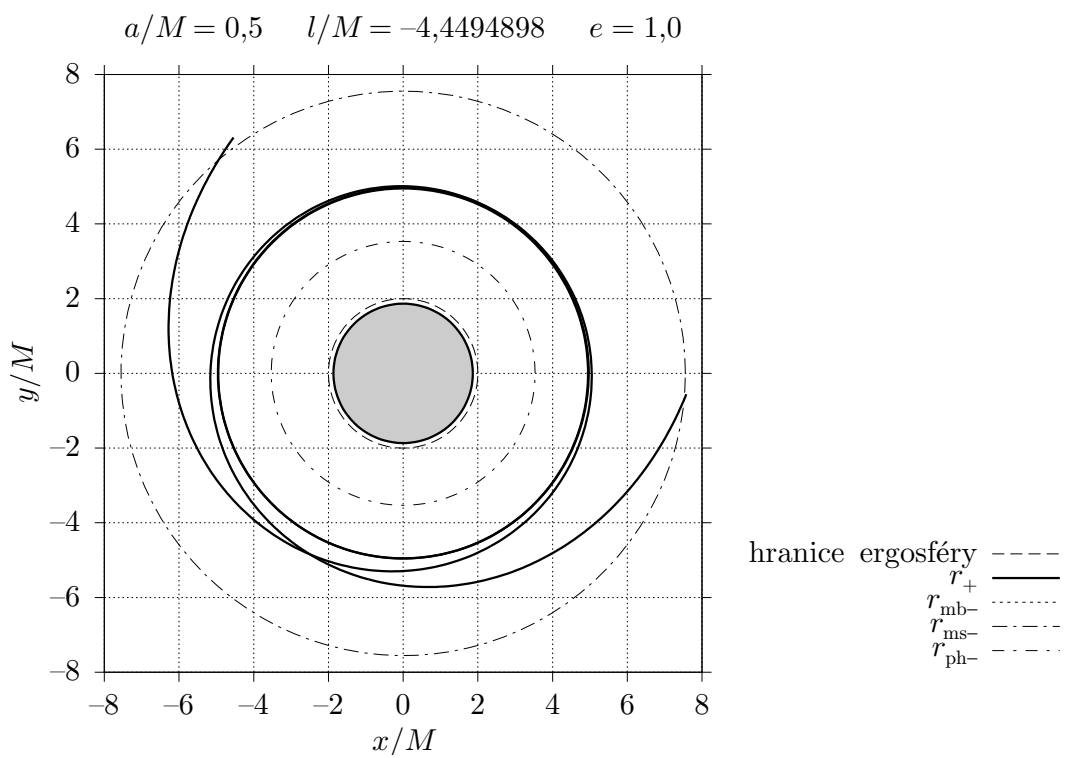
Situace se změní, pokud výrazně zmírníme rotaci černé díry. V třetím případě prezentovaném obrázkem 3.14 Kerrův parametr nabývá zhruba poloviční hodnoty $a = 0,5M$, zatím co hodnoty energie $e = 1$ a momentu hybnosti $l = -4,449489M$ částice zůstaly téměř stejné. Vidíme, že částice se chová obdobně jako v předchozím případě s tím rozdílem, že je schopna po



Obrázek 3.14: Znáornění trajektorie částice obíhající pomalu rotující černou díru proti směru její rotace.

jistou dobu vykonávat protisměrnou rotaci, než se přiblíží dostatečně blízko oblasti ergosféry. Opět si můžeme všimnout částečné shody trajektorie s hraniční vázanou kruhovou orbitou způsobenou hodnotou energie $e = 1$ částice a také změn hodnot radiálních souřadnic horizontu událostí a význačných kruhových orbit způsobených pomalejší rotací černé díry.

V posledním případě (obrázek 3.15) zůstávají hodnoty Kerrova parametru a a energie e stejné jako v případě předchozím. Pouze záporná hodnota momentu hybnosti velice nepatrně klesne na hodnotu $l = -4,44944898M$, tedy protisměrná rotace částice mírně vzroste. Tato změna způsobí, že se pokles hodnoty radiální souřadnice trajektorie zastaví na hraniční vázané kruhové orbitě a pak začne její hodnota růst. Částice tedy není pohlcena černou dírou, ale unikne z jejího gravitačního působení.



Obrázek 3.15: Únik částice pohybující se proti směru rotace černé díry z jejího gravitačního pole.

Kapitola 4

Sférická akrece

V této kapitole popíšeme pohyb plynu vnějších oblastí akrečního disku pomocí klasické fyziky¹. Budeme vycházet ze základních rovnic kinematiky ideálních tekutin a uvažovat řadu zjednodušujících předpokladů, abychom se vyhnuli komplikovaným matematickým výpočtům. I přes idealizaci akrečního procesu a zanedbání relativistických jevů lze pomocí tohoto užitečného modelu získat hodnotné výsledky. Zaměříme se zejména na možné typy sférické akrece s ohledem na charakter rychlosti proudění a na popis míry sférické akrece.

Uvažujme nerotující černou díru s hmotností M obklopenou nekonečně velkým oblakem téměř ideálního plynu, který se ve velmi velkých vzdálenostech od černé díry nachází v klidu² s konstantní hustotou $\rho(\infty)$ a tlakem $p(\infty)$. Zároveň předpokládejme vysoce idealizovanou situaci, kdy plyn bez tření padá v radiálním směru vlivem gravitační síly přímo do černé díry se stále konstantní mírou akrece [6]

$$\dot{M} = \frac{dM}{dt}. \quad (4.1)$$

Toto proudění je ustálené. Narůst hmotnosti M černé díry a následnou změnu jejího gravitačního pole, které proudění způsobí, zanedbáváme. Celý děj tedy probíhá v neměnném gravitačním poli nerotující statické černé díry. Teplo, které je během akrece vyzářeno, je rychle odvedeno a teplota plynu zůstává trvale nízká. Plyn je barotropní a vzájemná závislost tlaku na hustotě je dána vztahem [6, 17]

$$p \approx \rho^\alpha, \quad (4.2)$$

¹Pozornost je v této kapitole omezena pouze na vnější oblasti akrečního disku vzdálené od černé díry, pro které lze popis pomocí klasické fyziky s dostatečnou přesností použít. Části akrečního disku, které se nacházejí v blízkosti černé díry, vzhledem k značnému zakřivení prostoročasu, je nutno zkoumat metodami relativistické fyziky.

²Aby mohla sférická akrece nastat, musí mít plyn nulový moment hybnosti.

kde \varkappa nabývá hodnot $1 < \varkappa < \frac{5}{3}$.

4.1 Možné typy sférické akrece

Pro proudění ideálního plynu platí rovnice kontinuity $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$. Radiální složka rovnice kontinuity v případě sféricky symetrického proudění za platnosti vztahu (4.2) ve sférické soustavě souřadné přechází do tvaru [17]

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho v) = 0, \quad (4.3)$$

kde v je radiální složka vektoru rychlosti. Z rovnice (4.3) vyplývá, že součin veličin $r^2 \rho v$ je konstantní. Konstantní míru akrece můžeme stanovit vztahem

$$\dot{M} = -4\pi r^2 \rho v. \quad (4.4)$$

Pohyb ideálního plynu v gravitačním poli popíšeme Eulerovými hydrodynamickými rovnicemi. Za předpokladu konstantní míry akrece a ustáleného proudění plynu v akrečním disku pro její radiální složku platí [17]

$$v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{GM}{r^2} = 0, \quad (4.5)$$

kde člen $\frac{GM}{r^2}$ je vyjádřením intenzity gravitačního pole.

Soustava rovnic (4.2), (4.3) a (4.5) je dostačující pro řešení problému sférické akrece. Úpravou rovnice kontinuity (4.3) dostáváme [17]

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} = -\frac{1}{vr^2} \frac{\partial}{\partial r} (vr^2). \quad (4.6)$$

Pomocí vztahu $c_z^2 = \frac{dp}{d\rho}$, kterým je dána rychlost zvuku v plynech, a následnou úpravou parciální derivace

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} = c_z^2 \frac{\partial \rho}{\partial r} \quad (4.7)$$

převědeme rovnici (4.6) na tvar

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{c_z^2}{vr^2} \frac{\partial}{\partial r} (vr^2), \quad (4.8)$$

který dosadíme do Eulerovy hydrodynamické rovnice (4.5). Dostaneme vztah

$$v \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{c_z^2}{vr^2} \frac{\partial}{\partial r} (vr^2) + \frac{GM}{r^2} = 0, \quad (4.9)$$

který upravíme do tvaru vhodnějšího pro diskusi sférické akrece [17]

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{c_z^2}{v^2} \right) \frac{\partial v^2}{\partial r} = -\frac{GM}{r^2} \left(1 - \frac{2c_z^2 r}{GM} \right). \quad (4.10)$$

Diskusi možných typů sférické akrece podle rovnice (4.10) provedeme pro velmi velké vzdálenosti od černé díry tj. pro $r \rightarrow \infty$. V tomto případě pro rychlost zvuku v plynu platí $c_z^2 = c_z^2(r)$, ale se zvyšující se hodnotou r tato závislost postupně vymizí a c_z^2 se stane konstantou, jejíž hodnota je určena parametry plynu v nekonečnu. Pro velká r je člen $\left(1 - \frac{2c_z^2 r}{GM} \right)$ na pravé straně rovnice (4.10) záporný a tudíž tato strana rovnice (4.10) je kladná.

Plyn je v nekonečně velkých vzdálenostech od černé díry v klidu a vlivem její gravitace se podle předpokladu začne pohybovat se zrychlením směrem ke zdroji gravitačního působení. Z toho vyplývá, že člen $\frac{\partial v^2}{\partial r}$ na levé straně rovnice (4.10) je záporný a z kladné povahy celé levé strany můžeme usoudit, že $v^2 < c_z^2$. Ve velkých vzdálenostech od černé díry je tedy proudění plynu podzvukové.

Přibližováním plynu k černé díře, roste hodnota výrazu $\left(1 - \frac{2c_z^2 r}{GM} \right)$. Nulových hodnot nabývá pro kritický poloměr r_k , který lze vyjádřit ve tvaru [17]

$$r_k = \frac{GM}{2c_z^2(r_k)}. \quad (4.11)$$

Pokusme se o hrubý odhad poloměru r_k ze vztahu (4.11), pro který nejprve musíme stanovit hodnotu $c_z^2(r_k)$. Ze vztahu (4.2) vyplývá

$$c_z^2 = \frac{dp}{d\rho} = \varkappa \frac{p}{\rho}. \quad (4.12)$$

Poměr tlaku a hustoty vyjádříme ze stavové rovnice $pV = k_B N_A T$ pro 1 mol plynu, kde V je objem plynu, T jeho teplota a N_A Avogadrova konstanta. Úpravami a dosazením do vztahu (4.12) dostaneme

$$c_z^2 = \varkappa \frac{k_B T}{m}, \quad (4.13)$$

kde m je hmotnost jedné částice plynu. Pokud předpokládáme, že plyn je složen z molekul H_2 , pak $\varkappa = 1,4$ a hmotnost jedné molekuly $m = 2m_p$, kde m_p je hmotnost protonu (hmotnost elektronů zanedbáváme). Ze vztahů (4.11), (4.13) a dosazením příslušných hodnot³ vyplyne, že

$$r_k = \frac{GMm_p}{\varkappa k_B T} = 1,1 \cdot 10^{12} \left(\frac{T}{10^4 \text{ K}} \right)^{-1} \left(\frac{M}{M_\odot} \right) \text{ m}. \quad (4.14)$$

³Ve výpočtech bude použita hodnota gravitační konstanty $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$, hodnota Boltzmannovy konstanty $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$ a hodnota hmotnosti protonu $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

Hodnota poloměru r_k je nesrovnatelně vyšší než hodnota radiální souřadnice horizontu černé díry.

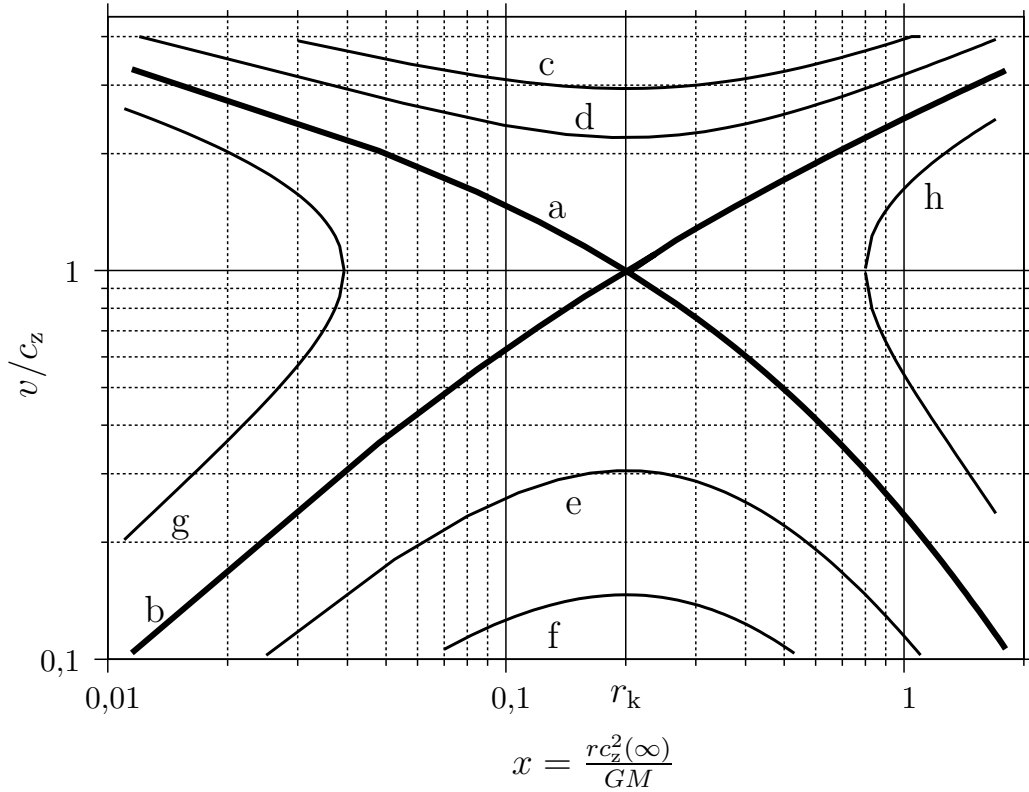
Pro poloměr $r < r_k$ člen $\left(1 - \frac{2c_z^2 r}{GM}\right)$ nabývá kladných hodnot. Obdobným postupem jako v předchozí úvaze dospějeme k závěru, že strany rovnice (4.10) jsou záporné a platí $v^2 > c_z^2$. Pro oblasti s poloměrem $r < r_k$ je proudění ideálního plynu nadzvukové. V místě s poloměrem r_k se mění proudění z podzvukového na nadzvukové [17].

Budeme diskutovat chování všech řešení rovnice (4.10) v okolí poloměru $r = r_k$. V tomto případě bude pravá strana rovnice (4.10) rovna nule. Aby i levá strana rovnice (4.10) nabyla nulové hodnoty musí platit buď $v^2 = c_z^2$ nebo $\frac{\partial v^2}{\partial r} = 0$.

