UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

Přírodovědecká fakulta

Katedra experimentální fyziky

Paradox dvojčat ve speciální teorii relativity

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Autor:	Lucie Němečková
Studijní program:	B0114A110003 / Fyzika pro vzdělávání
Studijní obor:	1701R003 / Fyzika pro vzdělávání maior 1101R016 / Matematika pro vzdělávání minor
Forma studia:	Prezenční
Vedoucí práce:	Mgr. Lukáš Richterek, Ph.D.
Rok:	2023

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně s vyznačením všech použitých pramenů a spoluautorství. Souhlasím se zveřejněním bakalářské práce podle zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách, ve znění pozdějších předpisů. Byla jsem seznámena s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, ve znění pozdějších předpisů.

V Olomouci dne .... podpis bakaláře

Bibliografická identifikace

Jméno a příjmení autora	Lucie Němečková
Název práce	Paradox dvojčat ve speciální teorii relativity
Typ práce	Bakalářská
Pracoviště	Katedra experimentální fyziky
Vedoucí práce	Mgr. Lukáš Richterek, Ph.D.
Rok obhajoby	2023
Abstrakt	Tato práce se věnuje paradoxu dvojčat ve speciální teorii relativity, který bývá často špatně interpretován. K dané problematice je přistupováno různými způsoby. Z matematického hlediska je téma řešeno pomocí Lorentzových transformací nebo vztahů pro dilataci času a kontrakci délek. Pro lepší názornost práce obsahuje i numerická řešení s konkrétními hodnotami. Graficky je paradox dvojčat znázorněn Minkowského diagramy, vytvořenými v programu GeoGebra. Závěrečná část práce se věnuje přístupu k výuce daného tématu na středních školách a návrhu možného způsobu prezentace.
Klíčová slova	Paradox dvojčat, speciální teorie relativity, Lorentzova transformace, Minkowského digram.
Počet stran	39
Počet příloh	0
Jazyk	Český

Bibliographical identification

Autor’s first name and surname	Lucie Němečková
Titel	The twin paradox in the special theory of relativity
Type of thesis	Bachelor
Department	Department of experimental physics
Supervisor	Mgr. Lukáš Richterek, Ph.D.
The year of presentation	2023
Abstract	The thesis deals with the twin paradox in the special theory of relativity. The topic is solved using multiple approaches. From a mathematical point of view, the topic is solved using Lorentz transforamtions or time dilation and length contraction. Numerical solutions with specific values are also presented for better clarity. Grafically, the twin paradox is solved using Minkowski diagrams, created in software GeoGebra. The final part deals with teaching approaches of the given topic.
Keywords	The twin paradox, the special theory of relativity, Lorentz transformation, Minkowski diagram.
Number of pages	39
Number of appendices	0
Language	Czech

Obsah

1 Úvod

V této bakalářské práci se věnuji paradoxu dvojčat ve speciální teorii relativity, který bývá často považován za jeden z nejznámějších. S nejznámější formou tohoto paradoxu přišel v roce 1911 Paul Langevin.

Bakalářská práce má celkem dva cíle:

- Provést rešerši literatury zabývající se problematikou paradoxu dvojčat ve speciální teorii relativity.
- Shrnout různá (početní i grafická) řešení paradoxu dvojčat ve speciální teorii relativity.

Celá práce je z převážné části rešeršní. Kapitola 2 je věnována teoretickému úvodu k paradoxu dvojčat a po ní následuje shrnutí více možných způsobů řešení. Jsou zde uvedena jak početní, tak i grafická řešení, která jsou doplněna prostoročasovými diagramy vytvořenými v programu GeoGebra.

Jedním z důvodu, proč jsem si toto téma vybrala, je skutečnost, že i když je paradox dvojčat často považován za jeden z nejznámějších, někteří lidé o něm vůbec neslyšeli. S paradoxem dvojčat bývají okrajově seznámeni žáci v rámci tématu speciální teorií relativity, která se však nevyučuje na všech středních školách. Často je toto učivo pro žáky obtížné, jelikož výsledky speciální teorie relativity odporují běžným představám žáků o prostoru a času. Z tohoto důvodu je do práce zařazena i část, která ilustruje možný způsob, jak paradox dvojčat žákům prezentovat tak, aby si jej dokázali lépe představit.

Chtěla bych poděkovat Mgr. Lukáši Richterkovi, Ph.D. za metodické vedení bakalářské práce, cenné rady a věnovaný čas.

2 Paradox dvojčat

Paradox dvojčat patří mezi nejznámější paradoxy speciální teorie relativity. Je to myšlenkový pokus týkající se dvojčat (například je můžeme pojmenovat Adam a Eva), z nichž jedno (třeba Adam) zůstane na Zemi a druhé (Eva) letí raketou, která se pohybuje rychlostí blížící se rychlosti světla, do vesmíru. Pro jednoduchost, zanedbáváme jakékoliv gravitační působení na Adama a vztažnou soustavu spojenou s ním považujeme za inerciální. Eva se v raketě vydá na cestu do vesmíru (pro jednodušší popis budeme o jejím pohybu uvažovat jako o rovnoměrném přímočarém pohybu), kde v určitém bodě otočí směr svého letu (například u některé hvězdy) a vrací se zpět za Adamem na Zemi. Z hlediska Adama po celou dobu cesty podléhá čas Evy dilataci času, proto po návratu na Zemi bude Eva mladší než Adam a můžeme psát

$$\Delta t = \gamma \cdot \Delta\tau = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{1}$$

kde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ se nazývá Lorentzův faktor (někdy γ faktor), Δt je čas měřený v soustavě, vůči níž se hodiny pohybují (soustava S spojená s Adamem) a $\Delta\tau$ je vlastní čas měřený v klidové soustavě (soustava S' spojená s Evou).

Pohyb je však relativní a je možné ho popisovat z hlediska libovolné vztažné soustavy. Proto můžeme na situaci nahlížet i z pohledu Evy. Považujme nyní vztažnou soustavu Evy za klidnou, vůči níž se Adam na Zemi bude pohybovat. I v této situaci můžeme použít vzorec pro dilataci času (1). V tomto případě by Δt byl čas měřený ve vztažné soustavě spojené s Evou a $\Delta\tau$ čas, který naměřil Adam na Zemi. Pokud celou situaci takto popisujeme – jak ukážeme nesprávně – z pohledu Evy, dospějeme k závěru, že Eva bude po návratu na Zemi starší než Adam. Při popisu jedné situace však nemůže nastat, aby popis v různých vztažných soustavách vedl k různým výsledkům, proto dostáváme zdánlivý paradox a musíme hledat, kde je v těchto úvahách chyba.

Podle základního postulátu teorie relativity platí, že všechny inerciální vztažné soustavy jsou rovnocenné. Pokud bychom při popisu vzhledem k Zemi zanedbali rotaci Země kolem své osy, oběh Země kolem Slunce a gravitační působení, můžeme vztažnou soustavu spojenou s Adamem považovat za inerciální. Vztažnou soustavu spojenou s Evou za inerciální však považovat nemůžeme, protože Eva se při odletu ze Země, během otáčení a při přistávání na Zemi pohybuje s určitým zrychlením. Z tohoto důvodu nelze při řešení tohoto problému využívat vzorce speciální teorie relativity pro rovnoměrný přímočarý pohyb.

3 Řešení paradoxu dvojčat ve speciální teorii relativity

Nejčastějším vysvětlením paradoxu dvojčat bývá založeno na následujícím zdůvodnění:

„Vysvětlení paradoxu dvojčat spočívá v tom, že kosmická loď [s dvojčetem B] je v různých okamžicích během svého letu urychlována: při startu, při obracení a konečně při přistávání. Vzorce speciální teorie relativity, jež platí jen pro vztažné soustavy pohybující se navzájem konstantní rychlostí, nelze tudíž na tento problém vůbec použít a musíme se obrátit na obecnou teorii relativity. Podle principu ekvivalence vyvolává velké zrychlení účinky nerozeznatelné od účinků silného gravitačního pole – a hodiny jdou v silných gravitačních polích pomaleji." (Beiser, 1978).

Avšak toto vysvětlení není zcela uspokojivé. Nabízí se například otázka, jestli je nutné uvažovat části letu, kdy se kosmická loď pohybovala se zrychlením. Tomuto by se dalo vyhnout, například pomocí úvahy s využitím trojčat, často také označované jako paradox hodin. Této úvaze se budeme podrobněji věnovat v kapitole 3.1 (Knězek, 2018).

Paradox dvojčat ve speciální teorii relativity může být řešen různými způsoby. Jedním z možných přístupů k problému je matematický pohled na celou situaci a vyjádření veličin popisujících pohyb pomocí různých fyzikálních vztahů. Dalším způsobem je grafické řešení pomocí Minkowského diagramu. Tento diagram znázorňuje události ve dvourozměrném řezu prostoročasu, kde prostorová (x-ová) osa je orientována vodorovně a časová osa ct svisle. Vodorovná osa je množina událostí, které proběhly v čase $t = 0$ s a svislá osa splývá se světočárou (tj. množinou bodů v prostoročase, zobrazujících události spojené s pozorovatelem v prostoru i v čase t) pozorovatele stojícího v počátku soustavy S.

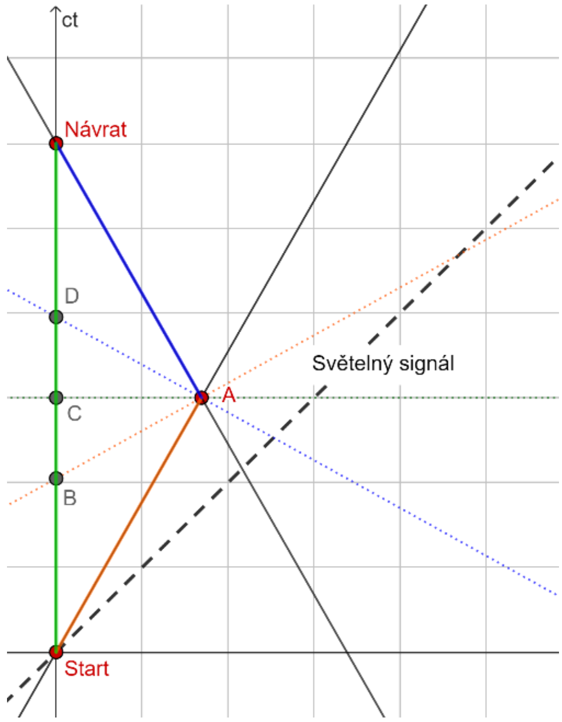
3.1 Paradox trojčat

Pro jednoduchost uvažujme, že se Eva bude pohybovat rovnoměrným přímočarým pohybem rychlostí v blížící se rychlosti světla. Abychom se vyhnuli počátečnímu zrychlení při startu ze Země, může Eva odletět do vesmíru již před začátkem měření času a v čase $t = 0$ s by míjela Zemi. V tento okamžik by došlo k synchronizaci hodin dvojčat a Eva by dále pokračovala ve svém rovnoměrném přímočarém pohybu rychlostí v. Části letu, kdy dochází ke zpomalování rakety, jejímu obratu zpět k Zemi a následnému zrychlování až na danou konstantní rychlost v, se můžeme také vyhnout. Uvažujeme-li třetího, stejně starého sourozence, (pojmenujme si ho například Cyril), který se na cestu do vesmíru vydal již dříve a pohybuje se stejnou rychlostí jako Eva pouze v opačném směru. Na své zpáteční na Zemi by se Cyril minul s Evou, kdy by Cyril „přebral“ čas Evy (tzn. Cyril a Eva si synchronizovali své hodiny) a pokračoval v rovnoměrném pohybu směrem k Zemi. Abychom eliminovali také část cesty, kdy by raketa zpomalovala a přistávala na Zemi, můžeme uvažovat, že Cyril bude Zemi pouze míjet a v tento okamžik předá svůj časový údaj Adamovi. Tento přístup k řešení problému bývá také nazýván „paradox trojčat“ (Kněžek, 2018).