1. Pokud $v^2 = c_z^2$ pro $r \rightarrow r_k$ a $v^2 \rightarrow 0$ v případě $r \rightarrow \infty$, nastávají pro $r > r_k$ podzvukové rychlosti ($v^2 < c_z^2$) a pro $r < r_k$ nadzvukové rychlosti ($v^2 > c_z^2$). Tato varianta řešení je nejvýznamnější. Popisuje akreci jako proces s podzvukovými rychlostmi ve velkých vzdálenostech od černé díry a s nadzvukovými rychlostmi v její blízkosti.
2. Pokud $v^2 = c_z^2$ pro $r \rightarrow r_k$ a $v^2 \rightarrow 0$ v případě $r \rightarrow 0$, nastávají pro $r > r_k$ nadzvukové rychlosti ($v^2 > c_z^2$) a pro $r < r_k$ podzvukové rychlosti ($v^2 < c_z^2$). Tento případ popisuje situaci, kdy plyn proudí od černé díry do vzdálených oblastí. Pohybuje se podzvukovými rychlostmi v blízkosti černé díry a nadzvukovými rychlostmi v oblastech od ní vzdálených.
3. Pokud $\frac{\partial v^2}{\partial r} = 0$ pro $r = r_k$ a $v^2 < c_z^2$, zůstává rychlost plynu podzvuková pro libovolné r . Proudění v této situaci nemůže odpovídat akreci v okolí černé díry s dostatečně malými rozměry horizontu. Plyn by se pohyboval ze vzdáleného místa podzvukovou rychlostí k černé díře a postupně by zrychloval až do místa s poloměrem $r = r_k$, kde by dosáhl své maximální rychlosti. Při dalším přibližování k černé díře by musela rychlost plynu klesnout až do klidu, což je v rozporu se zákonitostmi pohybu v okolí černých děr.
4. Pokud $\frac{\partial v^2}{\partial r} = 0$ pro $r = r_k$ a $v^2 > c_z^2$, zůstává rychlost plynu nadzvuková pro libovolné r . Ani tato varianta neodpovídá akrečnímu procesu z analogických důvodů jako v předchozím případě.
5. Pro úplnost uvedme případ, kdy $\frac{\partial v^2}{\partial r} = \infty$ a vždy platí $r > r_k$. Tato varianta nemá fyzikální význam.
6. Obdobná varianta, kdy $\frac{\partial v^2}{\partial r} = \infty$ a vždy platí $r < r_k$, je rovněž bez fyzikálního významu.

Pro případ sférické akrece ideálního plynu je přípustný pouze první bod diskuse řešení tohoto problému [17].

Na obrázku 4.1 jsou graficky znázorněny všechny možné případy sférické akrece z předchozí diskuse. Pro popis vodorovné osy byla zvolena v souladu



Obrázek 4.1: Graf závislosti poměru rychlosti plynu k lokální rychlosti zvuku na bezrozměrné proměnné x . Stupnice na obou osách je logaritmická. Křivka *a* odpovídá prvnímu diskutovanému případu, který jediný je vhodný pro popis sférické akrece. Křivka *b* je znázorněním druhé diskutované varianty. Křivky *c,d,e,f* odpovídají po dvou čtvrtému a třetímu diskutovanému případu. Konečně křivky *g,h* představují poslední dvě varianty diskuse, které nejsou z fyzikálního hlediska přípustné. Toto tvrzení lze podpořit faktem, že v případě křivek *g,h* pro jednu hodnotu poloměru nabývá rychlost plynu dvou různých hodnot, což je nemožné.

s [6] bezrozměrná proměnná x definovaná vztahem

$$x = \frac{rc_z^2(\infty)}{GM}. \quad (4.15)$$

Pokud nahradíme ve vztahu (4.15) součin GM pomocí vztahu (4.11) a za nově

vzniklý podíl $\frac{c_z^2(\infty)}{c_z^2(r_k)}$ dosadíme ze vztahu (4.22) dostáváme

$$x = \frac{rc_z^2(\infty)}{2r_k c_z^2(r_k)} = \frac{r}{r_k} \frac{5 - 3\kappa}{4}. \quad (4.16)$$

Pro $\kappa = 1,4$ je hodnota bezrozměrné proměnné x pro poloměr $r = r_k$ rovna $x = 0,2$.

4.2 Míra akrece

V další části se zaměříme na stanovení hodnoty míry akrece \dot{M} . Pomocí vztahů (4.2) a (4.12) upravíme rovnici (4.5) do tvaru

$$v dv + \kappa \rho^{\kappa-2} d\rho + \frac{GM}{r^2} dr = 0, \quad (4.17)$$

který integrujeme. Užitím vztahů (4.2) a (4.12) a úpravami dostaneme rovnici [17]

$$\frac{v^2}{2} + \frac{c_z^2}{\kappa - 1} - \frac{GM}{r} = K, \quad (4.18)$$

kde K je integrační konstanta. Ve velké vzdálenosti od černé díry tj. pro $r \rightarrow \infty$ podle předchozí diskuse $v \rightarrow 0$ a rovnice (4.18) přejde do tvaru

$$\frac{c_z^2(\infty)}{\kappa - 1} = K. \quad (4.19)$$

Pro poloměr $r = r_k$ platí podle předchozí diskuse vztahy $v^2(r_k) = c_z^2(r_k)$ a $\frac{GM}{r_k} = 2c_z^2(r_k)$, díky kterým rovnice (4.18) přejde do tvaru

$$\frac{c_z^2(r_k)}{2} + \frac{c_z^2(r_k)}{\kappa - 1} - 2c_z^2(r_k) = K. \quad (4.20)$$

Porovnáním vztahů (4.19) a (4.20) získáváme rovnici [17]

$$c_z^2(r_k) \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\kappa - 1} - 2 \right] = \frac{c_z^2(\infty)}{\kappa - 1}, \quad (4.21)$$

kterou následně upravíme a získáme rovnost [17]

$$c_z(r_k) = c_z(\infty) \left[\frac{2}{5 - 3\kappa} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.22)$$

Užitím vztahu (4.2) dostaneme [17]

$$\rho(r_k) = \rho(\infty) \left[\frac{c_z(r_k)}{c_s(\infty)} \right]^{\frac{2}{\varkappa-1}}. \quad (4.23)$$

Protože velikost míry akrece daná vztahem (4.4) je konstantní, můžeme ji vyjádřit pro poloměr r_k vztahem [17]

$$\dot{M} = 4\pi r_k^2 \rho(r_k) c_z(r_k), \quad (4.24)$$

ze kterého pomocí vztahů (4.22) a (4.23) získáme konečné vyjádření míry akrece závislé na vlastnostech plynu ve velké vzdálenosti od černé díry⁴ [17]

$$\dot{M} = \pi G^2 M^2 \frac{\rho(\infty)}{c_z^3(\infty)} \left[\frac{2}{5-3\varkappa} \right]^{\frac{5-3\varkappa}{2(\varkappa-1)}}. \quad (4.25)$$

Pro dvouatomový plyn s $\varkappa = 1,4$ můžeme hodnotu míry akrece vyjádřit následovně⁵ [17]

$$\dot{M} = 1,4 \cdot 10^8 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^2 \left(\frac{\rho(\infty)}{10^{-21} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}} \right) \left(\frac{c_z(\infty)}{10 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}} \right)^{-3}. \quad (4.26)$$

Ze vztahů (4.25) a (4.26) vyplývá, že konstantní míra akrece \dot{M} závisí na hmotnosti černé díry M , rychlosti zvuku v plynu $c_z(\infty)$ a hustotě plynu $\rho(\infty)$ ve velké vzdálenosti od černé díry. Hodnota \dot{M} je určena mírou akrece v místě s kritickým poloměrem r_k . Toto tvrzení rozebereme v následující úvaze.

Nejprve odhadneme chování $v(r)$ a $\rho(r)$ v případě nepatrné změny \dot{M} při libovolném, ale pevném r . Do vztahu (4.18) dosadíme za c_z^2 , které vyjádříme ze vztahu (4.23), a provedeme variaci

$$v\delta v + c_z^2(\infty) \frac{\rho^{\varkappa-2}}{\rho^{\varkappa-1}(\infty)} \delta\rho = 0. \quad (4.27)$$

Následnou úpravou pomocí vztahu (4.23) dostaneme první z hledaných rovnic [17]

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = -\frac{v^2}{c_z^2} \frac{\delta v}{v}. \quad (4.28)$$

⁴Rovněž lze z rovnice (4.24) a (4.25) pomocí rovnice (4.18) vyjádřit $v(r)$ a $\rho(r)$. Tento postup však vyžaduje numerické řešení [17].

⁵Ve výpočtech bude použita hodnota Ludolfova čísla $\pi = 3,14$.

Ze vztahu (4.4) vyjádříme hustotu plynu ρ . Provedeme variaci vzniklého výrazu a po úpravě dostaneme

$$\delta\rho = \frac{\dot{M}\delta v}{4\pi v^2 r^2} - \frac{\delta\dot{M}}{4\pi v r^2}. \quad (4.29)$$

Pomocí vztahu pro hustotu získaného v předchozím kroku vyjádříme podíl $\frac{\delta\rho}{\rho}$, který dosadíme do rovnice (4.28). Po úpravách dostaneme druhou požadovanou rovnici [17]

$$\frac{\delta\dot{M}}{\dot{M}} = \left(1 - \frac{v^2}{c_z^2}\right) \frac{\delta v}{v}. \quad (4.30)$$

Pro libovolné r z rovnic (4.28) a (4.30) můžeme usuzovat, že s rostoucí rychlostí plynu v klesá jeho hustota ρ . Míra akrece \dot{M} má odlišné chování. S rostoucí rychlostí v roste i její hodnota až do momentu, kdy $v = c_z$. Při dalším růstu rychlosti proudícího plynu v hodnota \dot{M} klesá. Pro libovolné r existuje maximální možná míra akrece \dot{M}_{\max} , která nastane pro $v = c_z$. Rozšířením a užitím vztahu (4.23) pro hodnotu \dot{M}_{\max} dostaneme [17]

$$\begin{aligned} \left|\dot{M}_{\max}(r)\right| &= 4\pi\rho c_z r^2 = 4\pi r^2 c_z(\infty) \rho(\infty) \left(\frac{c_z(r)}{c_z(\infty)}\right) \left(\frac{\rho(r)}{\rho(\infty)}\right) \\ &= 4\pi r^2 c_z(\infty) \rho(\infty) \left[\frac{c_z(r)}{c_z(\infty)}\right]^{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Pokud při úpravě vztahu (4.18) na (4.20) vynecháme poslední krok, obdržíme rovnici, pomocí které upravíme poslední rovnost (4.31). Získáme vztah [17]

$$\left|\dot{M}_{\max}(r)\right| = 4\pi r^2 c_z(\infty) \rho(\infty) \left[\frac{2(\varkappa-1)}{(\varkappa+1)} \left(\frac{GM}{rc_z^2(\infty)} + \frac{1}{\varkappa-1}\right)\right]^{\frac{\varkappa+1}{2(\varkappa-1)}}, \quad (4.32)$$

na který se můžeme dívat jako na funkční závislost $\left|\dot{M}_{\max}(r)\right|$.

Pro malé r má funkční závislost $\left|\dot{M}_{\max}(r)\right|$ podobný průběh jako mocninná funkce $r^{\frac{3\varkappa-5}{2\varkappa-2}}$. Pro přípustné hodnoty $1 < \varkappa \leq \frac{5}{3}$ je to závislost klesající. Naopak pro $r \rightarrow \infty$ má funkční závislost $\left|\dot{M}_{\max}(r)\right|$ průběh obdobný jako kvadratická funkce r^2 , tedy je v této oblasti rostoucí. Z předchozí úvahy vyplývá, že $\left|\dot{M}_{\max}(r)\right|$ nabývá minima. Pomocí vztahu (4.32) dostaneme rovnici

$$\frac{d\left|\dot{M}_{\max}(r)\right|}{dr} = 0, \quad (4.33)$$

jejímž řešením je poloměr r_{\min} , pro který funkční závislost $\left| \dot{M}_{\max}(r) \right|$ nabývá minima. Z rovnice (4.33) derivací a úpravami získáme vztah

$$\frac{4GM(\varkappa - 1) + 4rc_z^2(\infty) - GM(\varkappa + 1)}{(\varkappa + 1)c_z^2(\infty)} = 0, \quad (4.34)$$

ze kterého vyjádříme r . Následným užitím vztahu (4.22) dostáváme

$$r_{\min} = \frac{GM}{2c_z^2(r_k)} = r_k. \quad (4.35)$$

Funkční závislost $\left| \dot{M}_{\max}(r) \right|$ tedy nabývá svého minima pro kritický poloměr r_k . Zavedme označení minimální hodnoty $\left| \dot{M}_{\max}(r_k) \right| = \dot{M}_k$.

Pro všechna r platí $\left| \dot{M} \right| < \left| \dot{M}_{\max} \right|$. Z tohoto plyne, že nemůže nastat situace, kdy $\dot{M} > \dot{M}_k$. Vždy musí platit $\dot{M} \leq \dot{M}_k$, tedy proudění plynu je vždy podzvukové. Aby v případě sférické akrece byly splněny podmínky vyplývající z výše uvedené diskuse (velikost rychlosti proudění plynu se v místě s poloměrem $r = r_k$ změnil z podzvukové na nadzvukovou), musí platit $\dot{M} = \dot{M}_k$ [17].

Abychom alespoň řádově odhadli hodnotu míry akrece pomocí vztahu (4.26), uvažujme černou díru o hmotnosti $M \sim 4M_{\odot}$ a hodnoty hustoty plynu a rychlosti zvuku v plynu ve velmi velkých vzdálenostech od černé díry pro jednoduchost stanovíme $\rho(\infty) = 10^{-21} \text{ kg.m}^{-3}$ a $c_z(\infty) = 10 \text{ km.s}^{-1}$. Za těchto podmínek pro přibližnou hodnotu míry akrece dostáváme $\dot{M} \sim 2 \cdot 10^9 \text{ kg.s}^{-1}$. Černá díra tedy pohltí při sférické akreci řádově miliardu kilogramů plynu za jednu sekundu.

Kapitola 5

Záření akrečního disku

Jediným dostupným zdrojem informací o akrečním disku je záření, které emituje. Částice při pohybu akrečním diskem interaguje s okolními částicemi. Dochází zde zejména ke tření a dalším mechanismům. Během tohoto procesu částice ztrácí energii vyzařováním. Tímto způsobem vzniká v akrečním disku záření, které detekujeme na Zemi.

V první části této kapitoly je nastíněn způsob, kterým lze z gravitačního a Dopplerova rudého posuvu frekvence tohoto záření získat informace o velikosti a natočení akrečního disku vzhledem k pozorovateli. V druhé části je zaměřena pozornost na hrubý odhad energie záření v případě ustálené sférické akrece, která závisí zejména na hmotnosti uvažované černé díry. V závěru kapitoly využijeme výsledků kapitoly 3 k určení účinnosti akrece, neboli množství energie částice vyzářené v průběhu akrece. Hodnotu účinnosti porovnáme s účinností termionukleárních reakcí v nitrech hvězd.

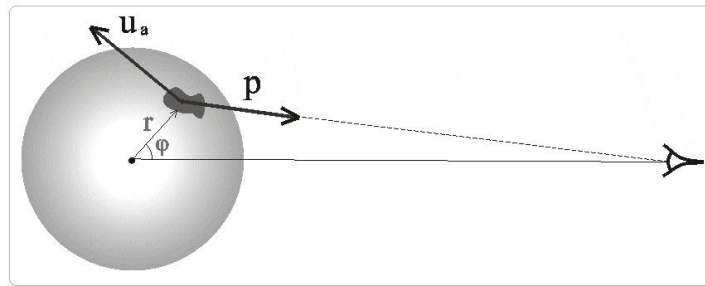
5.1 Rudý posuv záření akrečního disku

Záření, které vzniká v centru disku v blízkosti nejbližší stabilní kruhové orbity dostatečně mohutného akrečního disku dosahuje velmi vysokých frekvencí odpovídajících rentgenovému záření. Zmíněné rentgenové záření detekované na Zemi pozorujeme jako spektrální čáru v rentgenovém spektru. Zaměříme se nyní na to, co vše lze z tohoto záření o akrečním disku zjistit.

Z pohledu teorie relativity záření vnímáme jako pozorovatel v nekonečnu, tedy s gravitačním a dopplerovským rudým posuvem. Míru gravitačního rudého posuvu určuje poloha atomu, ze kterého je foton emitován. Míra dopplerovského posuvu je určena velikostí a směrem rychlosti vzhledem k pozorovateli v době emise. Pokud shrneme všechny tyto vlivy a vezmeme v úvahu

všechny atomy akrečního disku, dostaneme značně rozšířenou spektrální čáru, která nese informace o akrečním disku.

Obdobně jako lze odvodit vztah (1.8) pro gravitační rudý posuv ve statickém případě [10], můžeme postupovat i při odvození rudého posuvu (tedy odvodíme najednou vztah pro gravitační i Dopplerův rudý posuv v případě pohybujícího se zdroje záření v ekvatoriální rovině). Předpokládejme tenký rovinný akreční disk ($\vartheta = \frac{\pi}{2}$) okolo nerotující černé díry, kdy lze použít Schwarzschildovu metriku (1.7). Uvažujme dvě polohy disku vzhledem k pozorovateli. První poloha je znázorněna na obrázku 5.1, kdy disk je natočen k pozorovateli z boku, druhá poloha je v případě, kdy disk je k pozorovateli natočen svou plochou. Frekvenci emitovaného fotonu budeme označovat ω_* , frekvenci záření detekovanou vzdáleným pozorovatelem budeme označovat ω_∞ . Dále označme čtyřrychlost a čtyřhybnost atomu, ze kterého je záření emitováno, $\mathbf{u}_a(r, \varphi)$ a $\mathbf{p}_a(r, \varphi)$ a analogicky pak čtyřrychlost a čtyřhybnost pozorovatele $\mathbf{u}_p(\infty)$ a $\mathbf{p}_p(\infty)$.



Obrázek 5.1: Znázornění polohy akrečního disku bokem k pozorovateli. Černá oblast znázorňuje excitovaný atom s jemu příslušejícím vektorem čtyřhybnosti \mathbf{u}_a . Poloha atomu je podle předpokladu dána souřadnicemi $(r, \varphi, \frac{\pi}{2})$. Dále je zde vyznačena čtyřhybnost \mathbf{p} fotonu emitovaného z daného atomu, který směřuje směrem ke vzdálenému pozorovateli. Převzato z [10].

Ze vztahu¹ $\hbar\omega = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}$ můžeme vyvodit následující poměr [10]

$$\frac{\omega_\infty}{\omega_*} = \frac{\mathbf{u}_p(\infty) \cdot \mathbf{p}_p(\infty)}{\mathbf{u}_a(r, \varphi) \cdot \mathbf{p}_a(r, \varphi)}. \quad (5.2)$$

¹Tuto rovnost získáme z následujících obecných vztahů pro energii fotonu

$$E = \hbar\omega, \quad E = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}, \quad (5.1)$$

kde ω je frekvence daného fotonu, \mathbf{p} je vektor čtyřhybnosti fotonu a \mathbf{u} je vektor čtyřrychlosti pozorovatele, vzhledem ke kterému je energie fotonu měřena.

Předpokládáme, že pozorovatel je statický, tedy pro čtyřrychlost platí

$$u_p^\alpha = (1,0,0,0) = \xi^\alpha, \quad (5.3)$$

kde ξ je Killingův vektor asociovaný se symetrií podle času. Předpokládejme také, že atom, ze kterého je záření emitováno, se pohybuje po kruhové orbitě okolo černé díry, jeho úhlová rychlost je tedy dána vztahem (3.24). Pro čtyřrychlost emitujícího atomu tedy platí [10]

$$u_a^\alpha(r, \varphi) = [u_a^t(r), 0, 0, u_a^\varphi(r)] = u_a^t(r)[\xi^\alpha + \Omega(r)\eta^\alpha] = u_a^t(r)(1, 0, 0, \Omega), \quad (5.4)$$

kde η je opět Killingův vektor asociovaný se symetrií podle souřadnice φ . Koefficient $u_a^t(r)$ získáme pomocí normalizační podmínky (3.3) úplně stejně jako v předchozím textu vztah (3.27). Platí tedy [10]

$$u_a^t(r) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{3M}{r}}}. \quad (5.5)$$

Tak jako pro částice vyplývají ze Schwarzschildovy metriky zákony zachování energie a hybnosti dané vztahy (3.1) a (3.2), vyplývají pro fotony záření obdobné vztahy (3.30)² [10]

$$e \equiv -\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\xi}, \quad l \equiv \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\eta}. \quad (5.6)$$

Absolutní hodnotu podílu l a e označíme $b \equiv |l/e|$. Čitatel vztahu (5.2) můžeme pomocí vztahů (5.3) a (5.6) upravit následujícím způsobem

$$\mathbf{u}_p(\infty) \cdot \mathbf{p}_p(\infty) = \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{p}_p(\infty) = -e, \quad (5.7)$$

obdobně upravíme i jmenovatel vztahu (5.2) pomocí vztahů (5.3) a (5.4)

$$\mathbf{u}_a(r, \varphi) \cdot \mathbf{p}_a(r, \varphi) = u_a^t(r)[\boldsymbol{\xi} + \Omega(r)\boldsymbol{\eta}] \cdot \mathbf{p}_a(r, \varphi) = u_a^t(r)[-e + \Omega(r)l]. \quad (5.8)$$

Pro rudý posuv tedy dostáváme výsledný vztah [10]

$$\frac{\omega_\infty}{\omega_*} = \frac{1}{u_a^t(r)[1 \pm \Omega(r)b]}. \quad (5.9)$$

Znaménko plus platí v případě, kdy se emitující atom nachází v té části akrečního disku, se kterou se pohybuje směrem od pozorovatele. Pokud se emitující atom nachází v opačné části akrečního disku, tedy pohybuje se společně s částí disku směrem k pozorovateli, platí znaménko mínus.

² Nahrazení čtyřrychlosti \mathbf{u} čtyřhybností \mathbf{p} nám dovoluje vhodná normalizace parametru λ , díky které v případě fotonů čtyřrychlost \mathbf{u} odpovídá čtyřhybnosti \mathbf{p} .

Ve vztahu (5.9) pro rudý posuv v případě pohybujícího se zdroje při daném poloměru r jsou známy hodnoty členů $u_a^t(r)$ (podle vztahu (5.5)) a $\Omega(r)$ (podle vztahu (3.24)). Zbývá nám tedy určit hodnota b pro různé hodnoty souřadnice φ . V situaci, kdy disk je natočen bokem k pozorovateli, se zaměříme pouze na čtyři speciální případy, kdy se emitující atom pohybuje kolmo na směr pozorování ($\varphi = 0, \varphi = \pi$) a rovnoběžně se směrem pozorování ($\varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = -\frac{\pi}{2}$). Situace, kdy disk je natočen plochou k pozorovateli, je identická s případem $\varphi = 0$ pro disk natočený hranou k pozorovateli (emitující atomy se rovněž pohybují kolmo na směr pozorování). Zabývejme se tedy nadále pouze první situací znázorněnou na obrázku 5.1.

Diskutujme jako první případ, kdy $\varphi = 0$ a poloměr r je libovolný. Fotony záření se pohybují ve směru osy pozorování (viz obrázek 5.1) a jejich souřadnice jsou ve tvaru $(t, r, 0, 0)$, skalární součin $\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\eta}$ je tedy roven nule. Z této úvahy vyplývá že také l a b jsou rovny nule. Pro rudý posuv v tomto případě z (5.5) a (5.9) vyplývá [10]

$$\left(\frac{\omega_\infty}{\omega_*}\right)_{\varphi=0} = \frac{1}{u_a^t(r)} = \sqrt{1 - \frac{3M}{r}}. \quad (5.10)$$

V případě, kdy $\varphi = \pi$ a poloměr r je libovolný, mají sice fotony stejný směr jako v předchozím případě, ale pohybují se směrem k centru akrečního disku a tudíž do černé díry. Nemůžeme tedy žádné záření pozorovat.

V případě, kdy $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ a poloměr r je opět libovolný, musíme b odvodit jiným způsobem. Ze vztahů (3.30) a (5.6) můžeme získat následující vyjádření b [10]

$$b \equiv \left|\frac{l}{e}\right| = \frac{r^2 |p^\varphi(r, \pm\frac{\pi}{2})|}{(1 - \frac{2M}{r}) p^t(r, \pm\frac{\pi}{2})}. \quad (5.11)$$

Víme, že složka u_a^r čtyřrychlosti atomu je nulová, protože atom se pohybuje v akrečním disku po kruhové orbitě. Pro složku čtyřhybnosti $p^r(r, \pm\frac{\pi}{2})$ emitovaného fotonu toto však již naplatí. Tato složka je nulová pouze tehdy, pokud emitovaný foton se pohybuje ve stejném směru, jako je směr pozorování, buď přímo k vzdálenému pozorovateli nebo přímo od něj³. Toto nastane v nyní

³Tento fakt vyplývá z následující úvahy. Rovnice přímky v polárním tvaru, po které se pohybuje foton je dána vztahem

$$r = \frac{d}{\cos(\varphi - \varphi_0)}, \quad (5.12)$$

kde d je velikost průvodiče bodu přímky, který má od středu soustavy souřadné nejkratší vzdálenost, a φ_0 je orientovaný úhel, který svírá směr pozorování s tímto průvodičem. V tomto diskutovaném případě vzhledem k poloze emitujícího atomu platí $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$. Složku čtyřhybnosti $p^r(r, \varphi)$ emitovaného fotonu můžeme vyjádřit jako $\frac{dr}{d\lambda}$. Tato složka je nulová

diskutovaném případě a platí $p^r(r, \pm \frac{\pi}{2}) = 0$. Z tohoto faktu plyne, že můžeme určit hodnotu b pouze díky normalizaci vektoru čtyřhybnosti $\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = 0$. Tento vztah rozvineme do následujícího tvaru⁴[10]

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left[p^t(r, \pm \frac{\pi}{2})\right]^2 + r^2 \left[p^\varphi(r, \pm \frac{\pi}{2})\right]^2 = 0, \quad (5.14)$$

nyní z (5.14) vyjádříme například složku p^φ a dosadíme do vztahu (5.11). Tímto postupem získáme vyjádření b v tomto diskutovaném případě

$$b = \frac{r}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}}. \quad (5.15)$$

Dosazením hodnoty b ze vztahu (5.15) do vztahu (5.9) dostáváme výsledné vyjádření pro rudý posuv v tomto případě [10]

$$\left(\frac{\omega_\infty}{\omega_*}\right)_{\varphi=\pm\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{3M}{r}}}{1 \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{r}{M}-2}}}. \quad (5.16)$$

Pozorovaná spektrální čára v rentgenovém spektru je složená z fotonů, které pocházejí z jednotlivých částí akrečního disku s různým poloměrem r . Nejmenší možný poloměr pro Schwarzschildovu metriku nastává v případě nejbližší stabilní kruhové orbity $r_{\text{ms}} = 6M$ (3.13). Zaměřme se na největší možnou hodnotu rudého posuvu fotonu vyzářeného atomem, který se pohybuje po nejbližší stabilní kruhové orbitě. Pro akreční disk natočený plochou k pozorovateli vyplývá tato hodnota ze vztahu (5.10) po dosazení za r ze vztahu (3.13) [10]

$$\omega_\infty = \frac{1}{\sqrt{2}}\omega_* \doteq 0,707\omega_*. \quad (5.17)$$

Pro akreční disk natočený bokem k pozorovateli vyplývá největší možná hodnota rudého posuvu pro foton emitovaný z atomu na nejbližší orbitě

právě tehdy, když r vyjádřeno vztahem (5.12) nabývá extrémních hodnot vzhledem k afinnímu parametru λ . Provedeme tedy derivaci $\frac{dr}{d\lambda}$, kterou položíme rovnu nule

$$\frac{dr}{d\lambda} = \frac{d}{\cos^2(\pm\frac{\pi}{2} - \varphi_0)} \sin(\pm\frac{\pi}{2} - \varphi_0) \frac{d\varphi}{d\lambda} = 0. \quad (5.13)$$

Tato rovnost platí, pokud $\pm\frac{\pi}{2} - \varphi_0 = 0$ (nebo $\pm\frac{\pi}{2} - \varphi_0 = \pi$). Tedy pokud $\varphi_0 = \pm\frac{\pi}{2}$, bude složka čtyřhybnosti $p^r(r, \pm\frac{\pi}{2})$ nulová. Z vztahu (5.12) a předchozí podmínky vyplývá, že směr pohybu fotonu je tedy rovnoběžný se směrem pozorování.

⁴ Z předpokladu tenkého rovinného akrečního disku, pro který platí $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, vyplývá, že složka p^ϑ čtyřhybnosti fotonu je také nulová

ze vztahu (5.16)⁵ po dosazení za r ze vztahu (3.13) [10]

$$\omega_{\infty} = \frac{\sqrt{2}}{3}\omega_* \doteq 0,471\omega_*. \quad (5.18)$$

Pro tento případ se frekvence detekovaného záření sníží zhruba na polovinu frekvence původní. Díky tomu, že hodnota gravitačního posuvu je rozdílná v různých polohách akrečního disku vzhledem k pozorovateli a závisí na vzdálenosti emitujícího atomu od středu disku, můžeme z charakteru spektrálních čar usuzovat na velikost a natočení akrečního disku vzhledem k Zemi. Musíme však upozornit, že v předchozích úvahách jsme nezohlednili jiné zdroje záření a vyzařování rychle se pohybujících nábojů, díky kterému roste intenzita modrého konce spektra.