3.1.1 Grafické řešení paradoxu trojčat pomocí Minkowského diagramu

Všechny probíhající děje budeme postupně popisovat z pohledu Adama, Evy a Cyrila. Pro lepší orientaci v diagramech pro jednotlivé případy, budeme události spojené s daným dvojčetem značit vždy stejnou barvou: Adam – zelená, Eva – oranžová a Cyril – modrá.

Za vztažnou soustavu budeme nejprve považovat soustavu spojenou s Adamem na Zemi. Jelikož Adam zůstává po celou dobu pokusu na Zemi, zůstává jeho x-ová souřadnice neměnná a je rovna nule. Eva, letící v raketě, se bude pohybovat po přímce, která bude procházet počátkem soustavy souřadnic. Na obrázku 1 můžeme vidět, že v okamžik, kdy Adamovy hodiny ukazovaly $t = 0$ s míjela Eva v raketě Zemi a poté pokračovala v letu rychlostí o velikosti v k bodu A. Podle hodin, kterými čas měřil Adam na Zemi, doletěla Eva k bodu A za čas t (|Start, C|). V bodě A se Eva minula s Cyrilem, který se vydal na cestu do vesmíru před začátkem měření času. Cyril se pohyboval rychlostí o stejné velikosti jako Eva, ale opačným směrem. Při míjení raket Cyrila a Evy, došlo k „přebrání“ času Evy. Poté Cyril s tímto časovým údajem pokračoval na cestě směrem k Zemi. Protože se Cyril pohyboval rychlostí o stejné velikosti jako rychlost, kterou se pohybovala Eva, trval jeho let na Zemi opět čas t (podle času měřeném ve vztažné soustavě Adama). V okamžiku, kdy Cyrilova raketa míjela Zemi, předal Cyril časový údaj Adamovi a pokračoval dále v cestě.



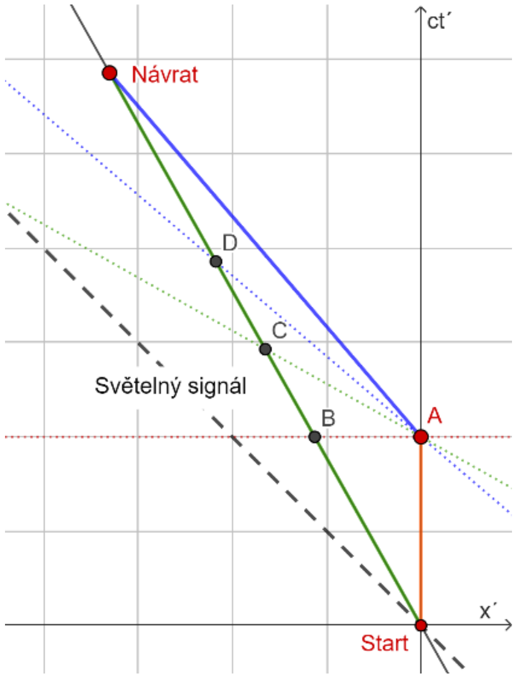
Obrázek 1: Prostoročasový diagram znázorňující historii Adama, Evy a Cyrila ve vztažné soustavě spojené s Adamem

Při řešení problému paradoxu dvojčat pomocí trojčat nesmí být zanedbána relativnost. současnosti. S událostí A „předání“ času mezi Evou a Cyrilem v inerciální vztažné soustavě spojené s Evou je současná Adamova událost B a v inerciální vztažné soustavě spojené s Cyrilem je s touto událostí současná Adamova událost D. Mezi událostmi B a D je z pohledu Adama časový interval a ten je příčinou, proč jeho hodiny nakonec ukazují větší časový údaj než údaj, který mu předal Cyril při průletu kolem Země.

Nyní se podívejme, jak by celá situace vypadala z pohledu Evy. Z jejího pohledu je raketa, v níž se nacházela, v klidu a Adam s Cyrilem se vůči ní pohybovali. Protože Eva byla po celou dobu v klidu, její x-ová souřadnice zůstává rovna nule, jak můžeme vidět na obrázku 2. Tento obrázek nám navíc také ukazuje, že Adam, který se vzhledem k Evě pohyboval rychlostí o velikosti v, zahájil svůj rovnoměrný pohyb rychlostí v ještě před začátkem měření času a v okamžik, kdy Eviny hodiny ukazovaly $t' = 0$ s míjel raketu, v níž byla Eva. Během tohoto okamžiku došlo k synchronizaci jejich hodin a poté Adam pokračoval ve svém pohybu vůči Evě. Protože Cyril se vydal na cestu do vesmíru mnohem dříve než Adam, nacházel se před začátkem měření času ve větší vzdálenosti, proto se s Evou setkal později v čase t'. Tato událost je v grafu znázorněna jako bod A. V tento moment také Cyril „přebral“ čas Evy a poté pokračoval v rovnoměrném pohybu rychlostí v_1, kterou vypočítáme ze vzorce pro skládání relativistických rychlostí opačného směru (viz Richterek, 2012)

$$v_1 = \frac{v + v}{1 + \frac{vv}{c^2}} = \frac{2v}{1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2}. \tag{2}$$

Protože Cyril v raketě se vůči Evě pohyboval rychleji než Adam na Zemi, po určitém čase došlo k jejich setkání, kdy Cyril „předal" časový údaj na jeho hodinách Adamovi.

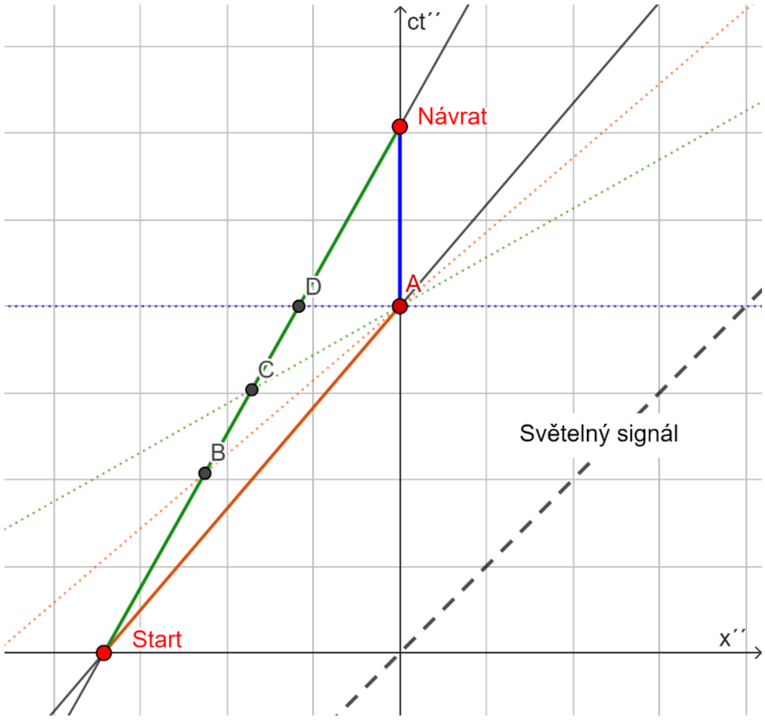


Obrázek 2: Prostoročasový diagram znázorňující historii Adama, Evy a Cyrila ve vztažné soustavě spojené s Evou

Opět můžeme z grafického znázornění dobře vidět, že časy měřené v různých soustavách se budou lišit. Znovu se tedy ukazuje, že nesmí být zanedbána relativnost současnosti. Dvojice současných událostí v různých vztažných soustavách jsou označeny stejně jako na obrázku 1. Mezi událostmi B a D je z pohledu Adama časový úsek, který je příčinou rozdílu v naměřených časech Adamem na Zemi a Evou v raketě, která byla v klidu.

Nakonec se podívejme na stejnou situaci i z pohledu Cyrila. Z Cyrilova pohledu bude raketa, v níž se nachází, v klidu, proto v prostoročasovém diagramu bude je x-ová souřadnice po celou dobu rovna nule. Graficky je pohled Cyrila znázorněn na obrázku 3. V okamžik, kdy Cyrilovy hodiny ukazovaly $t'' = 0$ s proletěla Eva kolem Adama na Zemi a došlo k synchronizaci jejich časů. V nějakém čase Eva přiletěla k raketě s Cyrilem (událost A) a ten „přebral“ její čas. Poté pokračovala ve svém pohybu stejnou rychlostí v_1, kterou vypočítáme podle vztahu pro skládání relativistických rychlostí v opačném směru (2). Po určitém čase proletí Adam kolem Cyrila a v okamžiku, kdy kolem něj proletí, mu předá časový údaj na svých hodinách.

Závěr, k němuž z tohoto pohledu dospějeme, je stejný jako v části, kde se věnujeme situaci z pohledu Evy.