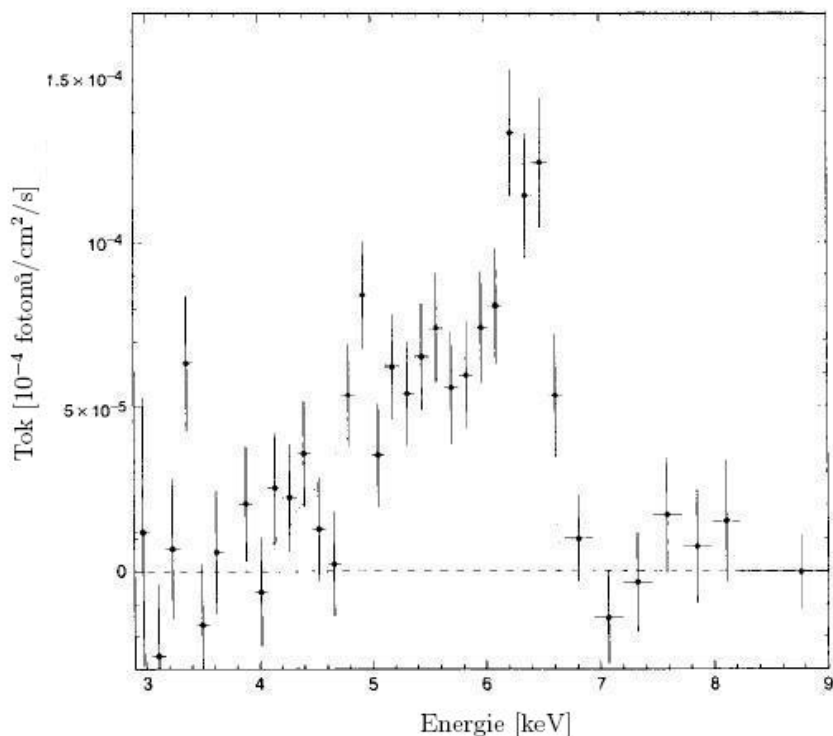
Pokud bychom uvažovali ve středu akrečního disku rotující černou díru, uvažovaná hodnota detekované frekvence záření by pak byla ještě nižší než v případě nerotující černé díry (rudý posuv dosahuje větších hodnot v rotujícím případě) [10].

Uvažujme akreční disk v okolí supermasivní černé díry, jehož teplota je dostatečně nízká na to, aby těžké atomy (například atomy železa) dokázaly vázat ve svém obalu valenční elektrony. Tyto elektrony jsou excitovány rentgenovým zářením, které vzniká třením částic v akrečním disku. Následně vyzáří foton o energii 6,4 keV a díky tomu můžeme pozorovat odpovídající spektrální čáru v rentgenovém spektru. Předpokládá se, že hmota akrečního disku, která se pohybuje v okolí horizontu černé díry, dosahuje rychlostí blízkých rychlosti světla a projevují se zde relativistické efekty a gravitační rudý posuv. Právě díky gravitačnímu a dopplerovskému rudému posuvu pozorujeme zmíněnou spektrální čáru značně rozšířenou do oblasti s nižšími frekvencemi, jak je popsáno v předchozích úvahách (v tomto případě $\omega_* = \frac{6,4 \text{ keV}}{\hbar}$).

Příkladem takovéto černé díry s akrečním diskem je pravděpodobně Seyfertova galaxie MGC-6-30-15. Na obrázku (5.2) můžeme vidět výše zmíněnou spektrální čáru železa, naměřenou ASCA X-ray satelitem v červenci 1994. Tato spektrální čára je díky rudému posuvu značně rozšířená a podle odhadů (5.17) a (5.18) můžeme usuzovat na téměř maximální hodnoty rudého posuvu. Lze také přibližně vyvodit, že úhel sklonu disku vzhledem ke směru pozorování je 30° a že pro pozorovanou oblast platí s dostatečnou přesností Schwarzschildova metrika⁶.

⁵Nejvyšší možná hodnota nastává pro znaménko plus.

⁶Tento závěr opravňuje užití Schwarzschildovy metriky v předchozích úvahách.



Obrázek 5.2: Značně rozšířená spektrální čára $K\alpha$ Fe rentgenového záření galaxie MGC-6-30-15 naměřená ASCA X-ray satelitem v červenci 1994. Nejvíce pravděpodobnou příčinou tohoto rozšíření s asymetrií v rudé oblasti je dopplerovský a gravitační rudý posuv záření akrečního disku v okolí nerotující černé díry. Toto rentgenové záření pochází z povrchu nejnvnitřnějších oblastí akrečního disku. Z rudého posuvu se dá dále usuzovat, že úhel sklonu disku vzhledem ke směru pozorování je 30° . (Aby byla čára ve spektru odhalena, bylo od původního pozorování odečteno spektrum spojitého rentgenového záření.) [23]

5.2 Energie záření akrečního disku

Jak už bylo uvedeno, energie záření akrečního disku závisí na hmotnosti černé díry, okolo které je daný akreční disk zformován. Určíme jednoduchý odhad zářivosti (celkový úhrn energie vyzářené diskem) a teploty akrečního disku kolem černé díry. V rovnovážném stavu jsou tyto veličiny charakterizovány množstvím hmoty \dot{m} , které je pohlceno černou dírou za jednotku času. Tento děj můžeme také popsat jako rychlost změny gravitační potenciální energie

\dot{m} hmoty za jednotku času ve vyzářenou energii. Čím je tato změna větší, tím větší je zářivost a teplota akrečního disku.

Uvažujme případ ustálené sférické akrece. Množství hmoty za jednotku času, které podléhá akrečnímu procesu, nemůže být nekonečně velké. Tak jako narůstá akreční proces, tak narůstá i tlak vyzářených fotonů na hmotu padající do černé díry. Tento tlak může být tak velký, že převýší gravitační působení černé díry. Tím je určena horní hranice pro záření akrečního disku zvaná Eddingtonova mez [10].

Pro hrubý odhad Eddingtonovy meze vystačí zákony nerelativistické fyziky. Označme M hmotnost černé díry a L zářivost akrečního disku způsobenou radiací. Tok energie kulovým povrchem ve vzdálenosti r od jeho středu je dán vztahem $\frac{L}{4\pi r^2}$. (Tok hybnosti záření touto plochou je následně určen výrazem $\frac{L}{4\pi r^2 c}$.) Vzniklé záření se rozptyluje na hmotě, která se pohybuje směrem k centru gravitačního působení. Záření působí tlakem na hmotu v opačném směru než je její směr pohybu. Abychom stanovili kolik hybnosti předá záření hmotě, použijeme účinný průřez σ_T pro rozptyl nízkoenergetických fotonů na elektronech⁷ [10]

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} \right)^2 = 6,65 \cdot 10^{-29} \text{ m}^2, \quad (5.19)$$

kde e je náboj elektronu, m_e je hmotnost elektronu a ϵ_0 je permitivita vakua. Rozptyl záření na protonech také přispívá k vzniklému tlaku na padající hmotu, ale jeho účinný průřez je řádově 10^6 krát menší než v případě elektronů a proto rozptyl na protonech nebudeme zohledňovat. Hybnost předaná jednomu elektronu ve vzdálenosti r od centra za jednotku času je $\frac{\sigma_T L}{4\pi r^2 c}$. Protože změna hybnosti za jednotku času je rovna síle, můžeme za předpokladu, že přitahovaná hmota se skládá pouze z ionizovaného vodíku, porovnat předchozí vztah s silou gravitační. Platí tedy [10]

$$\frac{\sigma_T L}{4\pi r^2 c} = \frac{G m_p M}{r^2}, \quad (5.20)$$

kde m_p je hmotnost protonu. Gravitační sílu, kterou je přitahován elektron vodíku k černé díře, neuvažujeme, protože je asi o 10^3 krát menší než gravitační síla, kterou je přitahován proton k černé díře. Z této rovnosti lze vyjádřením L odvodit Eddingtonovu mez L_{Edd} [10]

$$L_{\text{Edd}} = \frac{4\pi G c m_p M}{\sigma_T} = 1,26 \cdot 10^{31} \frac{M}{M_\odot} \text{ J}\cdot\text{s}^{-1}. \quad (5.21)$$

⁷V tomto a následujících vztazích budou použity jednotky soustavy SI. Ve výpočtech bude použita hodnota náboje elektronu $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, hodnota hmotnosti elektronu $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, hodnota permitivity vakua $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$ a hodnota rychlosti světla ve vakuu $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Hodnota Eddingtonovy meze je ale velmi vysoká. Zářivost typických rentgenových zdrojů nedosahuje Eddingtonovy meze, pouze jejího zlomku. Díky tomuto faktu je přeměna energie v gravitačním poli černé díry pomocí akrece velmi významným zdrojem záření, který konkuruje termonukleárním reakcím v nitrech hvězd.

Hrubý odhad energie záření akrečního disku ve vzdálenosti R od černé díry může být stanoven porovnáním zářivosti akrečního disku a zářivosti absolutně černého tělesa. Předpokládejme absolutně černé těleso o rozměru R a teplotě T . Zářivost akrečního disku L je pouze zlomkem ε Eddingtonovy meze L_{Edd} . Pak platí [10]

$$4\pi R^2 \sigma T^4 = \varepsilon L_{\text{Edd}}, \quad (5.22)$$

kde σ je Stephan-Boltzmannova konstanta. Hledanou teplotu T vyjádříme ze vztahu (5.22) a za L_{Edd} a dosadíme ze vztahu (5.21)

$$T = \sqrt[4]{\frac{\varepsilon G c m_p M}{\sigma_T R^2 \sigma}}. \quad (5.23)$$

Po dosazení číselných hodnot za některé konstanty⁸ a po úpravě dostaneme výsledný hrubý odhad pro teplotu akrečního disku [10]

$$T \doteq 5,34 \cdot 10^7 \left(\frac{GM}{c^2 R} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\varepsilon \frac{M_\odot}{M} \right)^{\frac{1}{4}} \text{ K}. \quad (5.24)$$

Užitím vztahu $E = k_B T$, získáme z hrubého odhadu teploty akrečního disku hrubý odhad energie E záření akrečního disku

$$E \doteq 4,6 \cdot 10^3 \left(\frac{GM}{c^2 R} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\varepsilon \frac{M_\odot}{M} \right)^{\frac{1}{4}} \text{ eV}. \quad (5.25)$$

Uvažujme Schwarzschildovu černou díru o hmotnosti $M \sim 4M_\odot$ s akrečním diskem. Pro nejbližší stabilní kruhovou orbitu akrečního disku, jejíž poloměr je dán vztahem (3.13), platí⁹ $\frac{GM}{c^2 R} = \frac{1}{6}$. Pokud stanovíme hodnotu $\varepsilon \sim \frac{1}{2}$, dostaneme ze vztahu (5.25) přibližný odhad teploty a energie záření ve výše zmiňovaném případě

$$T \sim 1,3 \cdot 10^7 \text{ K} \quad E \sim 1,1 \cdot 10^3 \text{ eV}. \quad (5.26)$$

Hodnota energie záření akrečního disku kolem černé díry, která má přibližně hmotnost Slunce, je řádově v keV. Tyto hodnoty energie odpovídají rentgenovému záření. Pokud uvažujeme supermasivní černé díry o hmotnosti $10^6 M_\odot - 10^9 M_\odot$ v centrech galaxií, pak vyplývá ze vztahu (5.25), že energie jejich záření je výrazně nižší.

⁸Ve výpočtech bude použita hodnota Stephan-Boltzmannovy konstanty $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$.

⁹Tuto hodnotu již uvažujeme opět v geometrodynamických jednotkách.

5.3 Energie částice vyzářená akrecí

Částice při průchodu akrečním diskem ztrácí třením energii, kterou následně vyzáří. Množstvím této energie se budeme zabývat v následujícím textu. Předpokládejme, že na začátku akrečního procesu má částice pouze klidovou energii $e = 1$. Postupným pohybem směrem k centru gravitačního působení se třením a následným vyzářováním hodnota e částice zmenšuje. Trajektorie jejího pohybu je podobná spirále.

Proces vyzářování se ukončí v okamžiku, kdy částice dosáhne polohy na nejbližší stabilní kruhové orbitě. Dále částice není schopna spirálovitého pohybu a prudce padá do černé díry již bez tření a záření. Minimální hodnota e částice je tedy dosažena na nejbližší stabilní kruhové orbitě. Odhad účinnosti akrece neboli energii částice vyzářenou akrecí je možno vyjádřit jako rozdíl klidové energie a hodnotou e v případě nejbližší stabilní kruhové orbity [10, 18]

$$1 - e. \quad (5.27)$$

Pro další úvahy je potřeba najít hodnoty e nejbližší stabilní kruhové orbity v Schwarzschildově a Kerrově prostoročase v ekvatoriální rovině ($\vartheta = \frac{\pi}{2}$) černé díry. Pro úplnost uvedeme také hodnoty l .

Ve Schwarzschildově případě vyjdeme ze vztahů (3.1) a (3.2). Složky čtyřrychlosti u^t a u^φ vyjádříme pomocí vztahů (3.25), (3.25) a (3.24) následovně

$$e = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{3M}{r}}}, \quad (5.28)$$

$$l = \sqrt{Mr} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{3M}{r}}}. \quad (5.29)$$

Podle (3.13) dosadíme do vztahů (5.28) a (5.29) hodnotu $r = 6M$ pro nejbližší stabilní kruhovou orbitu a dostáváme hodnoty e_S a l_S v tomto případě

$$e_S = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad l_S = \sqrt{12}M. \quad (5.30)$$

Abychom určili hodnoty e a l pro nejbližší stabilní kruhovou orbitu v Kerrově prostoročase, rozvedeme vztahy (3.47), (3.48) a (3.64) po řadě do následujících tvarů

$$(1 - e^2) r^3 - 2Mr^2 + (e^2 - a^2 e^2 + a^2) r - 2M(l - ae)^2 = 0, \quad (5.31)$$

$$Mr^2 - (l^2 - a^2 e^2 + a^2) r + 3M(l - ae)^2 = 0, \quad (5.32)$$

$$-2Mr^2 + 3(l^2 - a^2e^2 + a^2)r - 12M(l - ae)^2 = 0. \quad (5.33)$$

Vhodným sečtením rovnic (5.31) a (5.32) a úpravou odvodíme rovnici

$$3(1 - e^2)r^2 - 4Mr + l^2 - a^2e^2 + a^2 = 0, \quad (5.34)$$

obdobně z rovnic (5.31) a (5.33) získáme rovnici

$$6(1 - e^2)r^2 - 10Mr + 3(l^2 - a^2e^2 + a^2) = 0. \quad (5.35)$$

Znovu vhodným odečtením rovnic (5.34) a (5.35) a pomocí následných úprav získáme vyjádření e a l v pro nejbližší stabilní kruhové orbity v Kerrově geometrii

$$e^2 = \frac{3r - 2M}{3r}, \quad (5.36)$$

$$l^2 = 2Mr + a^2e^2 - a^2. \quad (5.37)$$

Pokud pro kontrolu položíme $a = 0$, přejdeme ke Schwarzschildově geometrii a ze vztahů (5.36) a (5.37) dostáváme odpovídající hodnoty $e^2 = \frac{8}{9}$, $l^2 = 12M$ pro nejbližší stabilní kruhovou orbitu ve Schwarzschildově geometrii v souladu se vztahy (5.28) a (5.29).

V případě Kerrova prostoročasu se zaměříme na extrémní případ rotující černé díry, kdy $a = M$. Hodnoty e_{Ks} a l_{Ks} pro souhlasnou rotaci a hodnoty e_{Kn} a l_{Kn} pro nesouhlasnou rotaci získáme dosazením hodnot $r = M$ resp. $r = 9M$ podle vztahů (3.72) do vztahů (5.36) a (5.37). Dostáváme v souladu s [10, 18]

$$e_{\text{Ks}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad l_{\text{Ks}} = \frac{2}{\sqrt{3}}M, \quad (5.38)$$

$$e_{\text{Kn}} = \frac{5}{3\sqrt{3}}, \quad l_{\text{Kn}} = \left(17 + \frac{5}{3\sqrt{3}}\right)M. \quad (5.39)$$

Pro množství energie částice vyzářené akrecí ze vztahů (5.27), (5.30), (5.38) a (5.39) plyne v případě nerotující Schwarzschildovy černé díry [18]

$$1 - e_{\text{S}} = 1 - \frac{2\sqrt{2}}{3} \cong 5,7\%, \quad (5.40)$$

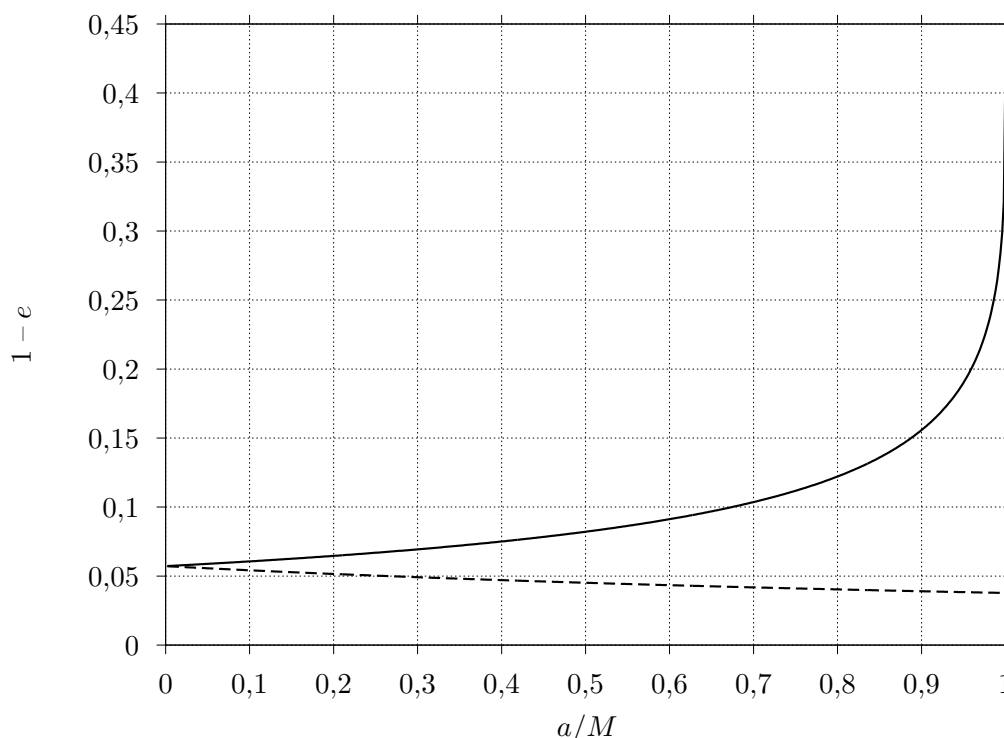
v případě Kerrovy černé díry rotující souhlasně s částicí [10, 18]

$$1 - e_{\text{Ks}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cong 42,3\%, \quad (5.41)$$

a v případě Kerrovy černé díry rotující nesouhlasně s částicí [18]

$$1 - e_{\text{Kn}} = 1 - \frac{5}{3\sqrt{3}} \cong 3,8\%. \quad (5.42)$$

Pokud do vztahu (5.36) dosadíme za r ze vztahu (3.71) dostaneme obecnější vyjádření závislosti e pro nejbližší stabilní kruhovou orbitu na rotaci černé díry. Tato závislost pro účinnost akrece $1 - e$ je znázorněna na obrázku 5.3.



Obrázek 5.3: Grafické znázornění závislosti účinnosti akrece $1 - e$ na velikosti rotace černé díry vyjádřené poměrem a/M pro nejbližší stabilní kruhovou orbitu. Příklad souhlasného oběhu částice po nejbližší stabilní kruhové orbitě je vyznačen souvislou čarou a varianta nesouhlasného oběhu přerušovanou čarou. Pokud se rotace černé díry blíží k své maximální hodnotě je nárůst množství energie vyzářené akrecí souhlasně rotující částice velmi výrazný. Hodnoty účinnosti akrece pro $a/M = 0$ a $a/M = 1$ určené vztahy (5.40), (5.41) a (5.42) odpovídají krajním hodnotám znázorněných grafů.

Předpokládá se, že výskyt rotujících černých děr, kolem kterých obíhají částice akrečního disku souhlasným směrem, je nejpravděpodobnější¹⁰. Z to-

¹⁰Hvězdy ve vesmíru rotují, jako příklad uveďme Slunce. Z tohoto faktu usuzujeme, že v případě dostatečně hmotné rotující hvězdy, ze které vznikne gravitačním kolapsem černá díra, se rotace zachová. Černá díra svou rotací způsobuje strhávání okolního prostoročasu a díky tomu je varianta souhlasně obíhajících částic disku více pravděpodobná než alternativa částic pohybujících se ve směru opačném.

hoto důvodu pro energii částice vyzářenou akrecí je nejvýznamnější hodnota 42% daná vztahem (5.41).

Skutečná černá díra nedosahuje extrémní rotace, kdy pro její moment setrvačnosti platí $J = M^2$. Z vypočtené hodnoty akreční účinnosti 42% se odhaduje, že částice průchodem akrečním diskem formovaným okolo reálné rotující černé díry vyzáří více než 10% své původní klidové energie [18].

Pro porovnání odvodíme účinnost proton–protonového cyklu (1.1), který je základem termonukleárních reakcí v nitrech hvězd. Účinnost proton–protonového cyklu vyjádříme jako poměr vyzářené energie řetězce ke klidové energii čtyř vodíků ${}^1\text{H}$, které do reakce vstupují. Jak bylo uvedeno ve schématu (1.1), energie uvolněná řetězcem je 26,72 MeV. Klidovou energii vodíku ${}^1\text{H}$ vypočteme ze vztahu $E = m_p c^2 = 934 \text{ MeV}$ (hmotnost elektronu zanedbáváme). Předchozí úvahou získáváme poměr $\frac{26,72 \text{ MeV}}{4 \cdot 934 \text{ MeV}} \approx 1\%$. Termonukleárními reakcemi v nitrech hvězd se uvolní zhruba pouze 1% klidové energie prvků do ní vstupujících [10].

Je zřejmé, že účinnost akrečního procesu je asi desetkrát vyšší než účinnost termonukleárních reakcí v nitrech hvězd. Z tohoto důvodu jsou oprávněné předpoklady, že v centrech velmi silně zářících objektů se nalézají rotující černé díry obklopené akrečními disky.

Kapitola 6

Ekvipotenciální plochy akrečního disku

V kapitole 4 jsme používali pro popis akrečního procesu klasickou teorii mechaniky ideálního plynu. V této kapitole se zaměříme rovněž na případ akrečního disku, který je tvořen ideálním plynem, ale z pohledu relativistické mechaniky tekutin. V první části odvodíme vztah, který popisuje „ekvipotenciální plochy“ – plochy s konstantní hodnotou tlaku akrečního disku¹. Hlavní význam těchto ploch je, že tvoří hranici akrečního disku. V druhé části se budeme zabývat hrotem jedné z ekvipotenciálních ploch, který se může vytvořit na vnitřním okraji akrečního disku a díky kterému akrece může vznikat pomocí gradientu tlakových sil. V závěru se věnujeme diskusi různých typů akrečních disků s ohledem na charakter ekvipotenciálních ploch.

6.1 Rovnice ekvipotenciálních ploch akrečního disku

V následujících úvahách zanedbejme vlastní gravitaci plynu akrečního disku a předpokládejme, že plyn je barotropní, tedy platí $p = p(\varepsilon)$. V případě rotující černé² díry uvažujme Kerrovu metriku danou vztahem (1.10), pro kterou budeme kvůli přehlednosti používat obecný tvar

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\varphi}dtd\varphi + g_{\varphi\varphi}d\varphi^2 + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2. \quad (6.1)$$

¹Přestože je termín ekvipotenciální plocha pro plochu s konstantní hodnotou tlaku často užíván, přesnější označení těchto ploch je izobarická plocha.

²Pokud budeme v této kapitole uvažovat akreční disk kolem rotující černé díry, předpokládáme, že částice akrečního disku obíhají černou díru ve směru souhlasném s její rotací.

V případě nerotující černé díry budeme používat Schwarzschildovu metriku (1.7), pro kterou obecný tvar je speciálním případem tvaru (6.1) za podmínky $g_{t\varphi} = 0$.

Pro popis ideálního plynu v případě relativistické mechaniky tekutin použijeme tenzor energie–hybnosti [10]

$$T^{ik} = (\varepsilon + p)u^i u^k + g^{ik}p, \quad (6.2)$$

kde ε je hustota energie plynu, p je tlak plynu, u^i, u^k jsou složky vektoru čtyřrychlosti plynu a g^{ik} je metrický tenzor příslušné Schwarzschildovy či Kerrovy metriky.

Díky tomu, že plyn rotuje kolem černé díry, pro složky vektoru čtyřrychlosti plynu platí $u^i = (u^t, 0, 0, u^\varphi)$. Pomocí těchto složek definujeme obdobně jako v části 3.1.1 vztahem (3.18) úhlovou rychlost rotujícího plynu

$$\Omega = \frac{u^\varphi}{u^t}. \quad (6.3)$$

Dále poměr složek kovektoru rychlosti označíme³ [1]

$$\ell = -\frac{u_\varphi}{u_t}. \quad (6.7)$$

Vzájemný vztah mezi nově zavedenými veličinami Ω , ℓ a složkou čtyřrychlosti u_t lze vyjádřit pomocí složek metrického tenzoru $g_{\alpha\beta}$ následujícím způsobem. Pomocí normalizace čtyřvektoru dané rovností (3.3) dostaneme

$$-1 = g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = g^{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta = g^{tt}(u_t)^2 + 2g^{t\varphi}u_t u_\varphi + g^{\varphi\varphi}(u_\varphi)^2. \quad (6.8)$$

³Pokud si připomeneme vztahy (3.1) a (3.2), pomocí kterých jsou zavedeny veličiny e a l , můžeme následujícími úpravami

$$e = -\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{u} = -g_{\alpha\beta}\xi^\alpha u^\beta = -u_\alpha \xi^\alpha = -u_t, \quad (6.4)$$

$$l = \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{u} = g_{\alpha\beta}\eta^\alpha u^\beta = u_\alpha \eta^\alpha = u_\varphi, \quad (6.5)$$

dospět k závěru, že poměr $-u_\varphi/u_t = l/e$. V částech 3.1.2 a 5.1 jsme obdobný poměr rovněž zaváděli a v části 3.1.2 jsme ho označovali impaktním faktorem b .

V souladu s [16] je impaktní faktor definován jako poměr momentu hybnosti k hybnosti částice plynu vztahem

$$b \equiv \frac{L}{\sqrt{E^2 - \mu^2}}, \quad (6.6)$$

kde L je moment hybnosti částice plynu, E je energie částice plynu a μ je klidová hmotnost uvažované částice. Pokud (6.6) vztáhneme na jednotku hmotnosti, pak pro fotony přejde vztah (6.6) na tvar $b = l/e$ a název impaktní faktor, který jsme používali v části 3.1.2 je oprávněný (geometrický význam impaktního faktoru je rozveden například v [10]). Pro částice přejde vztah (6.6) na tvar $b = l/\sqrt{e^2 - 1}$, tedy označení impaktní faktor v tomto případě není správné. V této části v souladu s [1] zavádíme pro poměr l a e označení pomocí symbolu ℓ a jeho význam chápeme jako definici specifického momentu hybnosti, která je výhodná pro výpočty a diskusi v této části práce.

Pokud první a poslední člen rovnosti vztahu (6.8) vydělíme $(u_t)^2$ získáme výraz

$$-\frac{1}{(u_t)^2} = g^{tt} + 2g^{t\varphi}\frac{u_\varphi}{u_t} + g^{\varphi\varphi}\left(\frac{u_\varphi}{u_t}\right)^2, \quad (6.9)$$

kde pro složky inverzního metrického tenzoru $g^{\alpha\beta}$ k tenzoru $g_{\alpha\beta}$ platí

$$g^{tt} = \frac{g_{\varphi\varphi}}{g_{tt}g_{\varphi\varphi} - (g_{t\varphi})^2}, \quad g^{t\varphi} = -\frac{g_{t\varphi}}{g_{tt}g_{\varphi\varphi} - (g_{t\varphi})^2}, \quad g^{\varphi\varphi} = \frac{g_{tt}}{g_{tt}g_{\varphi\varphi} - (g_{t\varphi})^2}. \quad (6.10)$$

Z rovností (6.8), (6.9) a (6.7) vyplývá pro u_t výsledný vztah [1, 22]

$$(u_t)^2 = \frac{g_{tt}g_{\varphi\varphi} - (g_{t\varphi})^2}{g_{tt}\ell^2 + 2g_{t\varphi}\ell + g_{\varphi\varphi}}. \quad (6.11)$$

Užitím rovnosti $u_\alpha = g_{\alpha\beta}u^\beta$ dostaneme pomocí (6.7) vztah

$$\ell = -\frac{u_\varphi}{u_t} = -\frac{g_{t\varphi}u^t + g_{\varphi\varphi}u^\varphi}{g_{tt}u^t + g_{t\varphi}u^\varphi}, \quad (6.12)$$

v jehož poslední rovnosti vydělíme čítec i jmenovatel u^t a užitím vztahu (6.3) dostaneme konečné vyjádření ℓ

$$\ell = -\frac{g_{t\varphi} + \Omega g_{\varphi\varphi}}{g_{tt} + \Omega g_{t\varphi}}. \quad (6.13)$$

Úpravou vztahu (6.13) získáme inverzní vyjádření závislosti úhlové rychlosti Ω na ℓ

$$\Omega = -\frac{g_{tt}\ell + g_{t\varphi}}{g_{t\varphi}\ell + g_{\varphi\varphi}}. \quad (6.14)$$

Vraťme se zpět k tenzoru energie–hybnosti danému vztahem (6.2). Rovnice [10]

$$\nabla_k T^{ik} = 0 \quad (6.15)$$

lokálně popisuje zachování energie–hybnosti. Projekcí (6.15) lze získat v souladu s [1] relativistický tvar Eulerovy rovnice

$$\frac{\nabla_i p}{p + \varepsilon} = -\ln(u_t) + \frac{\Omega \nabla_i \ell}{1 - \Omega \ell}, \quad (6.16)$$

kde ∇_i je kovariantní derivace. Tuto rovnici budeme používat pro popis pohybu plynu akrečního disku a budeme z ní vycházet při hledání ploch W s konstantní hodnotou tlaku, tedy „ekvipotenciálních ploch“ akrečního disku.