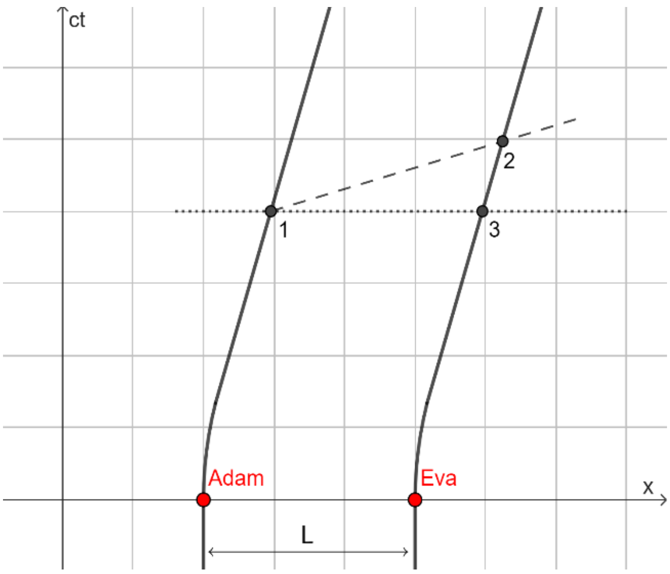
Obrázek 3: Prostoročasový diagram znázorňující historii Adama, Evy a Cyrila ve vztažné soustavě spojené s Cyrilem

3.2 Dvojčata a rodiče

Podle (Price, Gruber, 1996) lze na paradox dvojčat ve speciální teorii relativity nahlížet také z pohledu rodičů, kteří zůstanou na Zemi a vyšlou své děti (dvojčata Adam a Eva) na cestu do vesmíru. Ve stejnou dobu vystartují Adam i Eva se svými raketami, které jsou od sebe vzdáleny o délku L podél osy x, ze Země se stejným zrychlením o velikosti a v kladném směru osy x. Tímto pohybem se pohybují po velmi krátký časový úsek, dokud jim nedojde palivo, a poté se oba pohybují rovnoměrným pohybem s rychlostí o velikosti v vzhledem k Zemi. Nazvěme vztažnou soustavu rodičů soustavou S. Protože se Adam i Eva pohybují stejně velkou rychlostí ve stejném směru, nacházejí se oba v jedné vztažné soustavě, a to soustavě S', která se vůči soustavě S pohybuje rychlostí o velikosti v. Během cesty do vesmíru oslaví Adam i Eva své narozeniny. Z pohledu rodičů na Zemi oslaví dvojčata narozeniny ve stejnou chvílí, jsou to tedy události současné. Podíváme-li se však na oslavy narozenin dvojčat z pohledu vztažné soustavy S', zjistíme, že se neuskuteční ve stejnou dobu, ale s časovým rozdílem $\Delta t'$, který vypočítáme pomocí Lorentzovy transformace jako

$$\Delta t' = -\frac{\gamma \cdot v \cdot L}{c^2} = -\frac{v \cdot L}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{3}$$

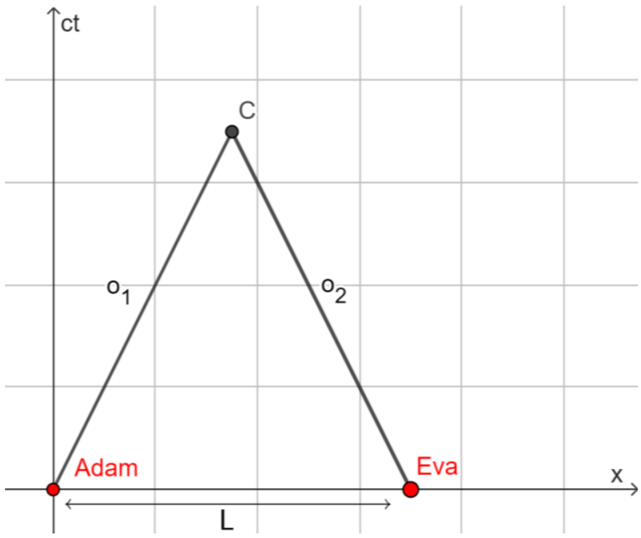
Které z dvojčat bude oslavovat své narozeniny dříve a které později? Ve vztažné soustavě S' oslaví své narozeniny dříve dvojče, které startovalo v raketě, jejíž x-ová souřadnice byla při startu větší. V našem případě můžeme uvažovat, že v raketě s větší x-ovou souřadnicí je Eva. Graficky je toto znázorněno na obrázku 4. Na tomto obrázku můžeme vidět, že ve vztažné soustavě S jsou současné události 1 a 3, to znamená, že z pohledu rodičů oslaví dvojčata narozeniny ve stejný okamžik. Ve vztažné soustavě S' je s události 1 současná událost 2. Z toho je zřejmé, že z pohledu dvojčat oslaví Eva narozeniny dříve. Je potřeba si také přesně definovat, co to vlastně znamená věk. Dvojčata můžeme považovat za hodiny, protože biologické stárnutí je v principu stejné s odečítáním času z hodin. Pokud uvažujeme, že v okamžik narození dvojčat spustíme hodiny, budou hodiny v každou chvíli ukazovat aktuální stáří. Odečtením času ze svých hodin v den narozenin, tj. během událostí 1, zjistí Adam, kolik je mu let. To samé provede v den svých narozenin z pohledu rodičů i Eva. Když porovnáme jednotlivé údaje z hodin v den narozenin uvidíme, že Eva bude starší než Adam o $\Delta t' = \frac{\gamma \cdot v \cdot L}{c^2}$.



Obrázek 4: Světočáry Adama a Evy ve vztažné soustavě S

Mohlo by se zdát, že tento výsledek nebude platný, protože neexistuje žádný způsob, jak přímo tyto informace porovnat, protože se Adam a Eva nenachází na stejném místě. Tyto pochyby lze ale vyvrátit. V den narozenin se mohou Adam i Eva rozhodnout, že navštíví svého sourozence v jeho raketě. Oba se tedy vydají na cestu pomalou chůzí směrem k raketě toho druhého a setkají se někde uprostřed. V tento okamžik již mohou bez problémů porovnat údaje na svých hodinkách a ukáže se, že i v tomto případě bude Eva starší než Adam. Během této části letu se rozdíl ve stáří dvojčat nijak nezmění. Důvod, proč k žádným změnám nedojde je vysvětlen v následujícím odstavci.

Uvažujme případ, kdy rozdíl mezi časem t naměřeným rodiči ve vztažné soustavě na Zemi a časem t' naměřeným dvojčaty na cestě do vesmíru, bude libovolně malý. Tento případ můžeme vidět znázorněný graficky na obrázku 5.



Obrázek 5: Grafické znázornění přibližování Adama a Evy a jejich setkání v bodě C

V čase $t = 0$ s vystartují Adam i Eva ze dvou různých míst na Zemi, která jsou od sebe vzdálena o L podél osy x. Adam vyrazí směrem k Evě (tj. v kladném smyslu osy x) a Eva proti němu v opačném směru. Oba se budou po většinu času pohybovat rovnoměrným pohybem s rychlostí o velikosti u. Takto poletí, dokud se nesetkají v bodě C, kde si porovnají své časové údaje, které naměřili svými hodinami. Z pohledu rodičů bude cesta Adama a Evy trvat čas t, který jednoduše vypočítáme ze vztahu

$$t = \frac{L}{2u}. \quad (4)$$

Adam i Eva svými hodinami naměří čas

$$t' = \frac{L}{2u}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}, \tag{5}$$

a tedy rozdíl těchto časů bude

$$t - t' = \frac{L}{2u}\left(1-\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\right). \tag{6}$$

Protože uvažujeme případ malého rozdílu $t - t'$, bude i pro velikost rychlosti v, kterou se dvojčata vůči Zemi pohybují platit $u \ll c$. V tomto případě můžeme vztah (6) aproximovat podle $\sqrt{1-x^2} \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ (aproximace pro malé x) jako

$$t - t' = \frac{Lu}{4c^2}. \tag{7}$$

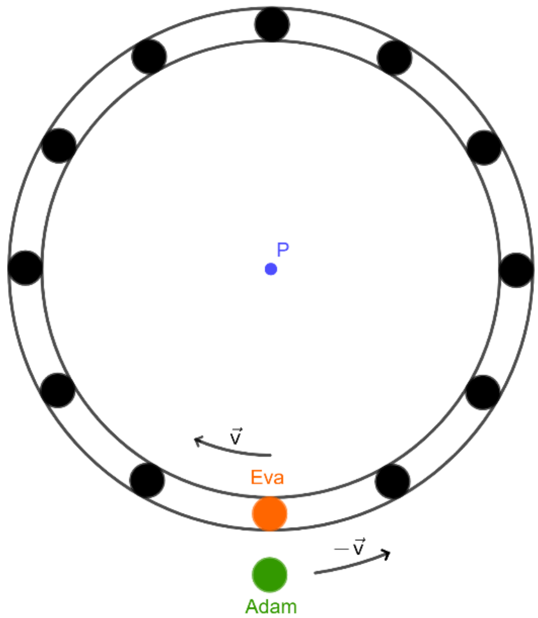
Pro malé rychlosti tedy bude rozdíl $t - t'$ velmi malý, proto můžeme říct, že ve vztažné soustavě spojené se Zemí plyne čas stejně rychle jako ve vztažné soustavě spojené s přibližujícími se dvojčaty v raketách. Takto lze vysvětlit, proč nedojde ke změně v rozdílu stáří Adama a Evy během jejich cesty na místo společného setkání. Dále také vidíme, jak se mohla dvojčata na Zemi od sebe oddělit, aniž by došlo ke změně rozdílu stáří (Price a Gruber, 1996).

3.3 Paradox dvojčat v rotačním pohybu

Ve speciální teorii relativity můžeme paradox dvojčat formulovat i pro případ rotačního pohybu. Představme si, že každé z dvojčat Adam a Evy bude vykonávat rotační pohyb rychlostí blížící se rychlosti světla. Eva bude rotovat ve směru hodinových ručiček a Adam bude obíhat kružnici v opačném směru. Protože se obě dvojčata pohybují vůči sobě velkou rychlostí, bude z pohledu Evy čas Adama podléhat dilataci času, tedy jeho hodiny se budou za hodinami Evy opožďovat. To samé o hodinách Evy však může říct i Adam z pohledu své vztažné soustavy. Ze symetrie pohybu však vyplývá, že čas, který mezi jednotlivými setkáními uběhl, bude z pohledu Adama i Evy stejný.

Představme si, že Adam letí v raketě, která obíhá úhlovou rychlostí o velikosti ω po kružnici o poloměru R. V zanedbatelně malé vzdálenosti od Adamovy kružnice se nachází druhá, identická kružnice, po které ve své raketě obíhá Eva stejně velkou úhlovou rychlostí. Na této kružnici se navíc v každém bodě nachází její kamarádi vykonávající stejný pohyb jako ona. Z pohledu pozorovatele stojícího ve středu obou oběžných drah, se Adam, Eva i její kamarádi po obvodu kružnice pohybují rychlostí $v = \omega R$. Adam obíhá z pohledu pozorovatele po kružnici proti směru hodinových ručiček a Eva s kamarády se pohybují po kružnici ve směru hodinových ručiček (viz obrázek 6). V tomto případě sice nejde o pohyb rovnoměrný přímočarý, ale pro vlastní čas pozorovatele pohybujícího se rychlostí o velikosti v platí v infinitezimálním tvaru

$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.