Integrací vztahu (6.16) od středu disku (značeným dolním indexem „in“) směrem do jeho centra dostaneme [1]

$$\int_0^p \frac{dp}{\varepsilon + p} = W_{\text{in}} - W = -\ln(u_t) + \ln(u_t)_{\text{in}} + \int_{\ell_{\text{in}}}^{\ell} \frac{\Omega d\ell}{1 - \Omega\ell}. \quad (6.17)$$

Abychom mohli rovnici (6.17) řešit, potřebujeme znát vztahy $\ell = \ell(r, \varphi)$ a $\Omega = \Omega(r, \varphi)$. Tyto vztahy vyplývají z rovnic (6.13) a (6.14), kde po řadě pro složky metrického tenzoru $g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(r, \vartheta)$ v případě Schwarzschildovy a Kerrově metriky dané vztahy (1.7) a (1.10) platí [10]

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right), & g_{tt} &= -\left(1 - \frac{2Mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta}\right), \\ g_{t\varphi} &= 0, & g_{t\varphi} &= \frac{4Mar \sin^2 \vartheta}{r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta}, \\ g_{\varphi\varphi} &= r^2 \sin^2 \vartheta, & g_{\varphi\varphi} &= \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2 \sin^2 \vartheta}{r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta}\right). \end{aligned}$$

V našem případě se zaměříme na limitní astrofyzikálně významný případ mezního stabilního disku vůči axisymetrickým poruchám s maximální hodnotou svítivosti, pro který platí podmínka $\ell = \ell_0 = \text{konst}$ [21]. Ze vztahů (6.13) a (6.14) dostaneme [1]

$$\ell(r, \varphi) = \ell_0, \quad \Omega(r, \varphi) = -\frac{g_{tt}\ell_0 + g_{t\varphi}}{g_{t\varphi}\ell_0 + g_{\varphi\varphi}}. \quad (6.18)$$

Z konstantní hodnoty $\ell = \ell_0$ plyne rovněž nulová hodnota posledního členu rovnice (6.17). Tato rovnice následně přechází na tvar $W_{\text{in}} - W = -\ln(u_t) + \ln(u_t)_{\text{in}}$. Pro ekvipotenciální plochy $W = W(r, \vartheta)$ s konstantním tlakem $p = p(r, \vartheta)$ v případě okrajově stabilního akrečního disku tedy platí [1]

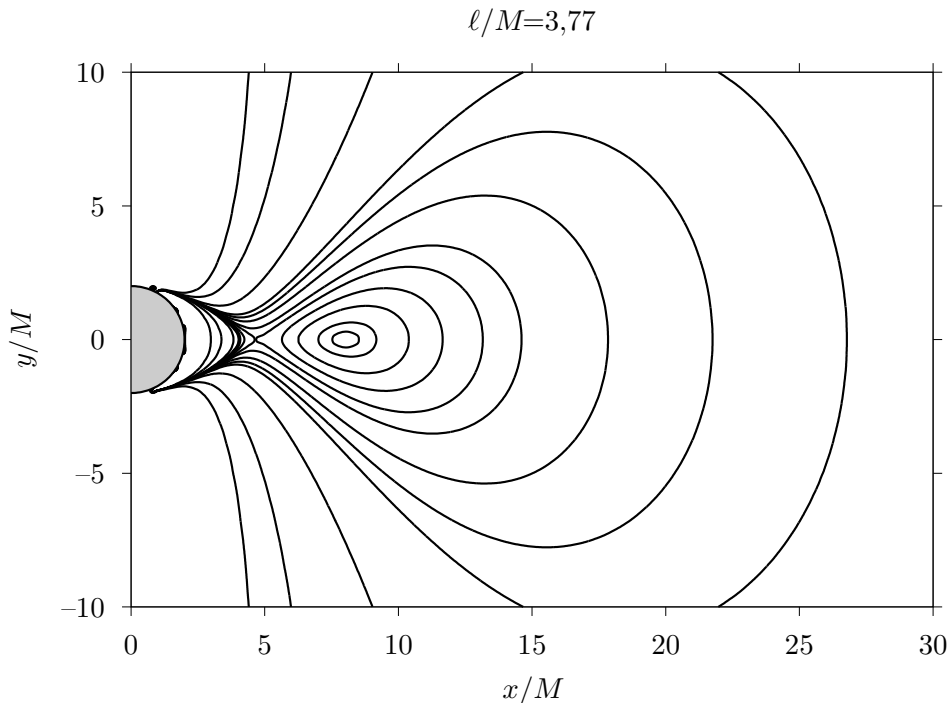
$$W(r, \vartheta) = \ln u_t = \text{konst}. \quad (6.19)$$

Složku čtyřrychlosti u_t v tomto vztahu vyjádříme pomocí vztahu (6.11), kde za složky metrického tenzoru ve Schwarzschildově nebo Kerrově případě $g_{\alpha\beta}$ dosadíme obdobně jako v předchozím případě pomocí výše vypsanych vztahů.

6.2 Význam hrotu jedné z ekvipotenciální ploch akrečního disku

Pomocí vztahu (6.19), který jsme odvodili na konci předchozí části 6.1, můžeme pro určitou danou konstantní hodnotu ℓ_0 vykreslit ekvipotenciální plochy mezního stabilního akrečního disku pro případ Schwarzschildovy

či Kerrový metriky. Na obrázku 6.1 jsou vykresleny ekvipotenciální plochy akrečního disku⁴ pro hodnotu $\ell_0 = 3,77M$ v případě Schwarzschildova prostoročasu.



Obrázek 6.1: Ekvipotenciální plochy mezního stabilního akrečního disku pro hodnotu $\ell_0 = 3,77M$ ve Schwarzschildově prostoročase. Na obrázku je patrné, že v ekvatoriální rovině ve vnitřní části akrečního disku se vytvořil na jedné z ekvipotenciálních ploch hrot. Tímto hrotem a jeho velmi blízkým okolím proudí postupně hmota disku směrem k centru černé díry.

Pro uzavřené ekvipotenciální plochy platí $W < 0$, naopak pro neuzavřené ekvipotenciální plochy je hodnota $W > 0$. Pro ekvipotenciální plochu, která je na rozhraní těchto dvou případů plyne, že $W = 0$. Ekvipotenciální plochy jsou, jak již bylo uvedeno, plochy s konstantní hodnotou tlaku. Z tohoto faktu vyplývá, že plyn akrečního disku zaplňuje všechny uzavřené plochy směrem od centra disku k jeho okrajům, tedy od nejmenší po následující větší uzavřenou ekvipotenciální plochu, ekvipotenciální plochy tak určují tvar akrečního disku [1].

⁴Akreční disk spolu s černou dírou jsou zobrazeny v poledníkovém řezu, tedy v rovině určené libovolnou konstantní hodnotou souřadnice φ . Volba tohoto řezu vyplývá z povahy ekvipotenciálních ploch, jejíž tvar podle vztahu (6.19) závisí pouze na souřadnicích r a ϑ .

Na obrázku 6.1 můžeme pozorovat na jedné z ekvipotenciálních ploch ostrý hrot v ekvatoriální rovině. Z předchozího plyne, že tímto hrotem a jeho blízkým okolím proudí v průběhu akrece postupně hmota disku směrem k černé díře⁵ [1, 11].

Lze dokázat, že poloha tohoto hrotu leží mezi nejbližší stabilní kruhovou orbitou s radiální souřadnicí r_{ms} a hraniční vázanou kruhovou orbitou s radiální souřadnicí r_{mb} volné testovací částice. Důkaz tohoto jevu je založen na tom, že v centru disku a v zmiňovaném hrotu je nulový gradient tlakových sil, jak je možno pozorovat na obrázku 6.1. Tedy v těchto bodech se částice plynu pohybují obdobně jako volné testovací částice v ekvatoriální rovině po jedné z orbit popsanych v kapitole 3. Jak již bylo uvedeno, v tomto případě lze ℓ_0 vyjádřit pomocí energie e a momentu hybnosti l volné testovací částice v gravitačním poli černé díry následovně

$$\ell_0 = \frac{l}{e} = \frac{\pm M^{\frac{1}{2}} \left(r^2 \mp 2aM^{\frac{1}{2}}r^{\frac{1}{2}} + a^2 \right)}{r^{\frac{3}{2}} - 2Mr^{\frac{1}{2}} \pm aM^{\frac{1}{2}}} = \ell_{\text{t}\check{c}}(r), \quad (6.20)$$

kde za e a l je dosazeno pomocí vztahů (3.55) a (3.56). Jak je naznačeno ve vztahu (6.20), ℓ_0 v případě volné testovací částice nemá konstantní hodnotu, ale je závislá na radiální souřadnici r . Tato závislost je označena $\ell_{\text{t}\check{c}}(r)$ a její průběh je znázorněn na obrázku 6.2 v případě Schwarzschildova prostoročasu a na obrázku 6.3 v případě Kerrova prostoročasu⁶.

Nyní musíme stanovit hodnoty radiální souřadnice r_0 , pro které se hodnota $\ell_{\text{t}\check{c}}(r)$ rovná pevně zvolené hodnotě ℓ_0 hraničně stabilního akrečního disku, tedy $\ell_{\text{t}\check{c}}(r_0) = \ell_0$. Z grafů 6.2 a 6.3 vyplývá, že $\ell_{\text{t}\check{c}}(r)$ nabývá minima pro $r = r_{\text{ms}}$, označme $\ell_{\text{t}\check{c}}(r_{\text{ms}}) = \ell_{\text{ms}}$. Pro $\ell > \ell_{\text{ms}}$ existují dvě hodnoty r_{01} a r_{02} , ve kterých $\ell_{\text{t}\check{c}}(r_0) = \ell_0$. Menší z těchto hodnot r_{01} určuje radiální souřadnici hrotu v ekvatoriální rovině a vyšší hodnota r_{02} určuje polohu středu akrečního disku v ekvatoriální rovině.

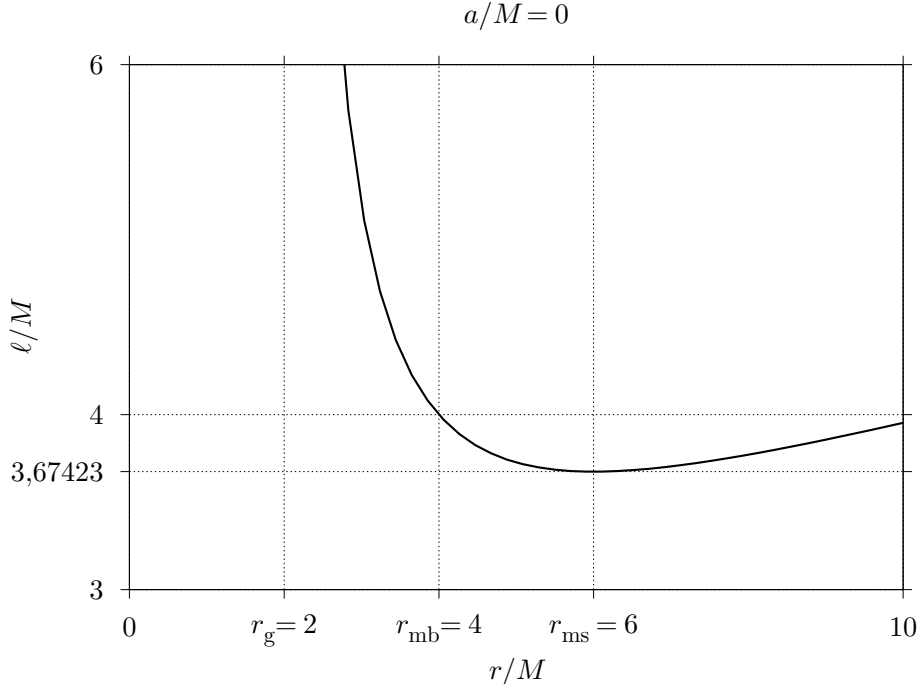
Z předešlé diskuse vyplývá, že hodnota r_{ms} je maximální možnou hodnotou radiální souřadnice hrotu a minimální možná radiální souřadnice středu akrečního disku. Pro $\ell_0 = \ell_{\text{ms}}$ se radiální souřadnice hrotu a středu akrečního disku shodují. Dále označme $\ell_{\text{mb}} = \ell_{\text{t}\check{c}}(r_{\text{mb}})$. Ze vztahů (6.19) a (6.11)

⁵Hrot má analogický význam jako Lagrangeův librační bod Rocheova laloku L_1 v soustavě dvou těles, které se vzájemně obíhají po kružnicích okolo společného hmotného středu.

⁶Závislost $\ell_{\text{t}\check{c}}(r)$ lze odvodit také ze vztahu (6.13), do kterého za Ω dosadíme vztah [4]

$$\Omega = \frac{\pm M^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{3}{2}} \pm aM^{\frac{1}{2}}}, \quad (6.21)$$

který určuje úhlovou rychlost Ω volné testovací částice na kruhové orbitě o radiální souřadnici r . Pro $a = 0$, tento vztah přechází na tvar (3.24).

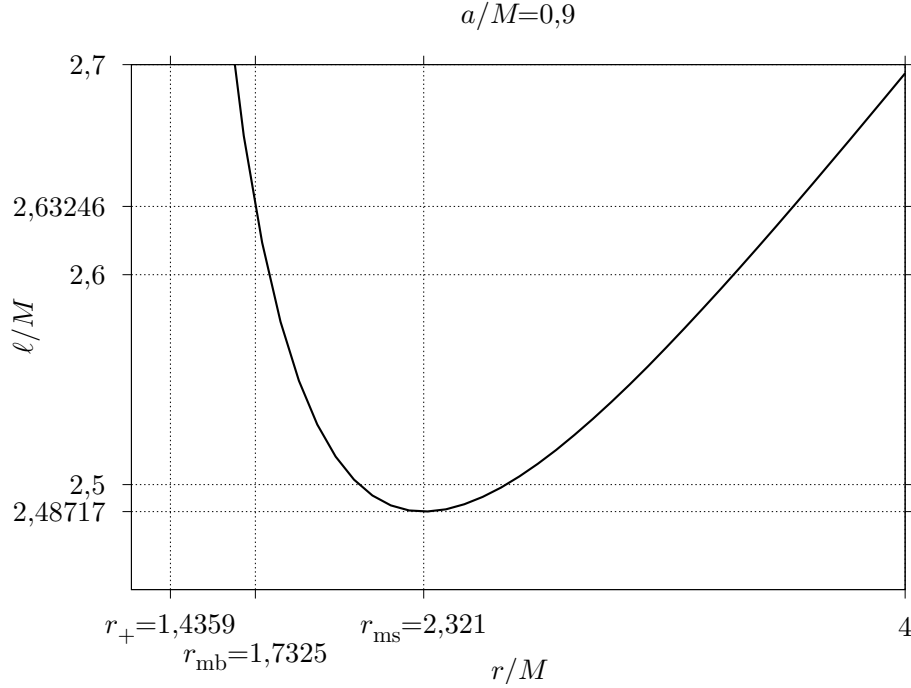


Obrázek 6.2: Znázornění průběhu závislosti $\ell_{t\check{c}}(r)$ v prostoročase učeném Schwarzschildovou metrikou. V grafu jsou vypsány hodnoty $\ell_{t\check{c}}$ odpovídající v diskusi významným hodnotám radiálních souřadnic r_{mb} a r_{ms} .

za podmínky $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ je možno ukázat, že pro $r < r_{mb}$ je $W(r) > 0$. Aby se tedy mohl akreční disk vytvořit, musí platit $\ell_0 < \ell_{ms}$. Hodnota radiální souřadnice r_{mb} je tedy minimální hodnotou radiální souřadnice hrotu. Poloha hrotu se tedy pohybuje v ekvatoriální rovině mezi hraniční vázanou kruhovou orbitou a nejbližší stabilní kruhovou orbitou. Nejbližší možná poloha vnitřního okraje akrečního disku vzhledem k černé díře je tedy v oblasti hraniční vázané kruhové orbity⁷ [1].

Předpokládejme existenci akrečního disku, ve kterém na jedné z jeho ekvipotenciálních ploch je utvořen hrot (touto otázkou se budeme zabývat v následující kapitole 6.3, podrobnější diskuse také např. v [11, 21]) a plyn zaplnil všechny uzavřené ekvipotenciální plochy až po ekvipotenciální plochu s hrotem. Akreční proces je v tomto případě řízen gradientem tlakových sil, které způsobují pohyb plynu z disku přes oblast hrotu do černé díry. Díky tomu, že na začátku kapitoly jsme předpokládali akreční disk tvořený ideálním ply-

⁷Připomeňme, že všechny kruhové orbity, pro které platí $r < r_{ms}$, jsou nestabilní.



Obrázek 6.3: Znázornění průběhu závislosti $\ell_{t\check{c}}(r)$ v prostoročase učeném Kerrovou metrikou. V grafu jsou vypsány hodnoty $\ell_{t\check{c}}$ odpovídající v diskusi významným hodnotám radiálních souřadnic r_{mb} a r_{ms} . Graf byl vymodelován pro hodnotu Kerrova parametru $a = 0,9M$, čemuž také odpovídají rovněž vyznačené hodnoty radiálních souřadnic r_+ , r_{ms} a r_{mb} .

nem, usuzuje se, že akreční proces je řízen nejenom třením, ale i pomocí gradientu tlakových sil. Tření tedy nemusí být při akreci nezbytné [1, 11].

6.3 Topologie ekvipotenciálních ploch akrečního disku

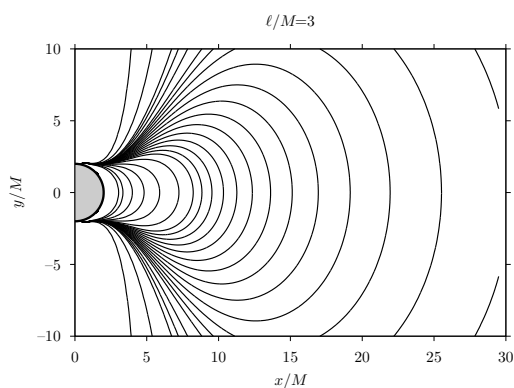
Z topologického hlediska rozlišujeme pět různých konfigurací ekvipotenciálních ploch akrečních disků. Jednotlivé případy mezních stabilních akrečních disků se liší hodnotami ℓ_0 . Tyto hodnoty porovnáme s významnými hodnotami ℓ_{ms} a ℓ_{mb} závislosti $\ell_{t\check{c}}(r)$ (viz. obrázky 6.2 a 6.3).

1. V první diskutované variantě platí $\ell_0 < \ell_{ms}$. Za takových podmínek se nemůže vytvořit žádný akreční disk. Hodnota ℓ_0 je příliš malá. Tvar ekvipotenciálních ploch v případě prostoročasu popsánoho Schwarz-

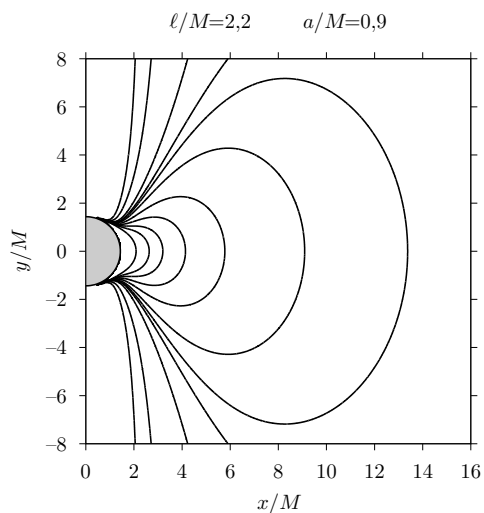
schildovou metrikou je znázorněn na obrázku 6.4 a v případě prostoročasu popsaného Kerrovou metrikou je uveden na obrázku 6.5.

2. Pokud $\ell_0 = \ell_{\text{ms}}$, nastanou již podmínky pro to, aby se mohl akreční disk zformovat. Akreční disk je nestabilní a má tvar velmi tenkého prstence, který se nachází v blízkosti nejbližší stabilní kruhové orbity určené radiální souřadnicí r_{ms} . Tvar ekvipotenciálních ploch v případě prostoročasu popsaného Schwarzschildovou metrikou je znázorněn na obrázku 6.6 a v případě prostoročasu popsaného Kerrovou metrikou je uveden na obrázku 6.7.
3. Za podmínky $\ell_{\text{ms}} < \ell_0 < \ell_{\text{mb}}$ vznikne nejvhodnější situace pro vytvoření akrečního disku s hrotem, pokud jsou plynem zaplněny všechny uzavřené ekvipotenciální plochy až po plochu s hrotem. V opačném případě vznikne akreční disk bez hrotu, tedy bez možnosti přelévání hmoty. Nad ekvipotenciální plochou s hrotem se dále nacházejí ještě další uzavřené ekvipotenciální plochy. Tvar ekvipotenciálních ploch v případě prostoročasu popsaného Schwarzschildovou metrikou je znázorněn na obrázku⁸ 6.8 a v případě prostoročasu popsaného Kerrovou metrikou je uveden na obrázku 6.9.
4. Pokud $\ell_0 = \ell_{\text{mb}}$, je ještě možný vznik akrečního disku s hrotem. Pro ekvipotenciální plochu, na které se hrot utvořil, platí $W = 0$. Tedy je to mezní ekvipotenciální plocha mezi plochami otevřenými a uzavřenými. Nad ní již neexistuje žádná uzavřená ekvipotenciální plocha. Tvar ekvipotenciálních ploch v případě prostoročasu popsaného Schwarzschildovou metrikou je znázorněn na obrázku 6.10 a v případě prostoročasu popsaného Kerrovou metrikou je uveden na obrázku 6.11.
5. Poslední diskutovaná varianta nastává v situaci, kdy $\ell_0 > \ell_{\text{mb}}$. Ekvipotenciální plocha, na které se formuje hrot, je otevřená. Nemůže tedy nastat stav, ve kterém by za těchto podmínek existoval akreční disk s hrotem. Tvar ekvipotenciálních ploch v případě prostoročasu popsaného Schwarzschildovou metrikou je znázorněn na obrázku 6.12 a v případě prostoročasu popsaného Kerrovou metrikou je uveden na obrázku 6.13.

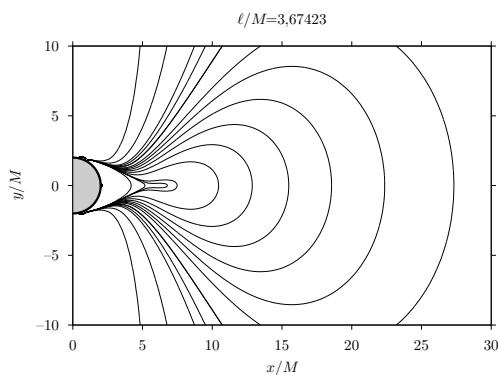
⁸Tento obrázek je totožný s obrázkem 6.1.



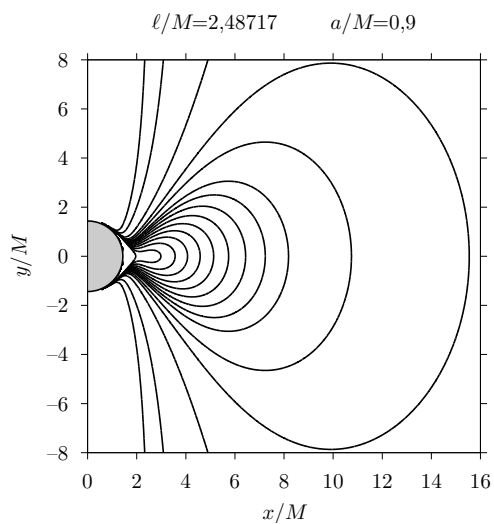
Obrázek 6.4: Tvar ekvipotenciálních ploch v prvním diskutovaném případě pro prostoročas popsany Schwarzschildovou metrikou.



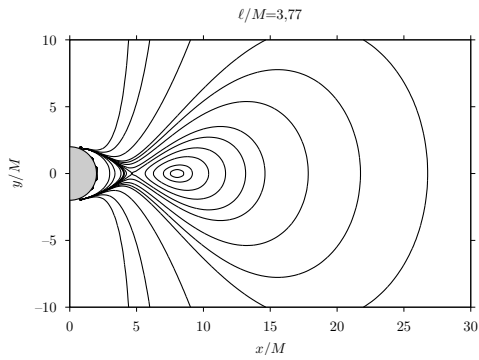
Obrázek 6.5: Tvar ekvipotenciálních ploch v prvním diskutovaném případě pro prostoročas popsany Kerrovou metrikou.



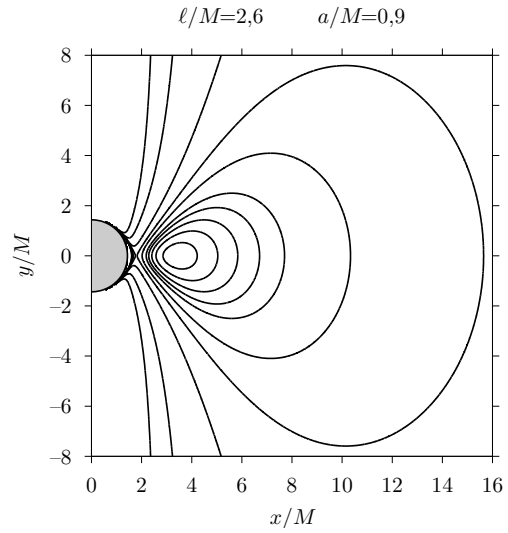
Obrázek 6.6: Tvar ekvipotenciálních ploch v druhém diskutovaném případě pro prostoročas popsany Schwarzschildovou metrikou.



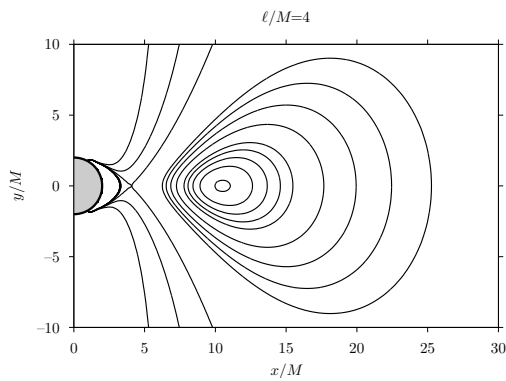
Obrázek 6.7: Tvar ekvipotenciálních ploch v druhém diskutovaném případě pro prostoročas popsany Kerrovou metrikou.



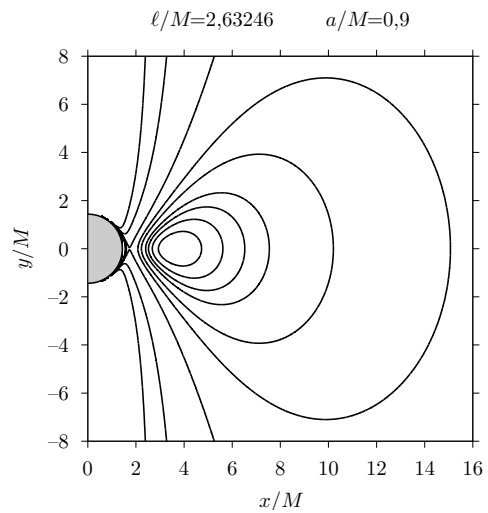
Obrázek 6.8: Tvar ekvipotenciálních ploch v třetím diskutovaném případě pro prostoročas popsany Schwarzschildovou metrikou.



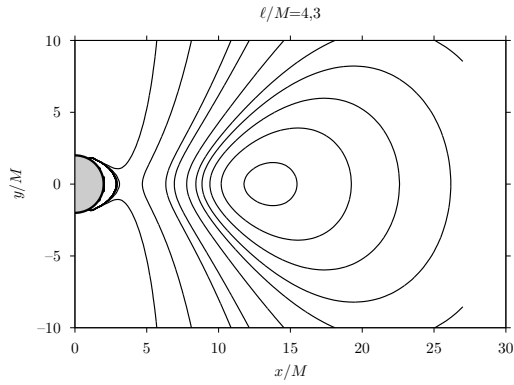
Obrázek 6.9: Tvar ekvipotenciálních ploch v třetím diskutovaném případě pro prostoročas popsany Kerrovou metrikou.



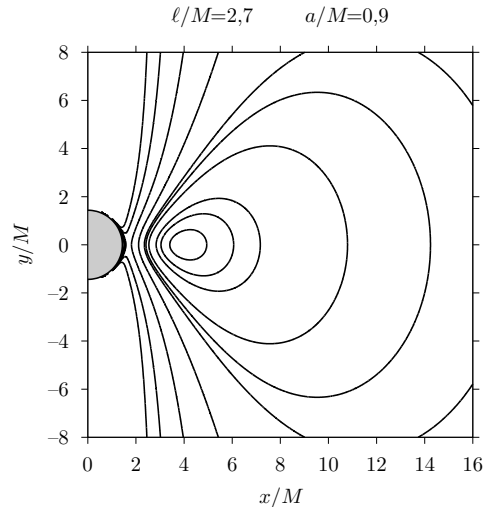
Obrázek 6.10: Tvar ekvipotenciálních ploch ve čtvrtém diskutovaném případě pro prostoročas popsany Schwarzschildovou metrikou.



Obrázek 6.11: Tvar ekvipotenciálních ploch ve čtvrtém diskutovaném případě pro prostoročas popsany Kerrovou metrikou.



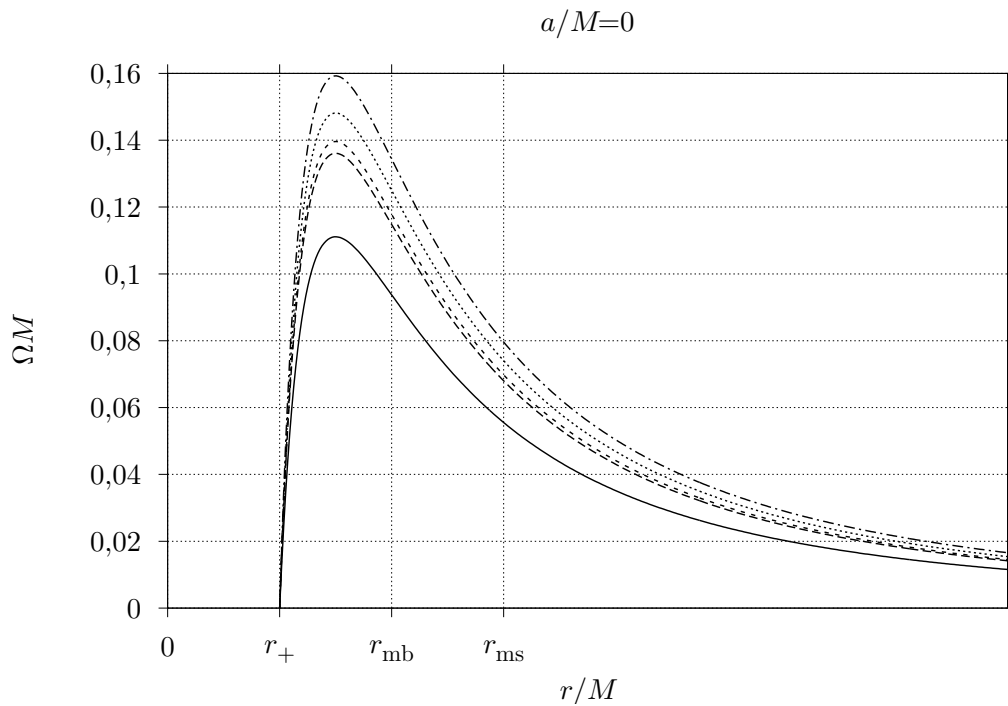
Obrázek 6.12: Tvar ekvipotenciálních ploch v pátém diskutovaném případě pro prostoročas popsany Schwarzschildovou metrikou.