Obrázek 6: Pohyb Adama a Evy z pohledu pozorovatele P

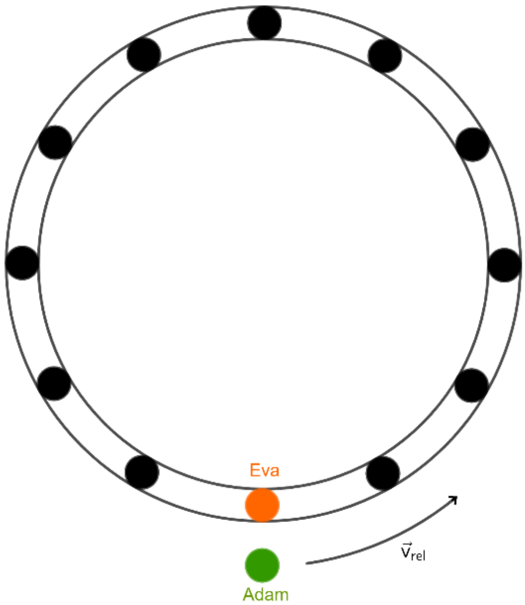
Uvažujme, že v moment, kdy se Adam a Eva poprvé potkají, budou hodiny obou ukazovat čas $t = 0$ s. Protože jsou kružnice, po kterých Adam Eva obíhají zanedbatelně vzdálené, mohou jednoduše údaje na hodinách porovnat. Popišme nyní celou situaci z pohledu Evy. Z její pohledu se Adam podle vzorce pro skládání relativistických rychlostí (2) pohybuje rychlostí

$$v_{\mathrm{rel}} = \frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}. \tag{8}$$

Graficky je pohyb Adama z pohledu Evy zobrazen na obrázku 6. V důsledku dilatace času bude chod hodin v raketě pomalejší než chod Eviných hodin. Adamův Lorentzův faktor vůči vztažné soustavě Evy je

$$\gamma_{\mathrm{rel}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_{\mathrm{rel}}^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2v}{c^2+v^2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{c^2-v^2}{c^2+v^2}\right)^2}} = \frac{1+\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{9}$$

Protože hodiny v okamžik prvního setkání Adama a Evy ukazovaly $t = 0$ s, budou se jeho hodiny při setkání s Eviným kamarádem proti hodinám kamaráda opožďovat. Při každém dalším setkání Adama s Evinými kamarády se navíc budou jeho hodiny opožďovat více než při setkání s předchozím kamarádem. Poté, co Adam i Eva obletí polovinu kružnice, dojde opět k jejich setkání. V tento okamžik mohou porovnat údaje na svých hodinách. Pokud bychom takto chybně aplikovali dilataci času, pak by po porovnání měla Eva zjistit, že podle Adamových hodin uběhl od jejich prvního setkání kratší čas než podle hodin Evy.



Obrázek 7: Pohyb Adama po kružnici z pohledu Evy

Analogicky bychom mohli popsat situaci i z pohledu Adama. V tomto případě bychom dospěli k opačnému výsledku, tedy že podle hodin Adama bude čas mezi setkáními delší než podle hodin Evy.

Vidíme, že při popisu jedné situace ze dvou různých vztažných soustav jsme dostali dva odlišné výsledky, což nemůže nastat. Kde jsme v našich úvahách udělali chybu? Zaměřme se nyní na vztah mezi dilatací času a synchronizací hodin.

Předpokládejme, že Eviným nejbližším sousedem ve směru pohybu Adama je Cyril. V čase $t = 0$ s se Adam setká s Evou a poté, v čase t_1, proletí kolem Cyrila. Dilatace času vychází z porovnání času Adama s časem Evy a poté s časem Cyrila. Hodiny Adama a Evy byly nastaveny tak, aby v okamžik jejich prvního setkání ukazovaly čas $t = 0$ s. To, jaký rozdíl bude mezi údaji na hodinách Adama a Cyrila v době jejich setkání závisí na nastavení Cyrilových hodin, což zase plyne z původního nastavení jeho hodin vůči hodinám Evy. Dilataci času můžeme pozorovat jen v případě, že všechny hodiny ve vztažné soustavě budou vhodně synchronizovány.

Jedním z možných způsobů, jak můžeme hodiny synchronizovat je využití tzv. Einsteinovy synchronizace. Nechť Eva v čase t_1 vyšle směrem k Cyrilovi světelný signál, který Cyril zachytí v čase t_2 a ihned ho vyšle zpět k Evě. Eva paprsek zachytí v čase t_3. Hodiny budou synchronizovány, pokud bude platit $t_2 - t_1 = t_3 - t_2$. Stejným způsobem proběhne synchronizace u všech Eviných kamarádů ve směru pohybu Adama.

Předpokládejme, že Eva vyšle světelný paprsek k Cyrilovi v čase $t_1 = 0$ s a ten ho zachytí v čase

$$t_2 = \frac{R}{c} \cdot \frac{\Delta\phi}{1 + \frac{v}{c}}, \tag{10}$$

kde $\Delta\phi$ je úhlová vzdálenost Cyrila od Evy. Ve stejný okamžik vyšle Cyril světelný paprsek zpět k Evě, která ho zachytí v čase

$$t_3 = \frac{2R}{c} \cdot \frac{\Delta\phi}{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{11}$$

Protože se Eva vzhledem k pozorovateli ve středu kružnice pohybuje rychlostí blížící se rychlosti světla, podléhá její čas dilataci času a platí

$$\tau_3 = \frac{t_3}{\gamma} = t_3 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{2R}{c} \Delta\phi\gamma. \tag{12}$$

Aby se hodiny Cyrila a Evy synchronizovaly podle Einsteinovy synchronizace, musí Cyril své hodiny nastavit tak, aby v okamžik, kdy zachytí paprsek od Evy, ukazovaly čas

$$\tau_2 = \frac{\tau_3 + \tau_1}{2} = \frac{\tau_3}{2} = \frac{R}{c}\Delta\phi\gamma. \tag{13}$$

Podívejme se nyní, v čem spočívá řešení paradoxu dvojčat v rotačním pohybu. Předpokládali jsme, že synchronizace hodin začne od Evy a bude postupovat proti směru hodinových hodin až dokud neproběhne u posledního kamaráda, pojmenujme si ho třeba David. Na začátku jsme předpokládali, že se kamarádi Evy nacházejí v každém bodě kružnice, proto vzdálenost Evy a Davida bude zanedbatelně malá a můžeme říct, že David a Eva se budou nacházet ve stejném bodě, proto $\Delta\phi = 2\pi$. Jejich hodiny však v důsledku použité metody synchronizace času okolo kružnice nebudou ukazovat stejný čas.

Davidovy hodiny budou hodiny Evy předbíhat o stejnou hodnotu, jakou budou ukazovat Adamovi hodiny v okamžik, kdy se setká s Davidem (Cranor a kol. 2000).

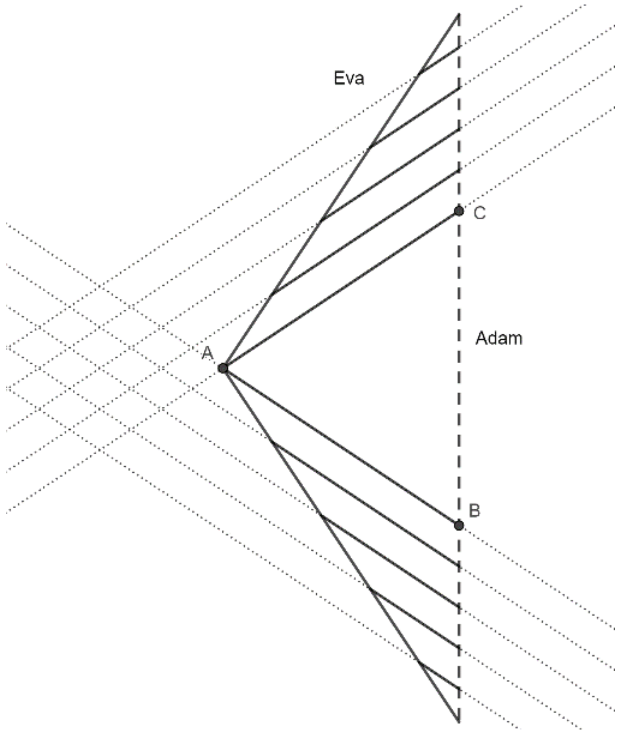
Z hlediska pozorovatele ve středu kružnice, se při stejné rychlosti čas Adama i Evy oproti jeho opozdí stejně a při setkání budou ukazovat stejný čas. Synchronizaci hodin pozorovatelů podél kružnice provedeme pomocí světelných signálů, které vyšle pozorovatel ze středu ke všem pozorovatelům po obvodu kružnice.

3.4 Řešení paradoxu dvojčat využitím radarového času

K řešení paradoxu dvojčat je přistupováno mnoha různými způsoby. Ve většině z nich je často užíváno spojení „když se stala událost“. Pro dvojče, které zůstává v klidu na Zemi (třeba Adam) je toto spojení zcela zřejmé a neexistují pochyby o tom, co to znamená. Jiná situace však nastává při porovnání časů dvou vzájemně se pohybujících pozorovatelů. Každý pozorovatel má jasnou představu o tom, kdy se pro něj, co v jeho okolí stalo. Co však bývá často opomíjeno nebo ne vždy správně interpretováno, je současnost události z hlediska pohybujícího se pozorovatele (v našem případě Evy). Pro správné řešení může na celou situaci aplikovat tzv. radarový čas. To je čas vypočtený z šíření radarového signálu tam a zpět. Jde o aritmetický průměr z času τ^+, kdy pozorovatel vyšle nejpozději signál, který ještě doletí do daného místa a času τ^-, kdy pozorovatel přijme první možný signál z tohoto místa.

3.4.1 Otáčení s nekonečným zrychlením

Věnujme se nejprve možnosti, kdy se Eva při otáčení bude pohybovat s nekonečným zrychlením. Graficky bývá současnost událostí této varianty pohybu často znázorněna stejně jako je ukázáno na obrázku 8.



Obrázek 8: Časté grafické znázornění současných událostí vzhledem ke vztažné soustavě spojené s Evou

Podle tohoto diagramu je z pohledu Evy s událostí A při cestě od Země současná událost B a při cestě zpět událost C. Mezi těmito událostmi je však z pohledu Adama „mezera“, které neodpovídají žádné Eviny události. Toto je zapříčiněno tím, že se Eva při otáčení pohybovala s nekonečným zrychlením a během okamžiku „přeskočila“ z jedné vztažné soustavy do jiné.