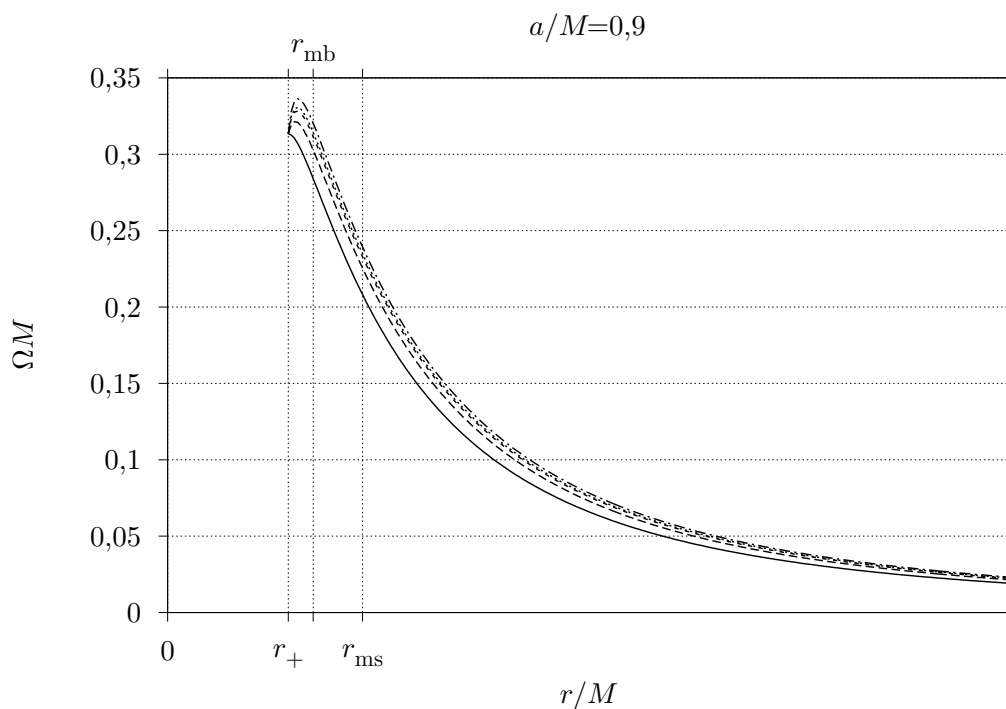
Obrázek 6.13: Tvar ekvipotenciálních ploch v pátém diskutovaném případě pro prostoročas popsany Kerrovou metrikou.

Varianty akrečního disku v okolí Schwarzschildovy či Kerrovy černé díry se pro diskutované případy z topologického hlediska neliší [1].

Pro úplnost jsou na obrázcích 6.14 a 6.15 znázorněny grafy závislosti úhlové rychlosti Ω plynu akrečního disku na velikosti radiální souřadnice r . Tato závislost je popsána vztahem (6.14), pomocí kterého byly grafy vytvořeny pro příslušné hodnoty ℓ_0 v jednotlivých diskutovaných případech Schwarzschildovy a Kerrovy metriky.



Obrázek 6.14: Graf závislosti úhlové rychlosti Ω na radiální souřadnici r ve všech pěti diskutovaných případech $\ell_0 = 3M$ (spojitá čára), $\ell_0 = 3,67423M$, $\ell_0 = 3,77M$, $\ell_0 = 4M$ a $\ell_0 = 4,3M$ (čerchovaná čára) mezního stabilního akrečního disku v okolí Schwarzschildovy černé díry. Zpočátku s klesající hodnotou radiální souřadnice roste úhlová rychlost plynu, což vyplývá ze zákona zachování momentu hybnosti. V těsné blízkosti horizontu pak úhlová rychlost plynu prudce klesá, gravitační pole statické nerotující černé díry vzhledem ke vzdálenému pozorovateli zbrzdí obíhající hmotu.



Obrázek 6.15: Graf závislosti úhlové rychlosti Ω na radiální souřadnici r ve všech pěti diskutovaných případech $\ell_0 = 2,2M$ (spojitá čára), $\ell_0 = 2,48717M$, $\ell_0 = 2,6M$, $\ell_0 = 2,63246M$ a $\ell_0 = 2,7M$ (čerchovaná čára) mezního stabilního akrečního disku v okolí rychle rotující Kerrovy černé díry. S klesající hodnotou radiální souřadnice roste úhlová rychlost plynu, což opět vyplývá ze zákona zachování momentu hybnosti. Čím blíže se dostává plyn k horizontu rotující černé díry, tím více působí na částice plynu rovněž i vliv rotace černé díry, tzv. strhávání prostoročasu. V bezprostředním okolí horizontu je již částice nucena obíhat úhlovou rychlostí, která je totožná s úhlovou rychlostí rotace černé díry.

Závěr

Cílem diplomové práce bylo shrnutí základních poznatků o akrečních discích v okolí černých děr.

Na začátku první kapitoly jsou popsána závěrečná vývojová stadia hvězd – bílí trpaslíci, neutronové hvězdy a černé díry. Převážná část této kapitoly je pak věnována černým děrám. Pozornost je soustředěna na vlastnosti jejich jednotlivých částí, dále pak na Schwarzschildovu a Kerrovu metriku, které popisují prostoročas v okolí statické a rotující černé díry.

Druhá kapitola se již zabývá vlastním akrečním diskem. Jsou zde uvedeny základní principy procesu akrece a popsány výtrysky hmoty, které se mohou v jeho průběhu vytvořit. Rovněž se je zmíněn vliv rotujícího magnetického pole na akreci, který byl podpořen závěry vyplývajícími z nedávných měření rentgenového záření dvojhvězdy GRO J1655–40. Závěr této kapitoly je zaměřen na předpokládaný výskyt akrečních disků v aktivních galaktických jádrech a některých dvojhvězdách.

Třetí kapitola je věnována pohybu volné testovací částice v gravitačním poli statické i rotující černé díry. Zvláštní důraz je kladen na význačné kruhové orbity, zejména na nejbližší stabilní kruhovou orbitu a energii a hybnost částice, která se po ní pohybuje. V závěru kapitoly jsou uvedeny grafy některých zajímavých případů pohybu testovací částice v blízkosti rotující černé díry.

Ve čtvrté kapitole je rozebrán metodou klasické mechaniky tekutin případ sférické akrece. I přes značnou idealizaci akrečního procesu dostáváme zajímavé závěry jako například popis závislosti rychlosti proudění plynu na vzdálenosti nebo vlastnosti míry sférické akrece.

Pátá kapitola se zabývá zářením akrečního disku. V první části je rozvedena problematika gravitačního a Dopplerova rudého posuvu frekvence záření akrečního disku, které je detekováno na Zemi. Je zde rovněž naznačena možnost, jak z charakteru spektra záření usuzovat na velikost a natočení akrečního disku vzhledem k pozorovateli. V následující části je zhruba odhadnuta energie záření pro případ sférické akrece v závislosti na hmotnosti černé díry a vzdálenosti atomu, ze kterého bylo záření emitováno, od středu

disku. V poslední části je odhadnuta účinnost akrece, čili množství energie částice, která je vyzářena v průběhu akrečního procesu. Tato účinnost je asi desetkrát vyšší než účinnost termonukleárních reakcí v nitrech hvězd. Akreční disk v okolí černé díry je tedy nejúčinnějším doposud popsaným zdrojem energie ve vesmíru.

Šestá kapitola je zaměřena na popis akrece prostřednictvím relativistické hydrodynamiky pomocí ploch o konstantním tlaku, tzv. ekvipotenciálních ploch. Na jedné z nich je možný výskyt hrotu, kterým se následně přelévá hmota disku směrem k černé díře. Je zde rovněž diskutována poloha tohoto hrotu a různé případy akrečních disků v závislosti na charakteru ekvipotenciálních ploch a na výskytu zmiňovaného hrotu.

Diplomová práce byla sestavena tak, aby byla vhodná jako studijní text pro základní seznámení se s problematikou akrečních disků. Pro větší názornost je práce doplněna množstvím obrázků a grafů, které přispívají k lepšímu pochopení daného tématu.

Literatura

- [1] ABRAMOWICZ, M. A. – JAROSZYŃSKI, M. – SIKORA, M.: *Relativistic, accreting discs*. *Astron. Astrophys.* 63 (1978), 221–224.
- [2] *Aldebaran* (Sdružení Aldebaran group for astrophysics při katedře fyziky FEL ČVUT). <http://aldebaran.cz>
- [3] *Astronomický server Pedagogické fakulty ZČU*. <http://astro.pef.zcu.cz>
- [4] BARDEEN, J. A. – PRESS, W. H. – TEUKOLSKY, S. A.: *Rotating black holes: Locally nonrotating frames, energy extraction and scalar synchrotron radiation*. *Astrophys. J.* 178 (1972), 347–370.
- [5] BARTSCH, H.-J.: *Matematické vzorce*. STNL, Praha 1987.
- [6] BONDI, H.: *On spherically symmetrical accretion*. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 112 (1952), 195–204.
- [7] *Česká astronomická společnost*. <http://www.astro.cz>
- [8] ECKART, A.: *X-ray reveal the Galaxy's centre*. *Nature* 415 (2002), 128–129.
- [9] HAJDUK, A. – ŠTOHL, J. A KOLEKTIV: *Encyklopédia astronómie*. Obzor, Bratislava 1987.
- [10] HARTLE, J. B.: *Gravity: an introduction to Einstein's general relativity*. Addison Wesley, San Francisco 2003.
- [11] KOZŁOWSKI, M. – JAROSZYŃSKI, M. – ABRAMOWICZ, M. A.: *The analytic theory of fluid disks orbiting the Kerr black hole*. *Astron. Astrophys.* 63 (1978), 209–220.
- [12] CHANDRASEKHAR, S.: *The mathematical theory of black holes*. Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford 1983.

- [13] *Chandra X-ray Observatory, Public Information and Education.*
<http://www.chandra.harvard.edu>
- [14] *Maxima, a computer system.* <http://maxima.sourceforge.net>
- [15] MILLER, J. M. – RAYMOND, J. – FABIAN, A. A KOLEKTIV: *The magnetic nature of disc accretion onto black holes.* *Nature* 441 (2006), 953–955.
- [16] MISNER, CH. W. – THORNE, K. S. – WHEELER, J. A.: *Gravitation.* W. Freeman, San Francisco 1973.
- [17] PADMANABHAN, T.: *Cosmology and astrophysics through problems.* Cambridge University Press, Cambridge 1996.
- [18] PEACOCK, J. A.: *Cosmological Physics.* Cambridge University Press, Cambridge 1999.
- [19] PROGA, D.: *Magnetic accretion.* *Nature* 441 (2006), 938.
- [20] REES, M. A KOLEKTIV: *Vesmír.* Knižní klub, Praha 2006.
- [21] SEGUIN, F. H.: *The stability of nonuniform rotation in relativistic stars.* *Astrophys. J.* 197 (1975), 745–765.
- [22] STUHLÍK, Z. – SLANÝ, P. – TORÖK, G. – ABRAMOVICZ, M. A.: *The Aschenbach effect: unexpected topology changes in motion of particles and fluids orbiting rapidly rotating Kerr black holes.* *Phys. Rev. D* 71 (2005), 024037.
- [23] TANAKA, Y.: *Gravitationally redshifted emission implying an accretion disk and masive black hole in the active galaxy MCG–6–30–15.* *Nature* 375 (1995), 659–661.
- [24] THORNE, K. S.: *Černé díry a zborcený čas.* Mladá fronta, Praha 2004.
- [25] ULLMANN, V.: *Gravitace, černé díry a fyzika prostoročasu.* Hvězdárna a planetárium BMZ VŠB, Ostrava 1986.
- [26] WANG, Q. D. – GOTTHELF, E. V. – LANG, C. C.: *A faint discrete source origin for the highly ionized iron emission from the Galactic Centre region.* *Nature* 415 (2002), 148–150.

Bibliografická identifikace

Jméno a příjmení autora	Miroslava Víchová
Název práce	Vlastnosti akrečních disků v okolí černých děr
Typ práce	diplomová
Pracoviště	Katedra experimentální fyziky
Vedoucí práce	Mgr. Lukáš Richterek, Ph.D.
Rok obhajoby práce	2007
Abstrakt	<p>V práci jsou nejprve uvedeny základní údaje o černé díře, akrečním disku a aktivních galaktických jádrech. Pak je popisován pohyb testovací částice v gravitačním poli statické i rotující černé díry, pozornost je věnována zejména významným kruhovým orbitám v její ekvatoriální rovině. Na základě těchto poznatků je určeno množství energie částice akrečního disku vyzářené v průběhu akrece a zároveň jsou tyto poznatky využity při popisu vlastností ekvipotenciálních ploch akrečního disku. V práci je dále rozebírán dopplerovský a gravitační rudý posuv záření akrečního disku a je stanoven odhad frekvence tohoto záření. Pomocí klasické fyziky je popsán případ sférické akrece, přičemž je kladen důraz na charakter proudění plynu a na míru akrece. Pro větší názornost je práce doplněna obrázky a grafy.</p>
Klíčová slova	kvasar, rádiová galaxie, aktivní galaktické jádra, supermasivní černá díra, binární systém, magnetická akrece, rentgenový zdroj záření, tření, nejbližší stabilní kruhová orbita, hraniční vázaná kruhová orbita, sférická akrece, míra akrece, záření akrečního disku, gravitační a dopplerovský rudý posuv, účinnost akrece, ekvipotenciální plochy, hrot, gradient tlakových sil
Počet stran	99
Počet příloh	0
Jazyk	český

Bibliographical identification

Autor's first name and surname	Miroslava Víchová
Title	Characteristics of accretion discs around black holes
Type of thesis	master
Department	Department of Experimental Physics
Supervisor	Mgr. Lukáš Richterek, Ph.D.
The year of presentation	2007
Abstract	<p>The basic facts about black holes, accreting discs and active galactic nuclei are given at the beginning of this work. Then the movement of test particles in the gravitational field of the static and rotating black holes are characterised, especially the stable circular orbits in their equatorial planes. Using this results the amount of the binding energy is specified and these information is also used for describing the characters of the equipotential surfaces of the accreting disc. The work also deals with the Doppler and gravitational redshift of the accreting disc radiation and it determines rude estimate of radiation. By using the classical mechanics the work describes the case of the spherical accretion, it focuses on the character of flowing the gas and the accretion rate. For better illustration of the facts the work is supplied by pictures and graphs.</p>
Keywords	quasar, radio galaxy, active galactic nuclei, supermasive black hole, binaries, magnetic accretion, X-ray source, viscosity, innermost stable circular orbit, marginally bound circular orbit, spherical accretion, accretion rate, radiation of accretion disk, gravitational and Doppler redshift, binding energy, equipotential surfaces, cusp, pressure-gradient forces
Number of pages	99
Number of appendices	0
Language	czech