Využitím radarového času je (podle Dolby a Gull, 2001) trajektorie pohybu Evy popsána vztahy, které vychází z Lorentzovy transformace pro

$$t' = \tau$$
$$x' = 0 \qquad (14)$$
$$\cosh \alpha = \gamma$$

kde α je tzv. rapidita a platí

$$\beta \cdot \gamma = \sinh \alpha$$
$$\beta = \frac{v}{c} = \tanh \alpha, \tag{15}$$

Trajektorii pohybu tedy můžeme popsat vztahy

$$\left(ct_{\mathrm{E}}(\tau), x_{\mathrm{E}}(\tau)\right) = \begin{cases} (c\tau \cosh(\alpha)\,, c\tau \sinh(\alpha)) & \text{pro } \tau > 0 \\ (c\tau \cosh(\alpha)\,, -c\tau \sinh(\alpha)) & \text{pro } \tau < 0 \end{cases}, \tag{16}$$

nebo můžeme také pomocí souřadnic konstantních při šíření elektromagnetického záření, pro které platí

$$u = x + ct \quad \text{pro signál šířící se proti směru } x$$
$$v = x - ct \quad \text{pro signál šířící se ve směru } x, \tag{17}$$

psát

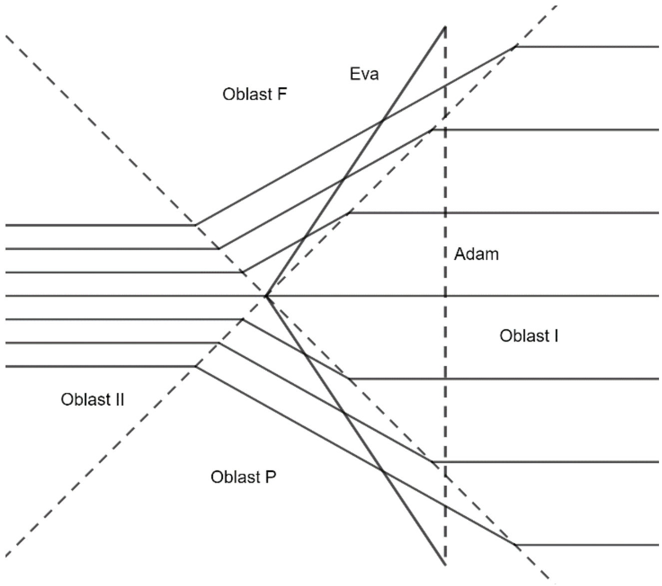
$$\left(u_{\mathrm{E}}(\tau), v_{\mathrm{E}}(\tau)\right) = \begin{cases} (e^{\alpha} c\tau, -e^{-\alpha} c\tau) & \tau > 0 \\ (e^{-\alpha} c\tau, -e^{\alpha} c\tau) & \tau < 0 \end{cases}, \tag{18}$$

Podle znamének souřadnic u a v rozdělíme graf současných událostí do čtyř oblastí I, II, F a P. Pro oblast I platí $u > 0, v > 0, \tau^+ > 0$ a $\tau^- < 0$. Čas τ^+ vyjádříme ze souřadnice u ve vztahu (18) a čas τ^- pomocí souřadnice v. Určením aritmetického průměru těchto dvou časů a následnými úpravami dostaneme vztah pro radarový čas $\tau(t, x) = te^{-\alpha}$.

Označíme-li si hladinu současných události z pohledu Evy s událostí, která proběhla ve vlastním čase $\tau(t, x)$ jako t_{τ_0}, dostaneme jeho vyjádřením pro každou z oblastí vztah, pomocí níž můžeme současné události definovat.

$$t_{\tau_0}(t, x) = \begin{cases} \tau_0 e^{\alpha} & \text{oblast I} \\ \tau_0 e^{-\alpha} & \text{oblast II} \\ \tau_0 \operatorname{sech}(\alpha) - \frac{x}{c} \tanh(\alpha)) & \text{oblast F} \\ \tau_0 \operatorname{sech}(\alpha) + \frac{x}{c} \tanh(\alpha)) & \text{oblast P} \end{cases}. \tag{19}$$

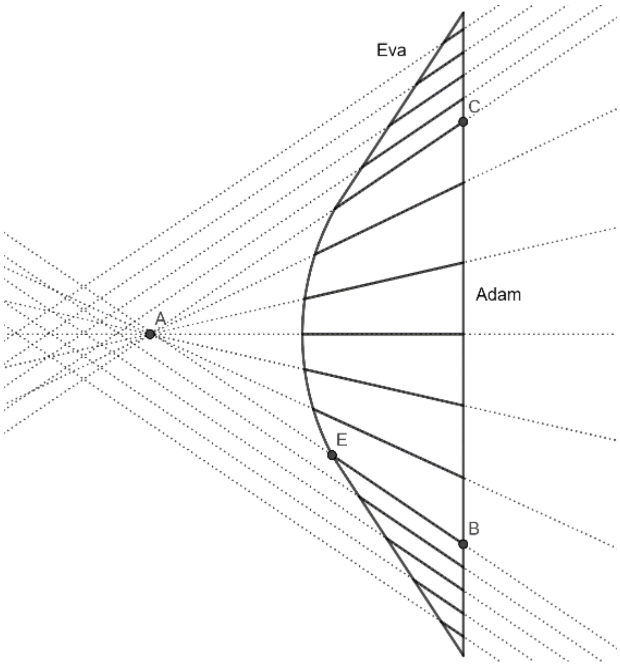
Graficky jsou současné události vzhledem ke vztažné soustavě Evy znázorněny na obrázku 9 (Dolby a Gull, 2001).



Obrázek 9: Grafické znázornění současných událostí pro různé hodnoty τ_0 vzhledem ke vztažné soustavě Evy využitím radarového času

3.4.2 Otáčení s konečným zrychlením

Znázorněme si nyní tuto situaci ještě jednou, ale pro případ, kdy se Eva při otáčení bude pohybovat s konečným zrychlením (viz obrázek 10). Je zřejmé, že poté, co se Eva začne pohybovat se zrychlením (událost E), bude se měnit sklon přímek, vyznačujících současné události z jejího pohledu.



Obrázek 10: Grafické znázornění současných událostí vzhledem ke vztažné soustavě spojené s Evou s částí pohybu s konečným zrychlením

Zohledněním části letu, kdy se Eva pohybovala se zrychlením jsme „vymazali mezeru“, která vznikla v předchozím případě. Nyní však musíme vyřešit ještě problém, který nastal při odletu Evy ze Země. Během fáze letu, kdy Eva zrychlovala se události, které byly současné vzhledem k její vztažné soustavě, překrývaly. Vidíme tedy, že současnost událostí vzhledem k pohybujícímu se dvojčeti je silně závislá na jeho okamžité rychlosti.

Trajektorii pohybu Evy můžeme (podle Dolby a Gull, 2001) popsat vztahy

$$t_{\mathrm{E}}(\tau) = \begin{cases} \cosh\left(\frac{a\tau_{\mathrm{c}}}{c}\right)(\tau - \tau_{\mathrm{c}}) + \frac{c}{a}\sinh\left(\frac{a\tau_{\mathrm{c}}}{c}\right) & \tau \geq \tau_{\mathrm{c}} \\ \frac{c}{a}\sinh\left(\frac{a\tau}{c}\right) & |\tau| \leq \tau_{\mathrm{c}} \\ \cosh\left(\frac{a\tau_{\mathrm{c}}}{c}\right)(\tau + \tau_{\mathrm{c}}) - \frac{c}{a}\sinh\left(\frac{a\tau_{\mathrm{c}}}{c}\right) & \tau \leq \tau_{\mathrm{c}} \end{cases} \tag{20}$$

$$x_{\mathrm{E}}(\tau) = \begin{cases} c\ \sinh\left(\frac{a\tau_{\mathrm{c}}}{c}\right)(\tau - \tau_{\mathrm{c}}) + \frac{c^2}{a}\cosh\left(\frac{a\tau_{\mathrm{c}}}{c}\right) & \tau \geq \tau_{\mathrm{c}} \\ \frac{c^2}{a}\cosh\left(\frac{a\tau}{c}\right) & |\tau| \leq \tau_{\mathrm{c}} \\ -\mathrm{c}\sinh\left(\frac{a\tau_{\mathrm{c}}}{c}\right)(\tau + \tau_{\mathrm{c}}) + \frac{c^2}{a}\cosh\left(\frac{a\tau_{\mathrm{c}}}{c}\right) & \tau \leq -\tau_{\mathrm{c}} \end{cases}, \tag{21}$$

kde τ_{c} je bod přechodu mezi zrychleným a rovnoměrným přímočarým pohybem.

Souřadnice pro šíření elektromagnetického záření pohybu Evy jsou v závislosti na času τ dán vztahy

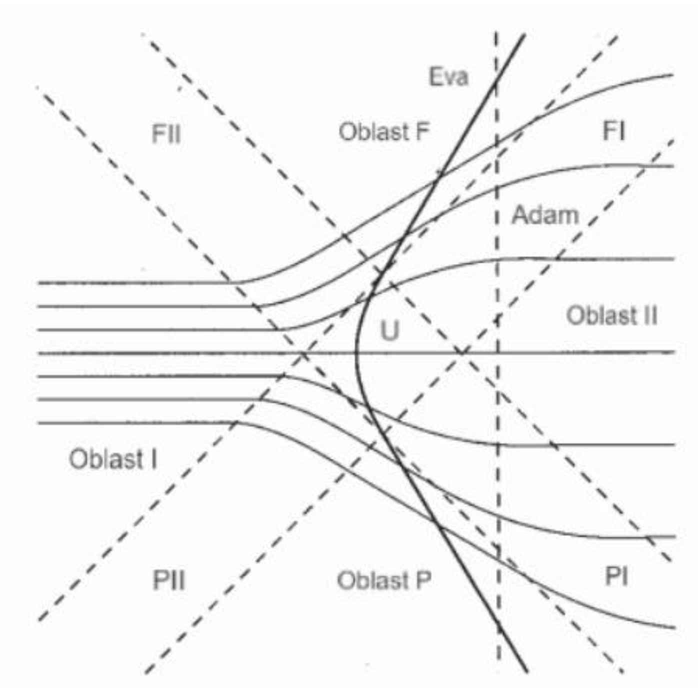
$$\left(u_{\mathrm{E}}(\tau), v_{\mathrm{E}}(\tau)\right) = \begin{cases} \left[e^{a\tau_{\mathrm{c}}}\left(\tau - \tau_{\mathrm{c}} + \frac{1}{a}\right), -\, e^{-a\tau_{\mathrm{c}}}\left(\tau - \tau_{\mathrm{c}} + \frac{1}{a}\right)\right] & \tau \geq \tau_{\mathrm{c}} \\ \left(\frac{1}{a}e^{a\tau}, \frac{1}{a}e^{-a\tau}\right) & |\tau| \leq \tau_{\mathrm{c}} \\ \left[e^{-a\tau_{\mathrm{c}}}\left(\tau + \tau_{\mathrm{c}} + \frac{1}{a}\right), -\, e^{a\tau_{\mathrm{c}}}\left(\tau + \tau_{\mathrm{c}} - \frac{1}{a}\right)\right] & \tau \leq -\tau_{\mathrm{c}} \end{cases}. \tag{22}$$

V části 3.4.1, jsme podle znamének souřadnic u_{E} a v_{E} rozdělili graf současných událostí do čtyř oblastí. Graf na obrázku 11 jsme rozdělili do devíti oblastí podle znamének souřadnic šíření elektromagnetického záření a grafů funkcí $u = e^{\pm a\tau_{\mathrm{c}}}$ a $v = e^{\pm a\tau_{\mathrm{c}}}$.

Ve zbývajících čtyřech oblastech jsou současné události dány implicitně.

$$
\begin{aligned}
&\ln\left(a\left|\frac{x}{c^2}+\frac{t_{\tau_0}(x)}{c}\right|\right)+a\left(\frac{t_{\tau_0}(x)}{c}-\frac{x}{c^2}\right)e^{\frac{a\tau_c}{c}}=\frac{2a\tau_0}{c}-\frac{a\tau_c}{c}-1 \quad \text{oblast FII}\\
&\ln\left(a\left|\frac{x}{c^2}+\frac{t_{\tau_0}(x)}{c}\right|\right)+a\left(\frac{t_{\tau_0}(x)}{c}-\frac{x}{c^2}\right)e^{-\frac{a\tau_c}{c}}=\frac{2a\tau_0}{c}+\frac{a\tau_c}{c}-1 \quad \text{oblast PI}\\
&\ln\left(a\left|\frac{x}{c^2}-\frac{t_{\tau_0}(x)}{c}\right|\right)-a\left(\frac{t_{\tau_0}(x)}{c}+\frac{x}{c^2}\right)e^{\frac{a\tau_c}{c}}=-\frac{2a\tau_0}{c}-\frac{a\tau_c}{c}-1 \quad \text{oblast FI}\\
&\ln\left(a\left|\frac{x}{c^2}-\frac{t_{\tau_0}(x)}{c}\right|\right)-a\left(\frac{t_{\tau_0}(x)}{c}+\frac{x}{c^2}\right)e^{-\frac{a\tau_c}{c}}=-\frac{2a\tau_0}{c}+\frac{a\tau_c}{c}-1 \quad \text{oblast PII}
\end{aligned}
\tag{23}
$$

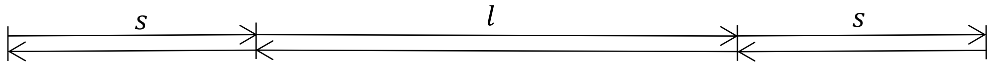
Všechny současné události z pohledu pohybujícího se dvojčete (Evy) jsou graficky znázorněny na obrázku 11. (Dolby a Gull, 2001)



Obrázek 11: Grafické znázornění současných událostí pro různé hodnoty τ_0 vzhledem ke vztažné soustavě Evy využitím radarového času (zdroj: Dolby a Gull, 2001)

3.5 Matematický přístup k řešení paradoxu dvojčat

Označme soustavu spojenou s Adamem jako S a soustavu spojenou s Evou jako S'. Nechť raketa odstartuje ze Země a koná rovnoměrně zrychlený pohyb se zrychlením o velikosti $a = g$, dokud nedosáhne rychlosti o velikosti v vzhledem k Zemi. Raketa se rovnoměrně zrychleným pohybem pohybuje po dobu t_1 a urazí dráhu s. Poté se raketa pohybuje rovnoměrným pohybem rychlostí o velikosti v po dobu t_2 a za tuto dobu uletí vzdálenost l. Po uražení vzdálenosti l začne raketa zpomalovat se zrychlením o velikosti a, dokud se nezastaví. Tento zpomalený pohyb trvá dobu t_1 a raketa za tuto dobu uletí dráhu s. Poté, co raketa zastaví, začne se vracet zpět na Zemi se zrychlením o velikosti a. S tímto zrychlením se pohybuje po dobu t_1, dokud nedosáhne rychlosti o velikosti v. Touto rychlostí se pohybuje po dobu t_2 a urazí vzdálenost l a poté začne zpomalovat a pohybuje se zrychlením o velikosti a, dokud se nezastaví na Zemi. Celý pohyb z pohledu Adama je schematicky znázorněn na obrázku 12.



Obrázek 12: Schéma letu Evy z pohledu Adama, který zůstal na Zemi

Z pohledu Adama je zrychlení, se kterým se pohybuje raketa rovno (viz Perrin, 1979)

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3} \tag{24}$$

odkud vyjádřením $\mathrm{d}t$ dostaneme

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}v}{g\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3}}. \tag{25}$$

Integrací vztahu (25) dospějeme ke vztahu pro výpočet doby t_1 rovnoměrně zrychleného pohybu.

$$t_1 = \frac{1}{g}\int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3}} = \frac{v}{g\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}}. \tag{26}$$

Během tohoto úseku Eva v raketě z pohledu Adama uletí dráhu d, kterou vypočítáme dosazením vztahu (25) do $s = \int v(t)\ \mathrm{d}t$ a dostáváme

$$s = \int_0^v v\ \mathrm{d}t = \frac{c^2}{g}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right). \tag{27}$$

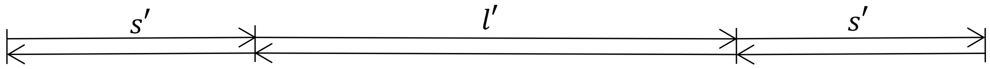
Dobu rovnoměrného pohybu vypočítáme jako

$$t_2 = \frac{l}{v} \tag{28}$$

a doba pohybu během třetí fáze je rovna času t_1 a dráha, kterou za tuto dobu urazí, je stejná jako v první fázi. Celý let Evy tam a zpět se skládá ze dvou rovnoměrně zrychlených, rovnoměrných a rovnoměrně zpomalených pohybů, proto celkový čas pohybu rakety od vzlétnutí ze Země po přistání opět na Zemi je roven

$$T = 4t_1 + 2t_2 = \frac{4v}{g\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}} + \frac{2l}{v}. \tag{29}$$

Z pohledu vztažné soustavy spojené s Evou, se celý pohyb opět skládá z letu tam a zpět a obě tyto cesty jsou rozděleny do tří fází: rovnoměrně zrychlený pohyb se zrychlením o velikosti a ve směru osy x (při zpáteční cestě v opačném směru), rovnoměrný pohyb s x-ovou složkou rychlostí v (resp. $-v$) a rovnoměrně zpomalený pohyb s x-ovou složkou zrychlení $-a$ (resp. a). Graficky je Evina cesta z jejího pohledu znázorněna na obrázku 13.



Obrázek 13: Schéma letu Evy z pohledu Evy, která letěla v raketě

Z pohledu Evy je při výpočtu doby pohybu nutné uvažovat dilataci času. Dobu letu během první fáze vyjádříme využitím vzorce pro dilataci času a vztahu (25) jako

$$\mathrm{d}t' = \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}}{g\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3}}\mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}v}{g\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}, \tag{30}$$

z čehož integrací získáme

$$t'_1 = \frac{1}{g}\int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} = \frac{c}{2g}\ln\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}. \tag{31}$$

Při výpočtu doby druhé fáze je opět využito vzorce pro dilataci času a vztahu (28), a proto dobu druhé fáze letu vypočítáme jako

$$t'_2 = t_2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{l}{v}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{32}$$

Doba třetí fáze letu je stejná jako při první fázi, proto pro její výpočet využijeme opět vztah (31).

Sečtením všech dob trvání jednotlivých úseků během celého letu dostaneme vztah pro celkový čas pohybu z pohledu Evy a vypočítáme ho jako

$$T' = 4t'_1 + 2t'_2 = \frac{2c}{g} \ln \frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}} + \frac{2l}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{33}$$

Při letu rakety rychlostí v blížící se rychlosti světla dochází také ke kontrakci délek. Dráhu, kterou Eva v raketě ze svého pohledu během první fáze letu urazí, vypočítáme pomocí vztahu (27) a vzorce pro výpočet kontrakce délek

$$s' = s \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{c^2}{g} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right). \tag{34}$$

Dráha, kterou Eva z pohledu své vztažné soustavy urazila během druhé fáze letu je vyjádřena vztahem

$$l' = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{35}$$

Během třetí fáze uletí opět dráhu s', vypočítanou podle vztahu (34).

Pro větší názornost se nyní podívejme na příklad. V němž celou situaci popíšeme pomocí vypočítaných hodnot pro konkrétní rychlost v a dráhu rovnoměrného pohybu l (Perrin, 1979).

3.5.1 Příklad

Mějme dvojčata Adama a Evu. Adam zůstane a Eva se vydá na cestu ke hvězdě Proxima Centauri, jejíž vzdálenost od Země je $d = 4{,}22$ ly a poté se vrátí zpět na Zemi. Na začátku svého letu se bude pohybovat rovnoměrně zrychleným pohybem s konstantním zrychlením $g = 9{,}81$ m · s^{-2} $= 1{,}03$ ly · y^{-2} vzhledem k Zemi, dokud nedosáhne rychlosti $v = 0{,}800\, c$, kde $c = 1{,}00$ ly · y^{-2} vzhledem k Zemi. Touto rychlostí se bude pohybovat rovnoměrně přímočaře, dokud neurazí dráhu $l = 2{,}93$ ly. Poté začne rovnoměrně zpomalovat až zastaví u hvězdě Proxima Centauri, kde se otočí a vydá se na cestu zpět na Zemi. Během zpomalování urazí stejnou dráhu jako při zrychlování.

Vztažná soustava S:

Nejprve si popíšeme celou situaci tak, jak ji viděl Adam ze Země. Dobu, za kterou dosáhla raketa s Evou požadované rychlostní vypočítáme podle vztahu (26). Z pohledu Adama tedy dosáhla Eva rychlosti $v = 0{,}8c$ vzhledem k Zemi za $t_1 \doteq 1{,}29$ let. Během této části svého letu urazila Eva podle vztahu (27) dráhu $s \doteq 0{,}646$ ly. Poté pokračovala ve své cestě konstantní rychlostí, dokud neurazila dráhu $l = 2{,}93$ ly. Tato část letu jí z pohledu Adama podle vztahu (28) trvala $t_2 \doteq 3{,}63$ let. Ve třetí části letu Eva zpomalovala po dobu $t_1 \doteq 1{,}29$ let. Cesta zpět na Zemi byla stejná jako cesta ke hvězdě, proto Evin návrat stejně dlouho, jako let ke hvězdě. Celkový čas cesty ke hvězdě a zpět byl tedy podle vztahu (29) $T \doteq 12{,}4$ let. Během této doby Eva v raketě z pohledu Adama uletěla vzdálenost $d \doteq 8{,}44$ ly.

Vztažná soustava S':

Nyní se podívejme, jak celá situace vypadala z pohledu Evy v raketě. První část letu podle jejích hodin podle vztahu (31) trvala $t'_1 \doteq 1{,}07$ let. Za tuto dobu uletěla raketa podle vztahu (34) vzdálenost $s' = 0{,}388$ ly. Dráha rovnoměrného přímočarého pohybu rakety vzhledem k Zemi byla podle (35) rovna $l' \doteq 1{,}74$ ly. Eva tuto vzdálenost urazila za dobu $t'_2 \doteq 2{,}18$ let, kterou jsme vypočítaly využitím vztahu (32). Poté začala Eva brzdit po dobu $t'_1 \doteq 1{,}07$ let, dokud úplně nezastavila. Celkový čas jejího letu byl podle vztahu (33) roven $T' \doteq 8{,}64$ let a za tuto dobu uletěla vzdálenost $d' \doteq 5{,}04$ ly.

Porovnáním výsledků z obou vztažných soustav jsme zjistili, že poté, co se Eva vrátí na Zemi, budou její hodiny ukazovat méně o $\Delta T \doteq 3{,}78$ let. Z jejího pohledu bude menší i údaj o vzdálenosti, kterou v raketě urazila. Hodnota Evy od hodnoty Adama se bude lišit $\Delta d \doteq 3{,}40$ ly.

3.5.2 Raketa pohybující se převážně rovnoměrným přímočarým pohybem

Věnujme se nyní situaci, kdy Eva v raketě v čase $t = 0$ s odstartuje ze Země a vydá se na cestu do vesmíru. Budeme uvažovat, že se bude Eva bude pohybovat rovnoměrným pohybem s konstantní rychlostí v. Protože však Eva musí odstartovat ze Země, nevyhneme se části letu, kdy se bude pohybovat rovnoměrně zrychleným pohybem. Abychom mohli tuto část letu zanedbat, je nutné, aby Eva zrychlovala jen po dobu, která bude mnohem menší než čas rovnoměrně zrychleného pohybu. Toho můžeme dosáhnout pouze dvěma způsoby.

Prvním z těchto způsobů je případ, kdy bude raketa zrychlovat s realistickým zrychlením, dokud nedosáhne požadované rychlosti. Poté se bude pohybovat rovnoměrným přímočarým po dostatečně dlouhou dobu, aby bylo možné zanedbat první část letu. Tento způsob vyřešení situace není příliš vhodný. Představme si například, že bychom chtěli, aby se Eva pohybovala se zrychlením $a = 20{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} = 2{,}10\ \mathrm{ly \cdot y^{-2}}$ a dosáhla rychlosti $v = 0{,}800\ c$. Navíc musíme také uvažovat, že Eva musí zastavit, otočit se a vrátit se zpět k Zemi, kde opět musí zastavit. V tomto případě by se Eva z pohledu Adama podle (26) pohybovala se zrychlením přibližně po dobu 2,5 roku. Z pohledu Evy pohyb se zrychlením trval podle (31) přibližně 2 roky. Takový časový interval nelze při našich úvahách zanedbat.

Věnujme se nyní druhému způsobu, jak bychom mohli takové situace dosáhnout. Uvažujme, že se raketa pohybovat se zrychlením pouze velmi krátkou dobu. Abychom však tohoto dosáhli, muselo by zrychlení rakety být velmi velké. Představme si, že bychom chtěli, aby Eva dosáhla rychlosti $v = 0{,}800\ c$ za jeden týden pohledu Adama. V tomto případě, by podle (26) muselo být zrychlení $661\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} = 69{,}6\ \mathrm{ly \cdot y^{-2}}$. Nejen, že není možné zkonstruovat raketu, která by byla schopná se s takovým zrychlením pohybovat, ale takové zrychlení by žádný člověk nepřežil.

3.5.3 Zrychlující raketa s realistickým zrychlením

Uvažujme raketu, která se po celou dobu letu bude pohybovat s konstantním zrychlením $a = g$. Před začátkem letu seřídíme hodiny Adama, který zůstává na Zemi a Evy, která poletí v raketě, tak aby ukazovaly stejný čas. V čase $t = 0$ s raketa vystartuje ze Země se zrychlením $\vec{a}$, dokud nedoletí do poloviny vzdálenosti, kterou má urazit. Poté začne raketa brzdit a pohybuje s opačným zrychlením o velikosti a. V nejvzdálenějším bodu své dráhy se zastaví a začne se vracet zpět k Zemi se stejným zrychlením. V polovině dráhy opět začne brzdit a pohybuje se zrychlením a dokud nezpomalí až nanulovou rychlost. V okamžik, kdy raketa s Evou zastaví na Zemi, dojde k porovnání údajů, které ukazují hodiny Adama a Evy.

Celý let rakety můžeme tedy rozdělit na čtyři úseky, během kterých raketa uletí stejnou vzdálenost s a každý úsek bude trvat čas t. Stačí nám tedy spočítat potřebné veličiny pouze pro jeden úsek a další úseky nám dají stejný výsledek. Konkrétně budeme určovat, jak daleko raketa během jednoho úseku uletí, jaké maximální rychlosti dosáhne a o kolik se hodiny Evy vůči Adamovým zpomalí. Všechny tyto veličiny dokážeme spočítat řešením relativistické pohybové rovnice, zobecňující druhý Newtonův zákon pro sílu s konstantní velikostí

$$\frac{\Delta p}{\Delta \mathrm{t}} = F = m_0 \cdot g = \text{konst.}, \tag{36}$$

kde p oproti klasické mechanice spočítáme využitím vztahu speciální relativity

$$p = m \cdot v = \frac{m_0 \cdot v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{37}$$

m_0 je klidová hmotnost a t určuje čas měřený ve vztažné soustavě spojené s Adamem. Hybnost rakety vypočítáme pomocí integrace diferenciální rovnice

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = m_0 \cdot g \tag{38}$$

jejíž pravá strana konstantní a odpovídá konstantní působící síle. Obecným řešením pohybové rovnice rakety s konstantním zrychlení $a = g$ je rovnice

$$p = m_0 \cdot g \cdot t + p_0. \tag{39}$$

V čase $t = 0$ s je rychlost rakety nulová, proto i počáteční hybnost bude rovna nule. Dosazením rovnice (37) do rovnice (39) a následnou úpravou dostáváme první integrál pohybové rovnice, jež má tvar

$$\frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = gt. \tag{40}$$

Z rovnice (40) postupnými úpravami vyjádříme rychlost rakety jako funkci času t

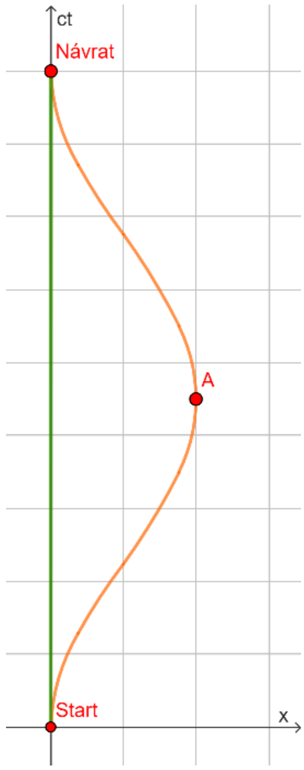
$$v(t) = \frac{gt}{\sqrt{1 + \left(\frac{gt}{c}\right)^2}}. \tag{41}$$

Pro velmi malé časy dostáváme vzorec klasické mechaniky $v(t) \approx gt$ a pro velké časy se rychlost rakety asymptoticky blíží rychlosti světla.

Protože rychlost je derivace polohy podle času, dostaneme integrací rovnice (41) vztah pro dráhu s jako funkci času t.

$$x(t) = \frac{c^2}{g}\left[\sqrt{1 + \left(\frac{gt}{c}\right)^2} - 1\right]. \tag{42}$$

Historii Adama, který zůstal na Zemi a Evy, která cestovala v raketě, můžeme graficky znázornit prostoročasovým diagramem (viz obrázek 14). Můžeme si všimnout, že historie Evy je v tomto diagramu znázorněna částmi rovnoosých hyperbol. První čtvrtina grafu odpovídá vztahu (42) a v dalších částech grafu se jedná o části hyperbol, které jsou posunuté.



Obrázek 14: Prostoročasový diagram znázorňující historii Adama zůstávajícího na Zemi a Evy letící v raketě

Při řešení paradoxu dvojčat je důležité znát souvislost mezi časem t měřeným ve vztažné soustavě spojené s Adamem a časem τ, který ve své vztažné soustavě naměřila Eva. Pro krátký časový interval, je vztah mezi t a τ určen obvyklým vztahem pro dilataci času

$$\Delta\tau = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{43}$$

V našem případě nemůžeme však rychlost během delšího časového úseku považovat za konstantu, a proto musíme do vztahu (43) dosadit vztah (41) pro výpočet rychlosti jako funkci času. Po integraci získáme vztah pro výpočet vlastního času Evy

$$\tau = \frac{c}{g} \cdot \operatorname{arcsinh}\left(\frac{gt}{c}\right). \tag{44}$$

Přechodem na inverzní funkci dokážeme vyjádřit čas t ve tvaru

$$t = \frac{c}{g} \cdot \sinh\left(\frac{g\tau}{c}\right). \tag{45}$$

Vztahům (44) a (45) odpovídají i vztahy (20) a (21) pro hodnoty $|\tau| \leq \tau_c$, které byly uvedeny v části 3.4.2. Dosadíme-li rovnici (45) do vztahů (42) a (41) dostaneme užitím známé identity $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$ vzorce pro výpočet dráhy s a rychlosti v v závislosti na času τ.

$$s(\tau) = \frac{c^2}{g}\left[\cosh\left(\frac{g\tau}{c}\right) - 1\right] \tag{46}$$

$$v(\tau) = c \cdot \tanh\left(\frac{g\tau}{c}\right) \tag{47}$$

Nyní již máme všechny potřebné vztahy pro popis relativistického pohybu rakety s konstantní zrychlením. Vztahy (41) a (42) popisují pohyb v závislosti na čase t, který naměřil Adam v inerciální vztažné soustavě. Rovnice (46) a (47) vyjadřují dráhu, kterou raketa uletěla a rychlost, kterou se pohybovala v závislosti na čase τ naměřeným Evou v inerciální vztažné soustavě spojené s raketou. Vzájemný vztah mezi časy t a τ je vyjádřen vzorcem (45) a úpravou dostaneme jeho „bezrozměrnou" podobu

$$\frac{gt}{c} = \sinh\left(\frac{g\tau}{c}\right). \tag{48}$$

Pro velké hodnoty argumentu $\frac{g\tau}{c}$ v hyperbolickém sinu je $\sinh\left(\frac{g\tau}{c}\right) \approx \frac{1}{2}e^{\frac{g\tau}{c}}$, což dává čas t naměřený Adamem na Zemi úměrný $e^{\frac{g\tau}{c}}$. Z pohledu Evy tedy čas na Zemi roste v podstatě exponenciálně a Adam stárne velmi rychle (Podolský a Trojánek, 2022).

4 Paradox dvojčat na střední škole

V životě se můžeme běžně setkat s pojmy jako věk a stárnutí. Každý má o významu těchto pojmů jistě nějakou představu. Pojďme si nyní, ale navrhnout přístup využitelný při popisu paradoxu dvojčat ve speciální teorii relativity na střední škole. Představme si, že každý člověk má v sobě hodiny, které nazveme biologické hodiny. Ty se chovají stejně jako jakékoliv jiné hodiny a hodnota, kterou nám tyto hodiny ukazují, je věk daného člověka. Z každodenní zkušenosti považujeme za přirozené, že chod hodin je rovnoměrný a nesouvisí s rychlostí, kterou se hodiny vůči pozorovateli pohybují. Pro rychlosti blížící se rychlosti světla však toto tvrzení neplatí. Při těchto rychlostech dochází ke zpomalení chodu pohybujících se hodin vzhledem k hodinám na Zemi, tzv. dilataci času. Protože jsme si stárnutí představili jako chod biologických hodin, bude to znamenat, že se zpomalí i stárnutí pohybujícího se člověka.

Vysvětleme si celou situaci na příkladu. Opět si představme, že máme dvojčata Adama a Evu. V den jejich narození se dvojčata rozdělí. Jedno z nich (třeba Eva) nasedne společně s maminkou do rakety a vydá se rychlostí $v = 0{,}8c$ na cestu ke hvězdě, která je od Země vzdálena $s = 10$ ly. Poté, co Eva hvězdu obletí, vrátí se zpět na Zemi, kde se opět setká se svým bratrem Adamem, který zůstal na Zemi i s tatínkem. (Uvažujeme, že doba, kdy se Eva pohybuje se zrychlením, je mnohem menší než doba rovnoměrného přímočarého pohybu.)

Protože pohyb je relativní, můžeme situaci popisovat z pohledu Adama na Zemi i z pohledu Evy letící v raketě.

a) Nejprve budeme popisovat situaci z pohledu Adama. Budeme uvažovat, že vztažná soustava spojená s Adamem je v klidu a Eva v raketě se vůči ní pohybuje. Dosazením do vztahu získáme

$$t_{\mathrm{A}} = \frac{s}{v} = \frac{10 \cdot 10^{15}\ \mathrm{m}}{0{,}8 \cdot 3 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}} = 12{,}5\ \mathrm{let}$$

$$t_{\mathrm{E}} = t_{\mathrm{A}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 12{,}5\ \mathrm{let} \cdot \sqrt{1 - 0{,}64} = 7{,}5\ \mathrm{let}$$

Z pohledu Adama poletí Eva ke hvězdě asi 12,5 let. Z pohledu Evy však cesta ke hvězdě trvá pouze 7,5 roku. Po návratu rakety s Evou na Zemi bude tedy Adamovi 25 let a Evě 15 let.

b) Nyní se podívejme na situaci z pohledu Evy. Uvažujme, že vztažná soustava spojená s Evou je v klidu a Adam na Zemi se vůči ní pohybuje. Pokud mechanicky aplikujeme vztahy pro dilataci času dostáváme

$$t_{\mathrm{E}} = \frac{s}{v} = \frac{10 \cdot 10^{15}\ \mathrm{m}}{0{,}8 \cdot 3 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}} = 12{,}5\ \mathrm{let}$$

$$t_{\mathrm{A}} = t_{\mathrm{E}}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 12{,}5\ \mathrm{let} \cdot \sqrt{1 - 0{,}64} = 7{,}5\ \mathrm{let}$$

Z pohledu Evy bude cesta ke hvězdě asi 12,5 let. Z pohledu Adama ne Zemi bude cesta ke hvězdě trvat pouze 7,5 let. Po návratu rakety s Evou na Zemi bude tedy Adamovi 15 let a Evě 25 let.

Z výsledků částí a) a b) vidíme, že pouhou změnou vztažné soustavy se změnil i výsledek. V prvním případě vyšlo, že po návratu Evy bude Adam starší než Eva. Ve druhém případě nám však výsledky říkají, že po jejich opětovném setkání bude Eva starší než Adam. Po porovnání obou výsledků vidíme, že podle části a) je Eva starší a podle části b) je mladší. Taková situace však nemůže nikdy nastat, a proto dostáváme zdánlivý paradox.

Podívejme se nyní na vysvětlení, proč tento zdánlivý paradox vzniká. Při výpočtech dob letu rakety ke hvězdě jsme na základě speciální teorie relativity využívali vztah pro dilataci času. Speciální teorie relativity však platí pouze pro inerciální vztažné soustavy. V části, kde jsme za vztažnou soustavu považovali soustavu spojenou s Adamem, který zůstal na Zemi byly vztahy využity korektně. V části b) jsme však vztahy pro dilataci času použili nesprávně. Eva se během startu, otáčení u hvězdy a přistávání na Zemi pohybovala se zrychlením, proto tato vztažná soustava nebyla inerciální. Toto vysvětlení není úplné, ale pro tyto účely je vhodné, protože musíme brát v úvahu úroveň znalostí a schopností žáků středních škol.

Často se stává, že je tento paradox jen obtížně pochopitelný. Je pro ně těžké si představit, jak celý děj probíhá, protože nemají žádné informace, co se s dvojčaty děje během Eviny cesty ke hvězdě. Pro lepší představu si můžeme příběh obou dvojčat popsat podrobněji. Abychom měli informace, co se s dvojčaty v jejich vztažné soustavě děje, budou rodiče vývoj každého z nic zapisovat pravidelně do deníku. Nyní se můžeme podívat na nejzajímavější momenty, které dvojčata zažila.

4.1 Deníky dvojčat Adama a Evy

Adam	Eva
Adamovi už je nyní 1 rok. Je to velmi aktivní a šikovný chlapec. Rád si hraje s různými předměty a neustále okusuje. Je to malý čipera. Lozí po čtyřech po celém bytě, ale už se začíná i pomalu stavět.	Eva má nyní 7 měsíců. Už se učí sama se posadit a pást koníčky. Neustále by něco brala do úst nebo jedla piškoty.
Adam oslavil své páté narozeniny. chodí do školky, i když se mu tam zpočátku příliš nelíbilo. Nyní si tam ale našel oblíbenou hračku a nechce ji nikomu půjčovat.	Eva má 3 roky. Kdyby byla na Zemi, brzy by nastoupila do školky, tak si s ní často hrajeme. Neustále chce mačkat v raketě nějaké čudlíky, tak jsme jí dali malou raketu, aby si s ní mohla hrát.
Adam má 10 let a stal se žákem 4. třídy. Škola mu nedělá žádné problémy, je to chytrý chlapec. Aby se nenudil, začal hrát fotbal a velmi ho to baví.	Eva dnes oslavila své šesté narozeniny. Neuvěřitelné, jak ten čas rychle letí. Na Zemi by nastupovala do školy, tak ji učíme číst, psát a počítat tady v raketě.
Adam si ke svým 12. narozeninám přál kytaru, protože se na ni chtěl učit hrát. Nyní je to půl roku, co se na ni začal učit hrát a jde mu to velmi dobře.	Právě jsme doletěli ke hvězdě, tak se otáčíme a vracíme se zpět na Zemi. Eva už umí krásně počítat, a tak odpočítává dny do svých osmých narozenin. Už jí zbývá jen půl roku.
Adamovi je 15 let a chodí do 9. třídy. Stále se ještě rozhoduje, na jakou střední školu nastoupí. Celou dobu na základní škole měl velmi dobré známky, tak v příštím školním roce nastoupí na gymnázium.	Eva dnes oslavila své deváté narozeniny. Na Zemi by chodila do 4. třídy, tak jsme ji začali učit vyjmenovaná slova. Český jazyk ji moc nebaví, raději z okýnka rakety pozoruje hvězdy.

Adamovi je 20 let. V loňském školním roce odmaturoval na gymnáziu a dnes již studuje na vysoké škole. Během studia na střední škole se rozhodl, že by se chtěl v budoucnu stát právníkem.	Z Evy roste šikovná slečna. Dnes má již 12 let. Protože se během dlouhé cesty nudila, začala si často zpívat. Rozhodla se, že po návratu na Zemi nastoupí na konzervatoř a bude zpěv studovat.
Adam již ukončil své studium na vysoké škole. Těší se, až se seznámí se svojí sestrou a oslaví s ní své 25. narozeniny.	Eva se již blíží k Zemi. Za týden přistane a těší se až společně s bratrem oslaví své 15. narozeniny.

5 Závěr

Bakalářská práce se zabývá paradoxem dvojčat ve speciální teorii relativity. Okrajově se tomuto tématu věnoval ve své bakalářské práci i Ondřej Palovský (2021), jehož práce byla zaměřena obecněji na paradoxy v teorii relativity. Hlavním cílem mojí bakalářské práce je shrnout možné přístupy k řešení paradoxu dvojčat ve speciální teorii relativity. Tato práce mi umožnila se více seznámit s daným tématem, které mě zaujalo již na střední škole.

Charakter mojí práce je převážně rešeršní, ale i tak obsahuje části, které se věnuji řešení konkrétních případů. Řešení jsou zpracována graficky, v podobě prostoročasových diagramů, i početně.

Paradox dvojčat byl pro mě na gymnáziu těžce představitelný, proto jsem do své práce zařadila i část, zaměřenou na možný způsob prezentace tématu na střední škole. Zvolila jsem formu deníků, které vedou dvojčatům Adamovi a Evě jejich rodiče. Do deníků jsou zapisovány události, které dvojčata během svého života zažila. Díky deníkům je možné dobře pozorovat odlišnou rychlost plynutí času v různých vztažných soustavách. Nejvíce je to patrné na posledních zápisech v denících, kde se dvojčata těší na společnou oslavu narozenin různého věku.

Domnívám se, že cíl práce byl splněn. Materiál může posloužit jako zdroj základních informacích o různých možných přístupech k paradoxu dvojčat a paradoxu hodin. Mohl by také najít uplatnění při výuce speciální teorie relativity na PřF UP i na středních školách, kde se základům speciální teorie relativity věnují žáci v rámci volitelných seminářů. Správné vysvětlení tohoto myšlenkového pokusu může napomoci upevnění a správnému pochopení kinematických efektů relativity současnosti, kontrakce délek a dilatace času.

6 Zdroje

BEISER, Arthur, 1978. *Paradox dvojčat*. In: Úvod do moderní fyziky. 2. vyd. Praha: Academia, s. 63.

CRANOR, Maria B., HEIDER, Elizabeth M. a PRICE, Richard H., 2000. A circular twin paradox. *American Journal of Physics*. **68**(11), 1016–1020 ISSN 0002-9505. Dostupné z: doi:10.1119/1.1286313.

DOLBY, Carl E. a GULL, Stephen F., 2001. On radar time and the twin “paradox”. *American Journal of Physics*. **69**(12), 1257–1261. ISSN 0002-9505. Dostupné z: doi:10.1119/1.1407254.

KNĚZEK, Michal, 2018. *Mylné názory na teorii relativity*. Diplomová práce. Brno: Masarykova univerzita.

KŘÍŽEK, Michal, 2021. O paradoxu dvojčat. Obzory matematiky, fyziky a informatiky. **50**(2), 1–10. ISSN 1335-4981.

PALOVSKÝ, Ondřej, 2021. *Paradoxy v teorii relativity*. Bakalářská práce. Univerzita Palackého v Olomouci.

PERRIN, Robert, 1979. Twin paradox: A complete treatment from the point of view of each twin. *American Journal of Physics*. **47**(4), 317–319. Dostupné z: doi:10.1119/1.11835.

PODOLSKÝ, Jiří a TROJÁNEK, Aleš, 2022. Paradox dvojčat jako pedagogický problém. *Československý časopis pro fyziku*. **72**(1), 27–36.

PRICE, Richard H. a GRUBER, Ronald P., 1996. Paradoxical twins and their special relatives. *American Journal of Physics*. **64**(8), 1006–1008. Dostupné z: doi:10.1119/1.18318.

RICHTEREK, Lukáš, 2012. *Teorie relativity a astronomie*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci. ISBN 978-80-244-3335-6.